ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність вивчення основних понять та засад дискретної математики майбутніми спеціалістами в галузі інформаційних технологій зумовлена тим фактом, що основні способи подання та обробки інформації в інформаційних системах є дискретними за своєю природою [1, 2]. Тому важливою складовою процесу підготовки фахівців IT-сфери є вироблення знань та навичок, які стосуються розуміння та використання сучасних моделей та методів обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації.

Слід зазначити також велике методологічне значення вивчення дисципліни "Основи дискретної математики ". Воно, зокрема, полягає у тому, що переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12— "Інформаційні технології", широко використовують позначення, поняття та моделі дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як "Алгоритми та структури даних", "Об’єктно-орієнтоване програмування", "Бази даних та знань", "Системи штучного інтелекту", "Математичне моделювання" тощо.

У посібнику наведено відомості з теорії множин, теорії бінарних відношень, теорії булевих функцій та теорії графів. На початку кожного розділу наведено основні позначення та означення, знання яких є обов’язковим для успішного засвоєння навчальної дисципліни. Важливі поняття та терміни, які уперше зустрічаються у тексті, виділено курсивом. Переважну більшість понять проілюстровано на змістовних прикладах.

Виклад матеріалу є надзвичайно стислим. Додаткові теоретичні відомості, обґрунтування тверджень, а також більш детальний розгляд відповідних розділів дискретної математики читач може знайти у підручниках, які наведені у переліку рекомендованої літератури. Велика кількість додаткових задач різної складності наведена у [9-12].

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Поняття множини

Поняття множини належить до основних понять математики. Воно не має точного визначення і належить до так званих аксіоматичних понять.

Часто використовують інтуїтивне поняття множини, яке дав основоположник теорії множини Г. Кантор:

"Довільна сукупність об’єктів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від іншого і які складають єдине ціле, називається *множиною.* Об’єкти, які входять до складу множини, називаються її *елементами*".

Той факт, що елемент *x належить* множині *A*, позначається $x \in A$.

Запис $x \notin A$ означає, що елемент *x не належить* множині *A*.

Розглядається також множина, яка не містить жодного елемента. Ця множина називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Згідно до *інтуїтивного принципу об’ємності* дві множини є *рівними* тоді і тільки тоді, коли вони складаються із однакових елементів. Рівність двох множин *A* та *B* позначається $A = B$.

Властивості відношення рівності множин:

1) $A = A$;
2) якщо $A = B$, то $B = A$;
3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$.

Множина, яка складається із елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позначається $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Приклад. Множина $\{a\}$ — одноелементна множина, єдиним елементом якої є елемент *a*.

Множини $\{1,2,3,4\}$ та $\{3,2,4,1\}$ є рівними, оскільки вони складаються із тих самих елементів.

Множини $\{1,2,3,4\}$ та $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ не є рівними, оскільки перша складається з чотирьох елементів, а друга — з двох.

1.2. Способи задання множин

Розглянемо три основні способи задання множин.

1. Задання множини переліком її елементів

Усі елементи множини записуються у фігурних дужках.

Приклад. $A = \{4,11,20,25,31\}$..

Цей спосіб на практиці використовується для задання скінченних множин, які містять відносно невелику кількість елементів. Він є непридатним для задання нескінченних множин, а також для задання скінченних множин, елементи яких важко перелічити (прикладом може бути множина собак міста Ужгорода).

2. Задання множини вказівкою властивостей її елементів (предикативний)

Під *властивістю* $P(x)$ об’єкта *x* будемо розуміти розповідне речення, в якому щось стверджується про об’єкт *x* і яке може бути або істинним, або хибним.

Множина *A* усіх об’єктів *x*, які мають властивість $P(x)$, позначається $A = \{x | P(x)\}$.

Приклад. Нехай $A=\{x \mid x\in\mathbb{R},\ x^2-7x+10=0\}$. Для знаходження елементів множини A потрібно розв'язати квадратне рівняння $x^2-7x+10=0$. Його коренями є числа $x_1=2,\ x_2=5$. Тому $A=\{2,\ 5\}$.

3. Задання множини за допомогою процедури породження елементів.

Приклад. Множина чисел Фібоначчі визначається наступним чином:

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1},\ n=1,2,\ldots$$

Вкажемо перші десять чисел Фібоначчі:

$$f_1=1,\ f_2=1,\ f_3=2,\ f_4=3,\ f_5=5,\ f_6=8,\ f_7=13,\ f_8=21,\ f_9=34,\ f_{10}=55.$$

Із заданням множин пов'язаний цілий ряд парадоксів. Розглянемо

Парадокс перукаря. Єдиний перукар у місті N визначає множину A мешканців, яких він повинен голити, як сукупність всіх тих мешканців N, які не голяться самі. Але тоді для самого перукаря виходить протиріччя і при включенні його до множини A, і при віднесенні його до мешканців, які голяться самі.

Парадокс Рассела. Нехай A — множина усіх множин, які не є власними елементами. Тоді обидва можливі твердження про множину A є суперечливими:

1) A є елементом множини A;

2) A не є елементом множини A.

1.3. Основні числові множини. Методи математичної індукції

До основних числових множин, які розглядаються у математиці, відносять:

1) Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$$

2) Множина цілих чисел $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}.$$

3) Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N}\right\}.$$

4) Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ (множина усіх чисел числової прямої).

Задача. Довести, що дійсне число $\sqrt{2}$ є ірраціональним (тобто не є раціональним).

1.3.1. Метод математичної індукції

Метод *математичної індукції* заснований на *принципі математичної індукції*, який полягає у наступному: *твердження справедливе для всіх натуральних n, якщо*

1) *твердження справджується при* $n = 1$ *(база індукції);*

2) *із виконання твердження для довільного натурального* $n = k$ *(припущення індукції) випливає його справедливість для* $n = k + 1$ *(індуктивний перехід).*

Приклад. Довести, що сума квадратів n перших натуральних чисел рівна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Розв'язок. Нехай $S_2(n)=1^2+2^2+\ldots+n^2$.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $S_2(1)=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто $S_2(k)=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ і нехай .$n=k+1$.. Тоді

$$S_2(n)=S_2(k+1)=1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача. Довести, число $7^{n+1}+8^{2n-1}$ націло ділиться на 19.

Задача. Довести, що для чисел Фібоначчі справджується рівність

$$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_n f_{n+1}.$$

1.4. Підмножини

Множина *A* називається *підмножиною* множини *B*, якщо кожний елемент множини *A* є елементом множини *B*. У такому разі пишуть $A\subseteq B$.

Наприклад, $\{2,4\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$.

Символ "$\subseteq$" називається символом операції *включення* множин.

Множина *A* називається *власною підмножиною* множини *B*, якщо $A\subseteq B$ і $A\neq B$.

Наприклад, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Символ "$\subset$" називається символом операції *строгого включення* множин.

Властивості операції включення:

1) $A\subseteq A$;
2) якщо $A\subseteq B$ і $B\subseteq A$, то $A=B$;
3) якщо $A\subseteq B$ і $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$;
4) для довільної множини *A* $\varnothing\subseteq A$.

Властивості операції строгого включення:

1) $A\not\subset A$;
2) якщо $A\subset B$, то $B\not\subset A$;
3) якщо $A\subset B$ і $B\subset C$, то $A\subset C$;

Множина усіх підмножин множина *A* називається *булеаном* множини *A* і позначається $B(A)$ або 2^A. Наприклад, якщо $A=\{1,2,3\}$, то

$$B(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

Теорема. Якщо непорожня скінченна множина містить *n* елементів, то її булеан містить 2^n елементів.

Доведення. Використаємо індукцію за числом *n*.

1) База індукції. Нехай $n=1$. Тоді $B\left(\{a_1\}\right)=\{\varnothing,\{a_1\}\}$. Тому у випадку $n=1$ твердження теореми справджується.

2) Припустимо, що при $n=k$ твердження виконується, тобто у випадку k-елементної множини A кількість елементів булеана $B(A)$ рівна 2^k. Розглянемо випадок $n=k+1$. Нехай $A=\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\}$. Розіб'ємо елементи булеана $B(A)$ на дві групи підмножин. До першої групи віднесемо усі підмножини множини A, які не містять елемента a_{k+1}, до другої — усі інші підмножини. Перша група складається із усіх підмножин k-елементної множини $A=\{a_1,\ldots,a_k\}$ і тому згідно з припущенням індукції містить 2^k елементів. Кількість елементів другої групи також рівна 2^k, оскільки відкинувши елемент a_{k+1} з довільної підмножини, яка входить до другої групи, отримаємо деяку підмножину, яка входить до першої групи. Тому загальна кількість елементів булеана $B(A)$ рівна $2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}=2^n$, що й треба було довести. Теорема доведена.

1.5. Операції над множинами

До основних операцій над множинами відносяться *доповнення*, *перетин*, *об'єднання*, *різниця*, та *симетрична різниця*, для позначення яких використовуються відповідно символи $\bar{\ }$, $\cap$, $\cup$, $\setminus$, Δ:

$\bar{A}=\{x \mid x\in U,\ x\notin A\}$ — *доповнення множини A* до універсальної множини U.

$A\cap B=\{x \mid x\in A,\ x\in B\}$ — *перетин* множин A та B.

$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ àáî } x\in B\}$ — *об'єднання* множин A та B.

$A\setminus B=\{x \mid x\in A,\ x\notin B\}$ — *різниця* множин A та B.

$A\Delta B\overset{\text{def}}{=}(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ — *симетрична різниця множин A* та B

(позначення $\overset{\text{def}}{=}$ читається як "рівне за визначенням").

Приклад. Нехай $U=\{5,6,...,30\}$ — універсальна множина,

$A=\{6,8,\ 9,10,12,14,20,21,22,27\}$,

$B=\{3x-6 \mid x-\text{í åï àðí å}, x\in\mathbb{N}\}$,

$C=\{x \mid x+4-\text{ï ðî ñòå ÷èñëî}\}$.

Вказати перелік елементів множини $D=B\setminus\left(A\Delta\bar{C}\right)$.

Розв'язок.

1) Задамо множини B та C переліком їх елементів:

$B=\{9,15,21,27\}$, $C=\{7,9,13,15,19,25,27\}$.

2) Послідовно виконаємо операції над множинами:

а) $\bar{C}=\{5,6,8,10,11,12,14,16,17,18,20,21,22,23,24,26,28,29,30\}$.

б) Знайдемо симетричну різницю множини A та $\bar{C}$ за формулою:

$$A\Delta\bar{C}=\left(A\setminus\bar{C}\right)\cup\left(\bar{C}\setminus A\right).$$

Оскільки $A\setminus\bar{C}=\{9,27\}$, $\bar{C}\setminus A=\{5,11,16,17,18,23,24,26,28,29,30\}$, то

$A\,\Delta\,\overline{C} = \{5,9,11,16,17,18,23,24,26,27,28,29,30\}$.

в) Знайдемо різницю множин B та $A\Delta\overline{C}$:

$B \setminus \left(A\Delta\overline{C}\right) = \{15,21\}$.

Відповідь: $D = \{15,21\}$.

Часто для ілюстрації операцій над множинами використовують *діаграми Венна*. При цьому універсальну множину позначають прямокутником, усі інші множини — овалами (або іншими фігурами) у ньому. Результат операції виділяється кольором або штрихуванням.

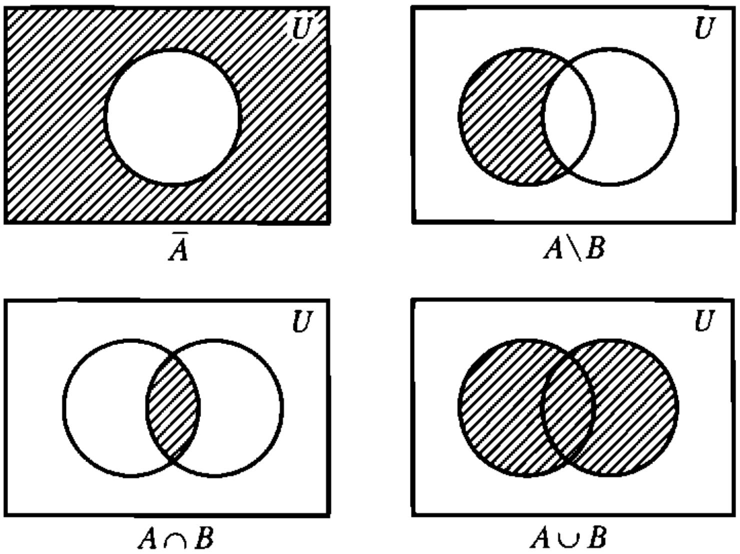
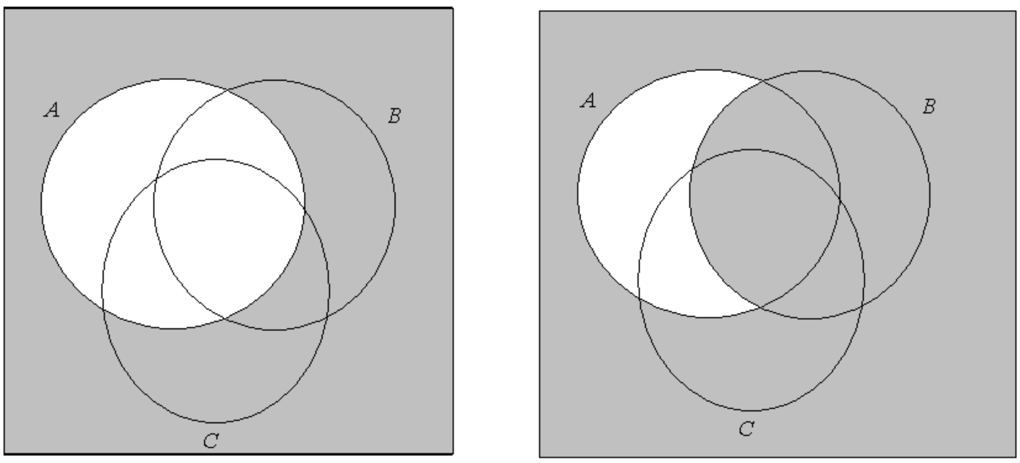


Рис. 1. Діаграми Венна основних операцій над множинами

Приклад. На *діаграмі Венна* зобразити множину $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$.

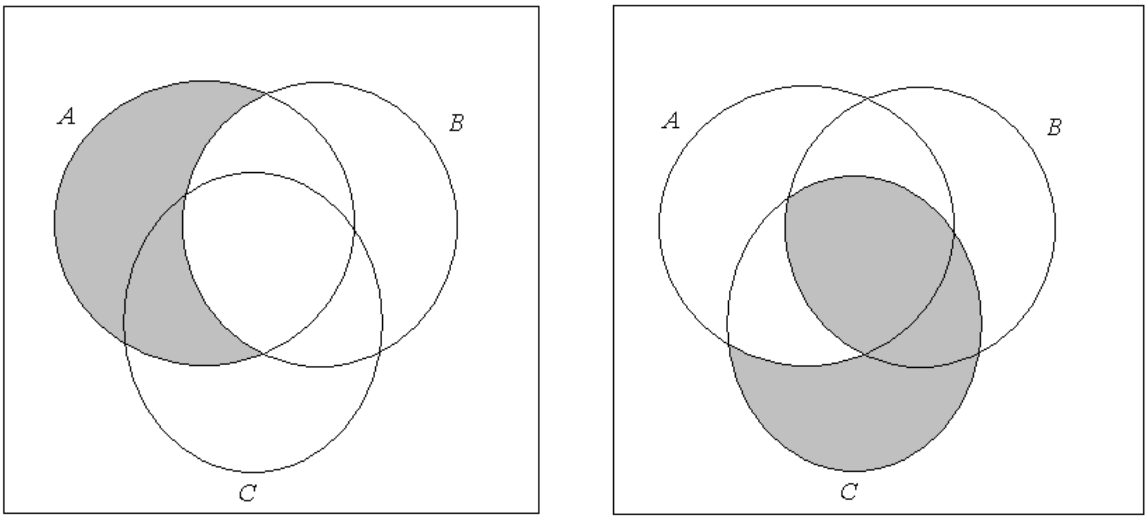
Розв'язок.

Зобразимо діаграми Венна для всіх операцій алгебри множин, які входять у формулу $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$, у порядку їх виконання:



$\overline{A}$ $\qquad\qquad$ $\overline{A} \cup B$

Рис. 2.



$\overline{\overline{A}\cup B}$ $\qquad\qquad$ $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}$

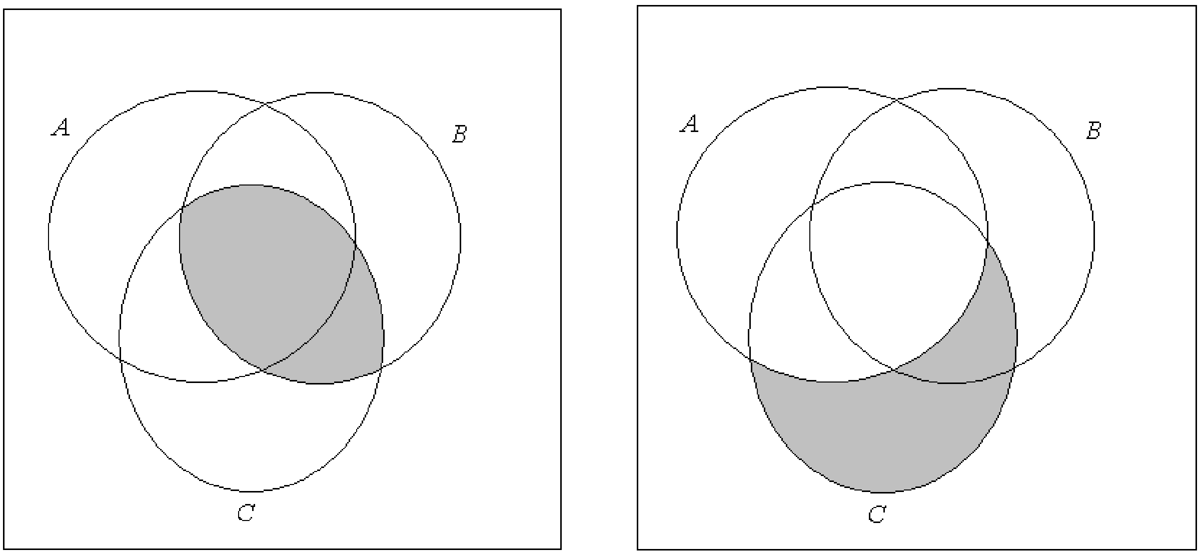
Рис. 3.

На правій діаграмі на рис. 3. зображена шукана множина.

Приклад. Довести, що для довільних множин *A*, *B* та *C* справджується рівність $C\setminus\overline{\overline{A}\cup B}=B\cap C\cup(C\setminus A)$.

Розв'язок.

Перший спосіб. Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. Для множини у лівій частині рівності відповідна їй діаграма зображена справа на рис. 3. Побудуємо діаграму для множини $B\cap C\cup(C\setminus A)$:



$B\cap C$ $\qquad\qquad$ $C\setminus A$

Рис. 4.

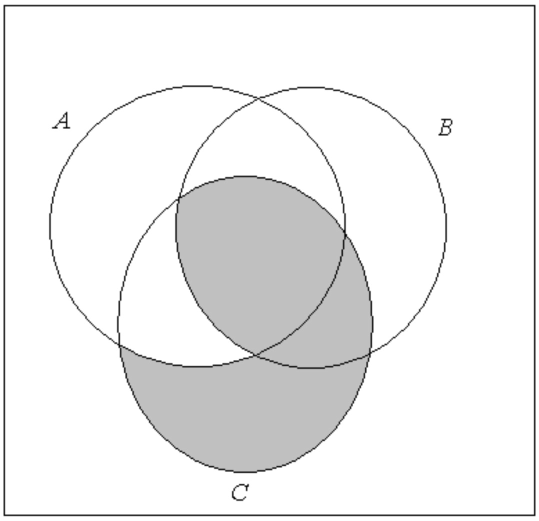


Рис. 5. Діаграма Ейлера-Венна множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$.

Порівняємо діаграми, наведені на рис. 3 (справа) та рис. 5. Легко переконатися, що вони ідентичні. Тому множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ рівні.

Другий спосіб. Використаємо *інтуїтивний принцип об'ємності*, згідно до якого для доведення потрібної рівності достатньо довести, що

$$C \setminus \overline{\overline{A} \cup B} \subseteq B \cap C \cup (C \setminus A)$$

та

$$B \cap C \cup (C \setminus A) \subseteq C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}.$$

а) Доведемо перше включення. Нехай $x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$. Тоді

$$\begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C \setminus A, \\ x \in C \cap B. \end{array} \right. \Rightarrow x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$$

Таким чином ми показали, що довільний елемент *x* множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ є елементом множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$. Перше включення доведено.

б) Доведемо друге включення. Нехай $x \in B \cap C \cup (C \setminus A)$. Тоді

$$\left[\begin{array}{l} x \in C \cap B, \\ x \in C \setminus A. \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \notin A. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in C, \\ x \in B. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A}. \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \in \overline{A} \cup B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in C, \\ x \notin \overline{\overline{A} \cup B}. \end{cases} \Rightarrow x \in C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}.$$

Ми показали, що довільний елемент *x* множини $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є елементом множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$. Тому друге включення доведено.

