МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Ю.Ю. Млавець, М.М. Шаркаді

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(стислий конспект лекцій)

Ужгород – 2015

Млавець Ю.Ю., Шаркаді М.М. Теорія ймовірностей і математична статистика (стислий конспект лекцій для студентів нематематичних спеціальностей). – Ужгород: ДВНЗ “УжНУ”, 2015. – 48 с.

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. Кондрук Н.Е.
канд. фіз.-мат. наук, викл. Синявська О.О.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” від 19, 26 червня 2015 року, протокол № 11.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” від 31 серпня 2015 року, протокол № 7.

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Лекція 1. *Предмет теорії ймовірностей. Основні поняття. Операції над випадковими подіями.*

1.1.Основні поняття в теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей – це галузь математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ. У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо випадковими. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить наближений, неточний, випадковий характер. Наприклад, власник магазину не знає, скільки буде покупців, бізнесмен – яким буде завтра курс гривні, банкір – чи повернуть йому позику. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає теорія ймовірностей. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність.

Як і в кожній математичній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі початкові, первісні поняття, які покладені в її основу. **Випадковий експеримент** – це експеримент, результати якого передбачити неможливо. Можливі наслідки випадкового експерименту називаються **випадковими подіями.** Випадкові події позначаються літерами $A, B, C, D, \ldots$.

Класифікація випадкових подій:

❖ Подію називають **достовірною**, якщо при випробуванні вона обов'язково відбудеться. Достовірну подію позначимо Ω.

❖ Подію називають **неможливою**, якщо при випробуванні вона не відбудеться. Неможливу подію позначимо $\emptyset$.

❖ Із кожною подією А можна повязати подію, яка полягає в тому, що А не настає. Цю подію називають протилежною до A і позначають $\bar{A}$.

❖ Події називають **несумісними**, якщо появу однієї з них виключає поява інших подій в одному й тому ж випробуванні.

❖ Сукупність подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють **повну групу подій**, якщо одна і тільки одна із цих подій в результаті експерименту обов'язково настає: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq$ j. Події, що утворюють повну групу подій, називають **елементарними**.

Сукупність всіх можливих елементарних подій випробування називають **простором елементарних подій.**

Приклад 1.1. Випробування полягає в киданні грального кубика. Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де $\omega_i -$ випадання грані в і очок ($i = \overline{1,6}$). Подія A – випало парне число очок; $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, подія B – випало число очок, що ділиться на 3; $B = \{\omega_3, \omega_6\}$.

Приклад 1.2. Якщо тричі підкинути монету, то при кожному киданні вона може впасти догори гербом або цифрою, тому в цьому випадку є всього 8 результатів випробування – елементарних подій:

$ггг, ггц, гцг, цгг, гцц, цгц, ццг, ццц$. ($г$ означає випадання герба, $ц -$ цифри). Розглянемо приклади складених подій; нехай подія A полягає в тому, що випало принаймні два герби, подія $B -$ випала рівно одна цифра; тоді $A = \{ггг, ггц, гцг, цгг\}, B = \{ггц, гцг, цгг\}$.

1.2. Операції над випадковими подіями

Сумою (обєднанням) подій $A\ і\ B$ називається подія $A + B\ (A \cup B)$, яка полягає у появі хоча б однієї з цих подій. Сприятливими для суми $(A \cup B)$ є елементарні події, які сприятливі або для події A, або для події B, або для обох подій $A\ і\ B$.

Добутком (перетином) подій $A\ і\ B$ називається подія AB (A⋂B), яка полягає у сумісній появі цих подій одночасно. Сприятливими для добутку AB є елементарні події, які сприятливі і для події A, і для події B.

Різницею подій $A\ і\ B$ називається подія A/B, яка настає тоді, коли настає подія A і не настає подія B.

Подія ω буде **елементарною**, якщо для довільної події A, вона спричиняє або подію A або подію $\bar{A}$.

Наведені означення зручно ілюструвати за допомогою діаграм, на яких простір елементарних подій Ω зображено у вигляді прямокутника, а події у вигляді кругів (рис.1).

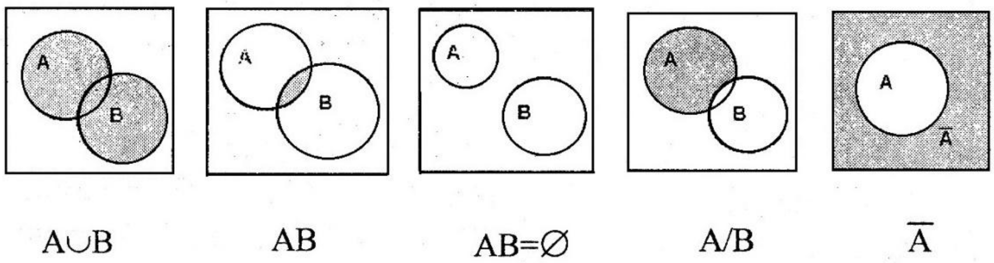


Рис.1

Приклад 1.3. Випробування полягає у киданні грального кубика. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_3, \omega_6\}$. Знайти $A \cup B, AB,$ A/B, $\bar{A}$.

Розв'язання. $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$, $AB = \{\omega_6\}$, $A/B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

Нехай $A, B\ і\ C$ – довільні випадкові події, $\emptyset -$ неможлива подія. Введені операції над подіями задовольняють наступним законам:

1. $\bar{\bar{A}} = A -$ закон подвійного заперечення.
2. $A + B = B + A -$ комутативний закон додавання.

3. $A \times B = B \times A -$ комутативний закон множення.
4. $(A + B) + C = A + (B + C) -$ асоціативний закон додавання.
5. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) -$ асоціативний закон множення.
6. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C -$ перший дистрибутивний закон.
7. $AB \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$
8. $A + A = A$
9. $A \times A = A$
10. $A + \bar{A} = \Omega$
11. $A \times \bar{A} = \emptyset$
12. $A + \Omega = \Omega$
13. $A \times \Omega = \Omega$
14. $A + \emptyset = A$
15. $A \times \emptyset = \emptyset$
16. $\overline{A + B} = \bar{A} \times \bar{B}$ – закон подвійності.
17. $\overline{A \times B} = \bar{A} + \bar{B} -$ закон подвійності.

Зауваження. Всі наведені вище визначення будуть справедливими, якщо події належатимуть одному простору елементарних подій. Якщо ж одна подія належить одному простору, а друга подія належить іншому простору, то ні про суму, ні про добуток подій і мови не може бути.

Доведемо властивість 7. Нехай $\omega \in AB \cup C$. Покажемо, що $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$. Якщо $\omega \in AB \cup C$, то $\omega \in AB$ або $\omega \in C$. У першому випадку $\omega \in A$ і $\omega \in$ B, отже, $\omega \in (A \cup C)$ і $\omega \in (B \cup C)$, отже $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$. Нехай $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$. Покажемо, що $\omega \epsilon AB \cup C$. Якщо $\omega \in (A \cup C)(B \cup C)$, то $\omega \in (A \cup C)$ і $\omega \in (B \cup C)$. Якщо $\omega \in C$, то $\omega \epsilon AB \cup C$. Якщо ж $\omega \notin C$, то $\omega \in A$ і $\omega \in$ B, тому $\omega \in AB$ і, отже, $\omega \in AB \cup C$.

Приклад 1.4. Двічі кидають монету. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – принаймні один раз випаде герб, B – при першому киданні випаде герб, $A \cup B, AB$, A/B.

Розв'язання. Якщо *г* – випадання герба, *ц* – випадання цифри, то простір елементарних подій Ω = {*гг, гц, цг, цц*}, подія *A*={*гг, гц, цг*}*,* подія *B*={*гг, гц*}. Оскільки $B \subset A$, то $A \cup B = A = \{\text{гг}, \text{гц}, \text{цг}\}$, $AB = B = \{\text{гг}, \text{г}ц\}, A/B = \{цг\}$.

Приклад 1.5. Кидають монету доти, доки герб не випаде двічі. Описати простір елементарних подій.

Розв'язання. Ω={*гг, цгг, гцг, гццг, цгцг, ццгг,…*}.

Приклад 1.6. Стрілець двічі стріляє по мішені. Подія A – влучення при першому пострілі; подія B – при другому. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що:

1. Стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C);
2. Стрілець влучив у мішень рівно один раз (подія D);
3. Стрілець не влучив у мішень (подія E).

Розв'язання. Простір елементарних подій складається з таких подій: $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$.

1) Якщо стрілець влучив у мішень принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі, або при другому, або при обох, тобто $C = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB = A \cup B$.
2) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому – ні, або при першому не влучив, а при другому влучив, тобто $D = A\bar{B} \cup \bar{A}B$.
3) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах, тобто $E = \bar{A}\bar{B}$.

Лекція 2. *Елементи комбінаторики.*

2.1. Основний принцип комбінаторики (правило множення)

Припустимо, що потрібно послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу $- n_2$ способами і т.д. до k-тої дії, яку можна виконати n_k способами то всі k дій можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад 2.1. Щоб дістатися з Києва до Одеси можна вибрати один із 4 залізничних або один із 3 автобусних рейсів. Скільки є варіантів здійснити подорожі за маршрутами: а) Київ-Одеса-Київ; б) Київ-Одеса-Київ, якщо повертатися з Одеси до Києва поїздом.

Розв'язання.

А) З Києва до Одеси можна дістатися 7 способами, з Одеси до Києва – також 7 способами. За правилом множення число способів здійснити таку подорож дорівнює 7×7=49.

