

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"  
Факультет інформаційних технологій  
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

**В. М. Коцовський**

**Основи дискретної математики**

**Методичні матеріали для практичних робіт**

Ужгород – 2018

## ЗМІСТ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ.....	1
ДВНЗ "Ужгородський національний університет" .....	1
Факультет інформаційних технологій .....	1
ВСТУП .....	2
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН.....	3
1.1. Операції над множинами .....	3
1.2. Метод математичної індукції .....	4
2. ТЕОРІЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ.....	5
2.1. Операції над відношеннями.....	5
2.2. Властивості бінарних відношень .....	5
2.3. Відношення еквівалентності.....	6
2.4. Відношення порядку.....	7
2.5. Функціональні відношення.....	9
3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ .....	11
3.1. Формули логіки висловлювань. ....	11
3.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань.....	11
3.3. Логічне слідування .....	12
4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ .....	14
4.1. Булеві вектори .....	14
4.2. Булеві функції .....	14
4.3. Спеціальні форми подання БФ.....	15
4.4. Повнота та замкненість систем булевих функцій .....	15
4.5. Основні поняття теорії логічних та контактних схем.....	16
5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ .....	19
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА .....	22

## ВСТУП

Навчальна дисципліна "Основи дискретної математики" вивчається студентами спеціальності 126 — "Інформаційні системи та технології" у першому семестрі. Вивчення дисципліни є важливим, оскільки переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12 — "Інформатика та обчислювальна техніка", широко використовують позначення, поняття, моделі, методи та алгоритми дискретної математики. У якості прикладу можна навести такі дисципліни, як "Алгоритми та структури даних", "Об'єктно-орієнтоване програмування", "Бази даних та знань", "Методи та системи штучного інтелекту", "Математичне моделювання", "Технології розподілених систем та паралельних обчислень" тощо.

Видання містить задачі з теорії множин, теорії бінарних відношень, математичної логіки, теорії булевих функцій та теорії графів. Методичні матеріали можуть бути використані при проведенні практичних занять з курсу "Основи дискретної математики". Наведені у виданні задачі також можуть виявитися корисними у процесі підготовки студентів до модульного та семестрового контролю.

# 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

## 1.1. Операції над множинами

- Чи вірно, що
  - $\{1,4,5\} = \{5,1,4\}$ ;
  - $\emptyset = \{\emptyset\}$ ;  $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ ;  $\emptyset \subset \emptyset$ ;  $\emptyset \subseteq \emptyset$ ;
  - $\{\{a,b\},\{c,d,e\}\} = \{a,b,c,d,e\}$ ;  $\{a,c,e\} \subset \{a,\{b,c\},d,e\}$ .
- Знайти  $A \Delta (\bar{B} \cap C)$  за умови, що  $U = \{1,2,\dots,20\}$ ,  $A = \{x - 2 \mid 5x + 1 - \text{квадрат цілого числа}\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 > 60\}$ ,  $C = \{x \mid (3x - 1) - \text{просте число}\}$ .
- Нехай  $U = \{5,6,\dots,30\}$  — універсальна множина,  $A = \{5,7,8,10,11,14, 20,21,22,26\}$ ,  $B = \{2x - 7 \mid x - \text{непарне}\}$ ,  $C = \{x \mid x^2 + 1 - \text{просте число}\}$ . Вказати перелік елементів множини  $D = B \Delta (\bar{A} \cup C)$ .
- На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини
  - $\overline{A \Delta C} \setminus (B \cup A)$ .
  - $(\bar{A} \cap B) \cup (B \Delta C)$ .
- Довести, що для довільних множин  $A, B$  та  $C$  справджуються рівності
  - $\bar{C} \Delta ((A \cup \bar{B}) \cap \bar{C}) = B \setminus (A \cup C)$ .
  - $C \setminus \overline{\bar{A} \cup B} = B \cap C \cup (C \setminus A)$ .
- Нехай  $A$  — множина трикутників,  $B$  — множина чотирикутників,  $C$  — множина правильних багатокутників,  $D$  — множина багатокутників, які мають принаймні один прямий кут,  $E$  — множина рівносторонніх багатокутників. Вказати множини:
  - $((D \cap A) \setminus (C \cap B)) \Delta (A \cap E)$ .
  - $\overline{B \cap (C \cup D)} \cap E \cap B$ .
- Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
  - $\bar{A} \setminus B = A \cup \bar{A} \cap B$ ;
  - $(B \setminus A) \cup \bar{A} = \overline{C \setminus \bar{A} \setminus A}$ ;
  - $\bar{A} \cup B \cup (C \setminus A) = \overline{A \setminus B}$ ;
  - $(A \Delta (A \cap \bar{B})) \cap (\bar{B} \Delta \bar{C}) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .
- У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які
  - Не отримали жодної п'ятірки;
  - Отримали рівно одну п'ятірку.
- Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у

Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.

## 1.2. Метод математичної індукції

1. Довести тотожності

а.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

б.  $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ .

2. Довести, що для довільного натурального  $n$  число  $n^3 - 7n$  ділиться на 6.

3. Довести, що для довільного натурального  $n$  число  $6^{2n-1} + 1$  ділиться на 7.

4. Довести, що  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n}$

5. Знайти суму  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ .

## 2. ТЕОРІЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

### 2.1. Операції над відношеннями

1. Нехай  $A = \{k, l, m, n\}$ ,  $B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ ,  $C = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $R = \{(k, 1), (n, 2), (n, 1), (l, 5), (l, 8), (m, 2), (m, 8), (k, 7)\}$ ,  $S = \{(2, b), (7, c), (8, b), (5, e)\}$ ,  $T = S \circ R$ . Задати відношення  $T$  за допомогою матриці та графу і знайти  $(A \setminus T^{-1}[\{c, e\}]) \times (C \setminus \text{pr}_2 T)$ .
2. Нехай  $A = \{k, l, m, n\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $C = \{x, y, z, t, u, v\}$ ,

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \{(1, u), (2, x), (2, z), (2, t), (4, x), (4, v)\}, T = S \circ R.$$

Задати відношення  $T$  за допомогою графу і знайти  $(C \setminus T[\{l, n\}]) \times (A \setminus \text{pr}_2 T^{-1})$ .

3. Нехай  $R$  — бінарне відношення " $<$ ", визначене на множині  $\mathbb{N}$ . Знайти  $R^m$ , де  $m \in \mathbb{N}$ .
4. Нехай  $R$  — бінарне відношення подільності на множині  $\mathbb{Z}$ . Знайти  $R^m$ , де  $m \in \mathbb{N}$ .
5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
6. Навести приклад бінарного відношення  $R$ , такого що  $R^2 \neq \emptyset$ ,  $R^2 \cap R = \emptyset$ .

### 2.2. Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості однорідного бінарного відношення  $R = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 1\}$ , заданого на множині  $\mathbb{R}$ .
2. Встановити властивості однорідного бінарного відношення  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ , заданого на множині  $\mathbb{R}$ .
3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $R$  на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ , яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення  $R^2 \setminus R$  та вказати фактор-множину множини  $A$  за відношенням  $R$ .
4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $R$  на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ , яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення  $R^2 \setminus R$  та вказати фактор-множину множини  $A$  за відношенням  $R$ .
5. Для однорідного БВ  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5)\}$ , визначеного на множині  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , побудувати його замикання, яке є симетричним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю замикання та знайти  $S[\{1, 4\}]$ .
6. Для однорідного БВ  $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (e, d), (c, b)\}$ , визначеного на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ , побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення  $S^{-1}$  та знайти  $S[\{b, d, f\}]$ .

7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання  $S$  однорідного бінарного відношення  $R = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$ , визначеного на множині  $\{a, b, c, d\}$ .

### 2.3. Відношення еквівалентності

- Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ :
  - $\{\{1, 2, 4, 8\}, \{5\}, \{3, 7\}\}$ ;
  - $\{\{1, 2, 6\}, \{4, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{4, 8\}\}$ ;
  - $\{\{1, 2, 6\}, \{4, 7\}, \{3, 5, 8\}\}$ .
- Які із наступних систем множин є а) покриттям; б) розбиттям множини  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ :
  - $\{\{b, e, g\}, \{a, d\}, \{b, c, h\}\}$ ;
  - $\{\{d, e\}, \{b, c, g\}, \{d, h\}, \{a, b, f\}\}$ ;
  - $\{\{c, e, h\}, \{a, b, f\}, \{d, g\}\}$ .
- Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
- Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).
- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
  - паралельність площин у просторі;
  - відношення знайомства на множині людей;
  - відношення "одногрупник";
  - відношення рівнопотужності.
- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
  - перпендикулярність прямих на площині;
  - відношення "мати однаковий вік" на множині людей;
  - відношення "знаходитися у одній чверті" на множині точок координатної площини;
  - відношення "бути родичем" на множині людей.
- Перевірити, чи є визначене на множині  $A = \{x, y, z, t, u, v, w\}$  бінарне відношення  $R = \{(t, v), (w, x), (w, z), (u, y), (x, z), (w, w), (x, x), (z, x), (v, v), (z, z), (z, w), (x, w), (y, u), (y, y), (u, u), (t, t), (v, t)\}$  відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину  $A/R$ .
- Перевірити, чи є визначене на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  бінарне відношення  $R = \{(b, f), (a, g), (b, b), (f, c), (d, d), (b, c), (g, a), (c, c), (g, g), (c, f), (f, f), (c, b), (e, e), (a, a), (f, b)\}$  відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину  $A/R$ .
- Вказати визначене на множині  $[0, 1]$  бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 5 класів еквівалентності.
- Вказати визначене на множині  $\mathbb{Z}$  бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 13 класів еквівалентності.
- Для бінарного відношення  $R = \{(1, 2), (3, 2), (2, 4), (2, 7), (4, 9), (10, 5), (3, 3)\}$ , визначеного на множині  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ , вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $S$ , яке є відношенням еквівалентності на множині  $A$  і задовольняє умову  $R \subseteq S$ .

12. Для бінарного відношення  $R = \{(b, a), (c, b), (f, b), (b, g), (d, k), (h, f), (i, j)\}$ , визначеного на множині  $A = \{a, b, \dots, k\}$ , вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $S$ , яке є відношенням еквівалентності на множині  $A$  і задовольняє умову  $R \subseteq S$ .