Отже, множини $C \setminus \overline{\overline{A} \cup B}$ та $B \cap C \cup (C \setminus A)$ є рівними.

Задача. Перевірити, чи є одна із двох множин $\left(A\setminus C\right)\cup B\cap\left(C\setminus\bar{A}\right)$ та $A\setminus\overline{B\cup\bar{C}}$ підмножиною іншої.

Приклад. Із 40 програмістів 18 володіють мовою Pascal, 19 — мовою C++, 21 — мовою Java. Відомо, що 10 програмістів знають одночасно Pascal і C++, 7 — Pascal і Java, 8 — C++ і Java. Троє програмістів не володіють жодною із мов Pascal, C++, Java. Знайти кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови програмування.

Розв'язок. У якості універсальної множини U візьмемо множину тих 40 програмістів, про яких йде мова у задачі. Нехай P, C, J — множини програмістів, які володіють мовами програмування Pascal, C++ та Java відповідно, і нехай x — шукана кількість програмістів, які одночасно знають усі три мови.

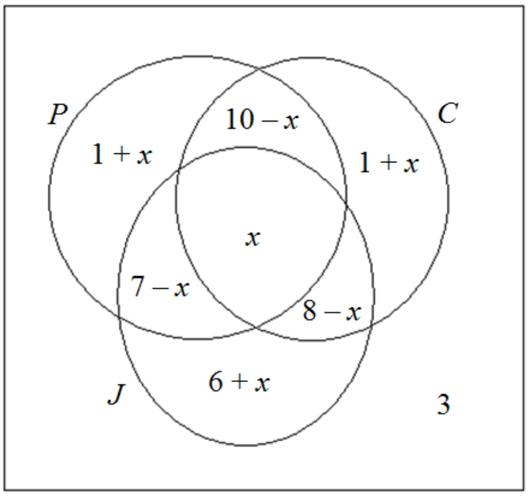


Рис 6. Діаграма до задачі

Скористаємося діаграмами Ейлера-Венна. У кожній частині діаграми позначимо кількість елементів множини відповідної цій частині. Оскільки із 10 програмістів, які володіють і мовою Pascal, і мовою C++, x знає ще й мову Java, то $10-x$ програмістів знають лише Pascal і C++ і не знають Java. Позначимо це число на тій частині діаграми на рис. 5, яка відповідає множині $\left(P\cup C\right)\setminus J$. Із застосуванням аналогічних міркувань отримуємо, що $7-x$ програмістів знають лише мови Pascal і Java, $8-x$ — лише мови C++ та Java.

Знайдемо тепер кількість програмістів, які володіють рівно однією із мов програмування Pascal, C++ та Java. Оскільки мову Pascal знає 18 програмістів, то кількість програмістів, які знають лише мову Pascal рівна

$$18-\left(10-x\right)-\left(7-x\right)-x=1+x.$$

Аналогічно отримуємо, що $19-\left(10-x\right)-\left(8-x\right)-x=1+x$ програмістів знають лише мову C++, $21-\left(7-x\right)-\left(8-x\right)-x=6+x$ програмістів — лише мову Java. Позначимо отримані числа на діаграмі (див. рис. 6).

Із урахуванням того, що загальна кількість програмістів рівна 40, ми можемо записати наступну рівність:

$$18+\left(8-x\right)+\left(1+x\right)+\left(6+x\right)+3=40.$$

Перший доданок у лівій частині попередньої рівності відповідає кількості елементів множини *P*, останній — кількості програмістів, які не володіють жодною із мов. Після спрощень отримаємо $36 + x = 40$. Звідси $x = 4$.

Приклад. Нехай

A — множина трикутників,

B — множина чотирикутників,

C — множина правильних многокутників,

D — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут,

E — множина рівносторонніх трикутників.

Вказати множину:

$$\big((D \cap A)\Delta E\big) \setminus (A \cap C).$$

Розв'язок.

Виконаємо операції по черзі:
а) $D \cap A$ — множина прямокутних трикутників. Позначимо цю множину через *F*.
б) $(F \Delta E) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F)$. Оскільки $E \cap F = \varnothing$, то

$$(F \setminus E) \cup (E \setminus F) = E \cup F .$$

в) $A \cap C = E$.
г) $\big((D \cap A)\Delta E\big) \setminus (A \cap C) = (E \cup F) \setminus E$. Оскільки множини *F* та *E* не перетинаються, то $(E \cup F) \setminus E = F$.

Відповідь: $\big((D \cap A)\Delta E\big) \setminus (A \cap C) = F$, де *F* — множина прямокутних трикутників.

1.6. Алгебра множин

Множина усіх підмножин деякої універсальної множини *U* разом із заданими на ній операціями $\overline{}$, $\cap$, $\cup$ називається *алгеброю множин*.

Основні *закони алгебри множин*:

1) Закони *комутативності*:

$$A \cap B = B \cap A,$$

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \Delta B = B \Delta A.$$

2) Закони *асоціативності*:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A \Delta B)\Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

3) Закони *ідемпотентності*:

$$A \cap A = A,$$

$$A \cup A = A.$$

4) Закони *дистрибутивності*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

5) Властивості універсальної множини:

$$A \cap U = A,$$

$$A \cup U = U,$$

$$A \Delta U = \overline{A}.$$

6) Властивості порожньої множини:

$$A \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$A \cup \varnothing = A,$$

$$A \Delta \varnothing = A.$$

7) Закон подвійного доповнення:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

8) Властивості доповнення:

$$A \cap \overline{A} = \varnothing,$$

$$A \cup \overline{A} = U,$$

$$A \Delta \overline{A} = U.$$

9) Закони де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

10) Властивості різниці:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

$$A \setminus A = \varnothing,$$

$$U \setminus A = \overline{A}.$$

11) Властивості симетричної різниці:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B),$$

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$$\overline{A \Delta B} = \overline{A} \Delta B = A \Delta \overline{B},$$

$$A\Delta A=\varnothing.$$

Приклад. З використанням властивостей операцій довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:

а) $A\cup A\cap B=A$ (закон поглинання);

б) $A\cup \overline{A}\cap B=A\cup B$;

в) $\overline{\overline{A}\cup B\cup\left(C\setminus A\right)}=A\setminus B$.

Розв'язок.

а) Використаємо перший дистрибутивний закон та властивості універсальної множини:

$$A\cup A\cap B\overset{5}{=}\left(A\cap U\right)\cup\left(A\cap B\right)\overset{4}{=}A\cap\left(U\cup B\right)\overset{5}{=}A\cap U\overset{5}{=}A.$$

Над рівностями у попередньому рядку вказані номери законів алгебри множин, які використовуються при переході від множини у лівій частині рівності до множини у правій частині.

б) Використаємо другий дистрибутивний закон, властивості доповнення та універсальної множини:

$$A\cup\overline{A}\cap B\overset{4}{=}\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(A\cup B\right)\overset{7}{=}U\cap\left(A\cup B\right)\overset{5}{=}A\cup B.$$

в) Використаємо закони де Моргана, закон асоціативності, комутативності та дистрибутивності, властивості операції віднімання та закон ідемпотентності:

$$\overline{\overline{A}\cup B\cup\left(C\setminus A\right)}\overset{9}{=}A\cap\overline{B\cup\left(C\setminus A\right)}\overset{2,9,10}{=}A\cap\overline{B}\cap\overline{C\cap\overline{A}}\overset{1,9}{=}\overline{B}\cap A\cap\left(\overline{C}\cup A\right)\overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=}\overline{B}\cap\left(A\cap\overline{C}\cup A\cap A\right)\overset{3}{=}\overline{B}\cap\left(A\cap\overline{C}\cup A\right)\overset{\text{а)}}{=}\overline{B}\cap A\overset{10}{=}A\setminus B.$$

Задача. Довести, що $\left(A\Delta\left(A\cap\overline{B}\right)\right)\cap\left(\overline{B}\Delta\overline{C}\right)=\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right)$

Використаємо закон асоціативності, комутативності, дистрибутивності та ідемпотентності, властивості універсальної та порожньої множин а також властивості операції віднімання та симетричної різниці множин:

$$\left(A\Delta\left(A\cap\overline{B}\right)\right)\cap\left(\overline{B}\Delta\overline{C}\right)\overset{3}{=}\left(A\cap\overline{B}\right)\Delta\left(A\cap\overline{C}\right)\Delta\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{B}\right)\Delta\left(\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}\right)\overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}\left(A\cap\overline{B}\right)\Delta\left(A\cap\overline{C}\right)\Delta\left(A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{B}\right)\right)\Delta\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\overset{2,3}{=}\left(A\cap\overline{C}\right)\Delta\left(A\cap\overline{B}\right)\Delta\left(A\cap\overline{B}\right)\Delta$$

$$\Delta\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\overset{11}{=}\left(A\cap\overline{C}\right)\Delta\varnothing\Delta\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\overset{5,6}{=}\left(A\cap\overline{C}\cap U\right)\Delta\left(A\cap\overline{C}\cap\overline{B}\right)\overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=}\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\left(U\Delta\overline{B}\right)\overset{5}{=}\left(A\cap\overline{C}\right)\cap\overline{\overline{B}}\overset{1,2,3,7}{=}A\cap\overline{C}\cap B\cap\overline{C}\overset{10}{=}\left(A\setminus C\right)\cap\left(B\setminus C\right).$$

1.7. Потужність множини

Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченну кількість елементів. У протилежному випадку множина називається *нескінченною*.

Кількість елементів скінченної множини називається *потужністю множини*.

Потужність множини A позначається $|A|$.

Теорема. Якщо A, B та C — скінченні множини, то

а) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

б) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Доведення.

а) Нехай

$$A \cap B = \{c_1, \ldots, c_k\},\ A = \{a_1, \ldots, a_l, c_1, \ldots, c_k\},\ B = \{b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k\},$$

де $a_i \notin B,\ i = 1, \ldots, l,\ b_j \notin A,\ j = 1, \ldots, m$. Тоді

$$A \cup B = \{a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_k\}.$$

Тому

$$|A \cup B| = l + m + k = (l + k) + (m + k) - k = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

що й треба було довести.

б) Використаємо результат пункту а):

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| =$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) =$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Відповідність між елементами множин A та B називається *взаємно однозначною*, якщо кожному елементу множини A відповідає *єдиний елемент* множини B і кожному елементу множини B відповідає єдиний елемент множини A.

Приклад. Відображення $f : x \to 3x + 1$ встановлює взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A = \{1, 2, 5\}$ та $B = \{4, 7, 16\}$.

Дві множини A та B називаються *рівнопотужними* (еквівалентними), якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Той факт, що множини A та B є рівнопотужними, будемо записувати у вигляді $|A| = |B|$.

Відношення рівнопотужності має наступні властивості:

1. $|A| = |A|$.
2. Якщо $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$.
3. Якщо $|A| = |B|$ і $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Приклад. Множини $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ та $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ є рівнопотужними. Відповідність встановлює відображення $f : k \to a_k$.

З попереднього прикладу випливає, що скінченні множини рівнопотужні тоді і тільки тоді, коли вони містять однакову кількість елементів.

Приклад. Множина парних цілих чисел рівнопотужна множині цілих чисел. Відповідність встановлює відображення $f : 2n \to n\ (n \in \mathbb{Z})$.

Множина A називається *зліченною*, якщо вона є рівнопотужною множині натуральних чисел.

Теорема 1. Множина цілих чисел є зліченною.

Доведення. Покажемо, що множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ рівнопотужна множині цілих чисел $\mathbb{Z}$. Побудуємо відповідне відображення $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ наступним чином:

$$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=-1,\ f(4)=2,\ f(5)=-2,\ f(6)=3,\ f(7)=-3,\ldots$$

Легко переконатися, що $f(2k-1)=-(k-1),\ f(2k)=k,\ k=1,2,\ldots$ і відображення f є взаємно однозначним і обернене до нього відображення $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ визначається наступним чином:

$$g(n)=2n,\ \text{ÿêù î}\ n>0\ \text{та}\ g(n)=1-2n,\ \text{ÿêù î}\ n\le 0.$$

Отже, множини $\mathbb{N}$ та $\mathbb{Z}$ є рівнопотужними.

Теорема 2. Множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є зліченною.

Доведення. Висотою раціонального дробу $\frac{a}{b},\ (a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N})$ назвемо число $|a|+b$. Запишемо раціональні числа у порядку зростання висот відповідних їм правильних нескоротних дробів:

$$\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{-1}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{2},\frac{2}{1},\frac{-2}{1},\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{3}{1},\frac{-3}{1},\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{-2}{3},\frac{3}{2},\frac{-3}{2},\frac{4}{1},\frac{-4}{1},\ldots.$$

Кожне раціональне число зустрінеться у цій послідовності рівно один раз. Тому елементи множини $\mathbb{Q}$ можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел. Встановлена за допомогою нумерації відповідність є взаємно однозначною. Отже, множина раціональних чисел — злічення.

Теорема 3. Для множин справджуються наступні твердження:

а) для кожної нескінченної множини можна вказати її зліченну підмножину.
б) будь-яка підмножина зліченної множина або скінченна, або зліченна.
в) об’єднання скінченної та зліченної множин є зліченної множинною.
г) об’єднання скінченної кількості зліченних множин — зліченна множина.

Теорема 4. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Множина $\mathbb{R}$ та будь-яка рівнопотужна їй множина називається континуальною.

Задача. Довести, що континуальними множинами є

а) відрізок $[0,1]$;

б) інтервал (a,b), де $a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R}$;

в) одиничний квадрат.

2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартів добуток множин

Декартовим добутком множин *A* та *B* називається множина $A\times B$ усіх упорядкованих пар, перша координата (компонента) яких належить множині *A*, а друга — множині *B*. Тобто, $A\times B\overset{\text{def}}{=}\{(a,b)|a\in A,\,b\in B\}$. При цьому *порядок множників є суттєвим*.

Приклад. Знайти $A\times B$, якщо $A=\{1,3,8\}$, $B=\{x,y\}$.

Розв'язання. $A\times B=\{(1,x),(1,y),(3,x),(3,y),(8,x),(8,y)\}$.

Поняття декартового добутку поширюється на довільну скінченну кількість множників:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\overset{\text{def}}{=}\{(a_1,a_2,\ldots,a_n)|a_1\in A_1,\,a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n\}.$$

Елементи декартового добутку *n* множин називаються *кортежами* довжини *n* (впорядкованими *n*-ками).

Приклад. Знайти $B\times A\times B$, якщо $A=\{1,3,8\}$, $B=\{x,y\}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $B\times A$.

$$B\times A=\{(x,1),(x,3),(x,8),(y,1),(y,3),(y,8)\}.$$

Тоді

$$B\times A\times B=\{(x,1,x),(x,1,y),(x,3,x),(x,3,y),(x,8,x),(x,8,y),\\ (y,1,x),(y,1,y),(y,3,x),(y,3,y),(y,8,x),(y,8,y)\}.$$

Властивості декартового добутку множин:

1) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;
2) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
3) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;
4) якщо $A\subseteq B$, то $A\times C\subseteq B\times C$;
5) якщо $A\neq B$, то $A\times B\neq B\times A$;
6) якщо множини *A* та *B* — скінченні, то $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ — *комбінаторне правило множення*.
7) якщо множини *A* та *B* — зліченні, то множина $A\times B$ також є зліченною.

Задача. Навести формулу для $\overline{A\times B}$.

2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень

Бінарним відношенням, визначеним на множинах *A* та *B*, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Той факт, що елементи $a\in A$ та $b\in B$ перебувають у бінарному відношенні *R* позначається як aRb або $(a,b)\in R$. Якщо відповідні елементи не перебувають у відношенні *R*, то це записується як $a\overline{R}b$ або $(a,b)\notin R$.

Множини *A* та *B* називаються *базисними множинами* бінарного відношення.

Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Приклад. Розглянемо R — бінарне відношення подільності, визначене на множинах $A=\{3,5,6\}$ та $B=\{1,2,4\}$. Вважаємо, що

xRy тоді і тільки тоді, коли x націло ділиться на y.

Тоді

$$R=\{(3,1),(5,1),(6,1),(6,2)\}.$$

Так як $A\neq B$, то відношення R — неоднорідне.

Приклад. Однорідне бінарне відношення R — "навчатися у одній групі", визначене на множині студентів УжНУ.

xRy тоді і тільки тоді, коли студенти x та y — одногрупники.

n-арним *відношенням*, визначеним на множинах $A_1,\ldots,A_n$, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Якщо $n=1$, то маємо *унарне* відношення, якщо $n=2$ — бінарне відношення, якщо $n=3$ — *тернарне* відношення.

Приклад. Деякі підприємства, які займаються дизайном інтер'єру приміщень, використовують продукцію деяких виробничих фірм, що розташовані в інших містах. Для аналізу необхідно скласти "відношення" реальних комбінацій трьох параметрів: назви фірми, місця її знаходження (місто), виду продукції, що пропонується.

Нехай відомо, що АП "Orion" (Одеса) продає меблі, ТОВ "День" (Харків) продає світильники, ПП "Sit" (Одеса) торгує меблями та світильниками, ТОВ "House" (Харків) продає світильники та матеріали.

В цьому відношенні беруть участь три множини:

Фірми = {АП "Orion", ТОВ "День", ПП "Sit", ТОВ "House"}.
Міста = {Одеса, Харків}.
Продукція = {меблі, світильники, матеріали}.

Це тернарне відношення можна формально зобразити списком елементів:

{(АП "Orion", Одеса, меблі), (ТОВ "День", Харків, світильники),
(ЧКП "Sit", Одеса, меблі), (ПП "Sit", Одеса, світильники),
(ТОВ "House" Харків, світильники), (ТОВ "House", Харків, матеріали)}.

Оскільки n-арні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *графів* (діаграм) відношень.

При матричному способі задання відношення елементам множини A ставляться у відповідність рядки матриці $M(R)$, елементам множини B — стовпці. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні R, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин A та B ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a, з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b.

Приклад. Відношення $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$ визначене на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ та $B=\{1,2,3,4\}$. Задати його за допомогою матриці та діаграми (графічно).

Розв'язання. Матриця відношення R має вигляд

$$M(R)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф відношення наведено на рис. 7.

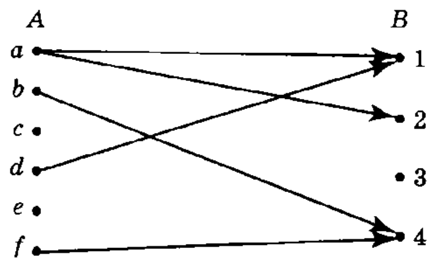


Рис. 7. Граф відношення R

Множини $\mathrm{pr}_1 R=\{x|(x,y)\in R\}$ та $\mathrm{pr}_2 R=\{y|(x,y)\in R\}$ відповідно називаються *першою* та *другою проекціями* відношення R.

Для відношення R із попереднього прикладу $\mathrm{pr}_1 R=\{a,b,d,f\}$, $\mathrm{pr}_2 R=\{1,2,4\}$.

Множина $R[C]=\{y|(c,y)\in R, c\in C\}$ називається *перерізом* бінарного відношення R за підмножиною C першої базисної множини A.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[\{a,d\}]=\{1,2\}$.

Переріз $R[\{a\}]$ називається *перерізом бінарного відношення за елементом a*. Часто для одноелементних зрізів використовують позначення $R[a]$.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[b]=\{4\}$, $R[c]=\varnothing$.

Множина усіх одноелементних перерізів бінарного відношення R, визначеного на множинах A та B, називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B/R.

Тобто, $B/R=\{R[x]|x\in A\}$.

Наприклад, для відношення R із діаграмою, наведеною на рис. 7,

$$R[a]=\{1,2\},\ R[b]=R[f]=\{4\},\ R[c]=R[e]=\varnothing,\ R[d]=\{1\}.$$

Тому $B/R=\{\{1,2\},\{4\},\{1\},\varnothing\}$.

У випадку однорідних бінарних відношень на діаграмі відношення зображується лише одна множина точок.

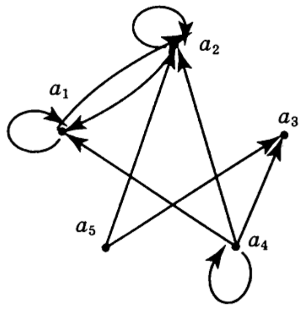


Рис. 8. Приклад діаграми однорідного відношення

Діаграмі, зображеній на рис. 8, відповідає однорідне бінарне відношення
$R=\{(a_1,a_1),(a_1,a_2),(a_2,a_1),(a_2,a_2),(a_4,a_1),(a_4,a_2),(a_4,a_3),(a_4,a_4),(a_5,a_2),\quad (a_5,a_3)\}$, визначене на множині $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$.

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$, визначене на множинах B та A, називається *оберненим* до відношення $R\subseteq A\times B$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 7,

$R^{-1}=\{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$, а для бінарного відношення "<", визначеного на довільній числовій множині, оберненим буде відношення ">".