Б) З Києва до Одеси можна дістатися 7 способами, з Одеси до Києва – 4 способами. За правилом множення число способів здійснити таку подорож дорівнює 7×4=28.

Приклад 2.2. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них повний обід?

Розв'язання. Згідно з правилом множення повний обід можна скласти 3×5×2=30 способами.

2.2. Розміщення, перестановки, комбінації

Множина разом із зазначеним порядком її елементів називається упорядкованою. Встановлений у скінченній множині порядок називається перестановкою її елементів. Число перестановок із n елементів :

$$P_n = n!. \tag{2.1}$$

Приклад 2.3. Скількома способами можна скласти список з 8 студентів?

Розв'язання. За формулою (2.1) одержимо:

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 4032$$

Упорядковані k-елементні підмножини множини із n елементів називається розміщенням із n елементів по k. Число розміщень із n по k:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2.2)$$

Приклад 2.4. Обчислити A_6^3.

Розв'язання. За формулою (2.2): $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Приклад 2.5. Скласти всі двозначні числа з різними цифрами 3, 5, 8.

Розв'язання. Маємо 35, 38, 53, 58, 83, 85. Загальну кількість різних чисел можна підрахувати за формулою (2.2): $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Довільні k-елементні підмножини множин із n елементів називаються комбінаціями із n елементів по k. Число комбінацій із n по k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2.3)$$

Приклад 2.6. На зборах присутні 30 осіб. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу комбінацій з 30 елементів по 3: $C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4060$.

<u>*2.3. Розміщення з повтореннями*</u>

Нехай $M -$ множина, що містить n елементів.

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається довільна впорядкована підмножина з k елементів з множини M (елементи не обов'язково різні). Число розміщень з повтореннями з n елементів по k знаходиться за формулою:

$$\widetilde{A_n^k} = n^k. \qquad (2.4)$$

Зауваження. $\widetilde{A_n^k} -$ це число способів, якими можна розкласти k різних предметів по n ящиках.

Приклад 2.7. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

Розв'язання. Задача зводиться до розкладання 10 предметів по 11 ящиках. Число таких способів дорівнює $\widetilde{A_{11}^{10}} = 11^{10}$.

<u>*2.4. Перестановки з повтореннями*</u>

Число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, …. , k_m елементів $m -$ того типу, дорівнює:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} \qquad (2.5)$$

Приклад 2.8. Скільки різних слів можна утворити перестановкою букв у слові "математика"?

Розв'язання. Слово "математика" містить $n = 10$ букв. Букв одного типу: "м" – дві, "а" –три, "т" – дві, "е" – одна, "и" – одна, "к" – одна. За формулою (2.5) одержимо: $\mathrm{P}_{10}(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot3!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!} = 151200$.

2.5. Комбінації з повтореннями

Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називається довільна підмножина з k елементів з множини M (елементи не обов'язково різні).

Число комбінацій з повтореннями з n елементів по k знаходиться за формулою:

$$\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \qquad (2.6)$$

Зауваження. $\widetilde{C_n^k}$ – це число способів, якими можна розкласти k однакових предметів по n ящиках.

Приклад 2.9. В кондитерській є 6 різних сортів тістечок. Скільки є способів купити 8 тістечок?

Розв'язання. Шукане число дорівнює $\widetilde{C_6^8} = C_{13}^8 = C_{13}^5 = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 1287$

Приклад 2.10. Скількома способами можна покласти 15 однакових куль у 5 урн?

Розв'язання. Це число способів дорівнює $\widetilde{C_{15}^5} = \frac{19\cdot18\cdot17\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 3876$.

Лекція 3. *Визначення ймовірності випадкових подій.*

3.1 Класичне визначення ймовірності

Побудова логічно повноцінної теорії ймовірностей засноване на аксіоматичному визначенні випадкової події і його ймовірності. В системі аксіом, запропонованої А. Н. Колмогоровим у 1933 році, невизначеними поняттями є елементарна подія і ймовірність.

Нехай із експериментом пов'язані n рівноможливих елементарних подій, m з яких спричинюють подію A, тоді:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (3.1)$$

Тобто відношення числа m, наслідків експерименту – елементарних подій, які спричинюють подію A, до числа n, всіх рівноможливих наслідків експерименту, називають ймовірністю події A.

Приклад 3.1. Знайти ймовірність того, що число очок, яке випаде на гральному кубику при одному киданні, буде парним (подія A).

Розв'язання. Простір елементарних подій Ω містить n=6 елементарних подій, подія $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ містить m=3 сприятливі події. За формулою (3.1) одержимо: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Властивості ймовірності:

1. Для кожної події $A \subset \Omega$ справджується нерівність $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Ймовірність достовірної події дорівнює 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю $P(\emptyset) = 0$.

Приклад 3.2. В урні 15 білих і 10 чорних кульок. З урни навмання виймають три кульки. Знайти ймовірність того, що 1) всі три кульки білі (подія A); 2) дві кулі – білі і одна чорна (подія B).

Розв'язання. 1) Число всіх елементарних подій дорівнює числу комбінацій з 25 по 3, тобто n=C_{25}^3. Знаходимо число сприятливих подій. Три білі можна вибрати з 15 білих кульок m=C_{15}^3 способами. Тому шукана ймовірність дорівнює $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^3}{C_{25}^3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{91}{460}$. 2) Як і в 1) n=C_{25}^3. Знаходимо число сприятливих подій. Дві білі можна вибрати з 15 білих кульок C_{15}^2 способами, а 1 чорну з 10 чорних – C_{10}^1 способами. За правилом множення одержимо m=$C_{15}^2 C_{10}^1$. Маємо $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_{15}^2 C_{10}^1}{C_{25}^3} = \frac{15 \cdot 14}{1 \cdot 2} \cdot \frac{10}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{21}{46}$.

3.2. Геометричне визначення ймовірності

Нехай в результаті випробування точка з однаковою ймовірністю обов'язково може потрапити в будь-яке місце деякої області. Вважаємо, що подія відбулася, якщо точка при цьому потрапляє в область. Геометричною ймовірністю події називають ймовірність, обчислену за формулою:

$$P(A) = \frac{\text{міра } A}{\text{міра } \Omega} \tag{3.2}$$

Під мірою розуміють довжину, площу, об'єм в одно-, двох- і тривимірному випадках відповідно.

Приклад 3.3. На аудіокасеті записані концерти трьох співаків: першого-протягом 40 хв. Звучання, другого – протягом 30 хв., третього – протягом 20 хв. Запис перемотується і навмання включається. Яка ймовірність, що звучить пісня у виконанні другого співака?

Розв'язання. Час звучання всього запису $T(\Omega) = 90$ хв., час звучання другого співака $T(A)$=30 хв. За формулою (3.2) маємо $P(A) = \frac{\mathrm{T(A)}}{T(\Omega)} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

Приклад 3.4. Відрізок завдовжки один розділили на 3 частини, вибираючи дві точки поділу навмання. Знайти ймовірність того, що з утворених трьох відрізків можна скласти трикутник.

Розв'язання. Позначимо довжини частин відрізка через $x, y,\ l - x - y$. Очевидно, що $0 < x + y < l, x > 0, y > 0$. Якщо x, y розглядати як декартові координати на площині, то простір елементарних подій буде трикутник OAB (рис.2).

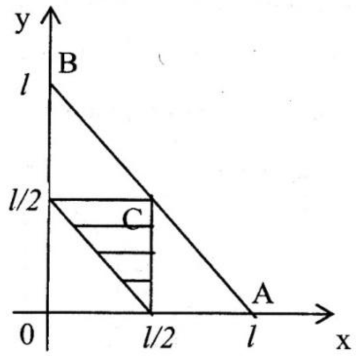


Рис.2

Для того, щоб з відрізків $x, y,\ l - x - y$ можна було скласти трикутник, необхідно і достатньо, щоб кожен з цих відрізків був менший за суму двох інших, тобто $x < y + (l - x - y),\ y < x + (l - x - y),\ l - x - y < x + y$. Звідси $x < \frac{l}{2}, y < \frac{l}{2}, x + y > \frac{l}{2}$. Ця система нерівностей виділяє трикутник C, заштрихований на рис. 2. Отже, $P(C) = \frac{\text{пл}C}{\text{пл}\Omega} = \frac{\frac{1}{8}\cdot l^2}{\frac{1}{2}\cdot l^2} = \frac{1}{4}$.

3.3. Відносна частота, статистична ймовірність події

Нехай в однакових умовах проводиться серія із n випадкових експериментів, у кожному з яких може настати деяка подія A. Якщо $\mu(A)-$ експериментів, у яких подія A настал, то відношення $\nu(A) = \frac{\mu(A)}{n}$ називається відносною частотою настання події. Відносна частота має такі властивості:

1. $0 \leq \nu(\mathrm{A}) \leq 1$;
2. $\nu(\Omega) = 1$;
3. $\nu(\emptyset) = 0$;
4. якщо A і B − несумісні події, то $\nu(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \nu(\mathrm{A}) + \nu(\mathrm{B})$.

Число, біля якого ґрунтуються відносні частоти випадкової події A при зростанні числа експериментів, називається ймовірністю події A і позначається $P(A)$. Це означення ймовірності називається статистичним. На практиці, при великій кількості експериментів, за ймовірність наближено приймають відносну частоту.

Приклад 3.8. При стрільбі була одержана відносна частота влучень 0,6. Скільки було зроблено пострілів, якщо одержано 12 промахів?

Розв'язання. Нехай було зроблено n пострілів. Тоді число влучень дорівнює $n - 12$, а відносна частота дорівнює $\frac{n-12}{n} = 0{,}6$. Звідси $n - 12 = 0{,}6n$, тоді $n = 30$.