## 2.4. Відношення порядку

- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
  - відношення знайомства на множині людей;
  - відношення "бути старшим";
  - відношення "бути сином";
  - відношення "бути предком".
- Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
  - відношення "бути нащадком";
  - відношення "бути молодшим";
  - відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини;
  - відношення "бути родичем" на множині людей.
- Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку  $R$ , якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 1. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини  $\{A, C, E\}$ . Знайти  $\sup\{C, E\}$  та  $\inf\{D, E\}$ . Чи буде впорядкована множина ґраткою?

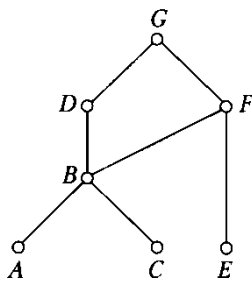


Рис. 1

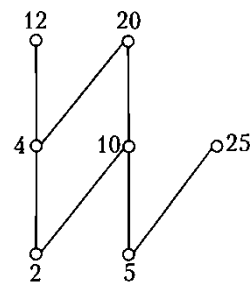


Рис. 2.

- Вказати бінарне відношення часткового порядку  $R$  на множині, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2. Вказати екстремальні елементи відповідної впорядкованої множини. Знайти  $\sup\{10, 12\}$  та  $\inf\{10, 12\}$ .
- На рис. 3. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

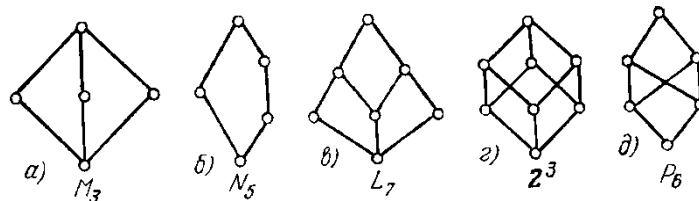


Рис. 3.

- На рис. 4. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.



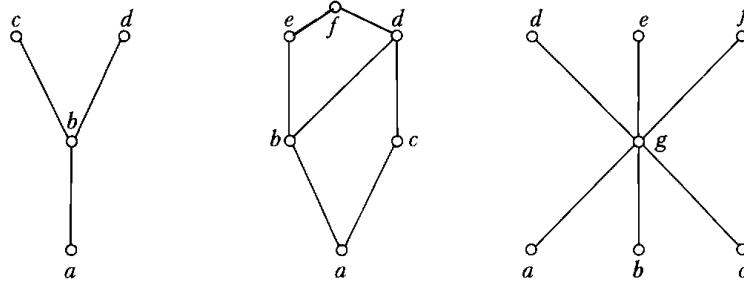


Рис. 4.

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , яке було би відношенням:
- нестроого порядку;
  - строого порядку;
  - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини  $A$  за побудованим відношенням.
8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині  $A = \{a, b, c, d, e\}$ , яке було би відношенням:
- нестроого порядку;
  - строого порядку;
  - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи множини  $A$  за побудованим відношенням.
9. Для однорідного бінарного відношення  $R = \{(c, a), (b, d), (d, c), (f, c)\}$ , визначеного на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ , побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $S$ , яке б містило у собі відношення  $R$  і було відношенням:
- часткового порядку;
  - строого порядку;
  - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини  $(A, S)$ .
10. Для однорідного бінарного відношення  $R = \{(7, 4), (2, 3), (4, 1), (5, 4), (3, 4)\}$ , визначеного на множині  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення  $S$ , яке б містило у собі відношення  $R$  і було відношенням:
- часткового порядку;
  - строого порядку;
  - лінійного порядку.
- Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини  $(A, S)$ .
11. Перевірити, чи є бінарне відношення  $R = I_A \cup \{(2, 1), (4, 1), (1, 3), (5, 1), (4, 3)\} \cup \{(2, 3), (5, 3), (5, 4)\}$  відношенням часткового порядку на множині  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини  $(A, R)$  та її вказати екстремальні елементи.
12. Перевірити, чи є бінарне відношення  $R$  з матрицею

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині  $A = \{x, y, z, u, v\}$ . Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення  $R$  та вказати екстремальні елементи множини  $A$  за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню  $R$ .

13. Перевірити, чи є відношення  $S = R \circ (R \cup I_A)$  відношенням строгого порядку на множині  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ , якщо  $R = \{(b, g), (a, e), (c, g), (b, c), (a, b), (c, e), (d, f)\}$ . Якщо так, то
- зобразити діаграму Хассе відношення  $S$ ;
  - вказати екстремальні елементи множини  $A$  за відношенням  $S$ ;
  - знайти  $\inf \{b, g, e\}$  та  $\sup \{a, b, h\}$ .