Бінарне відношення

$$S\circ R=\{(x,z)\mid \text{³ñí óº òàêå } y\in B, \text{ù î } (x,y)\in R,(y,z)\in S\}\subseteq A\times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R\subseteq A\times B$ та $S\subseteq B\times C$.

Приклад. Знайти добуток відношень R та S, діаграми яких зображені на рис. 9.

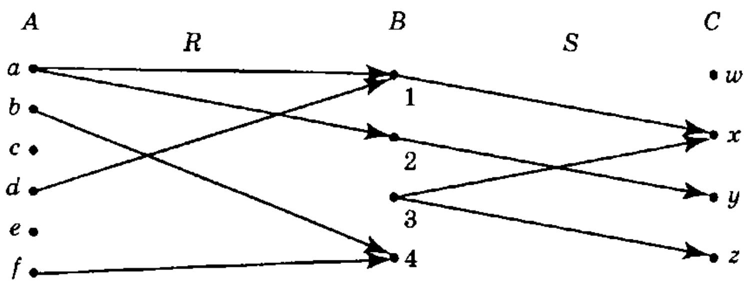


Рис. 9. Діаграми відношень R та S

Розв'язок. $S \circ R = \{(a,x),(a,y),(d,x)\}$.

Приклад. Нехай

$A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B = \{23,24,25,26,27\}$, $C = \{a,b,c,d,e,f\}$,

бінарне відношення *R* визначене на множинах *A* та *B* наступним чином: xRy тоді і тільки тоді, коли *y* націло ділиться на *x*, *S* — бінарне відношення між елементами множин *B* та *C*:

$S = \{(23,f),(24,b),(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\}$.

Знайти проекції відношення $T = S \circ R$ та вказати $T^{-1}[\{a,c,d,f\}]$.

Розв'язок. Задамо бінарне відношення *R* переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:

$R = \{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$.

Тоді з використанням рис. 9 отримаємо

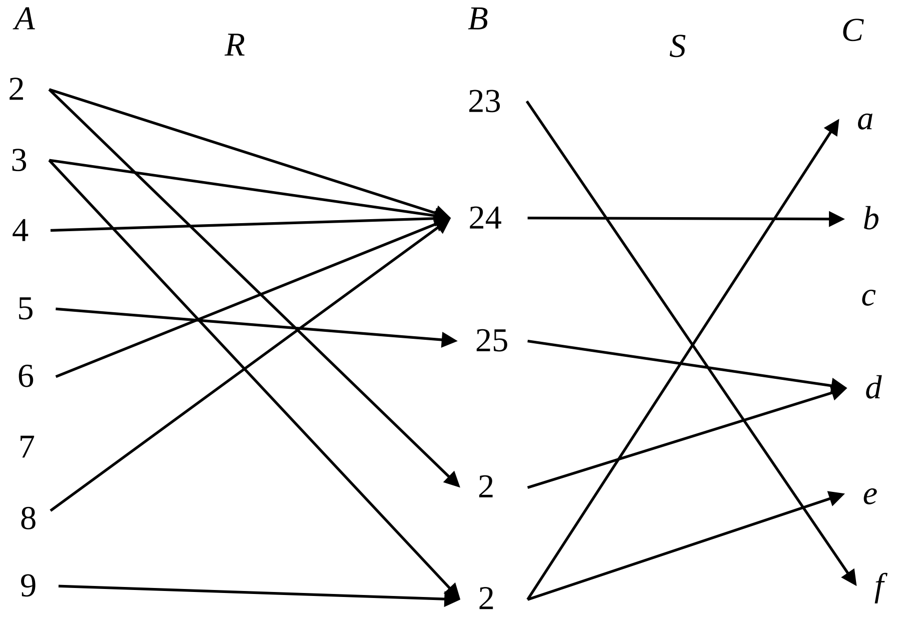


Рис. 10. Діаграма відношень *R* та *S*.

$$T = \{(2,b),(2,d),(3,a),(3,b),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,a),(9,e)\}.$$

Тому

$$\mathrm{pr}_1 T = \{2,3,4,5,6,8,9\},\ \mathrm{pr}_2 T = \{a,b,d,e\}.$$

Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:

$T^{-1} = \{(b,2),(d,2),(a,3),(b,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b,8),(a,9),(e,9)\}$.

Тоді $T^{-1}[\{a,c,d,f\}] = \{2,3,5,9\}$.

Задача 1. Нехай $R = \{(x,y) \mid x < y\}$ — однорідне бінарне відношення на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^n $(n \in \mathbb{N})$.

Задача 2. Нехай R — таке однорідне бінарне відношення на множині точок площини, що xRy тоді і тільки тоді, коли відстань від точки x до точки y рівна 1. Знайти $R^3\left[(0,0)\right]$.

Задача 3. Нехай A — множина усіх людей, R — відношення батьківства на множині A: xRy тоді і тільки тоді, коли x є батьком або матір'ю y. Записати відношення S "брат-сестра" ($xSy \Leftrightarrow$ x є братом або сестрою y), використовуючи R та операцій над відношеннями.

2.4. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення*.

Бінарне відношення $I_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині A (відношенням *тотожності, діагоналлю* множини A).

Бінарне відношення R називається *рефлексивним* на множині A, якщо для кожного $x \in A$ має місце xRx, тобто кожний елемент множини A перебуває у відношенні R сам із собою.

Наприклад, відношення "=", "≤" рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a \in \mathbb{R}$ $a = a, a \le a$, відношення "||" (паралельність прямих) є рефлексивним на множині усіх прямих площини, а відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" не є рефлексивними на тих самих множинах.

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з'єднана петлею із самою собою.

Наприклад, рефлексивним є бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 11.

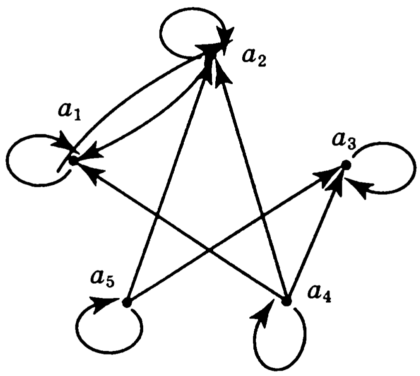


Рис. 11. Рефлексивне бінарне відношення

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 8 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

Критерієм (необхідною і достатньою умовою) рефлексивності є умова $I_A \subseteq R$.

Бінарне відношення R називається *іррефлексивним (антирефлексивним)* на множині A, якщо для жодного $x \in A$ не має місце xRx.

Наприклад, відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" — іррефлексивні.

Критерієм іррефлексивності є умова $I_A \cap R = \varnothing$.

Бінарне відношення R називається *симетричним* на множині A, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що yRx.

Наприклад, відношення рівності та подібності на множині трикутників площини, відношення "навчатися у одній групі" — симетричні.

Відношення "≤" не є симетричним, оскільки якщо $a \le b$ і $a \ne b$, то нерівність $b \le a$ не виконується.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 12, є симетричним.

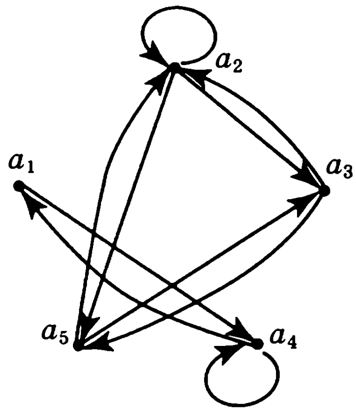


Рис. 12. Приклад діаграми симетричного бінарного відношення

Критерієм симетричності є виконання рівності $R^{-1} = R$.

Бінарне відношення *R* називається *асиметричним* на множині *A*, якщо для довільних (необов'язково різних) $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що не виконується yRx $\left(xRy \Rightarrow y\bar{R}x\right)$.

Приклад асиметричного відношення — відношення ">" на множині дійсних чисел.

Умова $R^{-1} \cap R = \varnothing$ може використовуватися у якості *критерію асиметричності*.

Бінарне відношення *R* називається *антисиметричним* на множині *A*, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \ne y$ та xRy випливає, що не виконується yRx (з xRy та yRx випливає, що $x = y$).

Кожне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним, але не навпаки. Наприклад, відношення "≥" є антисиметричним, але воно не є асиметричним (умова асиметричності порушується для пар однакових елементів).

Умова $R^{-1} \cap R \subseteq I_A$ може використовуватися у якості *критерію антисиметричності*.

Бінарне відношення *R* називається *транзитивним* на множині *A*, якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRy та yRz випливає, що xRz.

Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості *критерію транзитивності*.

Приклад. Відношення $"=", ">", "<", "\ge", "\le"$ є транзитивними, а відношення "$\perp$" не є транзитивним.

Бінарне відношення *R* називається *лінійним* на множині *A,* якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A, b \in A$ хоча би одна із пар (a,b), (b,a) є елементом відношення *R*.

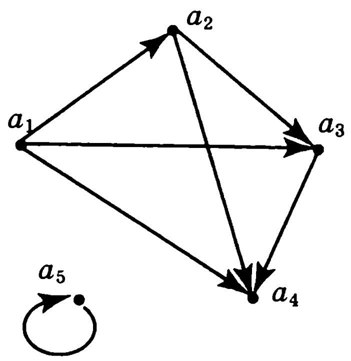


Рис. 13. Приклад діаграми транзитивного відношення

Наприклад, відношення "$\le$" є лінійним, а відношення "$\subseteq$" — ні $\left(\{1,2\} \not\subseteq \{3\}, \{3\} \not\subseteq \{1,2\}\right)$.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P.

Наприклад, якщо R — однорідне відношення на множині A, то

його рефлексивне замикання $[R]_{\text{ref}}$ може бути знайдене за формулою $[R]_{\text{ref}} = R \cup I_A$,

його симетричне замикання $[R]_{\text{sym}}$ — за формулою $[R]_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$,

його транзитивне замикання $[R]_{\text{trans}}$ — за формулою $[R]_{\text{trans}} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$.

Приклад. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \left\{(x, y) \,\middle|\, |x - y| \le 1\right\}$, заданого на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Оскільки $|x - x| = 0 < 1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є іррефлексивним.

Оскільки $|x - y| = |y - x|$, то з того, що $|x - y| \le 1$ випливає, що $|y - x| \le 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1,0)$).

Оскільки $(0,1) \in R$ та $(1,2) \in R$, але $(0,2) \notin R$, то відношення R не є транзитивним.

Оскільки $(0,2) \notin R, (2,0) \notin R$, то відношення не є лінійним.

Приклад. Задати за допомогою матриці мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке не є іррефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R \cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $S = R \cup R^2$.

Розв'язок. Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A, яка задовольняє умови $(x, y) \in R$ та

$(y,x)\notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів $(x,y)\in R$ та $(y,z)\in R$, такі, що $(x,z)\notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R'=\{(a,b),(b,c)\}$. Але відношення R' є іррефлексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару, яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a,a). Отримуємо $R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. Діаграма відношення R наведена на рис. 14.

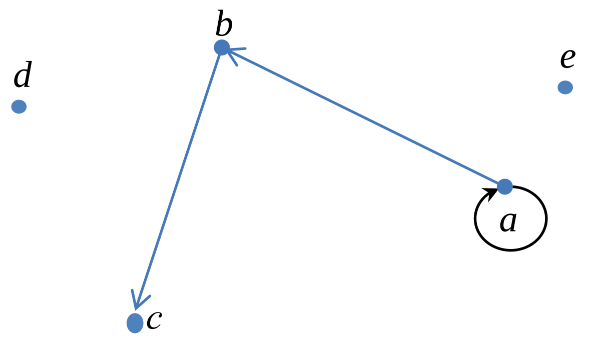


Рис. 14. Діаграма відношення R

Відношення R є шуканим і має наступну матрицю:

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2=\{(a,a),(a,b)(a,c)\}$.

Тому $R\cap R^2=\{(a,a),(a,b)\}$. Звідси

$\mathrm{pr}_1(R\cap R^2)=\{a\}$, $\mathrm{pr}_2(R\cap R^2)=\{a,b\}$.

$S=R\cup R^2=\{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

Отже, $S[a]=\{a,b,c\}$, $S[b]=\{c\}$, $S[c]=S[d]=S[e]=\varnothing$.

Тому $A/S=\{\{a,b,c\},\{c\},\varnothing\}$.

Приклад. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(2,1),(3,1),(2,2),(4,6)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання *S*. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,2,5\}]$.

Розв'язок. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні *S* з самим собою (наприклад, з того, що $(3,1)\in R$ та симетричності *S* випливає, що $(1,3)\in S$. Тоді з транзитивності *S* отримуємо, що $(1,1)\in S$ та $(3,3)\in S$). Тому пари $(1,1),(3,3),(4,4),(6,6)$ обов'язково потрібно включити у відношення *S*. Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2),(1,3)$, $(2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу *S*. Отже остаточно маємо $S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,6),(6,4),$ $(6,6)\}$. Легко переконатися, що S — симетричне та $S^2=S$. Отже, відношення *S* — транзитивне. Тоді

$$M(S)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

та $S\left[\{1,2,5\}\right]=\{1,2,3\}$.

2.5. Відношення еквівалентності

Однорідне бінарне відношення *E* називається відношенням *еквівалентності* на множині *A*, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Якщо *E* — відношення еквівалентності, $a\in A, b\in A$ і aEb, то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення "народитися у один день", тощо.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності *E* для елемента $a\in A$ називається множина усіх елементів множини *A*, які еквівалентні елементу *a.*

Клас еквівалентності, який відповідає елементу *a*, співпадає із перерізом $E[a]$.

Теорема 1. Два класи еквівалентності множини *A* за відношенням *E* або співпадають, або не перетинаються.

Доведення. Нехай $a,b\in A$ Припустимо, що $E[a]\cap E[b]\neq\varnothing$. Покажемо, що тоді $E[a]=E[b]$.

Доведемо спочатку, що $E[a]\subseteq E[b]$. Нехай x — довільний елемент множини $E[a]$. Тоді $(a,x)\in E$. Нехай $c\in E[a]\cap E[b]$. Тоді $(a,c)\in E$ та $(b,c)\in E$. З симетричності відношення *E* випливає, що $(c,a)\in E$. Тоді із того, що $(b,c)\in E$, $(c,a)\in E$ та транзитивності відношення *E* отримуємо, що $(b,a)\in E$ та $(b,x)\in E$. Тому $x\in E[b]$. Отже, $E[a]\subseteq E[b]$.

Обернене включення доводиться аналогічно. Отже, якщо два класи еквівалентності мають спільні елементи, то вони співпадають. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{C}=\{C_i\}_{i\in I}$ — деяка система підмножин множини *A*, де *I* — множина індексів.

Система $\mathcal{C}$ називається *покриттям множини A*, якщо для довільного $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система $\mathcal{C}$ називається *розбиттям множини A*, якщо вона є покриттям множини *A* і крім того множини C_i та C_j не перетинаються для довільних відмінних між собою $i \in I,\ j \in I$, тобто $C_i \cap C_j = \varnothing$ у випадку $i \neq j$.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3,4,5\}$. Тоді

1) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{1,2,5\},\{3,5\}\}$ не є покриттям множини *A*, оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до $\mathcal{C}$.

2) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{1,2,5\},\{4,5\}\}$ є покриттям множини *A*, але не є її розбиттям оскільки $\{1,3\} \cap \{1,2,5\} \neq \varnothing$.

3) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$ є розбиттям множини *A*.

Теорема 2. Якщо *E* — відношення еквівалентності на множині *A*, множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям множини *A*. І навпаки, для довільного розбиття $\mathcal{C}$ множини *A* можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з $\mathcal{C}$.

Наслідок. Якщо однорідне бінарне відношення *E* є рефлексивним на множині *A* і одноелементні перерізи множини *A* за відношенням *E* або співпадають, або не перетинаються, то *E* — відношення еквівалентності.

На рис. 15 наведена діаграма відношення еквівалентності

$$E = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\},$$

визначеного на множині $A = \{a,b,c,d\}$.

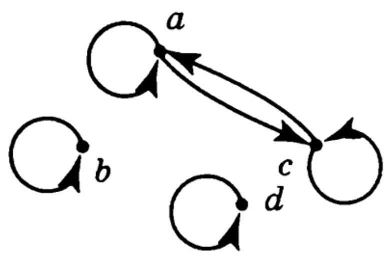


Рис. 15. Діаграма відношення еквівалентності

З діаграми добре видно, що класами еквівалентності є множини $\{a,c\},\{b\}$ та $\{d\}$, які породжують розбиття множини *A*.

Приклад. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;

в) відношення *R*: "знаходитися один від одного на відстані не більшій за 100" на площині;

г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв'язок.

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним.

Симетричність також виконується по тій самій причині.

Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина усіх людей, зріст яких рівний k см.

в) Відношення R не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 150 (див рис. 16).

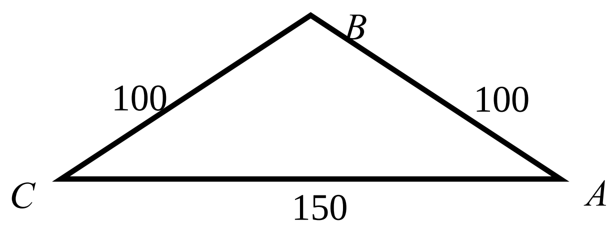


Рис. 16. Рівнобедрений трикутник

Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє. Тобто, $(A,B)\in R, (B,C)\in R$, але $(A,C)\notin R$.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи А та В є родичами і нехай В та С також є родичами, причому А предок В по батьківській лінії, а С — предок В по материнській лінії. Тоді жоден із людей А та С не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

Приклад. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u),(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),(y,w),(x,u),(w,y),$ $(w,z),(x,x),(v,v),(t,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину A/R.

Розв'язок.

Перший спосіб. Оскільки $I_A\subseteq R$, то відношення R є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення: $R^{-1} = \{(x,u),(u,u),(z,y),(w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w),(z,w),(x,x),$ $(v,v),(t,t)$ Легко переконатися, що $R^{-1} = R$, а отже, відношення R є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення R: $R^2 = \{(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u),(v,v),$ $(w,y),(w,z),(w,w)\}$. Легко перевірити, що $R^2 = R$. Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням еквівалентності.

Другий спосіб. Скористаємося наслідком до теореми 2. Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи множини A за відношенням відношення R.

$R[x] = \{x,u\}$, $R[y] = \{y,z,w\}$, $R[z] = \{y,z,w\}$, $R[t] = \{t\}$, $R[u] = \{x,u\}$, $R[v] = \{v\}$, $R[w] = \{y,z,w\}$.

Оскільки, для довільного $a \in A$ виконується умова $a \in R[a]$, то R — рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення R є відношенням еквівалентності.

Тоді $A/R = \{\{x,u\},\{y,z,w\},\{t\},\{v\}\}$ — фактор-множина множини A за відношенням R.

2.6. Відношення порядку

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком) на множині A*, якщо воно є антисиметричним та транзитивним.

Пара (A,R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A,R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент a *передує* елементу b.

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел.

Іррефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин).

Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Якщо R — відношення строгого порядку на множині A, то відношення $R' = R \cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R.

Наприклад, відношення "$\leq$" є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку "$<$".

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням *лінійного* порядку. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення "$>$" на числовій множині.

Нехай a та b — різні елементи впорядкованої множини (A,R). Елемент a називається *безпосереднім попередником* елемента b, якщо елемент a передує елементу b і не існує жодного елемента c такого, що a передує c і c передує b.

Аналогічно дається означення *безпосереднього наступника*.

Приклад 1. Розглянемо відношення включення, визначене на множині підмножин множини $\{1,2,3,4\}$. Тоді множини $\{1\}$ та $\{2\}$ є безпосередніми попередниками множини $\{1,2\}$, а множина $\{3\}$ не є безпосереднім попередником множини $\{1,2,3\}$, оскільки $\{3\} \subseteq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Приклад 2. Елемент 1 є безпосереднім наступником елемента 0 множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, впорядкованої відношенням "$\leq$". Якщо розглядати це саме відношення на множині $\mathbb{Q}$, то у елемента 0 немає безпосереднього наступника, оскільки для довільного додатного $a \in \mathbb{Q}$ виконується умова $0 < \frac{a}{2} < a$.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою *діаграм Хассе*. При цьому кожний елемент з'єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них.

На рис. 17 зображено діаграму Хассе для відношення подільності:

$$xRy \text{ тоді і тільки тоді, коли число } x \text{ є дільником числа } y,$$

визначеного на множині $\{2,4,5,10,12,20,25\}$.

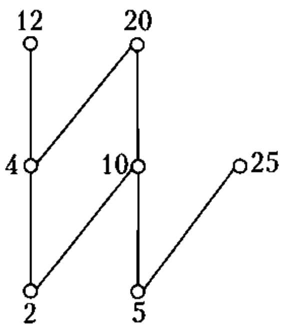


Рис. 17. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}

Елемент *a* називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо йому не передує жодний інший елемент множини (A,R).

Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 17 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент *a* називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо для довільного іншого елемента $b \in A$ $(a,b) \in R$. Тобто, найменший елемент впорядкованої множини передує усім іншим елементам.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають *екстремальними елементами* впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 18, елемент *G* буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи *A, C* та E — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).

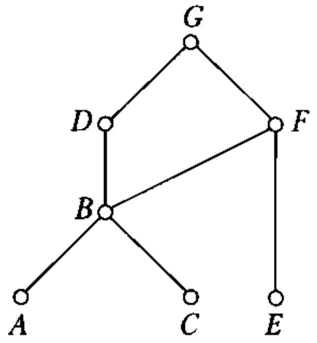


Рис. 18. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент a впорядкованої множини (A,R) називається *нижньою гранню множини* $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова aRb.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини M позначається $\sup M$.

Так, наприклад для відношення, діаграма якого наведена на рис. 18, $\sup\{D,E\} = G$, $\inf\{D,F\} = B$, а $\inf\{B,E\}$ не існує.

Теорема 1. Якщо впорядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то він є єдиним її максимальним (мінімальним) елементом.

Теорема 2. Кожна непорожня скінченна впорядкована множина містить хоча би один мінімальний та хоча би один максимальний елементи.

Теорема 3. Якщо у скінченній впорядкованій множині є єдиний максимальний (мінімальний) елемент, то він є її найбільшим (найменшим) елементом.

Частково впорядкована множина (A,R) називається *ґраткою*, якщо для довільних $a \in A,\ b \in A$ існують $\inf\{a,b\}$ та $\sup\{a,b\}$.

Наприклад, множина усіх підмножин деякої універсальної множини разом із заданим на ній відношенням включення множин є ґраткою. Для довільних двох множин A та B $\inf\{A,B\} = A \cap B,\ \sup\{A,B\} = A \cup B$.

Приклад. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = \{(b,d),(a,e),(a,b),(a,d),\ (c,d),(b,e),(a,c)\} \cup I_A$$

відношенням часткового порядку на множині $A = \{a,b,c,d,e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A,R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A,R) ґраткою. Крім того, знайти $\inf\{b,c\}$ та $\sup\{b,c\}$.

Розв'язок. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене до нього відношення:

$$R^{-1} = \{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(e,b),(c,a)\} \cup I_A .$$

Тоді $R^{-1} \cap R = I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\} = R.$$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Зобразимо діаграму Хассе частково впорядкованої множини (A, R). Відповідна діаграма наведена на рис. 19.

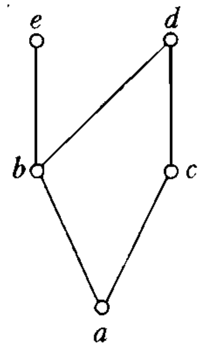


Рис. 19. Діаграма Хассе

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A, R), а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A, R), а найбільший елемент не існує.

Оскільки $\sup\{e, d\}$ не існує, то впорядкована множина (A, R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b,c\} = a$, $\sup\{b,c\} = d$.

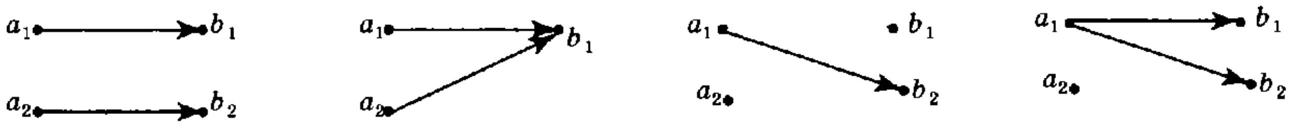
2.7. Функціональні відношення

2.7.1. Основні означення

Бінарне відношення f, визначене на множинах A та B, називається *функціональним*, якщо для довільного $x \in A$ існує не більше ніж один $y \in B$, такий що $(x, y) \in f$.

З означення функціонального відношення випливає, що для довільного $x \in A$ $|f[x]| \le 1$. Якщо базисні множини функціонального відношення скінченні, то кожний рядок матриці $M(f)$ містить не більше однієї одиниці та з кожної вершини на діаграмі відношення виходить не більше однієї дуги.

Приклад. Відношення, діаграми яких зображені на рис. 20 а)-в), — функціональні, а відношення з діаграмою на рис. 20 г) — не є функціональним.



а) б) в) г)

Рис. 20. Приклади функціональних та нефункціональних відношень

Функціональне відношення f, визначене на множинах A та B, називається *функцією* (відображенням) із A у B і позначається у вигляді

$$f : A \to B \text{ або } A \xrightarrow{f} B.$$

Якщо $f : A \to B$, то той факт, що $(x, y) \in f$ записують у вигляді $y = f(x)$.

Нехай f — функціональне відношення на множинах A та B. Тоді множина $\mathrm{Dom}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_1 f$ називається *областю визначення* відношення f (часто також використовується позначення D_f), а множина $\mathrm{Im}\, f \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{pr}_2 f$ — областю значень відношення f (також позначається як E_f).

Так, наприклад, для функції з рис. 20 б) $\mathrm{Dom}\, f = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{b_1\}$, а для функції рис. 20 в) $\mathrm{Dom}\, f = \{a_1\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{b_2\}$.

Теорема 1. *Нехай* $f : A \to B$, $g : B \to C$. *Тоді* $g \circ f$ *— функція із A у C, причому* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.7.2. Види функцій

Функція $f : A \to B$ називається *цілком визначеною (тотальною)*, якщо $\mathrm{Dom}\, f = A$. У протилежному випадку функція називається *частковою*.

Функція $f : A \to B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\mathrm{Im}\, f = B$.

Приклад діаграми часткового сюр'єктивного відображення між елементами множин $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та $B = \{y_1, y_2\}$ наведено на рис. 21

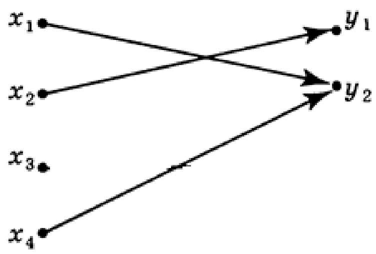


Рис. 21. Приклад сюр'єктивного відображення

На діаграмі сюр'єктивної функції у кожну вершину, яка відповідає елементам множини B, заходить принаймні одна дуга.

Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, якщо з того що $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

На діаграмі, яка відповідає ін’єктивній функції, у кожну вершину заходить не більше однієї дуги (див. рис. 22).

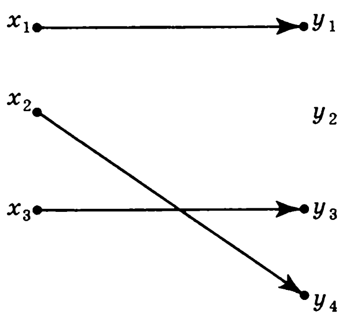


Рис. 22. Приклад ін’єктивної функції

Функція називається *бієктивною (взаємно однозначною або бієкцією)*, якщо вона є сюр’єктивною та ін’єктивною.

Приклад бієктивного відображення наведено на рис. 23.

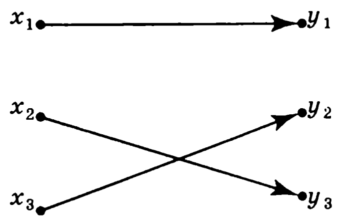


Рис. 23. Приклад бієктивної функції

Теорема 2. *Функція $f : A \to B$ є бієкцією тоді і тільки тоді, коли відношення f^{-1} є цілком визначеною функцією. Якщо f — бієкція, то f^{-1} — також бієкція, причому для довільних $x \in A,\ y \in B$*

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\ f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=y.$$

Приклад. Перевірити властивості та вказати обернені функції до функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за умови, що

а) $f\left(x\right)=3x+6$;

б) $f\left(x\right)=x^2-4$.

в) $f\left(x\right)=x^3-1$.

Задача 1. Чи вірно, що для довільної функції $f : A \to B$ та довільних множин $A_1 \subset A,\ A_2 \subset A$ справджуються рівності:

а) $f\left(A_1 \cup A_2\right)=f\left(A_1\right) \cup f\left(A_2\right)$;

б) $f\left(A_1 \cap A_2\right)=f\left(A_1\right) \cap f\left(A_2\right)$?

Задача 2. Довести, що якщо функції $f : A \to B$ та $g : B \to C$ є бієкціями, то $g \circ f$ — також бієкція.

3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Булеві вектори

3.1.1. Основні означення

Нехай $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Елементи множини $\mathbb{Z}_2$ називаються булевими константами. Логічні операції над булевими змінними множини $\mathbb{Z}_2$: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність та додавання за модулем 2 $(\oplus)$.
$0 \oplus 0 = 0,\ \ 0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0$.

Вектор (упорядкований набір) вигляду $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{Z}_2$ називається *n*-*вимірним булевим вектором*. Множина усіх *n*-вимірних булевих векторів позначається $\mathbb{Z}_2^n$. Тобто, $\mathbb{Z}_2^n = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n\text{ ìíîæíèê³â}}$.

Кожному булевому вектору $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставиться у відповідність його номер $N(\tilde{x})$, який визначається наступним чином

$$N(\tilde{x}) = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + x_{n-1} \cdot 2 + x_n .$$

Легко бачити, що для номера *n*-вимірного булевого вектора виконуються нерівності

$$0 \le N(\tilde{x}) < 2^n .$$

Приклад 1. Нехай $\tilde{x} = (0,1,0,1,1,0,1) \in \mathbb{Z}_2^7$. Тоді

$$N(\tilde{x}) = 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 32 + 8 + 4 + 1 = 45.$$

Приклад 2. Вказати вектор $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_2^9$, номер якого рівний 117.

$$117 = 64 + 53 = 64 + 32 + 21 = 64 + 32 + 16 + 5 = 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 .$$
Тому $\tilde{x} = (0,0,1,1,1,0,1,0,1)$.

Теорема 1. Кількість *n*-вимірних булевих векторів рівна 2^n.

Доведення. Скористаємося комбінаторним правилом множення, згідно до якого $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, де $|A|$ — потужність множини *A*. Отримаємо

$$\left|\mathbb{Z}_2^n\right| = |\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2| = |\mathbb{Z}_2| \cdot |\mathbb{Z}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{Z}_2| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n.$$

Мірою "близькості" між *n*-вимірними булевими векторами $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ та $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n)$ є *відстань Хеммінга* $d(\tilde{x}, \tilde{y})$, яка визначається наступним чином:

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| .$$

Приклад 3. Обчислити відстань Хеммінга між векторами $\tilde{x} = (0,1,0,1,1,0,1)$ та $\tilde{y} = (1,1,0,0,1,0,0)$.

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3.$$

Відстань Хеммінга між двома векторами чисельно рівна кількості координат, у яких відрізняються ці вектори. Якщо $d(\tilde{x},\tilde{y})=1$, то вектори $\tilde{x}$ та $\tilde{y}$ називаються *сусідніми*.

Властивості відстані Хеммінга:

1. $d(\tilde{x},\tilde{y})\geq 0,\quad d(\tilde{x},\tilde{y})=0\Leftrightarrow \tilde{x}=\tilde{y}$;
2. $d(\tilde{x},\tilde{y})=d(\tilde{y},\tilde{x})$;
3. для довільних $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in\mathbb{Z}_2^n$ $d(\tilde{x},\tilde{y})\leq d(\tilde{x},\tilde{z})+d(\tilde{z},\tilde{y})$ (нерівність трикутника).

Величина $\|\tilde{x}\|=\sum_{i=1}^{n}x_i$ називається *нормою Хеммінга* булевого вектора $\tilde{x}$. Норма Хеммінга булевого вектора рівна кількості одиничних компонент вектора.

3.1.2. Операції над булевими векторами

Над булевими векторами можна виконувати *логічні операції*, застосовуючи їх до відповідних компонент цих векторів. Якщо $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\tilde{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, то

$$\bar{\tilde{x}}=(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n});$$
$$\tilde{x}\wedge\tilde{y}=(x_1\wedge y_1,\ldots,x_n\wedge y_n);$$
$$\tilde{x}\vee\tilde{y}=(x_1\vee y_1,\ldots,x_n\vee y_n);$$
$$\tilde{x}\oplus\tilde{y}=(x_1\oplus y_1,\ldots,x_n\oplus y_n).$$

Приклад 4. Нехай $\tilde{x}=(1,0,1,1,0,0,1)$ та $\tilde{y}=(0,1,0,1,0,1,1)$. Тоді

$\bar{\tilde{x}}=(0,1,0,0,1,1,0)$, $\tilde{x}\wedge\tilde{y}=(0,0,0,1,0,0,1)$, $\tilde{x}\vee\tilde{y}=(1,1,1,1,0,1,1)$, $\tilde{x}\oplus\tilde{y}=(1,1,1,0,0,1,0)$.

Також до булевих векторів можна застосовувати *операції зсуву*. Виокремлюють *логічний* та *циклічний* зсув.

Результатом застосування операції логічного зсуву вектора $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$ на k позицій вліво є вектор $\tilde{x}<<k=(x_{k+1},\ldots,x_n,0,\ldots,0)$.

Результатом застосування операції логічного зсуву вектора $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_n)$ на k позицій вправо є вектор $\tilde{x}>>k=(0,\ldots,0,x_1,\ldots,x_{n-k})$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву вектора $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$ на k позицій вліво є вектор $\tilde{x}<<<k=(x_{k+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_k)$.

Результатом застосування операції циклічного зсуву вектора $\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_n)$ на k позицій вправо є вектор $\tilde{x}>>>k=(x_{n-k+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_{n-k})$.

Приклад 5. Нехай $\tilde{x}=(1,0,1,1,0,0,1)$. Тоді

$\tilde{x}<<2=(1,1,0,0,1,0,0)$, $\tilde{x}>>2=(0,0,1,1,0,0,1)$,

$\tilde{x}<<<2=(1,1,0,0,1,1,0)$, $\tilde{x}>>>2=(0,1,1,0,1,1,0)$.

Приклад 6. Знайти $(\tilde{x}<<<5)\oplus(\bar{\tilde{y}}>>\|\tilde{x}\|)$, де $\tilde{x}=(1,0,1,0,0,1,0,0)$, $\tilde{y}\in\mathbb{Z}_2^8$, $N(\tilde{y})=111$.

Задача 1. Записати $d(\tilde{x}, \tilde{y})$ за допомогою операцій над булевими векторами та норми Хеммінга.

Задача 2. Визначити властивості бінарного відношення сусідства на множині n-місних булевих векторів та знайти його транзитивне замикання.

3.2. Булеві функції

3.2.1. Булеві функції. Основні означення

Функції вигляду $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ називаються n-місними *булевими функціями* (функціями двозначної логіки). Тобто, аргументами булевих функцій є n-вимірні булеві вектори, а значеннями — 0 або 1. Позначимо через P_2 множину усіх булевих функцій.

Оскільки область значень булевої функції (БФ) скінченна, то її можна задавати за допомогою таблиць значень. Для того, щоб задати n-місну БФ, достатньо вказати її на значення на кожному з 2^n булевих наборів (векторів). Якщо домовитися, що набори впорядковані у порядку зростання їх номерів, то кожна n-місна БФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ однозначно задається вектором $\tilde{f} = \left(f_0, f_1, \ldots f_{2^n - 1}\right)$, де f_k — значення функції f на наборі, номер якого рівний k.

Теорема 2. Кількість різних n-місних булевих функцій рівна 2^{2^n}.

Доведення. Кількість n-місних БФ співпадає із кількістю усіх можливих 2^n-вимірних булевих векторів вигляду $\tilde{f} = \left(f_0, f_1, \ldots f_{2^n - 1}\right)$. За теоремою попереднього параграфу ця кількість рівна 2^{2^n}.

Номером булевої функції $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається номер $N(\tilde{f})$, де $\tilde{f}$ — вектор значень функції f.

Приклад 7. Вказати таблицю значень БФ $f(x_1, x_2, x_3)$, якщо $N(\tilde{f}) = 43$.

$43 = 32 + 11 = 32 + 8 + 3 = 32 + 8 + 2 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$.

Тому $\tilde{f} = (0,0,1,0,1,0,1,1)$. Тоді таблиця значень БФ має наступний вигляд.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Змінна x_k називається *суттєвої змінною* функції $f(x_1, \ldots, x_n)$, якщо існує такий набір $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, що $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_k, \ldots, \alpha_n)$. У протилежному випадку змінна x_k називається *фіктивною*.

Якщо $g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ і x_k — фіктивна змінна функції $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, то кажуть, що функцію $g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ отримано із функції $f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ шляхом *видалення фіктивної змінної* x_k (функцію f отримано із g шляхом *введення фіктивної змінної*).

БФ функції f_1 та f_2 будемо вважати *рівними*, якщо одну із них можна отримати із іншої за допомогою видалення чи введення фіктивних змінних.

Приклад 8. Вказати суттєві змінні БФ $f(x_1,x_2,x_3)$, якщо $\tilde{f}=(1,1,1,1,0,1,0,1)$. Видалити фіктивні змінні.

Запишемо таблицю значень БФ *f*.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Змінна x_1 є суттєвою, оскільки $f(0,0,0)=1$, а $f(1,0,0)=0$.

Змінна x_2 є фіктивною, оскільки $f(0,0,0)=f(0,1,0)=1$,
$f(0,0,1)=f(0,1,1)=1$,
$f(1,0,0)=f(1,1,0)=0$ та $f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$.

Змінна x_3 є суттєвою, оскільки $f(1,0,0)=0$, а $f(1,0,1)=1$.

Перейдемо до видалення фіктивної змінної x_2. Для цього у таблиці значень функції *f* закреслимо стовпчик, який відповідає змінній x_2 та ті рядки, які відповідають наборам, у яких $x_2=1$. У результаті отримаємо $g(x_1,x_3)=f(x_1,x_2,x_3)$.

x_1	x_3	g
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3.2.2. Елементарні булеві функції

Розглянемо *n*-місні БФ у випадку $n\in\{0,1,2\}$.

Якщо $n=0$, то отримуємо 0-місні БФ, які не залежать від жодної змінної, тобто є булевими константами 0 або 1.

Якщо $n=1$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^1}=4$ різних одномісних БФ, які наведені у наступній таблиці

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Індекс функції у таблиці співпадає із номером вектора її значень. Легко переконатися, що $f_0=0,\ f_3=1$ (у цих функціях змінна *x* є фіктивною), $f_1=x,\ f_2=\overline{x}$.

Якщо $n=2$, то за теоремою 2 маємо $2^{2^2}=16$ різних двомісних БФ, які наведені у наступній таблиці

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Проведемо аналіз отриманих двомісних БФ.

Розглянемо функції 0, 1 та 2 змінних (операції).

$f_0 = 0,\ f_{15} = 1.$

$f_3 = x,\ f_{12} = \bar{x},\ f_5 = y,\ f_{10} = \bar{y}.$

$f_1(x,y) = x \wedge y,\ f_7(x,y) = x \vee y,$

$f_{13}(x,y) = x \Rightarrow y,\ f_{11}(x,y) = y \Rightarrow x,$

$f_9(x,y) = x \Leftrightarrow y,\ f_6(x,y) = x \oplus y.$

Функція $f_{14}(x,y) = \overline{x \wedge y}$ називається *функцією Шеффера* (штрих Шеффера) і позначається $x \mid y$.

Функція $f_8(x,y) = \overline{x \vee y}$ називається *функцією Пірса* (стрілка Пірса) і позначається $x \downarrow y$.

Розглянуті двомісні БФ (усі функції із попередньої таблиці крім f_2 та f_4) називаються *елементарними булевими функціями* (*операціями двозначної логіки*).

3.2.3. Реалізація булевих функцій формулами

Суперпозиція булевих функцій — підстановка замість аргументів однієї БФ інших БФ. За допомогою суперпозиції можна отримати нові функції, використовуючи елементарні функції.

Нехай *F* — деяка підмножина функцій із P_2. Тоді

1) кожна функція $f \in F$ є *формулою над множиною F*;
2) якщо $f(x_1,\ldots,x_n) \in F$, $A_1,\ldots,A_n$ — вирази, які є або формулами над *F*, або символами змінних, тоді вираз $f(A_1,\ldots,A_n)$ — є *формулою над множиною F*.

Приклад 9. Нехай *F* — множина елементарних функцій. Тоді наступні вирази будуть формулами над *F*:

$$(x_1 \wedge x_2) \oplus (x_3 \Rightarrow \bar{x}_1);$$
$$\overline{(x_1 \downarrow x_3) \Leftrightarrow \overline{x_2 \mid x_1}}.$$

Кожній формулі φ, побудованій за допомогою застосування скінченної кількості правил вигляду а) – b), можна поставити відповідність булеву функцію f_φ, яку задає ця формула.

Приклад 10. Вказати номер БФ $f(x_1,x_2,x_3)$, яка задається формулою

$(\bar{x}_3 \mid x_1) \oplus \overline{x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)}$.

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_3 \mid x_1$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)$	$\overline{x_3 \Rightarrow (x_1 \downarrow x_2)}$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0

1	1	1	0	1	0	0	1	0

Тоді $N\left(\tilde{f}\right)=2^7+2^6+2^5=224$.