Лекція 4. *Властивості ймовірностей. Теореми додавання і множення ймовірностей.*

4.1. Властивості ймовірностей

Їх формулюють у вигляді теорем, для доведення яких використовують аксіоми теорії ймовірностей. Наведемо їх як властивості, включаючи і аксіоми.

Аксіома 1. Ймовірність випадкової події A задовільняє подвійній нерівності: $0 \le \mathrm{P(A)} \le 1$.

Аксіома 2. Ймовірність вірогідної події дорівнює 1: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Аксіома 3. Ймовірність протилежної події: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P(A)}$.

Аксіома 4. Ймовірність неможливої події дорівнює 0: $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

4.2. Теореми додавання і множення ймовірностей

Теорема 4.1 (додавання ймовірностей несумісних подій). Ймовірність об'єднання попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій. Так для двох несумісних подій:

$$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{4.1}$$

Висновок із теореми. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює 1:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Доведення:

Оскільки $A_1, A_2, \dots, A_n$ – повна група подій, то поява хоч би однієї з них – достовірна подія: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1$. Оскільки події несумісні, до них застосовна теорема додавання ймовірностей:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

Приклад 4.1. В ящику 10 червоних і 6 синіх ґудзиків. Навмання виймають два ґудзики. Яка ймовірність того, що ґудзики будуть одного кольору?

Розв'язання. Введемо позначення: подія $A -$ гудзики одного кольору, подія $B -$ ґудзики червоні, подія $C -$ ґудзики сині. Очевидно, $A = B \cup C$ і події B $і$ C несумісні. За формулою (4.1) $P(A) = P(B) + P(C)$. Знайдемо $P(B)$ і $P(C)$. Число способів взяти 2 гудзики з 16 дорівнює C_{16}^2. Число наслідків, сприятливих для події B, дорівнює C_{10}^2, а для події $C - C_6^2$.

Одержимо:

$P(B) = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{16 \cdot 15} = \frac{3}{8}$; $P(C) = \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{16 \cdot 15} = \frac{1}{8}$. Отже, $P(A) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$.

Теорема додавання будь-яких двох подій. Ймовірність появи об'єднання будь−яких двох подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх перетину (сумісної появи):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{4.2}$$

Висновок із теореми. Ймовірність суми трьох сумісних подій
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) -$
$-P(A \cap B \cap C)$.

Приклад 4.2. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або тому й іншому одночасно.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A − вибране число кратне 2, або 5, або тому й іншому одночасно, подія B − число кратне 2, подія C – число кратне 5. Очевидно, що $A = B \cup C$. За формулою (4.2): $P(A) = P(B) + P(C) - P(BC)$. Всього є $n = 90$ двозначних чисел, з них 45 кратних 2. Кількість двозначних чисел, кратних 5, за правилом добутку дорівнює $n = 9 \cdot 2 = 18$, з них 9 чисел кратних і 2 і 5. Маємо $P(B) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}, P(BC) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$. Отже, $P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

4.3. Умовні ймовірності та незалежні події. Теорема множення ймовірностей

Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається величина:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0. \tag{4.3}$$

Подія A називається **незалежною** від події B, коли ймовірність події A не залежить від того, відбулася подія B, чи не відбулася.

Подія A називається **залежною** від події B, коли ймовірність події A змінюється залежно від того, відбулася подія B, чи не відбулася.

Теорема добутку ймовірностей. Ймовірність сумісної появи двох подій дорівнює ймовірності однієї з них, помножену на умовну ймовірність іншої:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B\ /\ A) = P(B) \times P(A\ /\ B) \tag{4.4}$$

Висновок: Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A. У разі n незалежних подій:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Теорема 4.3 (добутку ймовірностей для незалежних подій). Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B).$$

Приклад 4.3. Кинуто три монети. Визначити, залежні чи незалежні події: A − випав герб на першій монеті, B − випала хоча б одна цифра.

Розв'язання. Простір елементарних подій:
$\Omega = \{ггг, ггц, гцг, цгг, гцц, цгц, ццг, ццц\}$, A=$\{$*ггг, ггц, гцг, гцц*$\}$, подія B=$\{$*ггц, гцг, цгг, гцц, цгц, ццг, ццц*$\}$, подія AB=$\{$*ггц, гцг, гцц*$\}$. Очевидно, що $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{8}, P(AB) = \frac{3}{8}, P(AB) = \frac{3}{8} \neq P(A)P(B) = \frac{7}{14}$. Події A *і* B залежні.

Теорема 4.4. Ймовірність настання принаймні однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, знаходиться за формулою:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \tag{4.5}$$

Наслідок: Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність p, то ймовірність настання принаймні однієї з цих подій дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n \tag{4.6}$$

Приклад 4.4. У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі браковані, у другому – 3, у третьому – 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них є принаймні одна стандартна.

Розв'язання. Позначимо події: A – серед трьох деталей принаймні одна стандартна, A_i $(i = 1,2,3)$ – деталь, взята з i-го ящика, стандартна. Маємо:

$$P(A_1) = \frac{8}{10}, P(A_2) = \frac{7}{10}, P(A_3) = \frac{9}{10},$$

$$q_1 = P(\overline{A_1}) = \frac{2}{10}, q_2 = P(\overline{A_2}) = \frac{3}{10}, q_3 = P(\overline{A_3}) = \frac{1}{10}.$$

За формулою (4.6) маємо: $P(A) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$

Приклад 4.5. Ймовірність хоча б одного влучення в ціль при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі.

Розв'язання. Нехай подія A – хоча б одне влучення в ціль при чотирьох пострілах, p –ймовірність влучення при одному пострілі, $q = 1 - p$ – ймовірність промаху при одному пострілі. Тоді $P(A) = 1 - q^4$. За умовою $1 - q^4 = 0{,}9984$, звідки $q^4 = 0{,}0016$, $q = 0{,}2$, $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Приклад 4.6. Ймовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,4. Скільки треба зробити пострілів, щоб ймовірність принаймні одного влучення була не менше ніж 0,9.

Розв'язання. Нехай подія A – при n пострілах буде хоча б одне влучення. Тоді $P(A) \geq 0{,}9$. Одержимо: $1 - 0{,}6^n \geq 0{,}9$, звідки $0{,}6^n \leq 0{,}1$. Прологарифмуємо за основою 10: $n \lg 0{,}6 \leq \lg 0{,}1$. Враховуючи, що $\lg 0{,}6 < 0$ маємо: $n \geq \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6} = 4{,}5$. Отже, $n \geq 5$, тобто потрібно зробити не менше 5 пострілів.

Лекція 5. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.

5.1. Формула повної ймовірності

Формула повної ймовірності – висновки теорем додавання і множення ймовірностей. Нехай деяка подія A може відбутися тільки разом з однією з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$. Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ складають повну групу несумісних подій і називаються гіпотезами.

Теорема 5.1. Ймовірність події A, яка може відбутись лише за умови появи однієї з несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \,/\, H_i). \qquad (5.1)$$

Формула (5.1) називається формулою повної ймовірності.

Доведення.

Оскільки $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій, то при випробуванні подія A відбудеться тільки разом з однією з гіпотез:

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A.$$

Гіпотези несумісні, тому і події $H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$ також несумісні. Для визначення ймовірностей $P(A)$ застосовуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій: $P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A)$.

До подій $H_1 \cdot A, H_2 \cdot A, \dots, H_n \cdot A$ застосовуємо теорему множення ймовірностей, отримаємо :

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \,/\, H_1) + P(H_2) \cdot P(A \,/\, H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A \,/\, H_n),$$

що й потрібно було довести.

Приклад 5.1. У трьох урнах лежать білі і чорні кулі. У першій – 3 білі і 1 чорна, у другій – 6 білих і 4 чорних, у третій – 9 білих і 1 чорна. З навмання взятої урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.

Розв'язання. Введемо позначення: події $H_i (i = 1,2,3) -$ вибрана i-та урна, подія $A -$ взята куля біла. Очевидно, що:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}, P(A/H_1) = \frac{3}{4}, P(A/H_2) = \frac{6}{10},$$

тоді:

$$P(A \,/\, H_3) = \frac{3}{10}.$$

5.2. Формули Байєса

Нехай тепер деяка подія A відбулася разом з однією із подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що складають повну групу несумісних подій.

Визначимо ймовірність гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ за умови, що подія A вже відбулася, тобто обчислимо умовні ймовірності $P(H_1 \,/\, A), \dots, P(H_n \,/\, A)$.

За теоремою множення $P(A \cdot H_1) = P(A) \cdot P(H_1 \,/\, A)$, звідки

$$P(H_1 \,/\, A) = \frac{P(A \cdot H_1)}{P(A)} = \frac{P(H_1) P(A \,/\, H_1)}{P(A)}$$

Ймовірність $P(A)$ обчислюємо за формулою (5.1). Тоді:

$$P(H_1 \,/\, A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Аналогічно можна обчислити умовну ймовірність $P(H_2 \,/\, A), \dots, P(H_n \,/\, A)$. Тому загальну формулу запишемо у такому вигляді:

$$P(H_k \,/\, A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, k = 1, 2, \dots, n. \qquad (5.2)$$

Формули Байєса (5.2) дозволяють перерахувати ймовірність гіпотез після того, як подія A відбулася в результаті випробування.

Приклад 5.2. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх гвинтів. Частка браку відповідно 5%, 4% і 2%. Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою, другою, третьою машинами?