## 2.5. Функціональні відношення

- Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:
  - $R_1 = \{(x, y) \mid xy = 2\}$ ;
  - $R_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$ ;
  - $R_3 = \{(x, y) \mid 2x > y\}$ ;
  - $R_4 = \{(x, y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$ ;
  - $R_5 = \{(x, y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$ .
- Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:
  - $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$ ;
  - $R_2 = \{(x, y) \mid y \geq -1, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\}$ ;
  - $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ ;
  - $R_4 = \{(x, y) \mid x^2 = |y|\}$ ;
  - $R_5 = \{(x, y) \mid x = \sin y\}$ .
- За бінарним відношенням  $R = \{(2, b), (5, d), (4, b)\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{a, b, c, d\}$  побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення  $f$ , яке задовольняє умову  $R \subseteq f$  і є:
  - ін'єктивним;
  - сюр'єктивним;
  - бієктивним;

4. За бінарним відношенням  $R = \{(1,b), (3,d), (4,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d,e\}$  побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення  $f$ , яке задовольняє умову  $R \subseteq f$  і є:
- ін'єктивним;
  - сюр'єктивним;
  - бієктивним;
5. За бінарним відношенням  $R = \{(2,b), (5,d), (4,b), (1,a), (2,c), (5,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$  побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення  $f$ , яке задовольняє умову  $f \subseteq R$  і є:
- ін'єктивним;
  - сюр'єктивним;
  - бієктивним;
6. За бінарним відношенням  $R = \{(b,2), (d,5), (a,4), (e,3), (c,4), (d,3), (a,1)\} \subset \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5\}$  побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення  $f$ , яке задовольняє умову  $f \subseteq R$  і є:
- ін'єктивним;
  - сюр'єктивним;
  - бієктивним;

### 3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

#### 3.1. Формули логіки висловлювань.

1. Вказати порядок виконання операцій у формулі

$$\varphi = (\neg A) \Rightarrow (B \Leftrightarrow (\neg((C \vee A) \wedge (\neg D))))$$

та перейти від  $\varphi$  до відповідної їй формули за домовленістю.

2. Відновити дужки у формулі

$$\varphi = B \wedge \bar{A} \Rightarrow D \Leftrightarrow (\bar{C} \vee A) \wedge B \Rightarrow \bar{D}.$$

3. Розв'язати логічні рівняння

- a.  $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0.$

- b.  $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R.$

4. Розв'язати логічні рівняння

- a.  $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0.$

- b.  $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R.$

5. Побудувати таблицю істинності формули  $\varphi = \bar{P} \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{R \vee \bar{P}} \wedge Q.$

6. Побудувати таблицю істинності формули  $\varphi = (P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow R) \vee \overline{\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}}.$

7. Перевірити, чи є виконуваною формула  $\varphi = \overline{\bar{A} \wedge C} \Leftrightarrow A \vee (\bar{B} \Rightarrow C).$

8. Перевірити, чи є загальнозначущою формула  $\varphi = (A \wedge \bar{C} \Leftrightarrow B) \Rightarrow \overline{A \Rightarrow B} \vee (C \Rightarrow B).$

9. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є суперечливою формула

$$\varphi = A \wedge B \Rightarrow (A \vee \bar{A} \wedge C) \wedge B.$$

10. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є тотожно істинною формула

$$\varphi = \overline{\bar{A} \Rightarrow B} \Rightarrow (\bar{A} \vee C \Leftrightarrow \bar{A}).$$

#### 3.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань

1. Для формули  $\varphi = (\bar{Q} \Leftrightarrow P) \Rightarrow P \wedge \bar{R}$  побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми та символи операцій диз'юнкції і заперечення.

2. Для формули  $\varphi = (\bar{R} \vee P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R)$  побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми і символи операцій кон'юнкції та заперечення.

3. Для формули  $\varphi = (\bar{R} \vee P) \Leftrightarrow (Q \Rightarrow R \wedge \bar{P})$  побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.

4. Для формули  $\varphi = (\bar{P} \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R \wedge \bar{P})$  побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.

5. Перевірити, чи є рівносильними формули  $\varphi_1 = (\bar{P} \Leftrightarrow Q \wedge R) \vee (\bar{P} \Rightarrow \bar{Q})$  та  $\varphi_2 = (Q \Rightarrow P \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \Rightarrow Q \wedge R).$

6. Перевірити, чи є рівносильними формули  $\varphi_1 = (Q \wedge P \Rightarrow R \vee Q) \wedge (\bar{P} \Leftrightarrow P \wedge Q)$  та  $\varphi_2 = \overline{P \wedge \bar{Q} \Rightarrow R \Rightarrow P}$ .
7. Перевірити, чи є загальнозначущою формула  $\varphi = \overline{P \Rightarrow \bar{R}} \Rightarrow (P \vee \bar{Q} \Leftrightarrow P)$ .
8. Перевірити, чи є суперечливою формула  $\varphi = \overline{Q \wedge P \Rightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R)} \wedge P$ .
9. З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є загальнозначущою формула  $\varphi = \overline{\bar{P} \Rightarrow P \wedge Q \Rightarrow \bar{R} \vee (\bar{P} \Leftrightarrow R)}$ .
10. Довести, що формула  $\varphi = P \wedge \bar{Q} \Rightarrow R \wedge \bar{Q} \Leftrightarrow (\bar{R} \vee Q) \wedge P \Rightarrow Q$  є тотожно істинною.