При записі формул застосовують той самий пріоритет логічних операцій, що й алгебрі висловлювань. Для спрощення запису будемо записувати кон'юнкцію $x \wedge y$ у вигляді xy. Крім того будемо вважати, що пріоритет операції додавання за модулем 2 нижчий за пріоритет кон'юнкції.

Дві формули φ та ψ назвемо *рівносильними* (*еквівалентними*), якщо відповідні їм булеві функції f_φ та f_ψ рівні. Для формул зберігаються усі рівносильності логіки висловлювань. Крім того, операція додавання за модулем 2 має наступні властивості:

1. $x\oplus y=y\oplus x$;
2. $x\oplus\left(y\oplus z\right)=\left(x\oplus y\right)\oplus z$;
3. $x\left(y\oplus z\right)=xy\oplus xz$;
4. $x\oplus 0=x$;
5. $x\oplus 1=\overline{x}$;
6. $x\oplus x=0$;
7. $x\oplus y=\overline{x\Leftrightarrow y}$;
8. $x\oplus y=x\overline{y}\vee\overline{x}y$.

3.2.4. Двоїсті булеві функції

Функція $f^*\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\overline{f\left(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n\right)}$ називається *двоїстою функцією* до БФ $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Очевидно, що таблиця для двоїстої функції (при фіксованому порядку наборів) отримується із таблиці функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ інвертуванням (тобто замінною 0 на 1 і навпаки) стовпця значень функції та його "перевертанням".

Приклад 11. Вказати двоїсті функції до функції $0, 1, x, \overline{x}, x\wedge y, x\vee y, x\Leftrightarrow y$.

Будемо розглядати усі функції прикладу як функції двох змінних. Тоді

x	y	0	0^*	1	1^*	x	x^*	$\overline{x}$	$\overline{x}^*$	xy	$(xy)^*$	$x\vee y$	$(x\vee y)^*$	$x\Leftrightarrow y$	$(x\Leftrightarrow y)^*$
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0

Як видно з попередньої таблиці

1. $0^*=1$;
2. $1^*=0$;
3. $x^*=x$;
4. $\overline{x}^*=\overline{x}$;

5. $(xy)^* = x \vee y$;

6. $(x \vee y)^* = xy$;

7. $(x \Leftrightarrow y)^* = x \oplus y$.

Співвідношення 1–7 також можна отримати безпосередньо на основі означення операції двоїстості. Наприклад, якщо $f(x, y) = xy$, то

$$f^*(x, y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = x \vee y.$$

Теорема 3. Операція двоїстості має наступні властивості на множині P_2:

1) якщо $g = f^*$, то $f = g^*$, тобто $(f^*)^* = f$ (властивість взаємності);
2) якщо $g(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, то $g^* = f^*(f_1^*, \ldots, f_m^*)$ (функція, двоїста до суперпозиції функцій, є суперпозицією двоїстих функцій).

Доведення.

1) Нехай $g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$. Тоді

$$g^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} = \overline{\overline{f(\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)}} = f(x_1, \ldots, x_n).$$

2) $$g^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{g(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} = \overline{f\left(\overline{\overline{f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}}, \ldots, \overline{\overline{f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}}\right)} =$$

$$= f^*\left(\overline{f_1(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}, \ldots, \overline{f_m(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}\right) = f^*\left(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Наслідком теореми 3 є *принцип двоїстості*: для того, щоб отримати двоїсту формулу до формули φ над множиною $\{0, 1, \bar{x}, x \wedge y, x \vee y\}$, треба у формулі φ всюди замінити 0 на 1, 1 на 0, $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$.

Приклад 12. Вказати формулу, двоїсту до формули $(\bar{x} \vee 0 \vee \overline{x \wedge y}) \wedge (\overline{y \wedge 1} \vee x \vee \bar{z})$.

$$\left((\bar{x} \vee 0 \vee \overline{x \wedge y}) \wedge (\overline{y \wedge 1} \vee x \vee \bar{z})\right)^* = (\bar{x} \wedge 1 \wedge \overline{x \vee y}) \vee (\overline{y \vee 0} \wedge x \wedge \bar{z}).$$

Приклад 13. Вказати двоїсту до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x$.

$$f^*(x, y, z) = ((\bar{x} \vee z) \oplus \bar{y}x)^* = (\bar{x} \vee z)^* \Leftrightarrow (\bar{y}x)^* = (\bar{x})^* z^* \Leftrightarrow (\bar{y})^* \vee x^* = \bar{x}z \Leftrightarrow \bar{y} \vee x.$$

Якщо для БФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ виконується умова $f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається *самодвоїстою*.

Приклад 14. Довести, що БФ $x \oplus y \oplus z$ є самодвоїстою.

$$(x \oplus y \oplus z)^* = (x \oplus y)^* \Leftrightarrow z^* = (x^* \Leftrightarrow y^*) \Leftrightarrow z = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = \overline{x \Leftrightarrow y} \oplus z = x \oplus y \oplus z.$$

3.3. Спеціальні форми подання булевих функцій

Постає питання, чи можна записати довільну булеву функцію у вигляді формули?

3.3.1. Розклад булевих функцій за змінними

Нехай $\sigma \in \mathbb{Z}_2$. Уведемо позначення

$$x^{\sigma}=\begin{cases} x, & \text{ÿêù î } \sigma=1, \\ \overline{x}, & \text{ÿêù î } \sigma=0. \end{cases}$$

Легко переконатися, що

1) $x^{\sigma}=x\sigma\vee\overline{x}\,\overline{\sigma}$;
2) $x^{\sigma}=1$ тоді і тільки тоді, коли $x=\sigma$.

Теорема 4 (про розклад булевої функції за однією змінною). Для довільної булевої функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ справджується співвідношення

$$f\left(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\right)=\overline{x}_n\wedge f\left(x_1,\ldots,x_{n-1},0\right)\vee x_n\wedge f\left(x_1,\ldots,x_{n-1},1\right). \tag{1}$$

Шляхом багаторазового застосування (1) можна отримати *теорему про розклад БФ за змінними*.

Теорема 5. Для довільної булевої функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ і довільного $k\ \left(1\le k\le n\right)$ справджується співвідношення

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in\mathbb{Z}_2^k}x_1^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge x_k^{\sigma_k}\wedge f\left(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n\right), \tag{2}$$

де диз’юнкція береться по усім двійковим наборам довжини *k*.

Приклад 15. Розкласти БФ $f\left(x,y,z\right)=x\downarrow\left(\left(\overline{y}\Rightarrow x\right)\oplus z\right)$ за змінними

а) *y*;
б) *x* та *z*.

а) Запишемо розклад за змінною *y*:

$$f\left(x,y,z\right)=\overline{y}\,f\left(x,0,z\right)\vee y\,f\left(x,1,z\right).$$

$$f\left(x,0,z\right)=x\downarrow\left(\left(\overline{0}\Rightarrow x\right)\oplus z\right)=x\downarrow\left(\left(1\Rightarrow x\right)\oplus z\right)=x\downarrow\left(\left(\overline{1}\vee x\right)\oplus z\right)=\overline{x\vee\left(x\oplus z\right)}=$$
$$=\overline{x}\wedge\overline{x\oplus z}=\overline{x}\left(x\Leftrightarrow z\right)=\overline{x}\left(\overline{x}\,\overline{z}\vee xz\right)=\overline{x}\,\overline{x}\,\overline{z}\vee\overline{x}\,xz=\overline{x}\,\overline{z}\vee 0=\overline{x}\,\overline{z}.$$
$$f\left(x,1,z\right)=x\downarrow\left(\left(\overline{1}\Rightarrow x\right)\oplus z\right)=x\downarrow\left(\left(0\Rightarrow x\right)\oplus z\right)=x\downarrow\left(1\oplus z\right)=x\downarrow\overline{z}=\overline{x\vee\overline{z}}=\overline{x}\,z.$$

Тому $f\left(x,y,z\right)=\overline{y}\,\overline{x}\,\overline{z}\vee y\,\overline{x}\,z=\overline{x}\left(\overline{y}\,\overline{z}\vee yz\right)$.

б) Проведемо розклад за змінними *x* та *z*:

$$f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,\overline{z}\;f\left(0,y,0\right)\vee\overline{x}\,z\;f\left(0,y,1\right)\vee x\overline{z}\;f\left(1,y,0\right)\vee xz\;f\left(1,y,1\right).$$

$$f\left(0,y,0\right)=0\downarrow\left(\left(\overline{y}\Rightarrow 0\right)\oplus 0\right)=0\downarrow\left(y\oplus 0\right)=0\downarrow y=\overline{0\vee y}=\overline{y}.$$

$$f\left(0,y,1\right)=0\downarrow\left(\left(\overline{y}\Rightarrow 0\right)\oplus 1\right)=0\downarrow\left(y\oplus 1\right)=0\downarrow\overline{y}=\overline{0\vee\overline{y}}=y.$$

$$f\left(1,y,0\right)=1\downarrow\left(\left(\overline{y}\Rightarrow 1\right)\oplus 0\right)=1\downarrow\left(1\oplus 0\right)=1\downarrow 1=0.$$

$$f\left(1,y,1\right)=1\downarrow\left(\left(\overline{y}\Rightarrow 1\right)\oplus 1\right)=1\downarrow\left(y\oplus 1\right)=1\downarrow\overline{y}=\overline{1\vee\overline{y}}=\overline{1}=0.$$

Тому

$$f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,\overline{z}\,\overline{y}\vee\overline{x}\,z\,y\vee x\overline{z}\,0\vee xz\,0=\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee\overline{x}\,y\,z.$$

Нехай $T\left(f\right)=\left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right)\middle|\,f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=1\right\}$. Застосовуючи (2) у випадку $k=n$, отримуємо *теорему про розклад БФ за усіма змінними*.

Теорема 6. Для довільної булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$, такої, що $f \neq 0$, справджується співвідношення

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in T(f)} x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Теореми 4–6 є теоремами про "диз’юнктивний розклад". Має місце теорема про "кон'юнктивний розклад".

Теорема 7. Для довільної булевої функції $f(x_1,\ldots,x_n)$ і довільного k $(1 \leq k \leq n)$ справджується співвідношення

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)\in\mathbb{Z}_2^k} \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \right), \quad (3)$$

де кон’юнкція береться по усім двійковим наборам довжини k.

Доведення випливає із теореми 5 та принципу двоїстості.

Приклад 16. Провести "кон'юнктивний розклад" БФ $f(x,y,z) = x \downarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \oplus z)$ за змінними x та z.

За формулою (3) маємо

$$f(x,y,z) = (x \vee z \vee f(0,y,0))(x \vee \bar{z} \vee f(0,y,1))(\bar{x} \vee z \vee f(1,y,0))(\bar{x} \vee \bar{z} \vee f(1,y,1)).$$

Тому

$$f(x,y,z) = (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z \vee 0)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee 0) = (x \vee z \vee \bar{y})(x \vee \bar{z} \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}).$$

3.3.2. Нормальні форми булевих функцій

Нехай $\{x_1,\ldots,x_n\}$ — фіксований набір (алфавіт) змінних.

Формула $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n,\ \sigma_j \in \mathbb{Z}_2,\ j = \overline{1,r}$, називається *елементарною кон’юнкцією*, побудованою із змінних $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Кількість змінних, які входять в елементарну кон’юнкцію, називається її *рангом*.

Формула $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$, де $r \geq 1,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n,\ \sigma_j \in \mathbb{Z}_2,\ j = \overline{1,r}$, називається *елементарною диз’юнкцією рангу* r, побудованою із змінних $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Приклад 17. Формула $x_1\bar{x}_4x_5$ — елементарна кон’юнкція рангу 3. Формула $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_5 \vee \bar{x}_6$ — елементарна диз’юнкція рангу 4. Формули $x_1x_2\bar{x}_1x_3$ та $x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_4$ не є ні елементарними кон’юнкціями, ні елементарними диз’юнкціями.

Теорема 8. Із змінних $\{x_1,\ldots,x_n\}$ можна побудувати $3^n - 1$ різних елементарних кон’юнкцій (диз’юнкцій).

Задача 3. Підрахувати кількість різних елементарних диз’юнкцій рангу r, які можна побудувати із n змінних.

Вираз $K_1 \vee \ldots \vee K_s$, де K_i — елементарна кон’юнкція, $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1,s}$, називається *диз’юнктивною нормальною формою* (ДНФ), побудованою із змінних $\{x_1,\ldots,x_n\}$.

Вираз $D_1 \wedge \ldots \wedge D_s$, де D_i — елементарна диз'юнкція, $D_i \neq D_j$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, s}$, називається *кон'юнктивною нормальною формою* (КНФ), побудованою із змінних $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Приклад 18. Формула $\bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$ — ДНФ, побудована із змінних x_1, x_2, x_3, x_4, формула $(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ — КНФ, побудована із тих самих змінних. Формула $x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 x_2$ не є ДНФ (у неї входять дві однакові елементарні кон'юнкції).

Теорема 9. Із змінних $\{x_1, \ldots, x_n\}$ можна побудувати $2^{3^n - 1} - 1$ різних ДНФ (КНФ).

Теорема 10. Для кожної відмінної від 0 (1) n-місної БФ $f(x_1, \ldots, x_n)$ існує рівносильна їй ДНФ (КНФ).

Алгоритм побудови НФ формули над множиною елементарних функцій

1. За допомогою рівносильних перетворень позбавитися від операцій $\oplus, \Leftrightarrow, \Rightarrow$.
2. За допомогою рівносильностей де Моргана віднести заперечення до окремих змінних.
3. Відкрити (увести) дужки то звести подібні доданки з використанням законів ідемпотентності, несуперечності, виключення третього та властивостей булевих констант.

Приклад 19. Побудувати ДНФ та КНФ БФ $\overline{(xy \oplus \bar{z}) \mid (\bar{z} \vee zx)} \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x})$ методом рівносильних перетворень.

а) Будуємо ДНФ:

$$\overline{(xy \oplus \bar{z}) \mid (\bar{z} \vee zx)} \Rightarrow (\bar{z} \downarrow \bar{x}) = ((xy \oplus \bar{z}) \mid (\bar{z} \vee zx)) \vee (\overline{\bar{z} \vee \bar{x}}) = ((xyz \vee \overline{xy}\,\bar{z}) \mid (\bar{z} \vee x)) \vee zx =$$

$$= ((xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) \mid (\bar{z} \vee x)) \vee zx = \overline{(xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee x)} \vee zx =$$

$$= \overline{xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee \overline{\bar{z} \vee x} \vee zx = \overline{xyz} \wedge \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z}} \vee z\bar{x} \vee zx = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (xy \vee z) \vee$$

$$\vee z(\bar{x} \vee x) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})xy \vee (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})z \vee z = \bar{x}xy \vee \bar{y}xy \vee \bar{z}xy \vee z = \bar{z}xy \vee z = xy \vee z.$$

б) Будуємо КНФ:

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$

Приклад 20. Побудувати КНФ функції $x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$.

$$x\bar{z} \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}z) \vee \bar{x}z = x(\bar{z} \vee \bar{y}) \vee \bar{x}z = (x \vee \bar{x}z)(\bar{x}z \vee \bar{z} \vee \bar{y}) = (x \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

3.3.3. Досконалі нормальні форми

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція), побудована із змінних $x_1, \ldots, x_n$, називається *повною*, якщо її ранг рівний n.

Повна елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ $(\sigma_i \in \mathbb{Z}_2,\ i = \overline{1, n})$ приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли $x_1 = \sigma_1, \ldots, x_n = \sigma_n$.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ), побудованою із змінних $x_1,\ldots,x_n$, називається диз'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних кон'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ), побудованою із змінних $x_1,\ldots,x_n$, називається кон'юнкція деякого числа різних між собою повних елементарних диз'юнкцій, побудованих із цих змінних.

Приклад 21. $xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z$ — ДДНФ, побудована із змінних $\{x,y,z\}$, $(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)$ — ДКНФ, побудована із тих самих змінних.

Теорема 11. Із змінних $\{x_1,\ldots,x_n\}$ можна побудувати $2^{2^n}-1$ різних ДДНФ (ДКНФ).

Доведення самостійно.

Теорема 12. Для кожної відмінної від 0 (1) *n*-місної БФ $f(x_1,\ldots,x_n)$ існує єдина рівносильна їй ДДНФ (ДКНФ).

Наслідок. Довільну БФ можна записати у вигляді формули над системою функцій $\{\neg,\wedge,\vee\}$.

Розглянемо два методи побудови ДДНФ (ДКНФ).

1) **Метод рівносильних перетворень:**
   а) За допомогою рівносильних перетворень будується ДНФ (КНФ) БФ, заданої формулою.
   б) Проводиться *поповнення* неповних елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій) за допомогою формул:
   I) $K = K \wedge 1 = K \wedge (x \vee \overline{x}) = Kx \vee K\overline{x}$.
   II) $D = D \vee 0 = D \vee x\overline{x} = (D \vee x)(D \vee \overline{x})$.
   в) Записується диз'юнкція *різних* елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцію), яка і шуканою ДДНФ (ДКНФ).

2) **Табличний метод:**
   а) Будується таблиця значень БФ.
   б) Відмічаються набори $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, на яких функція приймає значення 1 (0).
   в) Кожному такому набору ставиться у відповідність *повна* елементарна кон'юнкція $x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ (елементарна диз'юнкція $x_1^{\overline{\alpha}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\alpha}_n}$).
   г) Записується диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, отриманих на попередньому етапі (кон'юнкція елементарних диз'юнкцію), яка і є шуканою ДДНФ (ДКНФ).

Приклад 22. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x,y,z) = \overline{(xy \oplus \overline{z}) | (\overline{z} \vee zx)} \Rightarrow (\overline{z} \downarrow \overline{x})$ (функції прикладу 19) з використанням табличного методу та методу рівносильних перетворень.

1) Використаємо табличний метод.
   Побудуємо таблицю значень функції $f(x,y,z)$.

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$xy \oplus \overline{z}$	zx	$\overline{z} \vee zx$	$(xy \oplus \overline{z}) \mid (\overline{z} \vee zx)$	$\overline{(xy \oplus \overline{z}) \mid (\overline{z} \vee zx)}$	$\overline{x}$	$\overline{z} \downarrow \overline{x}$	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1

Для побудови ДДНФ відмічаємо 2-й, 4-й, 6-й, 7-й та 8-ий набори.

Записуємо відповідні повні елементарні кон'юнкції:

$$x^0 y^0 z^1 = \overline{x}\,\overline{y}\,z\,,\quad x^0 y^1 z^1 = \overline{x}\,y\,z\,,\quad x^1 y^0 z^1 = x\overline{y}z\,,\quad x^1 y^1 z^0 = xy\overline{z}\,,\ x^1 y^1 z^1 = xyz\,.$$

Записуємо ДДНФ: $\overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$.

Для побудови ДКНФ відмічаємо 1-й, 3-й та 5-й набори та записуємо відповідні елементарні диз'юнкції:

$$x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}} = x^1 \vee y^1 \vee z^1 = x \vee y \vee z\,,$$

$$x^{\overline{0}} \vee y^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}} = x^1 \vee y^0 \vee z^1 = x \vee \overline{y} \vee z\,,\ x^{\overline{1}} \vee y^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}} = \overline{x} \vee y \vee z\,.$$

Записуємо ДКНФ: $(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)$.

2) Після спрощень отримаємо запис функції за допомогою ДНФ $f(x,y,z) = xy \vee z$ (див. приклад 19).

Проведемо поповнення елементарних кон'юнкцій:

$$xy = xy \wedge 1 = xy(z \vee \overline{z}) = xyz \vee xy\overline{z}\,.$$

$$z = (x \vee \overline{x})z = xz \vee \overline{x}z = x(y \vee \overline{y})z \vee \overline{x}(y \vee \overline{y})z = xyz \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z\,.$$

Записуємо ДДНФ: $xyz \vee xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z$.

Для знаходження ДКНФ скористаємося КНФ $(x \vee z)(y \vee z)$ функції $f(x,y,z)$.

Проведемо поповнення елементарних диз'юнкцій:

$$x \vee z = x \vee z \vee 0 = x \vee z \vee y\,\overline{y} = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)\,.$$

$$y \vee z = y \vee z \vee x\,\overline{x} = (x \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)\,.$$

Записуємо ДКНФ:

$$(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)\,.$$

3.3.4. Поліноми Жегалкіна

Поліномом (многочленом) Жегалкіна називається вираз вигляду

$$\tilde{K}_0 \oplus \tilde{K}_1 \oplus \ldots \oplus \tilde{K}_m\,,$$

де $\tilde{K}_0 \in \mathbb{Z}_2$, $\tilde{K}_i$ — різні елементарні кон'юнкції, які не містять заперечення змінних, $i = \overline{1,m}$.

Степенем полінома Жегалкіна називається максимальний із рангів елементарних кон’юнкцій, які входять у поліном.

Приклад 23. $1\oplus y\oplus xz\oplus xyz$ — поліном Жегалкіна 3-го степеня.