Розв'язання. Позначимо події: $H_i(i = 1,2,3) -$ вибраний гвинт виготовлений і-ю машиною, $A -$ вибраний гвинт бракований. З попереднього прикладу одержимо: $P(H_1) = 0,25, P(H_2) = 0,35, P(H_3) = 0,40;$

$$P(A \,/\, H_1) = 0,05, P(A \,/\, H_2) = 0,04, P(A \,/\, H_3) = 0,02;$$

Тобто:

$$P(A) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,02 = 0,0345.$$

З формули (5.2) маємо, що:

$$P(H_1 \,/\, A) = \frac{P(H_1)P(A \,/\, H_1)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = 0,3623$$

$$P(H_2 \,/\, A) = \frac{P(H_2)P(A \,/\, H_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,0345} = 0,4058$$

$$P(H_3 \,/\, A) = \frac{P(H_3)P(A \,/\, H_3)}{P(A)} = \frac{0,40 \cdot 0,02}{0,0345} = 0,2319$$

***Лекція 6**. Послідовні незалежні випробування. Формула Бернуллі.*

6.1. Формула Бернуллі

Часто зустрічаються задачі, в яких один і той же дослід (випробування) повторюються неодноразово. В результаті кожного випробування може з'явитися або не з'явитися подія A. Цікавить не результат окремого досліду, а загальне число появ події A в серії дослідів.

Наведемо умови для випробувань, що повторюються:

1) кількість випробувань – число обмежене, позначаємо n;

2) ймовірність появи події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, такі випробування називаються незалежними щодо події A;

3) ймовірність появи події A в кожному випробуванні – величина постійна, позначимо $P(A) = p$.

Повторення випробувань може бути обумовлене повторенням у часі випробування одного і того ж об'єкта, як згадане підкидання монети однією людиною. Проте, повторення випробувань може відбуватися незалежно від часу, коли випробуванню піддається декілька однакових об'єктів.

Позначимо символом q ймовірність не появи події $A : P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Нехай потрібно визначити ймовірність того, що подія A відбулася рівно m раз у n випробуваннях. Така ймовірність позначається $P_{m.n}(A)$. (Очевидно, що в загальному випадку $0 \leq m \leq n$). Позначимо $B_m -$ подію, яка полягає в тому, що подія A відбулася рівно m раз у n випробуваннях. Нехай A_i поява події в i - м випробуванні; $\overline{A_k}$ – непоява події в k - м випробуванні. Тоді:

$$B_m = A_1A_2 \dots A_m\bar{A}_{m+1} \dots \overline{A_n} + A_1A_2 \dots A_{m-1}\bar{A}_m \dots \bar{A}_{n-1}A_n + \cdots$$
$$+ \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-m}A_{n-m+1} \dots A_n$$

У кожен добуток A входить m раз, $\bar{A}$ входить $(n-m)$ раз. Число всіх добуток дорівнює числу комбінацій з n елементів по m елементів: C_n^m. Ймовірність кожного добутку визначається за теоремою множення ймовірностей незалежних подій і дорівнює $p^m q^{n-m}$. Добутки між собою несумісні (у кожній парі добуток є протилежні події з однаковим індексом), тому ймовірність суми добуток визначається за теоремою складання несумісних подій:

$$P(B_m) = P(A_1A_2 \dots A_m\bar{A}_{m+1} \dots \overline{A_n}) + \cdots + P(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_{n-m}A_{n-m+1} \dots A_n)$$
$$= p^m q^{n-1} + p^m q^{n-1} + \cdots + p^m q^{n-1}$$

Таким чином,

$$P_{m,n}(A) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}. \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) називається **формулою Бернуллі**.

Ймовірність того, що у n випробуваннях подія A наступить:

- менше m разів: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + \cdots + P_{m-1,n}(A)$;
- більше m разів: $P_{m+1,n}(A) + P_{m+2,n}(A) + \cdots + P_{n,n}(A)$;
- не менше m разів: $P_{m,n}(A) + P_{m+1,n}(A) + \cdots + P_{n,n}(A)$;
- не більше m разів: $P_{0,n}(A) + P_{1,n}(A) + \cdots + P_{m,n}(A)$;

Приклад 6.1. Монету кинуто 6 раз. Знайти ймовірність того, що що герб випаде 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 раз.

Розв'язання. Маємо $n = 6, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$. Тоді, використовуючи формулу (6.1) маємо, що:

$$P_6(0) = C_6^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}, \qquad P_6(1) = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{6}{64}$$

$$P_6(2) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{64},$$

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64}, P_6(4) = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64},$$

$$P_6(5) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{64}, P_6(6) = C_6^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}.$$

6.2. Найімовірніше число появ події у незалежних випробуваннях

Число k_0 (появи події у незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p) називається найімовірнішим, якщо ймовірність того, що подія у цих випробуваннях відбудеться k_0 разів перевищує (або принаймні не менше) ймовірності інших можливих результатів випробувань.

Найімовірніше число k_0 визначається з подвійної нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p, \qquad (6.2)$$

причому:

- якщо число $np - q -$ дробове, то існує одне найімовірніше число k_0;
- якщо число $np - q -$ ціле, то існують два найімовірніших числа k_0 і $k_0 + 1$;
- якщо число $np -$ ціле, то найімовірніше число $k_0 = np$.

Приклад 6.2. Ймовірність влучень в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб найімовірніше число влучень дорівнювало 18?

Розв'язання. За умовою $p = 0{,}8, k_0 = 18$. За формулою (6.2) одержимо:

$$18 = [(n+1)\cdot 0{,}8], 0{,}8 \cdot n = 17{,}2, n = [21{,}5] = 21$$

Лекція 7. *Локальна й інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Наближена формула Пуассона при повторенні випробувань.*

7.1. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Теорема 7.1. Нехай в кожному з n незалежних випробувань імовірність настання події A однакова і дорівнює p $(0 < p < 1)$, тоді справедлива наближена рівність

$$P_n(k) = \frac{1}{npq}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (7.1)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$. Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Таблиця функції $\varphi(x)$ наведена в додатку 1. Формула (7.1) дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p та q не дуже близькі до нуля ($npq > 9$).

Приклад 7.1. Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть: а) рівно 75 випробувань; б) рівно 85 випробувань?

Розв'язання. а) За умовою $n = 300, k = 75, p = 0{,}25,$ тоді $q = 1 - p =$ $= 0{,}75$. Обчислимо вираз:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 300 \cdot 0{,}25}{\sqrt{300 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{0}{75} = 0.$$

З формули (7.1) маємо, що:

$$P_{300}(75) \approx \frac{1}{7{,}5}\varphi(0) = \frac{0{,}3989}{7{,}5} = 0{,}0532$$

б) $n = 300, k = 85, p = 0{,}25,$ тоді $q = 0{,}75$. Обчислимо вираз:

$$\frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 300 \cdot 0{,}25}{\sqrt{300 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{10}{75} = 1{,}33.$$

З формули (7.1) маємо, що:

$$P_{300}(85) \approx \frac{1}{7{,}5}\varphi(1{,}33) = \frac{0{,}1647}{7{,}5} = 0{,}0219.$$

7.2. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Теорема 7.2. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія A може відбутись з ймовірністю p $(0 < p < 1)$, подія A відбудеться не менше k_1 і не більше k_2 раз, наближено дорівнює

$$P_n\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{7.2}$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$, таблиця функції $\Phi(x)$ наведена в додатку 2.

Приклад 7.2. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийде з ладу: а) від 6 до 18 приладів, б) не менше 20.

Розв'язання.

а) За умовою $n = 100, k_2 = 18, k_1 = 6, p = 0{,}1, q = 1 - p = 0{,}9$. Знаходимо:

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{18 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{8}{3} = 2{,}66;$$

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{6 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -\frac{4}{3} = -1{,}33;$$

$$P_{100}\{6 \le k \le 18\} \approx \Phi(2{,}66) - \Phi(-1{,}33) = \Phi(2{,}66) + \Phi(1{,}33) =$$
$$= 0{,}49609 + 0{,}40824 = 0{,}90433.$$

б) $n = 100, k_2 = 100, k_1 = 20, p = 0{,}1, q = 1 - p = 0{,}9$.

$$\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{90}{3} = 30;$$

$$\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{10}{3} = 3{,}3;$$

$$P_{100}\{20 \le k \le 100\} \approx \Phi(30) - \Phi(3{,}3) = 0{,}5 - 0{,}4995 = 0{,}0005.$$

7.3. Наближена формула Пуассона при повторенні випробувань

Формула Бернуллі не може бути застосована, якщо число випробувань дуже велике, оскільки при цьому неприпустимо велика похибка обчислень.
Нехай $n \to \infty, p \to 0$, але величина $p \cdot n = \lambda$ зберігає постійне значення. У формулу Бернуллі підставимо $p = \frac{\lambda}{n}$ і визначимо межу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} P_{m,n}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \frac{\lambda^m}{n^m} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \left(\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right)^{\frac{\lambda}{n}(n-m)} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot 1 \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\lambda n + \lambda m}{n}} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Тут $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-m)!\cdot n^m}=1$ як відношення нескінченно великих величин одного порядку зростання.

Отримана наближена формула:

$$P_{m,n}(A)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \text{ де } \lambda=p\cdot n \tag{7.3}$$

називається формулою Пуассона і застосовується, коли n – велике, а ймовірність p – мала (орієнтування $p<0{,}1,\ npq<9$).

Формула Пуассона використовується в завданнях, де розглядаються рідкісні події.

Приклад 7.3. Середній брак при виробництві продукції становить 0,1%. Перевіряється партія з 1000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованих буде від 2 до 4 деталей?