### 3.3. Логічне слідування

1. Перевірити, чи є формула  $\varphi = \bar{Q} \wedge R \vee \bar{P}$  логічним наслідком формул  $\varphi_1 = \bar{R} \Rightarrow \bar{Q}$  та  $\varphi_2 = R \wedge P \Leftrightarrow \bar{P}$ .
2. Перевірити, чи має місце логічне слідування  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \varphi$ , якщо  $\varphi_1 = \bar{Q} \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$ ,  $\varphi_2 = \bar{P} \Leftrightarrow Q$ ,  $\varphi_3 = R \Rightarrow \bar{P} \wedge \bar{R}$ ,  $\varphi = \overline{\bar{Q} \Leftrightarrow R}$ .
3. Перевірити, чи є формула  $\varphi = P \vee \bar{P} \wedge \bar{Q} \wedge \bar{R}$  логічним наслідком формул  $\varphi_1 = \bar{R} \wedge \bar{P} \Leftrightarrow P$  та  $\varphi_2 = R \Rightarrow \bar{Q} \wedge R$ .
4. Перевірити, чи є формула  $\varphi = \bar{R} \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \bar{Q}}$  логічним наслідком формул  $\varphi_1 = \bar{Q} \wedge \bar{R} \Leftrightarrow Q$  та  $\varphi_2 = P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow Q \wedge R$ .
5. Вказати структуру висловлювання "Якщо студент написав усі модульні роботи на 2, то він складе іспит на два, хіба що він ретельно вивчить усі питання".
6. Проаналізувати міркування
  - а) Якщо програміст володіє мовою PHP або мовою Java, то він може розробляти серверне ПЗ.
  - б) Програміст може підтримувати сайт тоді і тільки тоді, коли він може розробляти серверне ПЗ.
  - в) Програміст не може підтримувати сайт.
 Отже, програміст не володіє ні PHP, ні Java.
7. Проаналізувати міркування
  - а) Якщо Сергій оволодіє німецькою мовою, то він зможе читати Ніцше та Кафки в оригіналі.
  - б) Сергій оволодіє німецькою мовою, якщо почне її вивчати.
 Отже, Сергій зможе читати Кафку в оригіналі тоді і тільки тоді, якщо він почне вивчати німецьку мову.
8. Проаналізувати міркування
  - а) Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0 або 5;
  - б) Рівність останньої цифри числа 0 є достатньою для його парності;
  - в) Число ділиться на 5 і є непарним.
 Отже, остання цифра цього числа не рівна 0.
9. Проаналізувати міркування
  - а) Якщо ціле число більше за одиницю, то воно є простим або складеним.
  - б) Якщо ціле число більше за два, то воно більше за один.
  - в) Якщо ціле число більше двох і парне, то воно складене.
 Отже, якщо ціле число більше за два і парне, то воно є складеним.
10. Проаналізувати міркування
  - а) Якщо падає сніг або на дорозі ожеледиця, то машиною важко керувати.

б) Якщо машиною важко керувати, то я спізнюся або зовсім не приїду.

в) Сніг не падає.

Отже, я спізнюся або на дорозі ожеледиця.

## 4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

### 4.1. Булеві вектори

- Вказати номер та норму Хеммінга булевого вектора
  - $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ .
  - $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ .
- Знайти  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ , якщо
  - $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^7$ ,  $N(\mathbf{x}) = 49$ ,  $\mathbf{y} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{z} = \bar{\mathbf{x}} \vee \mathbf{y}$ .
  - $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^8$ ,  $N(\mathbf{y}) = 101$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus \bar{\mathbf{y}}$ .
- Обчислити
  - $(\mathbf{y} \lll 4) \oplus (\mathbf{x} \gg \|\mathbf{y}\|)$ , де  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_2^8$ ,  $n(\mathbf{y}) = 113$ ,  $\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ .
  - $(\mathbf{y} \ggg 5) \wedge (\bar{\mathbf{x}} \ll \|\mathbf{y}\|)$ , де  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^8$ ,  $n(\mathbf{x}) = 59$ ,  $\mathbf{y} = (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$ .

### 4.2. Булеві функції

- Побудувати таблицю значень булевих функцій  $f(x, y, z)$  і  $f^*(x, y, z)$  та вказати їх номери, якщо
  - $f(x, y, z) = x | (\bar{y} \downarrow z) \oplus (z \Rightarrow \bar{x})$ .
  - $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow (z \vee \bar{y})) \Leftrightarrow (z | \bar{y})$ .
- Вказати суттєві та видалити фіктивні змінні булевої функції  $f(x_1, x_2, x_3)$ , якщо
  - $N(\tilde{f}) = 250$ .
  - $N(\tilde{f}) = 153$ .
- Перевірити, чи є самодвоїстою булева функція  $f(x, y, z)$ , якщо
  - $f(x, y, z) = (x \oplus \bar{y}) \Leftrightarrow z$ .
  - $f(x, y, z) = (\bar{x} | (y \Rightarrow z)) \Rightarrow ((x\bar{z}) \downarrow y)$ .
- Знайти номер функції  $f^*(x, y, z)$ , якщо
  - $f(x, y, z) = (\bar{x} \downarrow z) \oplus y$ .
  - $f(x, y, z) = (\bar{y} \Leftrightarrow z) | x \downarrow \bar{z}$ .
- Задати булеву функцію  $f(x, y, z)$  формулою над множиною функцій  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ , якщо
  - $f(x, y, z) = z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y) \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} | x))$ .
  - $f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} | (\bar{y} \oplus z))$ .
- Задати булеву функцію  $f^*(x, y, z, t)$  формулою над множиною функцій  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ , якщо
  - $f(x, y, z, t) = \overline{xy \vee \bar{z}} (yt \Rightarrow \bar{z}) \vee (\bar{z} \oplus t)$ .
  - $f(x, y, z, t) = (x \oplus \bar{y}t)(zt \Rightarrow \bar{x}) \vee (x\bar{y} \downarrow \bar{z})$ .