Алгоритм побудови полінома Жегалкіна БФ $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

1. Побудувати ДДНФ $K_1\vee\ldots\vee K_s$ функції f, де K_i — повні елементарні кон’юнкції, побудовані із змінних $\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$.
2. Замінити формулу $K_1\vee\ldots\vee K_s$ рівносильною їй формулою $K_1\oplus\ldots\oplus K_s$.
3. Для кожної змінної x_i виконати заміну $\overline{x}_i$ на $x_i\oplus 1$, $i=\overline{1,n}$.
4. Розкрити дужки та звести подібні доданки з використанням рівносильності $x\oplus x=0$.

Обґрунтування алгоритму. Пояснення потребує лише другий крок алгоритму, оскільки для довільних БФ $f,g\in P_2$ $f\vee g\neq f\oplus g$. Покажемо, що для довільних різних повних елементарних кон’юнкцій K_1, K_2 та довільного $\tilde{\alpha}=\left(\alpha_1,\ldots.\alpha_n\right)\in\mathbb{Z}_2^n$ $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\vee K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\oplus K_2\left(\tilde{\alpha}\right)$.

Оскільки кожна повна елементарна кон’юнкція приймає значення 1 лише на одному наборі, то неможливим є одночасне виконання рівностей $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)=1$, $K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=1$.

Якщо $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)=K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=0$, то $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\vee K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=0\vee 0=0\oplus 0=K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\oplus K_2\left(\tilde{\alpha}\right)$.

Якщо $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)=1$ та $K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=0$, то $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\vee K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=1\vee 0=1\oplus 0=K_1\left(\tilde{\alpha}\right)\oplus K_2\left(\tilde{\alpha}\right)$.

Випадок $K_1\left(\tilde{\alpha}\right)=0$, $K_2\left(\tilde{\alpha}\right)=1$ аналізується аналогічно.

Теорема 13. Для кожної БФ $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in P_2$ існує єдиний рівносильний їй поліном Жегалкіна.

Доведення. Існування полінома Жегалкіна для довільної БФ випливає з можливості застосування вищенаведеного алгоритму до довільної БФ, відмінної від нуля (якщо $f\equiv 0$, то 0 — поліном Жегалкіна функції f). Єдиність випливає із того, що кількість різних поліномів Жегалкіна, які можна побудувати із n змінних, рівна 2^{2^n}, і це число співпадає із кількістю різних n-місних БФ.

Приклад 24. Побудувати поліном Жегалкіна БФ
$f\left(x,y,z\right)=\overline{\left(xy\oplus\overline{z}\right)|\left(\overline{z}\vee zx\right)}\Rightarrow\left(\overline{z}\downarrow\overline{x}\right)$.

Запишемо ДДНФ $f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,\overline{y}\,z\vee\overline{x}\,y\,z\vee x\overline{y}z\vee xy\overline{z}\vee xyz$

Замінимо "$\oplus$" на "$\vee$": $f\left(x,y,z\right)=\overline{x}\,\overline{y}\,z\oplus\overline{x}\,y\,z\oplus x\overline{y}z\oplus xy\overline{z}\oplus xyz$.

Замінимо $\overline{x}$ на $x\oplus 1$:
$f\left(x,y,z\right)=\left(x\oplus 1\right)\left(y\oplus 1\right)z\oplus\left(x\oplus 1\right)yz\oplus x\left(y\oplus 1\right)z\oplus xy\left(z\oplus 1\right)\oplus xyz$.

Виконуємо спрощення

$$f\left(x,y,z\right)=\left(x\oplus 1\right)\left(\left(y\oplus 1\right)z\oplus yz\right)\oplus x\left(y\oplus 1\right)z\oplus xy\left(z\oplus 1\oplus z\right)=$$

$$= (x \oplus 1)(yz \oplus z \oplus yz) \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy = (x \oplus 1)z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = xz \oplus z \oplus xyz \oplus xz \oplus xy = \\ = xyz \oplus xy \oplus z\,.$$

3.4. Застосування булевих функцій в теорії контактних та логічних схем

3.4.1. Контактні схеми

Під *мережею* будемо розуміти деякий скінченний набір *вершин*, між деякими парами з яких встановлені *зв'язки*.

Будемо вважати, що у множині вершин мережі виділено спеціальні вершини, які називаються *полюсами*.

Під *контактною схемою* будемо розуміти мережу із двома полюсами (джерелом та стоком), ребра якої називаються *контактами* і помічені змінними $x_1,\ldots,x_n$ або їх запереченнями.

Якщо контакт помічений змінною без заперечення, то він називається *замикальним,* у протилежному випадку — *відмикальним*. Приклади контактних схем наведено на рис. 24.

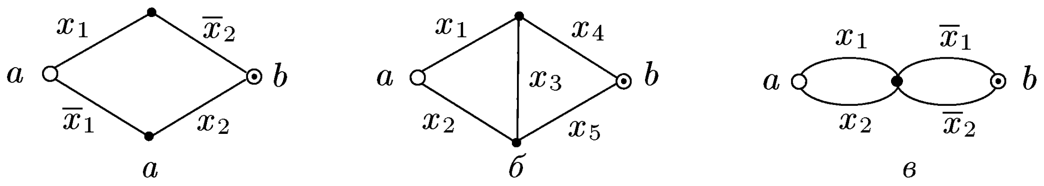


Рис. 24. Контактні схеми

Функція $f(\tilde{x}) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}$, де диз'юнкція береться по усім простим шляхам (які не містять кратні вершини) від входу *a* до виходу *b*, називається *функцією провідності контактної схеми*.

Приклад 25. Вказати функції провідності схем, наведених на рис. 24.

а) $f(\tilde{x}) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$;

б) $f(\tilde{x}) = x_1x_4 \vee x_1x_3x_5 \vee x_2x_5 \vee x_2x_3x_4$;

в) $f(\tilde{x}) = x_1\overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_2 = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$.

Часто при зображенні контактних схем використовуються провідники та ключі-перемикачі, які ставляться у відповідність кожній змінній. При цьому послідовне з'єднання провідників відповідає кон'юнкції (рис. 25), а паралельне з'єднання — диз'юнкції (рис. 26).

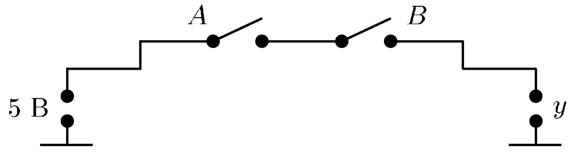


Рис. 25. Послідовні ключі

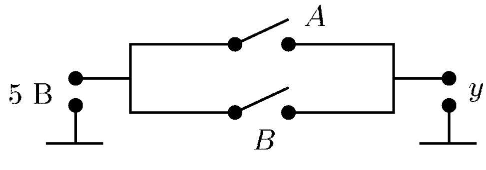


Рис. 26. Паралельні ключі

Для фізичної реалізації заперечення використовується реле з розмикальним контактом, схема якого наведена на рис. 27.

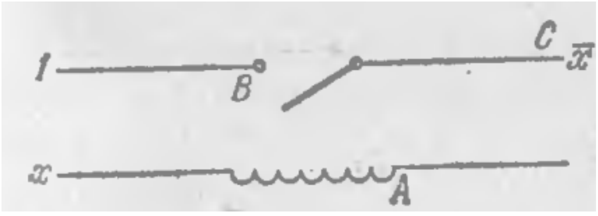


Рис. 27. Реле з розмикальним контактом

Якщо по обвитці A струм не проходить $(x=0)$, то пружина відтягує контакт B уверх і ланцюг замикається. Якщо $(x=1)$, то контакт B притягується і на виході C струму нема.

Складністю контактної схеми називається кількість контактів схеми. Так, наприклад, контактні схеми, зображені на рис. 24*а* та рис. 24*в*, мають складність 4, а контактна схема з рис. 24*б* має складність 5.

Приклад 26. Для функції $x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ побудувати контактну схему, яка реалізує цю функцію та має мінімальну складність (3).

Спростимо функцію провідності схеми.

$$x_1\bar{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = \left(x_1 \vee \bar{x}_1x_2\right)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = \left(x_1 \vee x_2\right)\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 \vee x_2\left(\bar{x}_3 \vee\right.$$

Отримана формула суттєво залежить від трьох змінних. Тому складність відповідної цій функції контактної схеми не може бути меншою за 3. Контактна схема складності 3 зображена на рис. 28.

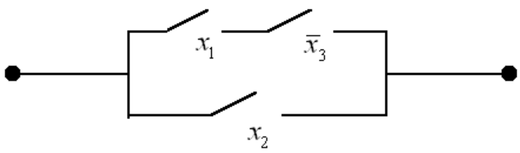


Рис. 28. Контактна схема

Приклад 27. Побудувати якомога простішу контактну схему, функція провідності якої залежить від трьох змінних і має номер 220.

$$220 = 128 + 92 = 128 + 64 + 28 = 128 + 64 + 16 + 12 = 128 + 64 + 16 + 8 + 4 = 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2$$
.

Звідси отримуємо вектор значень функції $\tilde{f} = (1,1,0,1,1,1,0,0)$, на основі якого будуємо таблицю значень функції $f(x_1, x_2, x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Запишемо ДКНФ функції $f(x_1, x_2, x_3)$:

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$.

Проведемо спрощення:

$$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) =$$
$$= (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = \overline{x}_2 \vee (x_1 \vee x_3)\overline{x}_1 = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_3 .$$

Зобразимо відповідну контактну схему:

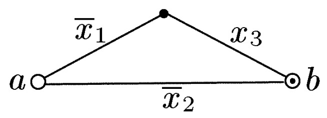


Рис. 29. Контактна схема до прикладу 27

Приклад 28. Комітет складається із чотирьох учасників. Рішення виноситься більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення приймається, якщо голова комітету "голосує за". Побудувати контактну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.

Поставимо у відповідність кожному члену комісії булеву змінну x_i таким чином, щоб $x_i = 1$ тоді і тільки тоді, якщо *i*-ий член комітету "голосує за", $i = 1, 2, 3, 4$ (голові комітету відповідає змінна x_1). Розглянемо БФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, яка приймає значення 1 тоді і тільки тоді, коли комітет приймає рішення. Легко бачити, що $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$.

3.4.2. Схеми із логічних елементів

Логічні схеми у комп'ютерах та інших електронних пристроях оперують з наборами вхідних та вихідних даних, що складаються з нулів та одиниць. Булеві функції використовуються для *аналізу* та *синтезу* логічних схем.

Логічний елемент — пристрій, який реалізовує деяку булеву функцію. Його входи відповідають булевим змінним, а виходи — значенню функції. Найбільш вживані логічні елементи наведені на рис. 30.

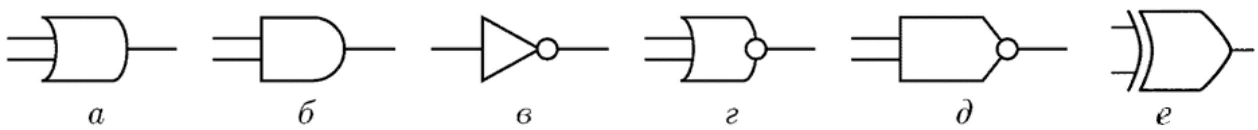


Рис. 30. Зображення логічних елементів в стандарті ISO
а) диз'юнктор; *б*) кон'юнктор; *в*) інвертор; *г*) стрілка Пірса; *д*) штрих Шефера; *е*) суматор за модулем 2

Логічна схема будується з логічних елементів і зображає суперпозицію цих елементів. *Складністю логічної схеми* називається кількість логічних елементів, які входять у схему.

За наслідком до теореми 12 будь-яку булеву функцію можна записати у вигляді формули над системою $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Тому довільну булеву функцію можна реалізувати схемою з інверторів, кон'юнкторів та диз'юнкторів.

Оскільки

$$\overline{x} = x \downarrow x,\ xy = \overline{x} \downarrow \overline{y} = \left(x \downarrow x\right) \downarrow \left(y \downarrow y\right), x \vee y = \overline{x \downarrow y} = \left(x \downarrow y\right) \downarrow \left(x \downarrow y\right),$$

то будь-яку БФ можна реалізувати за допомогою схеми, яка містить лише елементи, які реалізовують стрілку Пірса.

Приклад 29. Побудувати схему, яка реалізує функцію $f\left(x, y, z\right) = \left(x \vee y\right) z$.

Відповідна схема складності 2 зображена на рис. 31.

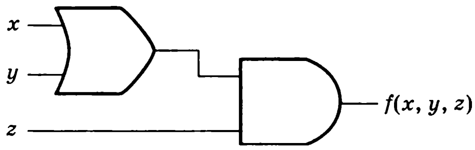


Рис. 31. Логічна схема для функції $f\left(x, y, z\right) = \left(x \vee y\right) z$

Задача 4. Підрахувати кількість *n*-місних БФ, які можна реалізувати схемами, побудованими із кон'юкторів та суматорів за модулем 2.

У теорії логічних схем розглядаються дві основні задачі: аналіз та синтез.

Аналіз логічної схеми полягає у побудові булевої функції, яку реалізує даний логічний пристрій (схема). За даною логічною схемою можна побудувати формулу, що відповідає шуканій функції або вказати значення функції для всіх наборів вхідних даних.

Приклад 30. Проаналізувати логічну схему, наведену на рис. 32.

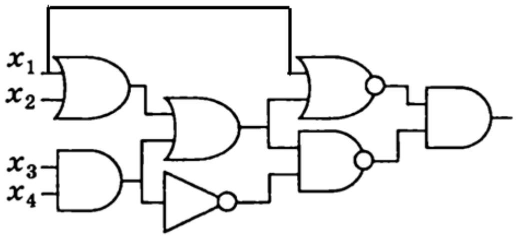


Рис. 32. Логічна схема

Запишемо формулу для функції $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$, яку реалізує логічна схема:

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4\right) \downarrow x_1\right) \wedge \left(\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3 x_4\right) \mid \overline{x_3 x_4}\right).$$

Задача синтезу схеми полягає у побудові логічної схеми, яка реалізує дану булеву функцію. Функція може бути задана таблицею або за допомогою формули. Використовуючи правила побудови ДДНФ та ДКНФ, можна отримати формулу над множиною $\{\neg, \wedge, \vee\}$, а потім реалізувати операції формули за допомогою відповідних логічних елементів.

Вартість логічної схеми залежить від її складності. Тому часто поряд з двома вищенаведеними задачами розглядають *задачу спрощення логічної схеми*.

Приклад 32. Спростити логічну схему із прикладу 31.

Спростимо формулу для БФ, яка реалізується схемою складності 7, наведеною на рис. 32:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4} \wedge \overline{\left(x_1 \vee x_2\right)\overline{x_3x_4}} = \overline{x_1 \vee x_2}\,\overline{x_3x_4}\left(\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3x_4\right) =$$

$$= \overline{x_1 \vee x_2}\,\overline{x_3x_4}\,\overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_1 \vee x_2}\,\overline{x_3x_4}x_3x_4 = \overline{x_1 \vee x_2}\,\overline{x_3x_4} = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3x_4} = \left(x_1 \vee x_2\right) \downarrow \left(x_3x_4\right).$$

Реалізуємо отриману формулу схемою. Схема, наведена на рис. 33, має складність 3.

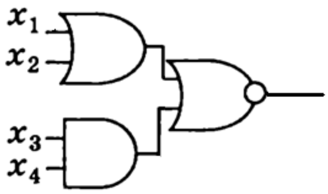


Рис. 33. Схема після спрощення

Задача 5. Спростити логічну схему, наведену на рис. 34, і вказати складність початкової та спрощеної схем.

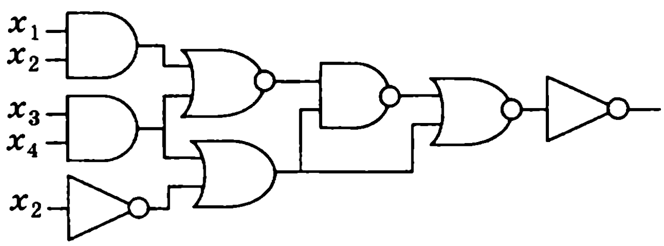


Рис. 34. Схема для спрощення

4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

4.1. Основні поняття теорії графів

4.1.1. Предмет теорії графів. Основні означення.

Виникнення теорії графів пов'язано із *задачею про Кенігсберзькі мости*. Схема міста Кенігсберга наведена на рис. 35. Потрібно обійти усі чотири ділянки суші, пройшовши по кожному мосту один раз.

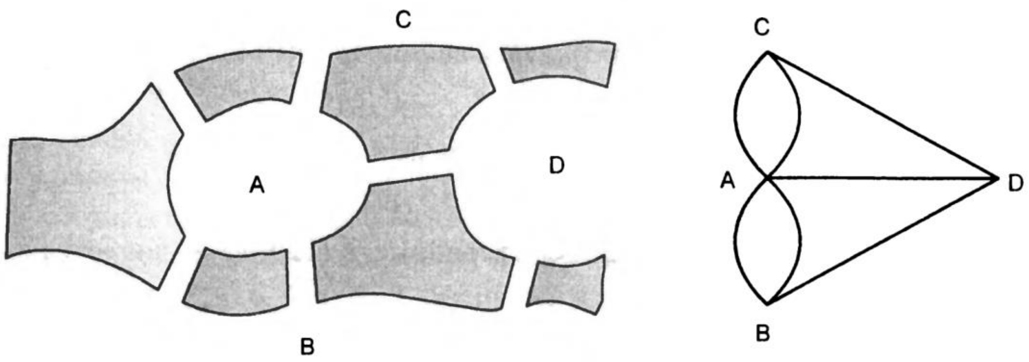


Рис. 35. Кенігсберзькі мости

Ще однією класичною задачею є *задача про три криниці*. Потрібно прокласти стежки від кожного будинку до кожної криниці таким чином, щоб стежки не перетиналися (див. рис. 36).

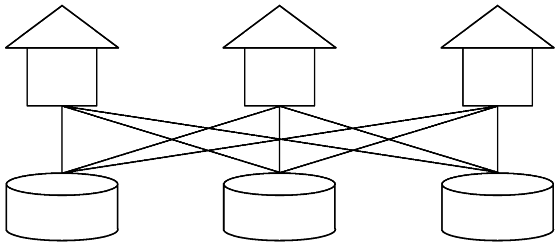


Рис. 36. Ілюстрація до задачі про три криниці

Мультимножина (набір) — невпорядкована система об'єктів, *можливо із повтореннями*. При записі елементи мультимножини записуються у фігурних або трикутних дужках.

Приклад мультимножини: $\{a,b,b,c,a,a\}$.

Графом G називається пара (V,E), де V — *множина вершин* графа, E — *мультимножина ребер* графа.

Якщо множини V та E — скінченні, то граф називається *скінченним*.

Елементи мультимножини E називаються *ребрами* графа. Ребро e, яке з'єднує вершини a та b позначається $\langle a,b\rangle$ $\left(e=\langle a,b\rangle\in E,\ a,b\in V\right)$, при цьому вершини a та b називаються *суміжними* та *інцидентними* ребру e. Виокремлюють три види ребер: *ланки* або невпорядковані ребра $\left(e=\{a,b\}\in \bar{E}\right)$. Набір ланок позначається $\bar{E}$;

дуги або впорядковані ребра $\left(e=(a,b)\in\vec{E}\right)$, $\vec{E}$ — набір дуг;

петлі — ребра вигляду $e=(a,a)$, початок і кінець якого співпадають.

Надалі будемо вважати, що *усі графи є скінченними* і петлі є різновидом дуг, тобто $E=\bar{E}\cup\vec{E}$.

Кількість вершин графа називається його *порядком*. Приклад діаграми графа наведено на рис. 37.

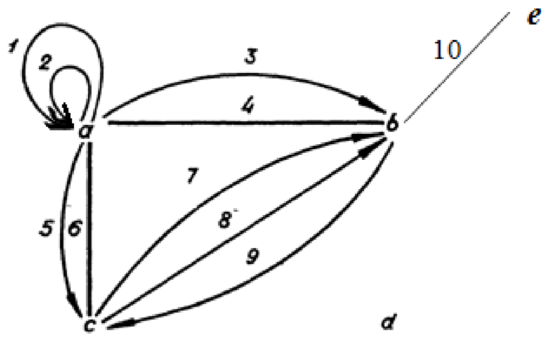


Рис. 37. Діаграма графа

Кількість ланок, інцидентних вершині *v*, будемо позначати $\overline{\deg}(v)$.

Кількість дуг, які входять у вершину *v*, будемо позначати $\deg^{+}v$.

Кількість дуг, які виходять із вершини *v*, будемо позначати $\deg^{-}v$.

Величина $\deg v$, яка обчислюється за формулою

$$\deg v=\overline{\deg}\,v+\deg^{+}v+\deg^{-}v,$$

називається степеню вершини *v*.

Приклад. Обчислимо степінь вершини *a* графа, діаграма якого зображена на рис. 14.

$$\overline{\deg}(a)=2,\ \deg^{+}(a)=2,\ \deg^{-}(a)=4,\ \deg(a)=2+2+4=8.$$

Вершина *v* називається *ізольованою*, якщо $\deg(v)=0$.