Розв'язання. За умовою $n=1000, p=0{,}001$, отже

$$\lambda=p\cdot n=0{,}001\cdot 1000=1,$$

$$P\{2\le m\le 4\}=\frac{1^2}{2!}e^{-1}+\frac{1^3}{3!}e^{-1}+\frac{1^4}{4!}e^{-1}=0{,}26058$$

Приклад 7.4. Ймовірність влучень в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

Розв'язання: За умовою $n=5000, p=0{,}001.$ Отже,

$$\lambda=p\cdot n=0{,}001\cdot 5000=5, P\{m\ge 2\}=1-P\{0\le m\le 1\}=1-e^{-5}-$$
$$-5e^{-5}=1-0{,}00674-0{,}03369=0{,}95957.$$

РОЗДІЛ 2. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Лекція 8. *Дискретні випадкові величини.*

8.1. Випадкові величини та функція розподілу

Випадковою називають величину, яка в результаті випробування набуває одне і лише одне з можливих значень, наперед не відоме і залежне від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані. Розрізняють дискретні і неперервні випадкові величини.

Функція $F(x)$ називається **функцією розподілу** випадкової величини X.

$$F(x) = P\{X < x\} \qquad (8.1)$$

Функція розподілу має наступні властивості:

1) множина значень функції розподілу збігається з інтервалом значень ймовірностей: $F(x) = P(X < x), 0 \le F(x) \le 1$;
2) функція розподілу не спадна, $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;
3) граничні значення функції розподілу: $F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$;
4) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[a, b)$:

$$P\{a \le X < b\} = F(b) - F(a);$$

5) функція розподілу неперервна зліва: $\lim_{x \to x_1 - 0} F(x) = F(x_1)$.

Змінна величина X, що набуває числові значення x_i з ймовірністю p_i, $(i = 1, k)$, називається **дискретною випадковою величиною.**

Таким чином, дискретна випадкова величина набуває окремі, ізольовані значення з певною ймовірністю. Наприклад, якщо випадкова величина $X -$ кількість пасажирів маршрутного таксі, то її значення x_i набувають тільки невід'ємні цілі значення.

Функціональна залежність ймовірності p_i від x_i називається законом **розподілу ймовірності** дискретної випадкової величини X.

Закон розподілу можна зобразити у вигляді таблиці 1 або графічно.

Табл. 1

Можливі значення x_i випадкової величини	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Ймовірність p_i значень випадкової величини	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Те, що випадкова величина X набуває одне із значень x_k, є подія достовірна і тому повинна виконуватися умова:

$$\sum p_k = 1 \qquad (8.2)$$

(зазначимо, що послідовність значень x_k, p_k може бути як скінчена, так і нескінченна).

За рядом розподілу (8.2) можна побудувати функцію розподілу дискретної випадкової величини X:

$$F(x) = \sum_{x_k<x} p_k, \tag{8.3}$$

де підсумування поширюється на ті індекси k, для яких $x_k < x$.

Приклад 8.1. В партії з шести деталей чотири стандартні. Навмання вибрано три деталі. Знайти:

1) ряд розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних;

2) функцію розподілу $F(x)$;

3) $P\{1{,}5 \le X < 2{,}5\}$.

Розв'язання.

1. Випадкова величина X – число стандартних деталей серед відібраних – може приймати такі значення: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. Знайдемо ймовірності можливих значень X:

$$P\{X = 1\} = \frac{C_2^2 C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_2^1 C_4^2}{C_6^3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

$$P\{X = 3\} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ряд розподілу:

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

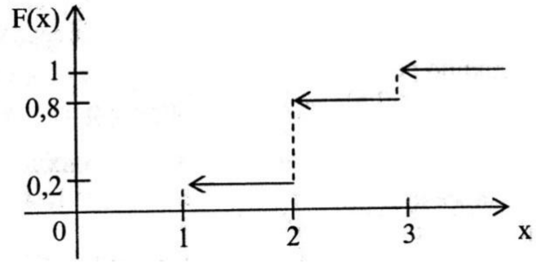
Контроль: 0,2+0,6+0,2=1.

2. Якщо:

$$x \le 1, \text{то } F(x) = 0;$$
$$1 < x \le 2, F(x) = 0{,}2;$$
$$1 < x \le 3, F(x) = 0{,}2 + 0{,}6 = 0{,}8;$$
$$x > 3, F(x) = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}2 = 1.$$

Таким чином:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ 0{,}2 \;\; 1 < x \le 2; \\ 0{,}8 \;\; 2 < x \le 3 \\ x > 3 \end{cases}$$



3. $P\{1,5 \le X < 2,5\} = F(2,5) - F(1,5) = 0,8 - 0,2 = 0,6.$

8.2. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

- **Індикатор випадкової події A.** Проведемо одне випробування, в якому може відбутись подія A з ймовірністю p $(0 < p < 1)$. Випадкова величина I_A — число настання події A. Ряд розподілу:

I_A	0	1
p	$1 - p$	p

- **Біномний розподіл**. Закон розподілу називається біномним, якщо ймовірність появи кожного значення випадкової величини X визначається за формулою Бернуллі (6.1).

Приклад 8.2. В партії 10% нестандартних деталей. Навмання вибрали чотири деталі. Знайти біномний закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед чотирьох відібраних.

Розв'язання. Випадкова величина X може приймати такі значення: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4.$ Очевидно, що $n = 4, p = 0,1,$ $q = 1 - 0,1 = 0,9$. Одержимо:

$$P_4(0) = q^4 = 0,9^4 = 0,6561, P_4(1) = C_4^1 pq^3 = 4 \cdot 0,1 \cdot 0,9^3 = 0,2916,$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486,$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9 = 0,0036, P_4(4) = p^4 = 0,1^4 = 0,0001$$

Контроль: 0,6561+0,2916+0,0036+0,0486+0,0001=1

X	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

- **Розподіл Пуассона.** Нехай дискретна випадкова величина X виражає кількість появ події A при масових випробуваннях (n — велике), але при цьому в кожному випробуванні ймовірність появи події $P(A) = p$ мала, і виконується умова $np = \lambda =$ const. У таких випадках закон розподілу випадкової величини задається формулою Пуассона $P_{m,n}(A) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ і називається розподілом Пуассона. Прикладами випадкових величин, що мають розподіл Пуассона, є: число викликів на телефонній станції за час t; число друкарських помилок у великому тексті; число бракованих деталей у великій партії.
- **Геометричний розподіл.** Нехай відбуваються незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p $(0 < p < 1)$, $q = 1 - p$. Випробування закінчуються, як тільки з'явиться подія A. Якщо подія з'явилася в k-му випробуванні, то у всіх попередніх вона не з'являлась. Позначимо через X – число випробувань, які потрібно зробити до першої появи події A. Можливими значеннями є натуральні числа $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, і так

далі. Якщо в перших $k-1$ випробуваннях подія не з'явилася, а в k - му випробуванні відбулася, то:

$$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p. \qquad (8.4)$$

Задаючи k=1,2,3,… визначимо суму ймовірностей всіх значень випадкової величини X:

$$p+pq+pq^2+pq^3+\cdots+pq^n+\cdots$$

Отриманий числовий ряд – це нескінчена спадає геометрична прогресія зі знаменником $|q|<1$. Тому ряд збігається, а сума ряду визначається за формулою $S=\frac{p}{1-q}=\frac{p}{p}=1$.

Закон розподілу ймовірностей (8.4) називається геометричним.

Приклад 8.3. Ймовірність того, що стрілець влучить в мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрільцеві видають патрони доти, доки він не промахнеться. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини $X-$ числа виданих стрільцеві патронів.

Розв'язання. Величина X має такі можливі значення: $x_1=1, x_2=2,\dots,x_k=k,\dots$. Знайдемо ймовірності цих значень. Величина X приймає значення $x_1=1$, якщо стрілець не влучить в мішень при першому пострілі. Ймовірність цього значеннч $P\{X=1\}=1-0{,}8=0{,}2$. Величина X приймає значення $x_2=2$, якщо стрілець влучить в мішень при першому пострілі , а при другому промахнеться: $P\{X=2\}=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$. Аналогічно $P\{X=3\}=0{,}8^2\cdot 0{,}2=0{,}128$,…, $P\{X=k\}=0{,}8^{k-1}\cdot 0{,}2,\dots$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини має вигляд:

X	1	2	3	…	K	…
P	0,2	0,16	0,128	…	$0{,}8^{k-1}\cdot 0{,}2$	…

Лекція 9. *Неперервні випадкові величини.*

9.1 Означення неперервної випадкової величини. Щільність розподілу

Випадкову величину X називають **неперервною**, якщо її функцію розподілу можна подати у вигляді:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

де $f(x)-$ деяка функція, яку називають щільністю розподілу ймовірностей.

Якщо $F(x)$ диференційовна і похідна її обмежена, то випадкова величина X неперервна і має щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x)=F'(x).$$

Графік функції $f(x)$ називається кривою розподілу неперервної випадкової величини (рис.3).