### 4.3. Спеціальні форми подання БФ

- Розкласти булеву функцію  $f(x, y, z)$  за змінними  $x$  та  $y$ :
  - $f(x, y, z) = z \Rightarrow (\bar{x} \downarrow y) \Rightarrow (\bar{z} \oplus (\bar{z} | x));$
  - $f(x, y, z) = (xy \Leftrightarrow \bar{z}) \downarrow (\bar{x} | (\bar{y} \oplus z)).$
- Побудувати ДНФ булевої функції  $f(x, y, z)$  методом рівносильних перетворень:
  - $f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) | (x \oplus \bar{z});$
  - $f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) | (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z)).$
- Побудувати КНФ булевої функції  $f(x, y, z)$  методом рівносильних перетворень:
  - $f(x, y, z) = (y \vee \bar{x} \Leftrightarrow z) | (\bar{x} \downarrow (\bar{y} \oplus z));$
  - $f(x, y, z) = (yz \Rightarrow (\bar{x} \downarrow z)) | (x \oplus \bar{z}).$
- За таблицею значень булевої функції  $f(x, y, z)$  побудувати її ДДНФ та ДКНФ.
  - $f(x, y, z) = \bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$
  - $f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x}).$
- Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції  $f(x, y, z)$  методом рівносильних перетворень:
  - $f(x, y, z) = \bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$
  - $f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x}).$
- Побудувати поліном Жегалкіна булевої функції  $f(x, y, z)$ , якщо
  - $f(x, y, z) = \bar{z} \oplus (\bar{x} \downarrow z) \Rightarrow ((x \Leftrightarrow \bar{y}) | z);$
  - $f(x, y, z) = (z \downarrow (\bar{x} \oplus y)) \bar{z} \Leftrightarrow (z | \bar{x}).$

### 4.4. Повнота та замкненість систем булевих функцій

- Перевірити, до якого з 5 основних замкнених класів належить булева функція  $f(x, y, z)$ , якщо
  - $N(\tilde{f}) = 77.$
  - $N(\tilde{f}) = 87.$
- Якими є найбільший та найменший можливі значення номера монотонної булевої функцій  $f(x, y, z, t)$ , якщо
  - $f(1, 0, 1, 0) = 0, f(1, 0, 0, 1) = 1.$
  - $f(0, 0, 1, 1) = 1, f(0, 1, 1, 0) = 0.$
- Вказати замикання системи функцій  $A$ , якщо
  - $A = \{xy, 1, x \Leftrightarrow y\}.$
  - $A = \{xy, 0, x \Leftrightarrow y\}.$
  - $A = \{x \vee y, 1, x \oplus y\}.$



d.  $A = \{x \vee y, 0, x \oplus y\}$

4. Перевірити, чи є функціонально повною система булевих функцій  $C$ . Якщо так, то вказати усі її бази.

a.  $C = \{x \oplus y, x \Leftrightarrow y, x \oplus y \oplus z, x \wedge y, x | \bar{y}\}$ .

b.  $C = \{x \oplus y, 1, x \wedge y, x \Leftrightarrow y \vee x\}$ .

#### 4.5. Основні поняття теорії логічних та контактних схем

1. Побудувати функції провідності контактної схеми.

a.

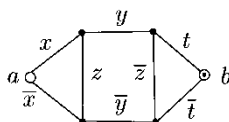


Рис. 5.

b.

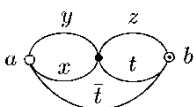


Рис. 6.

2. Побудувати функції провідності логічної схеми.

a.

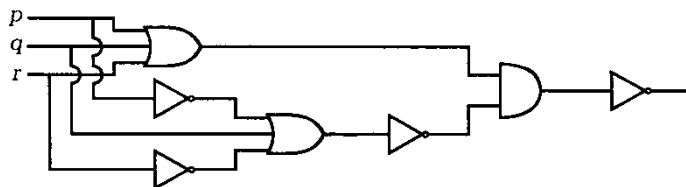


Рис. 7.

b.

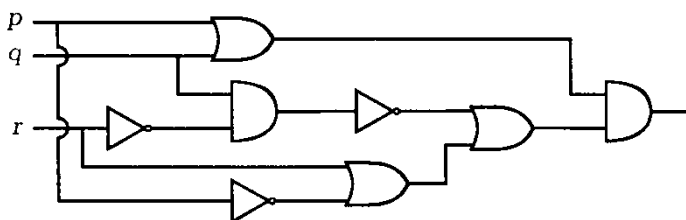


Рис. 8.

3. Спростити логічну схему

а.