Вершина *v* називається *висячою*, якщо $\deg(v)=1$.

Для графа, наведеного на рис. 37, вершина *d* є ізольованою, а вершина *e* — висяча.

Лема про рукостискання. Для довільного графа (V,E)

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|;$$

$$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)+\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)=2\left|\vec{E}\right|.$$

Граф $G_1=(E_1,V_1)$ називається *підграфом* графа $G=(V,E)$, якщо $V_1\subseteq V$, $E_1\subseteq E$.

Приклад. Граф, діаграма якого наведена на рис. 38, є підграфом графа з рис. 37.

Ізоморфізм графів — це бієкція (взаємно-однозначна відповідність) множин вершин графів, яка зберігає суміжність вершин. Тобто графи $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ *ізоморфні*, якщо бієкція $f : V_1 \to V_2$ задовольняє умову:
для довільних $a, b \in V_1$ $\langle a, b \rangle \in E_1 \Leftrightarrow \langle f(a), f(b) \rangle \in E_2$.

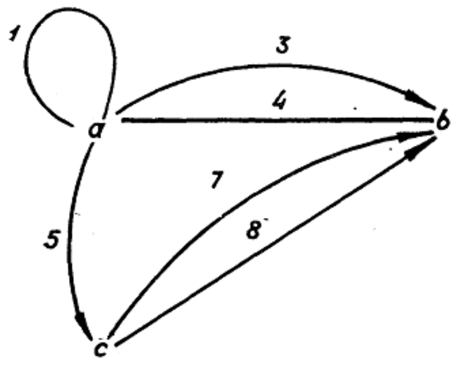


Рис. 38. Підграф графа з рис. 37.

Теорема 1. Ізоморфізм графів є відношенням відношення еквівалентності (на множині графів).

Приклад. Графи, діаграми яких наведені на рис. 39, є ізоморфними.

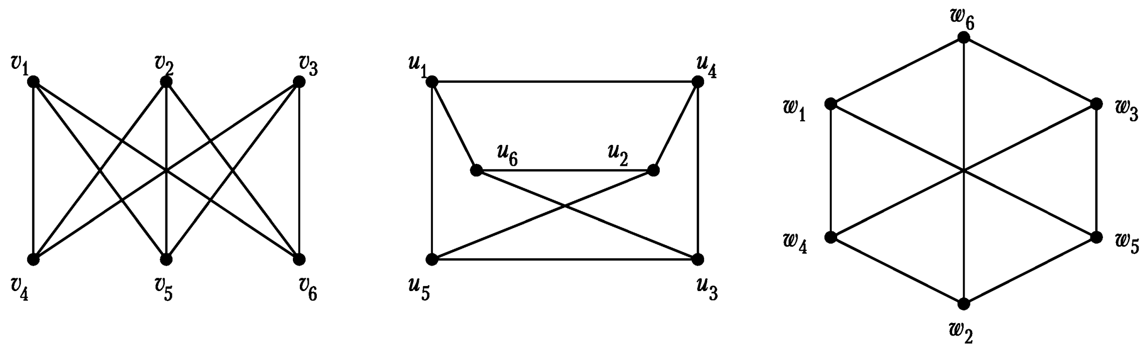


Рис. 39. Ізоморфні графи

Слід зазначити, що кількість вершин, ребер та степені вершин не визначають граф однозначно. На рис. 17 наведено діаграми двох неізоморфних графів, для яких усі відповідні параметри співпадають:

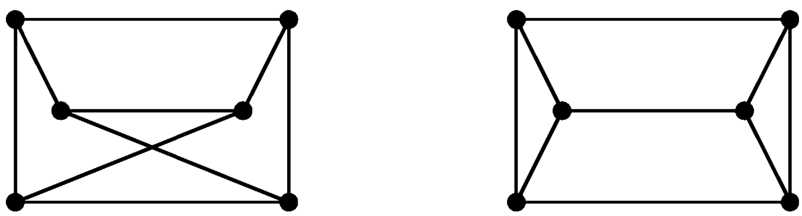


Рис. 40. Діаграми неізоморфних графів

4.1.2. Способи задання графів.

Основні способи задання графів:

а) перелік елементів:
Множин E та V задаються переліком їх елементів.

Приклад. Задамо переліком елементів граф, діаграма якого наведена на рис. 37: $G=(V,E)$, $V=\{a,b,c,d,e\}$, $E=\{e_1=(a,a),\ e_2=(a,a),\ e_3=(a,b),\ e_4=\{a,b\},$ $e_5=(a,c),\ e_6=\{a,c\}, e_7=(c,b),\ e_8=(c,b),\ e_9=(b,c),\ e_{10}=\{b,e\}\}$;

b) графічна інтерпретація (діаграма);

c) матриця *інцидентності*.

Рядки матриці відповідають вершинам, стовпці — ребрам. Якщо вершина v_i інцидентна ребру e_j, то елемент b_{ij} матриці інцидентності B рівний:

1) -1, якщо e_j — дуга, яка виходить з вершини v_i і не є петлею;

2) 1 — у всіх інших випадках.

Якщо вершина не інцидентна ребру, то відповідний елемент матриці рівний 0.

Для графа з рис. 37 матриця інцидентності має вигляд

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) *матриця суміжності* (сусідства)

Матриця сусідства A — квадратна матриця порядку $|V|$, елементи визначаються наступним чином:

$$a_{ij}=\alpha\bar{a}_{ij}+\beta\vec{a}_{ij},$$

де $\bar{a}_{ij}$ — кількість ланок, які з’єднують вершини v_i та v_j, $\vec{a}_{ij}$ — кількість дуг, які виходять із вершини v_i і входять у вершину v_j.

Для графу з рис. 37. матриця суміжності має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 2\beta & \alpha+\beta & \alpha+\beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \alpha & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.3. Основні види графів.

Виокремлюють наступні види графів:

1) порожній граф (або 0-граф) $(V=\varnothing)$;

2) *неорієнтований граф* $(E=\bar{E})$;

3) *звичайний граф* (неорієнтований без кратних ребер);

4) *орієнтований граф* (усі ребра — дуги, тобто $E=\vec{E}$);

Неорієнтований граф $G' = (V, E')$ називається *відповідним* до орієнтованого графа $G = (V, E)$, якщо $E' = \{\{a,b\} | (a,b) \in E\}$. Граф 41 а) є відповідним до графа 41 б).

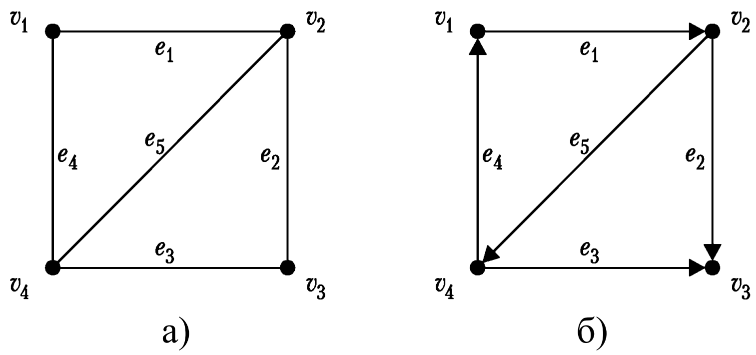


Рис. 41. Діаграми звичайного а) та орієнтованого б) графів

5) мультиграф (допустимими є кратні ребра);
6) псевдограф (мультиграф, для якого допускаються петлі);
7) дводольний (біхроматичний) граф — множина вершини V розбивається на дві множини V_1, V_2 $(V_1 \cup V_2 = V,\ V_1 \cap V_2 = \varnothing)$ так, що кожне ребро інцидентні одній вершині з V_1 та одній вершині з V_2;
8) граф Кеніга — звичайний дводольний граф;

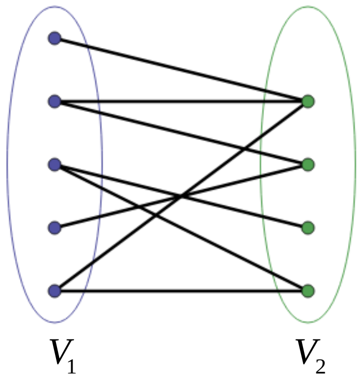


Рис. 42. Граф Кеніга

9) повний граф — граф, який містить усі ребра для графів заданого типу:
10) K_n — повний звичайний граф;

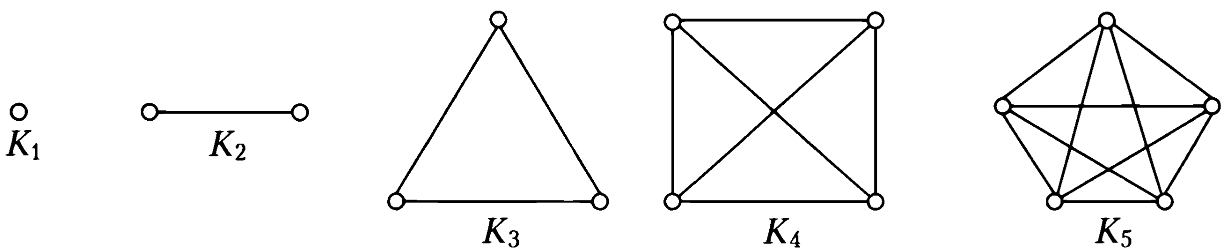


Рис. 43. Повні графи K_n для n = 1, 2, 3, 4, 5

11) $K_{n,m}$ — повний граф Кеніга (n і m — кількості елементів множин V_1 та V_2);

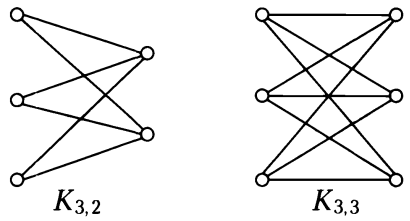


Рис. 44. Повні графи Кеніга

Граф $K_{1,m}$ називається *зірковим*.

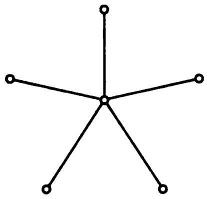
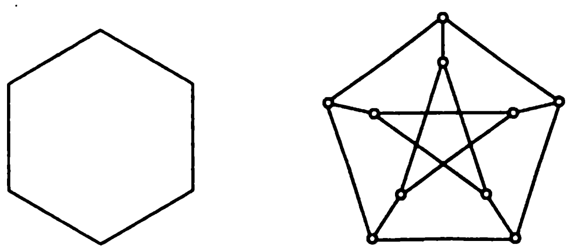


Рис. 45. Зірковий граф $K_{1,5}$

12) *Однорідні* (регулярні) графи степені d — звичайні графи, степені усіх вершин яких рівні d;

($\forall v \in V \ \deg v = d$). Зв'язний однорідний граф степені 2 називається *циклічним графом*. Циклічний граф n-го порядку позначається C_n.



а) б)

Рис. 46. Регулярні графи: а) граф C_6; б) кубічний граф Петерсена

Теорема 2. Нехай $n, d \in \mathbb{N}$ — натуральні числа, $0 \le d \le n-1$. Тоді існує регулярний граф n-го порядку степеня d.

13) n-вимірний куб — звичайний граф, вершинами якого є n-вимірні булеві вектори, вершини **u** та **v** суміжні тоді і тільки тоді, коли $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$ (відстань Хеммінга між вершинами рівна 1).
14) *Турнір* (повний орієнтований граф без петель та кратних дуг).
15) *Помічені та нумеровані графи.*

Якщо задана функція $f : V \to M$ та (або) $g : E \to M$, то множина M називається множиною *міток*, а граф G називається *поміченим*. Якщо функції f та g однозначні (ін'єктивні) і $M \subset \mathbb{N}$, то граф називається *(про)нумерованим*.

16) Прикладом нумерованого графа є граф, зображений на рис. 48.

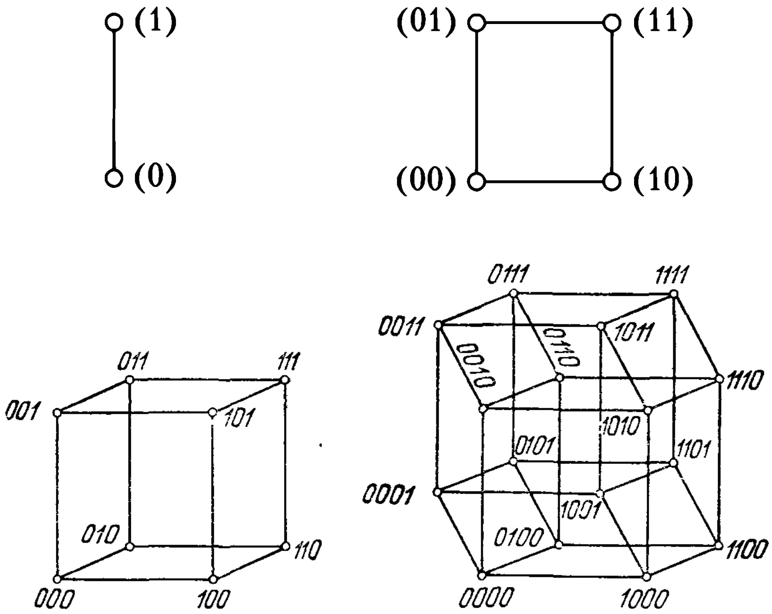


Рис. 47. n-вимірний куб

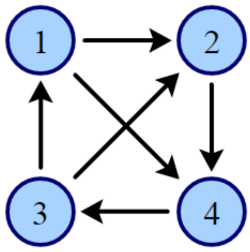


Рис. 48. Діаграма турніру

4.2. Маршрути у графі.

Нехай $G=(V,E)$ — заданий граф, $a=v_{i_0}$, $b=v_{i_m}$. Послідовність вершин та ребер

$$M(a,b)=ae_{j_1}v_{i_1}e_{j_2}...v_{i_{n-1}}e_{j_n}b,$$

де e_{j_k} — ребро, інцидентне вершинам v_{i_k-1} та v_{i_k} називається *маршрутом довжини* n, який з'єднує вершини a та b. Вершини a та b називаються *кінцями маршруту*.

Якщо усі ребра маршруту є дугами $\left(e_{j_k}=\left(v_{i_k-1},v_{i_k}\right),\ j=1,\ldots,n\right)$, то маршрут називається *шляхом*, який з'єднує вершину a з вершиною b.

Маршрут називається *простим*, якщо вершини у ньому не повторюються (крім, можливо першої та останньої).

Якщо усі ребра у маршруті $M(a,b)$ є різними, то маршрут називається *ланцюгом*, який з'єднує вершини a та b і позначається $L(a,b)$.

Замкнений ланцюг називається *циклом*.

Орієнтований цикл називається *контуром*.

Теорема 3. Довільний маршрут, який з'єднує у графі вершини a та b, містить у собі простий ланцюг.

Теорема 4. Довільний цикл містить у собі простий цикл. Довільний цикл непарної довжини містить у собі простий цикл непарної довжини.

Теорема 5 (Кеніга). Звичайний граф дводольний тоді і тільки тоді, коли для нього не має простих циклів непарної довжини.

4.2.1. Метричні характеристики графів

Відстань між вершинами u та v неорієнтованого графа — це довжина найкоротшого ланцюга, який з'єднує ці вершини. Відстань позначається $d(u,v)$.

Найкоротша *геодезична* між двома вершинами — найкоротший ланцюг, який їх з'єднує.

Діаметр графа — максимальна відстань між вершинами:

$$D(G)=\max\{d(u,v)\mid u,v\in V\}.$$

Ексцентриситет $\varepsilon(v)$ вершини v — відстань до найбільш віддаленої від неї вершини:

$$\varepsilon(v)=\max\{d(v,u)\mid u\in V\}.$$

Радіус графа — мінімальний ексцентриситет:

$$R(G)=\min\{\varepsilon(v)\mid v\in V\}.$$

Центр графа — множина вершин графа, які мають мінімальний ексцентрикитет:

$$C(G)=\{v\mid \varepsilon(v)=R(G)\}.$$

Приклад. Вказати ексцентриситети вершин, центр, радіус та діаметр графа, діаграма якого наведена на рис. 49.

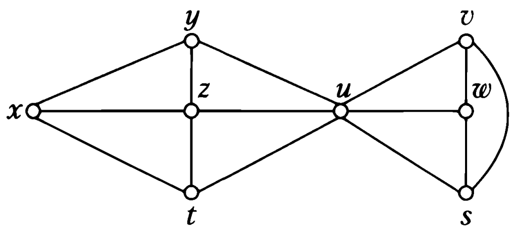


Рис. 49

$\varepsilon(x)=\varepsilon(v)=\varepsilon(w)=\varepsilon(s)=3,\ \varepsilon(y)=\varepsilon(z)=\varepsilon(t)=\varepsilon(u)=2.$
$D(G)=3,\ R(G)=2,\ C(G)=\{y,z,t,u\}.$

4.3. Зв'язність. Компоненти зв'язності

4.3.1. Відношення зв'язності у неорієнтованому графі.

Вершини $a,b\in V$ неорієнтованого графа $G=(V,E)$ називаються *зв'язними*, якщо можна побудувати ланцюг, який їх з'єднує. При цьому вершина вважається зв'язною із самою собою.

Відношення зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин. *Компоненти зв'язності* графа — класи еквівалентності за відношенням зв'язності.

Кількість компонент зв'язності позначається $\kappa(G)$.

Граф G, зображений на рис. 50, має три компоненти зв'язності (G_1, G_2 та G_3).

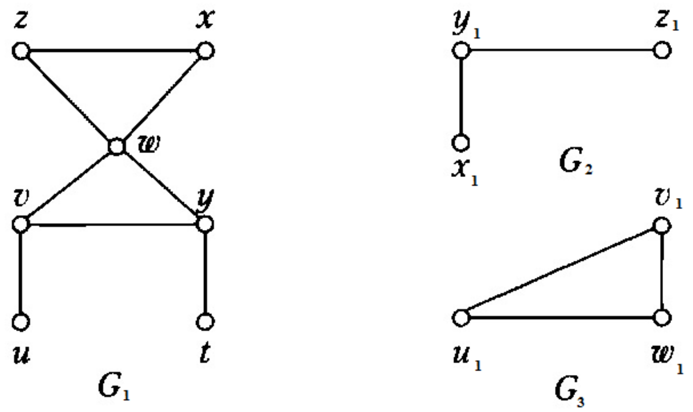


Рис. 50. Граф із трьома компонентами зв'язності

Зв'язний граф — це граф, усі вершини якого зв'язні між собою $\left(\kappa(G)=1\right)$.

4.3.2. Класифікація ребер та вершин неорієнтованих графів з точки зору зв'язності

Міст — ребро графа, видалення якого збільшує кількість компонент зв'язності. Усі інші ребра — *циклові*.

Точка зчеплення (шарнір) — вершина графа, видалення якої збільшує кількість компонент зв'язності.

Приклад. На рис. 51 ребро x — міст, усі інші ребра — циклові. Вершини u та v — точки зчеплення.

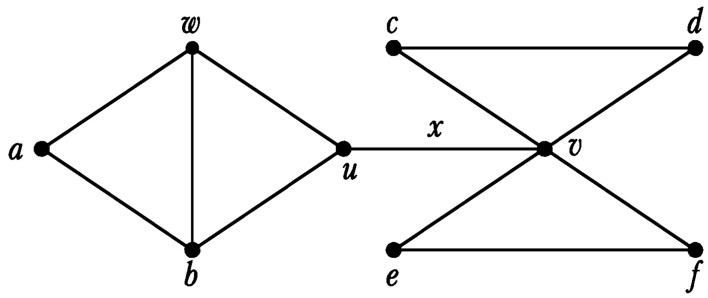


Рис. 51. Ребра та мости

Теорема 6. Кожний простий цикл містить циклове ребро.

Теорема 7. Кількість ребер звичайного графа задовольняє нерівність

$$|V|-\kappa(G)\le |E|\le \left(|V|-\kappa(G)\right)\left(|V|-\kappa(G)+1\right)/2.$$

Наслідок. Якщо $|E|>\left(|V|-1\right)\left(|V|-2\right)/2$, то граф $G=\left(V,E\right)$ — зв'язний.

4.3.3. Зв'язність у орієнтованих графах

Вершина b називається *досяжною* із вершини *a* орієнтованого графа *G*, якщо існує шлях, який з'єднує *a* з b.

Відношення досяжності не є відношенням еквівалентності.

Вершини $a,b \in V$ орієнтованого графу $G = (V, E)$ називаються *сильно зв'язними*, якщо вершина *a* є досяжною із b і навпаки.

Відношення сильної зв'язності є відношенням еквівалентності на множині вершин. На рис. 52 зображено *компоненти сильної зв'язності*.