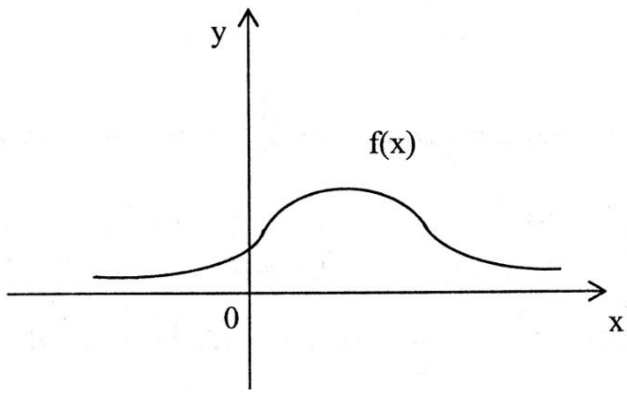


Рис.3

Властивості щільності розподілу ймовірностей:

1. $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in R$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
3. $P\{a \leq X < b\} = \int_a^b f(x)dx, \ \ P(X = a) = 0.$

Зауваження. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Приклад 9.1. Дано $F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ ax^2, 0 < x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$. Знайти: $a, f(x)$.

Розв'язання. Щільність розподілу матиме вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 2ax, 0 < x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}.$$

Враховуючи вигляд $f(x)$, дістанемо:

$\int_0^1 2axdx = 1$. Звідси: $\int_0^1 2axdx = ax^2 \Big|_0^1 = a = 1, a = 1$. Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ x^2, 0 < x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 2x, 0 < x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}.$$

Графіки $F(x)$ і $f(x)$ зображені на рис.4,5.

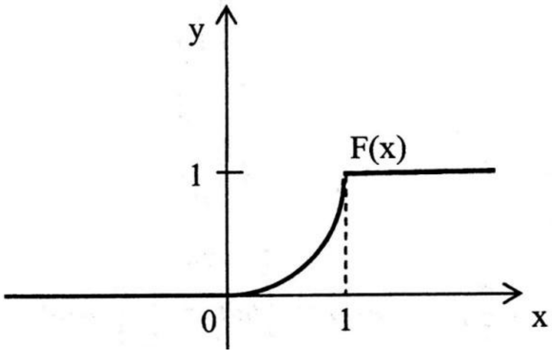


Рис. 4

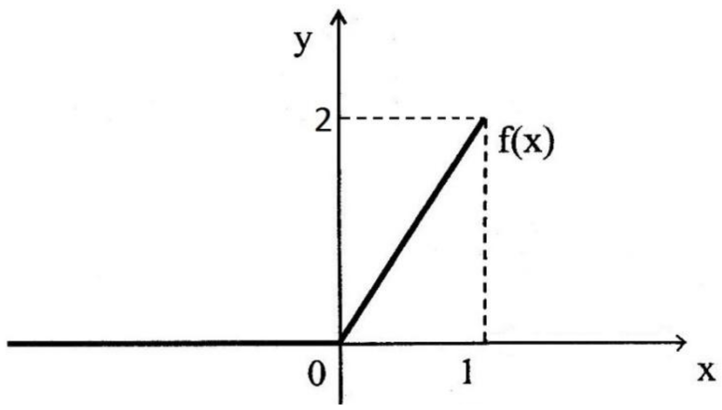


Рис.5

9.2. Приклади неперервних випадкових величин

1. Випадкова величина X розподілена рівномірно на проміжку (a, b), тобто усі її можливі значення належать цьому проміжку і щільність розподілу її стала на цьому проміжку, тобто:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$$

Графік щільності рівномірного розподілу зображено на рис.6.

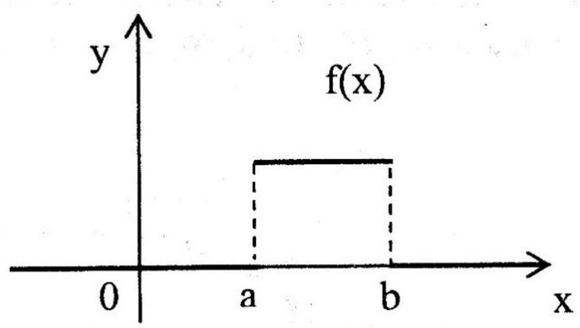


Рис.6

2. Випадкова величина X – називають нормально розподіленою з параметрами a $і$ σ^2 $(\sigma > 0)$, якщо щільність розподілу її має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Графік цієї функції $f(x)$ називають кривою Гаусса. Вона має максимум $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ при $x = a$, точки перетину при $x = a \pm \sigma$, симетрична відносно прямої $x = a$, і має вісь Ox асимптотою. Графік щільності нормального розподілу зображено на рис.7

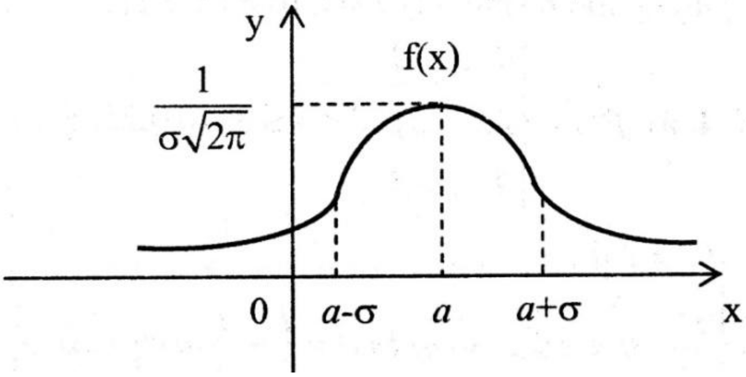


Рис.7

Лекція 10. *Числові характеристики випадкових величин.*

10.1. Математичне сподівання

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків можливих значень цієї величини на ймовірність їх появ:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \quad (10.1)$$

Математичне сподівання вказує середнє значення, біля якого групуються всі можливі значення випадкової величини.

Механічний зміст математичного сподівання: коли на осі Ох розташовані точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ з масами $p_1, p_2, \dots, p_n$, причому $\sum_{i=k}^{n} p_k = 1$, то $M(X)$ – абсциса центру ваги даної системи матеріальних точок. Формула (10.1) не що інше, як скалярний добуток арифметичних векторів $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $p(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Приклад 10.1. Дано ряд розподілу дискретної випадкової величини X:

X	1	2	3
p	0,4	0,5	0,1

Знайти: $M(X)$.

Розв'язання. $M(X)$=$1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини *X* можна виразити вже не сумою добутків, а інтегралом

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx. \quad (10.2)$$

Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то математичне сподівання виражається інтегралом:

$$M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f(x)dx. \quad (10.3)$$

Механічна інтерпретація – така ж, як для дискретної випадкової величини – абсциса центру ваги. Але при цьому маса, яка дорівнює одиниці, розподілена на осі Ox за законом щільності розподілу $f(x)$. Інше позначення математичного сподівання $- m_x$.

Приклад 10.2. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 2x, 0 < x \leq 1. \\ 0, > 1. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$.

Розв'язання. $M(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

Властивості математичного сподівання:

- ✓ математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній $M(C)$=C. При цьому постійна C – це випадкова величина, яка має одне значення C і набуває його з ймовірністю $p = 1$.
- ✓ постійний множник виносити за знак математичного сподівання $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$. При цьому добуток CX – випадкова величина, що набуває значення $Cx_1, Cx_2, \ldots, Cx_n$ з такою ж ймовірністю, як величина X – значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- ✓ випадкові величини називаються незалежними, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, які можливі значення набуває інша величина. Інакше випадкові величини залежні. Добуток незалежних випадкових величин $XY -$ випадкова величина, можливі значення якої рівні добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань
$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$
- ✓ сумою випадкових величин $X + Y$ називається випадкова величина, можливе значення якої дорівнює сумі кожного можливого значення X та кожного можливого значенням Y. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Властивості справедливі як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Із властивостей математичного сподівання випливає теорема про математичне сподівання числа появи подій в незалежних випробуваннях.

Теорема: Якщо випадкова величина $X -$ число появ події A в n незалежних випробуваннях, при яких в кожному випробуванні $P(A) = p$, то математичне сподівання $M(X)$ дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні: $M(X) = np$.

<u>*10.2. Дисперсія випадкової величини*</u>

Дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{10.4}$$

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини щодо її математичного сподівання. Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)^2 p_k \quad (10.5)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx \quad (10.6)$$

Якщо випадкова величина задана в інтервалі (a, b), то

$$D(X) = \int_{a}^{b}(x - m_x)^2 f(x)dx \quad (10.7)$$

Тут $m_x = M(X)$, $f(x)$ – щільність розподілу неперервної випадкової величини.

Розмірність дисперсії – квадрат розмірності випадкової величини, тому її не можна вказати на осі випадкової величини. Для наочності характеристики розсіювання зручніше користуватися величиною, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини – коренем квадратним з дисперсії. Корінь квадратний з дисперсії називається середнім квадратичним відхиленням і позначається:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \text{або } \sigma_x = \sqrt{D_x}. \quad (10.8)$$

Відхилення випадкової величини від її математичного сподівання називається центрованою випадковою величиною, позначатимемо її $\hat{X}$. Таким чином, $\hat{X} = X - M(X)$ або $\hat{X} = X - m_x$. На прикладі дискретної випадкової величини покажемо, що математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

$$M(\hat{X}) = M(X - m_x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k - m_x)p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k - m_x \sum_{k=1}^{n} p_k = m_x - m_x = 0$$

Для дискретної випадкової величини:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x^2 + m_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2.$$

Таким чином, **дисперсія** дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2. \quad (10.9)$$

Відповідно для неперервної випадкової величини мають місце такі формули:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \big(M(X)\big)^2, \quad (10.10)$$

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (M(X))^2. \quad (10.11)$$

Приклад 10.3. Дана дискретна випадкова величина

X	1	2	3
p	0,4	0,5	0,1

Знайти: $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Знаходимо: $M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$;

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 0{,}1 = 3{,}3.$$

За формулою (10.4) знайдемо:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 3{,}3 - 1{,}7^2 = 0{,}41,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}41} = 0{,}64.$$

Приклад 10.4. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ 2x, \ 0 < x \leq 1. \\ 0, \ x > 1. \end{cases}$$

Знайти $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. За формулою (10.3) знаходимо:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$
$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Тоді:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}, \ \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{18}} =$$
$$= 0{,}2357.$$

Властивості дисперсії:

- Дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна, причому $D(X) = 0$ лише коли $X -$ постійна.
- $M(C) = C \Rightarrow D(C) = M(C^2) - C^2 = 0;$
- Якщо $C - const$, то $D(CX) = C^2 D(X)$. Дійсно $D(CX) = M(C^2X^2) - (M(CX))^2 = C^2\big(M(X^2) - M^2(X)\big);$
- Якщо випадкові величини $X \ i \ Y$ – незалежні, то $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

Наслідок 10.1. Дисперсія суми декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_k).$$

Наслідок 10.2. Дисперсія суми постійної величини і випадковою дорівнює дисперсії випадкової величини: $D(C+X) = D(X)$.