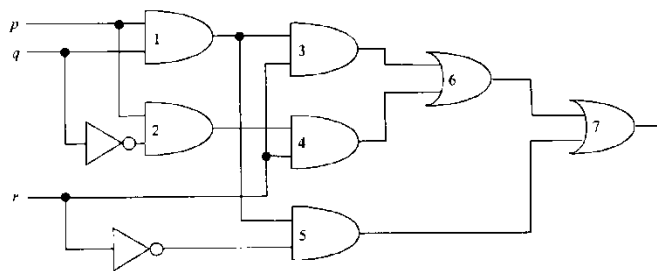
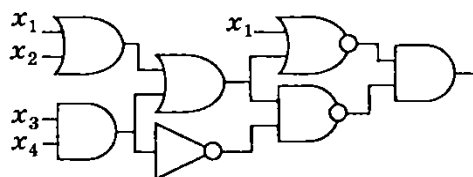


Рис. 9.

б.



с.

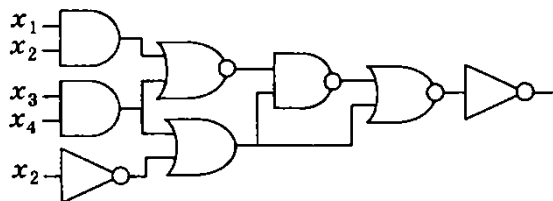


Рис. 10.

4. Спростити контактні схеми

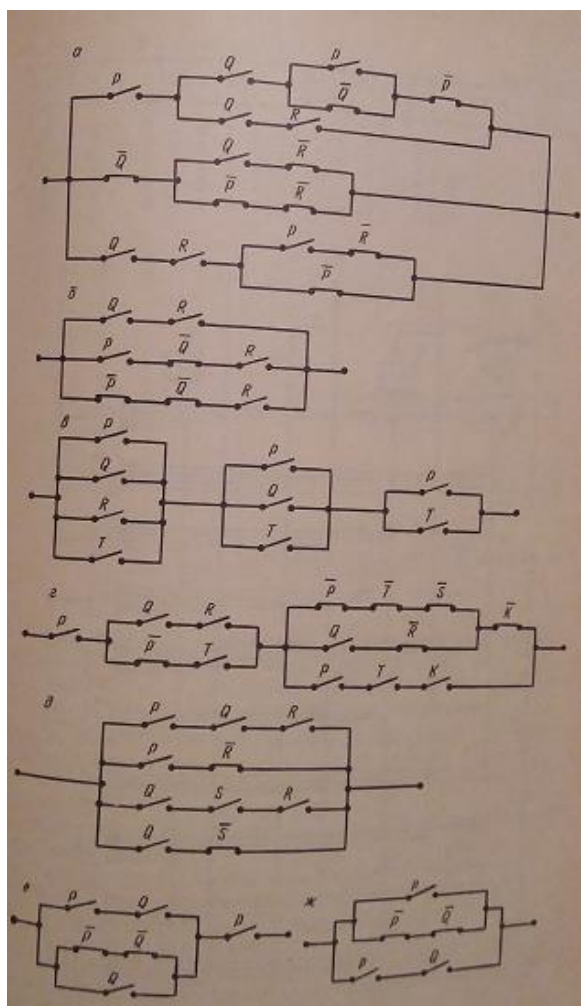


Рис. 11.

5. Побудувати логічну схему для
  - a. обчислення норми Хеммінга 3-вимірного вектора;
  - b. реалізації булевої функції, двоїстої до функції  $f(x, y, z) = (\bar{x} | \bar{y}) \oplus (\bar{z} \Rightarrow \bar{y})$ ;
  - c. обчислення скалярного добутку двовимірних булевих векторів;
  - d. обчислення максимуму із двох чисел, кожне з яких лежить у межах від 0 до 3;
  - e. обчислення добутку двобітових чисел;
  - f. обчислення суми трьох бітових змінних.
6. У великій кімнаті світло має включатися або виключатися за допомогою одного з трьох вимикачів. Побудувати відповідну контактну схему.
7. Комітет складається із п'яти учасників. Рішення виносяться більшістю голосів. Якщо голова комітету голосує проти, то рішення не приймається. Побудувати контактну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.
8. Комітет складається із чотирьох членів. Рішення приймається більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення не приймається. Побудувати контактну схему для забезпечення процесу голосування.
9. Кандидат відповідає на три питання. Побудувати контактну схему із двома виходами для виводу кількості неправильних відповідей.

## 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

1. Зобразити діаграму графа, який заданий за допомогою:

а) матриці інцидентності

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) матриці сусідства

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 2\beta + \alpha & \beta + \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \alpha + \beta & 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & \beta & \beta & 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & 3\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha & 2\beta \end{pmatrix}$$

2. Діаграма графа  $G$  наведена на рис. 12,  $G'$  — відповідний йому неорієнтований граф. Позначити вершини та ребра та виконати наступні завдання:

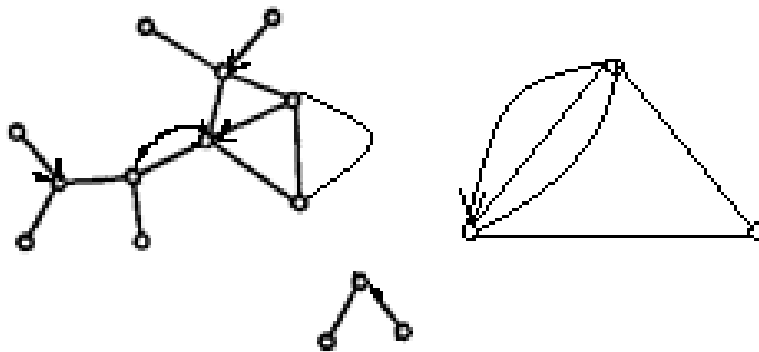


Рис. 12.