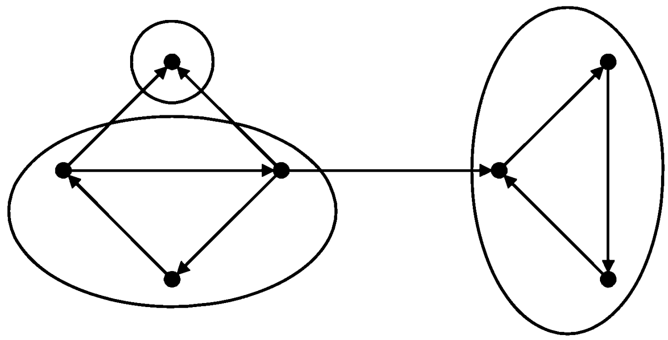


Рис. 52. Компоненти сильної зв'язності

4.3.4. Обхід графів

Обхід графів — систематичний перелік вершин графа. У більшості випадків вказується початкова вершина, з якої треба починати обхід.

Алгоритм обходу вершин графа

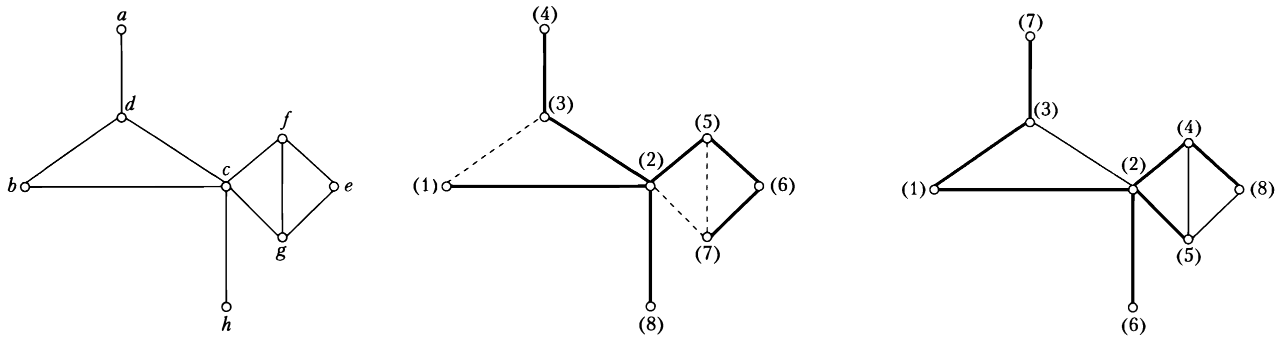
```
Вважаємо, що на початку усі вершини не відмічені.
Заносимо у список L початкову вершину.
while L≠∅
{
   видаляємо із списку L першу вершину v;
   позначаємо вершину v як відвідану;
   додаємо до L усі не відвідані вершини, у які можна
потрапити із v;
}
```

Якщо у алгоритмі обходу нові вершини додаються у початок списку, то такий обхід називається *пошуком у глибину*.

Якщо у алгоритмі обходу нові вершини додаються у кінець списку, то такий обхід називається *пошуком у ширину*.

На рис. 53 продемонстровано обхід графа із застосуванням пошуку у глибину та ширину, починаючи із вершини b:

Зауваження. У наступних трьох параграфах усі графи (якщо це спеціально не обумовлено в умові) вважаються неорієнтованими.



а б в

Рис. 53. Обхід графа у глибину (б) та ширину (в)

4.4. Ейлерові та гамільтонові графи

Граф Ейлера (ейлерів граф) — це зв'язний граф, для якого існує цикл, який містить усі ребра.

Прикладом графа Ейлера є G_1 на рис. 54. Графи G_2 та G_3 не є графами Ейлера.

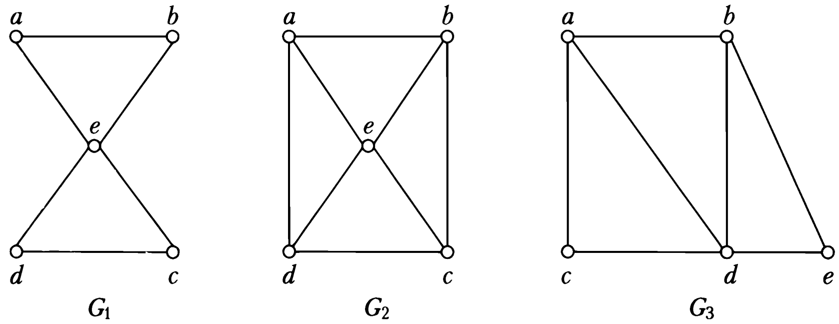


Рис. 54.

Теорема 8. Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли степені усіх вершин є парними.

Наслідок. Зв'язний граф є ейлеровим тоді і тільки тоді, коли множину його ребер можна розбити на цикли, що не перетинаються.

Ланцюг, який містить усі ребра графа називається *ланцюгом Ейлера*. Граф, для якого існує ланцюг Ейлера називається напівейлеровим графом.

Прикладом напівейлерового графа є граф G_3.

Теорема 9. Зв'язний граф є напівейлеровим тоді і тільки тоді, коли не більше двох його вершин мають непарну степінь.

На рис. 55 зображено граф із задачі про кенігсберзькі мости. Оскільки степені усіх чотирьох вершин непарні, то він не є ні ейлеревим, ні напівейлеровим.

Алгоритм Флері знаходження ейлерового ланцюга:

1) Починаємо з вершини з непарною степеню (або з довільної вершини у випадку парності степенів усіх вершин).
2) стираємо (викреслюємо) пройдені ребра та ізольовані вершини, які виникають в процесі руху.

3) на кожному кроці вибираємо міст в якості наступного ребра тільки тоді, коли немає циклових ребер, інцидентних поточній вершині.

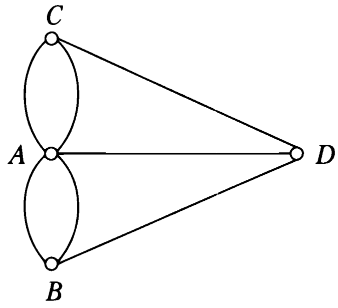


Рис. 55. Граф для задачі про кенігсберзькі мости

Зв'язний граф називається *гамільтоновим*, якщо існує цикл, який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

Прикладом графа Гамільтона є граф, наведений на рис 56 (на діаграмі ребра циклу виділені товстішими лініями).

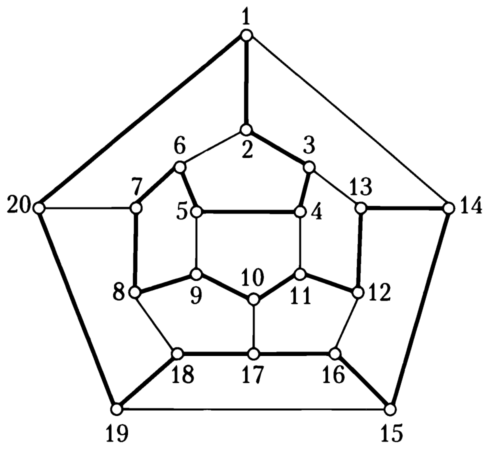


Рис. 56. Гамільтонів шлях

Теорема 10 (теорема Дірака). Якщо у графі $G=(V,E)$ з $n \geq 3$ вершинами степінь кожної вершини не менша за $n/2$, то граф G є гамільтоновим.

4.5. Планарні графи

Граф допускає *вкладення* (вкладається) на деякій поверхні, якщо його можна зобразити на цій поверхні так, щоб ребра графа не перетиналися.

Граф називається *планарним*, якщо його можна вкласти на площину.

На рис. 57 зображено діаграму планарного графа K_4 та його вкладення.

Теорема 11. Граф G вкладається на сфері тоді і тільки тоді, коли він є планарним.

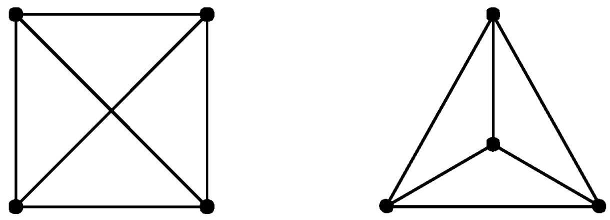


Рис. 57. Вкладення графа K_4

Частина площина, обмежена ребрами планарного графа, називається *гранню*. Множина граней планарного графа позначається F. У цю множину включається також і зовнішня частина площини. Для графа, зображеного на рис. 58, $F = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$.

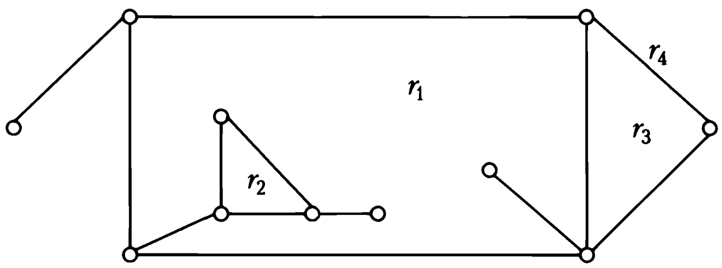


Рис 58. Грані планарного графа

Теорема 12 (формула Ейлера). Для планарного графа

$$|V| - |E| + |F| = \kappa(G) + 1.$$

Наслідок 1. Для довільного випуклого многогранника

$$B + Г - P = 2,$$

де B — кількість вершин многогранника, $Г$ — кількість граней, P — кількість ребер.

Наслідок 2. У будь-якому планарному графі без кратних ребер та петель $|E| \le 3|V| - 6$.

Наслідок 3. Графи K_5 та $K_{3,3}$ не є планарними.

Наслідок 4. У будь-якому планарному графі без кратних ребер та петель існує вершина, степінь якої не більша за 5.

4.6. Дерева

4.6.1. Ліс

Нехай $G = (V, E)$ — заданий неорієнтований граф. Величина

$$\lambda(G) = |E| - |V| + \kappa(G).$$

називається *цикломатичним* числом графа G.

Теорема 13. Для довільного графа G

$$\lambda(G) \geq 0 \text{ і } \lambda(G) = 0 \Leftrightarrow \text{ граф } G \text{ не містить циклів.}$$

Ліс — це граф без циклів. Приклад лісу зображено на рис. 59.

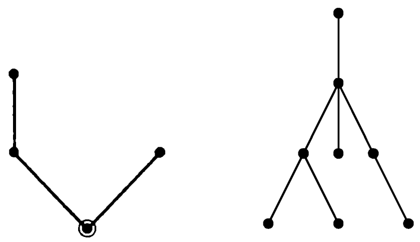


Рис. 59. Ліс

Теорема 14. Наступні твердження про граф G є еквівалентними:

1) G — ліс;
2) G не містить простих циклів;
3) Всі ланцюги в G — прості;
4) $\lambda(G) = 0$.

4.6.2. Неорієнтовані дерева

Дерево — зв'язний граф без циклів. Приклад дерева зображено на рис. 60.

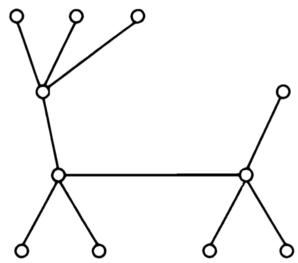


Рис. 60. Дерево

Теорема 15. Наступні твердження про граф G є еквівалентними:

1) G — дерево;
2) Будь-які дві вершини в G з'єднані рівно одним простим ланцюгом;
3) G — зв'язний граф, кожне ребро якого — міст;
4) $|V| = |E| + 1$ і $\kappa(G) = 1$;
5) $\lambda(G) = 0$, але після добавлення довільного нового ребра $\lambda(G) = 1$.

Наслідок. У нетривіальному дереві є принаймні дві висячі вершини.

Для компактного подання нумерованих дерев використовується *код Прюфера*, який для дерева з n вершинами містить $n-2$ числа. При побудові коду на кожному кроці видаляється висяча вершина із найменшим номером і номер вершини, з якою вона була пов'язана, дописується у кінець коду.

Код Прюфера для дерева на рис. 61: 7, 9, 1, 7, 2, 2, 7, 1, 2, 5

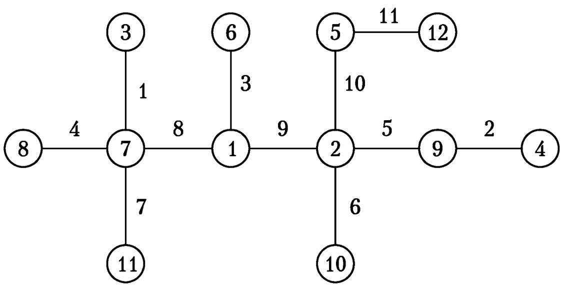


Рис. 61. Приклад побудови коду Прюфера для нумерованого дерева

При декодуванні на i-му $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$ кроці із списку ще невикористаних вершин вибирається (без повернення) вершина з найменшим номером, який не зустрічається у ще не обробленій частині коду. Ця вершина з'єднується з i-ою вершиною у коді Прюфера. У кінці з'єднуються останні дві невикористані вершини.

Теорема 16 (теорема Келі). Кількість нумерованих дерев із n вершинами рівна n^{n-2}.

4.6.3. Кореневі дерева та орієнтовані дерева

У *кореневих деревах* у множині вершин виділяється *корінь*. Орієнтація вершин кореневих дерев відбувається у напрямку від кореня. Якщо вершини v та u — суміжні і відстань від v до кореня дерева більша за відстань від u до кореня, то вершина v називається *дочірньою* вершиною для u, а вершина u — *батьківської* для v.

Теорема 17. Кожна вершина крім кореня має рівно одну батьківську вершину.

Листи — це вершини кореневого дерева, які не мають дочірніх вершин. Множина вершин, які розташовані на однаковій відстані від кореня називається *ярусом* дерева.

Дерева б)-в) на рис. 62 — кореневі дерева з коренем a та c відповідно, які отримуються із звичайного дерева а). На рис. 62 в) a, e — вершини 1-го ярусу, b, d — 2-го.

Означення *орієнтованого дерева*:

1. Існує єдина вершина r (корінь), для якої $\deg^+(r) = 0$.
2. Для всіх інших вершин $v \in T \deg^+(v) = 1$.
3. Кожна вершина досяжна із кореня.

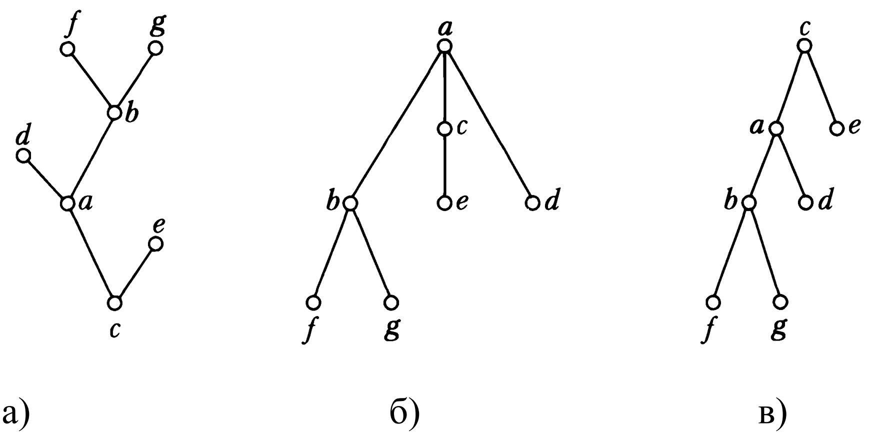


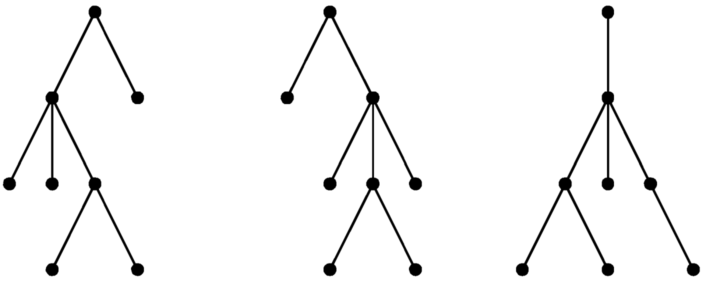
Рис. 62. Приклад кореневих дерев з коренями a та c відповідно

Зауваження. При зображені орієнтованих дерев вважають, що дуги спрямовані зверху вниз. Тому на діаграмах часто не зображають стрілки.

Еквівалентне означення ордерева T з використанням піддерев:

1. Є єдиний елемент r — корінь.
2. Усі інші вершини містяться у $k\left(k\geq 0\right)$ підблоках, які називаються піддеревами.
3. $T=\left\{r,T_1,\ldots,T_k\right\}$.

Для *упорядкованих дерев* також вказується відносний порядок піддерев $T_1,\ldots,T_k$.



(1) (2) (3)

Рис. 63. Діаграми орієнтованих дерев

Наведені на рис. 63 дерева є ізоморфними як звичайні дерева та не ізоморфними, як впорядковані дерева. Як орієнтовані дерева (1) та (2) ізоморфні, але (2) та (3) та (1) та (3) не є ізоморфними.

4.6.4. Бінарні дерева

Означення *бінарного дерева*:

1. Є одна вершина — корінь дерева.
2. Усі інші вершини належать одному із піддерев (лівому чи правому), які не перетинаються.

За допомогою бінарних дерев можна зобразити (подати) довільне упорядковане дерево.

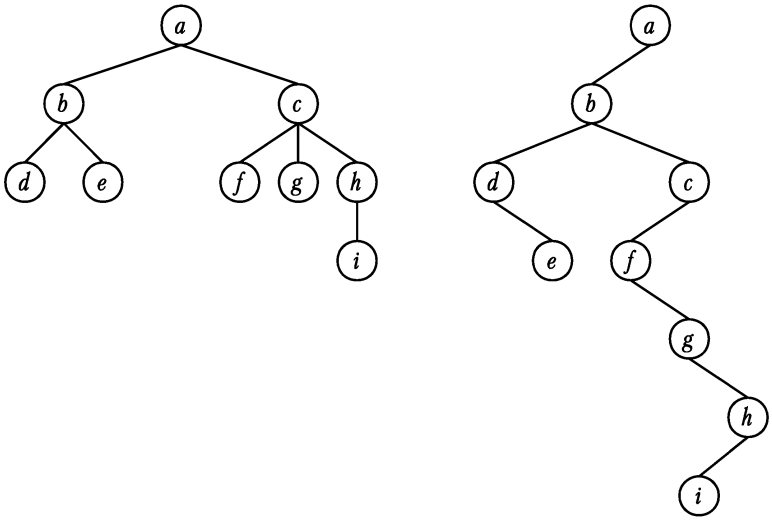
При переході до бінарних дерев для кожної вершини ліве ребро з’єднує її із старшим сином (у початковому дереві), праве ребро — із наступним (молодшим) братом у початковому дереві.

На рис. 64 наведено упорядковане дерево а) та відповідне йому бінарне дерево б).

Теорема 18. Кількість різних бінарних дерев із n вершинами рівна $\dfrac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

***Обходи* бінарних дерев**:

прямий (префіксний): корінь, ліве піддерево, праве піддерево;
внутрішній (інфіксний, симетричний): ліве піддерево, корінь, праве піддерево;
кінцевий (зворотний, постфіксний): ліве піддерево, праве піддерево, корінь.



а) б)

Рис. 64. Зображення упорядкованого дерева а) за допомогою бінарного б)

Розглянемо обходи дерева, наведеного на рис. 65.

- обхід у прямому порядку: *a b d e h o c f m p q*;
- обхід у внутрішньому порядку: *d b h e o a f c p m q*;
- обхід у зворотному порядку: *d h o e b f p q m c a*.

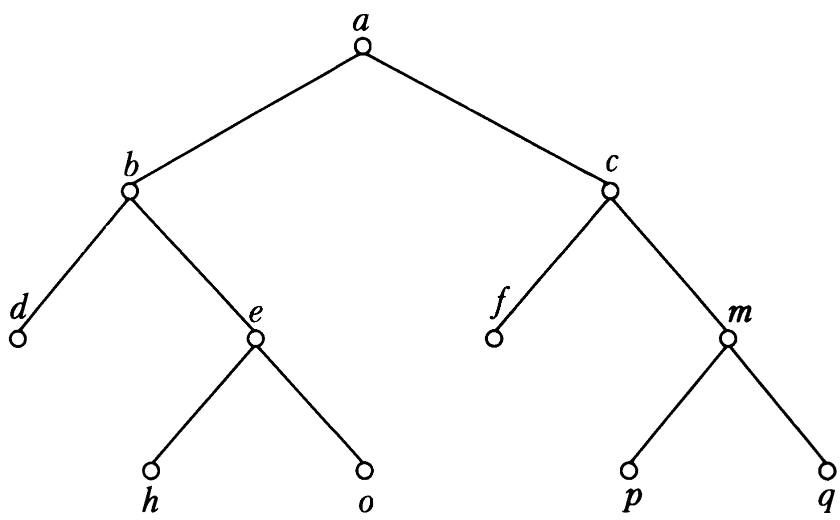


Рис. 65. Обхід бінарного дерева

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 580 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Центр навчальної літератури, 2004. — 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група BHV, 2007. — 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. — К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. — 83 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.
9. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
11. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. — СПб.: Вильямс, 2003. — 958 с.
12. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 269 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
14. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. — Ужгород: УжДУ, 1971. — 224 с.
15. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. — К: Техніка, 1973. — 76 с.
16. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа, 2003. — 384 с.