Наслідок 10.3. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

Із властивостей дисперсії випливає теорема про дисперсію числа появи подій у незалежних випробуваннях.

Теорема 10.1. Дисперсія числа появ подій в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність p появи події постійна**,** дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і не появи події в одному випробуванні: $D(X) = npq$.

Лекція 11. *Двовимірні випадкові величини.*

11.1. Визначення та властивості двовимірних випадкових величин

З певними випробуваннями може бути пов'язана не одна, а декілька випадкових величин. Наприклад, для навмання взятої людини можна визначити її вагу (X) і зріст (Y).

Пара випадкових величин $X\ і\ Y$ утворює двовимірну випадкову величину (вектор) (X, Y). Розподіл двовимірної випадкової величини задається функцією двох змінних

$$F(x,y) = P\{X < x, Y < y\} \tag{11.1}$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x,y) \le 1$;
2. Функція розподілу неперервна зліва по кожному аргументу:

$$\lim_{x \to x_1 - 0} F(x,y) = F(x_1, y); \quad \lim_{y \to y_1 - 0} F(x,y) = F(x, y_1);$$

1. Функція $F(x,y)$ неспадна по кожному аргументу:
   $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$, якщо $x_1 < x_2$; $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$, якщо $y_1 < y_2$;
2. $F(x, +\infty) = F_1(x)$; $F(+\infty, y) = F_2(y)$;
3. $F(-\infty, y) = 0; F(x, -\infty) = 0; F(-\infty, -\infty) = 0; F(+\infty, +\infty) = 1.$

11.2. Дискретні двовимірні випадкові величини

Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають дискретноюю, якщо множина значень, які вона може набути, є скінченною або зліченною. Для задання дискретної двовимірної величини досить задати її можливі значення (x_i, y_j) і ймовірності кожного значення. Закон розподілу такої випадкової величини задається таблицею:

Y	X				
	x_1	x_2	...	x_m	$\sum$
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{m1}	q_1
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{m2}	q_2
...	...	...	...	...	...
y_n	p_{1n}	p_{2n}	...	p_{mn}	q_n
$\sum$	p_1	p_2	...	p_m	*1*

$$q_1 = \sum_{i=1}^{m} p_{i1};\ q_2 = \sum_{i=1}^{m} p_{i2}; \dots;\ q_n = \sum_{i=1}^{m} p_{in}$$

$$p_1 = \sum_{j=1}^{n} p_{1j};\ \ p_2 = \sum_{j=1}^{n} p_{2j}; \dots;\ p_m = \sum_{j=1}^{n} p_{mj}$$

Сума всіх ймовірностей, що знаходяться в таблиці, дорівнює одиниці. Додаючи ймовірності стовпців і рядків, одержимо закони розподілу компонент. Закони розподілу випадкових величин:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m	$\dots$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_m	$\dots$

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\dots$
q	q_1	q_2	$\dots$	q_m	$\dots$

Приклад 11.1. Дана дискретна двовимірна випадкова величина

Y	X			
	1	2	3	$\sum$
0	0,1	0	0,1	0,2
2	0	0,3	0,3	0,6
5	0,2	0	0	0,2
$\sum$	0,3	0,3	0,4	1

Знайти закони розподілу компонент X і Y.

Розв'язання. Додаючи стовпці і рядки таблиці ймовірностей, дістанемо закони розподілу випадкових величин X і Y відповідно:

X	1	2	3
p	0,3	0,3	0,4

Y	0	2	5
q	0,2	0,6	0,2

11.2. Неперервні двовимірні випадкові величини

Двовимірну випадкову величину називають неперервною, якщо вона приймає значення у всіх точках деякої області площини, більш точно, якщо існує така функція , що функцію розподілу можна подати у вигляді:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy \quad (11.2)$$

Функцію $f(x,y)$ називають щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини (X,Y). При цьому в точках неперервності функції $f(x,y)$ має вигляд:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (11.3)$$

Властивості щільності розподілу:

1. $f(x,y) \geq 0$при всіх x, y;
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$; (11.4)
3. Якщо $D-$ довільна область у площині Oxy, то:

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint f(x,y)dxdy \qquad (11.5)$$

Знаючи щільність розподілу $f(x,y)$ двовимірної випадкової величини (X,Y), легко знайти щільності розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$ для її компонент X і Y. Справді, функція розподілу випадкової величини X дорівнює:

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy.$$

Диференціюючи обидві частини рівності по x, одержимо:

$$f_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\,.$$

Аналогічно, $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

Приклад 11.2. Дана функція розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, x < 0, \text{або } y < 0\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x,y)$

Розв'язання. Знаходимо

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{cases}4e^{-4x}(1-e^{-2y}), x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, x < 0, \text{або } y < 0.\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases}8e^{-4x}e^{-2y}, x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, x < 0, \text{або } y < 0.\end{cases}$$

Отже, за формулою (11.3)

$$f(x,y) = \begin{cases}8e^{-4x}e^{-2y}, x \geq 0, y \geq 0; \\ 0, x < 0, \text{або } y < 0.\end{cases}$$

Приклад 11.3. Дана щільність розподілу двовимірної випадкової величини (X,Y)

$$f(x,y) = \frac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}.$$

Знайти функцію розподілу $F(x,y)$.

Розв'язання. Згідно формули (11.2)

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{20dxdy}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)} = \frac{20}{\pi^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{5^2+y^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{4^2+x^2} =$$

$$= \frac{20}{\pi^2}\frac{1}{4}arctg\frac{x}{4}\Big|_{-\infty}^{x}\frac{1}{5}arctg\frac{y}{5}\Big|_{-\infty}^{y} = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{4} - \lim_{x\to-\infty} arctg\frac{x}{4}\right) \times$$

$$\times\left(arctg\frac{y}{5} - \lim_{x\to-\infty} arctg\frac{y}{5}\right) = \frac{1}{\pi^2}\left(arctg\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\left(arctg\frac{y}{5} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}arctg\frac{y}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

Лекція 12. *Числові характеристики двовимірної випадкової величини. Коефіцієнт кореляції та його властивості.*

12.1.Числові характеристики для дискретної випадкової величини

Нехай (X,Y) – дискретна двовимірна випадкова величина, закон розподілу якої задано таблицею розподілу. Додаючи стовпці і рядки таблиці ймовірностей знайдемо закони розподілу відповідно X і Y.

Приклад 12.1. Двовимірна дискретна випадкова величина (X,Y) задана таблицею розподілу:

Y	X			
	1	2	3	$\sum$
1	0,1	0,2	0,2	0,5
2	0,2	0,2	0,1	0,5
$\sum$	0,3	0,4	0,3	1

Знайти числові характеристики компонент X і Y.

Розв'язання. Додаючи стовпці і рядки таблиці ймовірностей, знайдемо закони розподілу X і Y відповідно.

X	1	2	3
p	0,3	0,4	0,3

Y	1	2
q	0,5	0,5

За формулами (10.1) і (10.4) одержимо

$$M(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}3 = 2{,}0; M(Y) = 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}5 = 1{,}5$$

$$M(X^2) = 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 + 9\cdot 0{,}3 = 4{,}6; M(Y^2) = 1\cdot 0{,}5 + 4\cdot 0{,}5 = 2{,}5;$$

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 4{,}6 - 4 = 0{,}6;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 2{,}5 - 2{,}25 = 0{,}25;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}7746. \sigma(Y) = \sqrt{D(X)} = 0{,}5$$

12.2. Числові характеристики неперервної двовимірної випадкової величини

Нехай (X,Y) – неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $f(x,y)$. Якщо $f_1(x), f_2(y)$ – щільності розподілу її компонент X і Y, то за означенням математичного сподівання одновимірної випадкової величини:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx,\ M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy \qquad (12.1)$$

$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$,тому з (12.1) випливає

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy, M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy \qquad (12.2)$$

Якщо $f(x,y)$ приймає значення в деякій області D площини O_{xy}, то:

$$M(X)=\iint xf(x,y)dxdy, M(Y)=\iint yf(x,y)dxdy \qquad (12.3)$$

Аналогічно для дисперсії

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)-(M(X))^2$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-M(Y))^2 f_1(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_1(y)dy-(M(Y))^2 \qquad (12.4)$$

або

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy-(M(X))^2,$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-M(Y)\right)^2 f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dxdy-(M(Y))^2. \qquad (12.5)$$

Приклад 12.2. Неперервна двовимірна випадкова величина (X,Y) задана щільністю розподілу:

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, ((x,y) \in D, \\ 0, (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де область $D-$ трикутник, обмежений прямими $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$ (рис.8). Знайти число $A, M(X), M(Y), D(X), D(Y)$.