- а) Вказати матриці інцидентності та суміжності.
  - б) Знайти степені усіх вершин.
  - в) Вказати компоненти слабкої та сильної зв'язності та визначити цикломатичне число графа  $G'$ .
  - г) Знайти діаметр, радіус та центр графа, який відповідає компоненті зв'язності графа  $G'$  з найбільшою кількістю вершин та виконати його обхід з використанням пошуку у глибину та ширину.
  - д) вказати компоненти графа  $G'$ , які є ейлеревими та гамільтоновими.
3. Чи існує ейлерів шлях у графах, зображених на рис. 13.

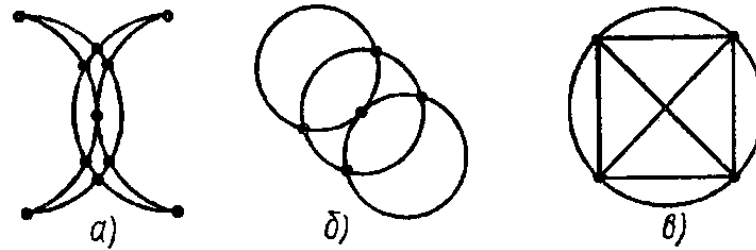


Рис. 13.

Якщо так, то вказати його.

4. Для впорядкованого дерева, діаграма якого зображена на рис. 14, виконати наступні завдання

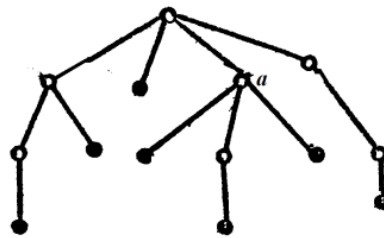


Рис. 14

- Вказати код Прюфера.
  - Знайти центр дерева.
  - Провести обхід вершин, починаючи із вершини  $a$ .
  - Зобразити кореневе дерево з коренем у вершині  $a$ .
  - Зобразити впорядковане дерево за допомогою бінарного дерева.
5. Зобразити дерево із коренем 5, яке має наступний код Прюфера: 4, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 3, 4.
6. Записати у префіксній та постфіксній формі наступний вираз

$$((a+1)(b+c)-2)*(3-b)/(b-a*c)+4.$$

- Обчислити значення виразу  $1, 3, 2, \wedge, 6, -, +, 2, 3, \wedge, 5, -, *, 3, 4, *, -$  та записати його у звичайному (інфіксному) вигляді.
- Записати усі неізоморфні графи 4-го порядку, які є лісом.
- Вказати усі неізоморфні звичайні графи, у яких:
  - Одна вершина має степінь 2, дві — 3, дві — 4.
  - Три вершини мають степінь 2, дві — 3, одна — 4.
- Довести, що серед довільних 6 людей є 3 попарно знайомі або три 3 попарно незнайомі.
- Серед пар графів, зображених на рис. 15, вказати пари ізоморфних.

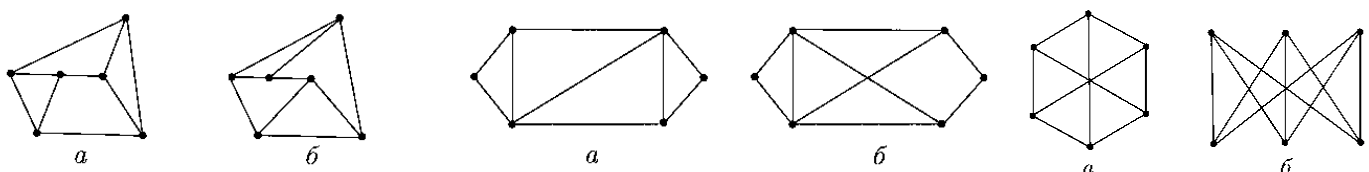


Рис. 15.

12. Для графа, изображенного на рис. 16, найти циклы з а) 4 ребер; б) 5 ребер; в) 11 ребер;

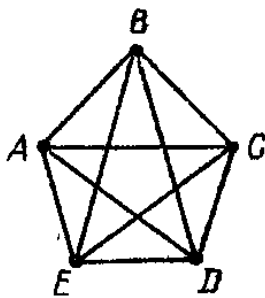


Рис. 16.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 580 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Центр навчальної літератури, 2004. — 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група ВНУ, 2007. — 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. — К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. — 83 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.
9. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
11. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. — СПб.: Вильямс, 2003. — 958 с.
12. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 269 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
14. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. — Ужгород: УжДУ, 1971. — 224 с.
15. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. — К: Техніка, 1973. — 76 с.
16. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовниченко. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа; 2003. — 384 с.