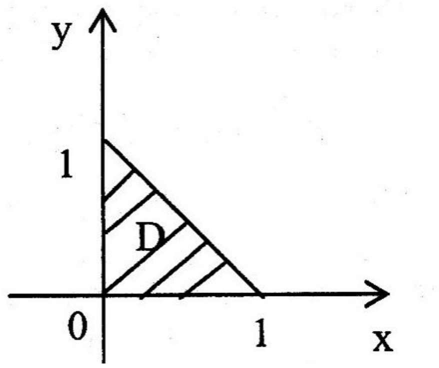


Рис.8

Розв'язання. Оскільки $f(x,y)$ приймає значення в області D, то $\iint f(x,y)dxdy=1$. Одержимо:

$$\iint Axydxdy=A\int_0^1 xdx\int_0^{1-x} ydy=A\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}dx=\frac{A}{2}\int_0^1 x(1-x)^2dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx=\frac{A}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{A}{24}=1,$$

звідси $A=24$. Отже,

$$f(x,y)=\begin{cases} 24xy, (x,y) \in D, \\ 0, (x,y) \notin D. \end{cases}$$

$$M(X)=\iint xf(x,y)dxdy=24\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x} ydy=24\int_0^1 x^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}dx=$$
$$=12\int_0^1 x^2(1-x)^2dx=12\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4)dx=12\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{5};$$
$$M(Y)=\iint yf(x,y)dxdy=24\int_0^1 y^2dy\int_0^{1-y} xdx=\frac{2}{5};$$
$$M(X^2)=\iint x^2f(x,y)dxdy=24\int_0^1 x^3dx\int_0^{1-x} ydy=24\int_0^1 x^3\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}dx=$$
$$=12\int_0^1 x^3(1-x)^2dx=12\int_0^1 (x^3-2x^4+x^5)dx=12\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5};$$
$$M(Y^2)=\iint y^2f(x,y)dxdy=24\int_0^1 y^3dy\int_0^{1-y} xdx=\frac{1}{5};$$
$$D(X)=M(X^2)-\big(M(X)\big)^2=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}=\frac{1}{25};$$
$$D(Y)=M(Y^2)-\big(M(Y)\big)^2=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}=\frac{1}{25};$$

12.3. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Коваріацією (кореляційним моментом) випадкових величин X і Y називається математичне сподівання добутку різниць випадкових величин і їх математичних сподівань:

$$K(X,Y)=cov(X,Y)=M\Big(\big(X-M(X)\big)\big(Y-M(Y)\big)\Big). \qquad (12.6)$$

Після розкриття дужок одержимо

$$K(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y). \qquad (12.7)$$

Нехай $(X,Y)-$ дискретна двовимірна випадкова величина. Тоді

$$K(X,Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jp_{ij}-\sum_{i=1}^{m}x_ip_i\sum_{j=1}^{n}y_jq_j \qquad (12.8)$$

Для неперервної двовимірної випадкової величини (X,Y)

$$K(X,Y)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy$$

Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається число

$$\rho=\rho(X,Y)=\frac{K(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \qquad (12.9)$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

Теорема 12.1. Для будь-яких випадкових величин $-1\le\rho(X,Y)\le 1$

Теорема 12.2. Коефіцієнт кореляції між випадковимим величинами X і Yдорівнює ±1 тоді і тільки тоді, коли X і Y звязані лінійною залежністю $Y=aX+b$, причому $\rho(X,Y)=1$ при $a>0, \rho(X,Y)=-1$ при $a<0$.

Теорема 12.3. Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $\rho(X,Y)=0$

Наслідок 12.1. Якщо $\rho(X,Y) \neq 0,$ то X і Y залежні випадкові величини.

Випадкові величини X і Y, для яких $\rho(X,Y) = 0$, називаються **некорельованими.** Випадкові величини X і Y, для яких $\rho(X,Y) \neq 0$ називаються **корельованими.**

З некорельованості двох випадкових величин, взагалі кажучи, не випливає їх незалежність. Для нормально розподілених випадкових величин некорельованість рівносильна незалежності.

Коефіцієнт кореляції служить для оцінки тісноти лінійного зв'язку між випадковими величинами X і Y : чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв'язок сильніший, чим ближче модуль коефіцієнта кореляції до нуля, тим зв'язок слабший.

Приклад 12.3. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y):

$X \backslash Y$	-1	0	1	2	$\sum$
1	0,1	0,25	0,3	0,15	0,8
2	0,1	0,05	0	0,05	0,2
$\sum$	0,2	0,3	0,3	0,2	1

Знайти $M(X), D(X), M(Y), D(Y), K(X,Y),\ \rho(X,Y)$.

Розв'язання. Просумуємо ймовірності в таблиці по рядках і стовпцях:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$M(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = 1 \cdot 0{,}8 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$$

$$D(X) = M(X^2) - (MX)^2 = 1{,}6 - (1{,}2)^2 = 0{,}16;\ \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4.$$

$$M(Y) = \sum_j y_j p_j = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5;$$

$$M(Y^2) = \sum_j y_j^2 p_{\cdot j} = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}3;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (\mathrm{MY})^2 = 1{,}3 - (0{,}5)^2 = 1{,}05;\ \sigma(\mathrm{Y}) = \sqrt{\mathrm{DY}} = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025.$$

$$M(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_i \cdot p_{ij} = 0{,}5\ .$$

Знайдемо коваріацію:

$cov(X,Y) = M(X \cdot Y) - MX \cdot MY = 0{,}5 - 1{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}6 = -0{,}1;$

Коефіцієнт кореляції:

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \approx \frac{-0{,}1}{0{,}4 \cdot 1{,}025} \approx -0{,}244.$$

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Лекція 13. *Вибірка та її основні характеристики.*

13.1. Задачі математичної статистики

Математична статистика вивчає методи, які дають змогу за результатами випробувань роботи певні ймовірнісні висновки.

Нехай подія A має ймовірність, але її значення $p = P(A)$ нам невідоме; необхідно оцінити p за допомогою випробувань. Наприклад, треба оцінити число бракованих виробів в достатньо великій партії з N виробів. Якщо партія містить M бракованих виробів, то $\frac{M}{N}$ – це ймовірність того, що навмання взятий виріб є бракованим. Зрозуміло, що задача оцінки числа бракованих виробів зводиться до задачі оцінки невідомої ймовірності.

Є цілий ряд важливих задач, пов'язаних з невідомими функціями розподілу. Так може статись, що нам нічого невідомо про функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X. Тоді може бути поставлене питання про наближене подання функції $F(x)$ за допомогою даних, здобутих в результаті випробувань.

Проте може бути і так, що нам відомо аналітичний вигляд функції розподілу $F(x_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, але невідомо значення параметрів $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, від яких залежить ця функція; треба знайти оцінки цих параметрів.

Важливою задачею є перевірка статистичних гіпотез про вид невідомого розподілу або про величину параметрів розподілу, вид якого відомий.

Отже, задача математичної статистики полягає у створенні методів збору в обробки статистичних даних для одержання наукових і практичних висновків.

13.2. Вибірка з генеральної сукупності

Генеральною сукупністю в математичній статистиці називається множина однотипних об'єктів, кількісна чи якісна ознака яких підлягає вивченню. Підмножина об'єктів, дібраних у відповідний спосіб із генеральної сукупності, називається **вибірковою сукупністю**. Вважаємо, що ознака, яка вивчається, є випадковою величиною X із функцією розподілу $F(x)$. Результати вибірки розглядатимемо як послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Закон розподілу для всіх X_i визначається функцією $F(x)$. Результати вибірки – реалізації випадкових величин – позначатимемо відповідно через $x_1, \dots, x_n$. Розмістивши ці числа в порядку зростання і записавши частоти n_i, з якими зустрічаються ці значення, дістанемо варіаційний, або статистичний, ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
Частоти	n_1	n_2	…	n_k

На підставі такого ряду можна побудувати статистичну функцію розподілу $F_n^*(x)=\sum_{x_i<X}\frac{n(x_i)}{n}$. Якщо $n\to\infty$, то статистична функція розподілу збігається до теоретичної функції розподілу.

Статистичний ряд графічно подається полігоном розподілу. Щоб побудувати його, на осі абсцис відкладають значення реалізацій, а на осі ординат – відповідні їм частоти (відносні частоти). Здобуті точки сполучають відрізками прямих.

У разі, коли X – неперервна величина і обсяг вибірки великий, результати вибірки подають інтервальним рядом. Для цього область реалізацій розбивають на k інтервалів і для кожного інтервалу визначають частоти. Здобутий ряд геометрично подається гістограмою. Для побудови її на осі абсцис відкладають інтервали, а на них як на основах будують прямокутники, висота яких пропорційна до частоти (відносної частоти) інтервалу. Гістограма дає певне уявлення про графік щільності розподілу.

13.3. Обчислення вибіркових характеристик

Для вибіркової сукупності обчислюють числові характеристики – вибіркові випадкові функції: вибіркову середню $\bar{x}$, вибіркову дисперсію s^2, статистичні моменти розподілу тощо. Реалізації цих вибіркових функцій знаходять за формулами, вигляд яких залежить від того, в якій формі подано вибіркові дані. Якщо вибіркові дані не згруповано, то

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (13.1)$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \qquad (13.2)$$

Якщо вибіркові дані зведено у статистичний ряд, то:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i n_i, \qquad (13.3)$$

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 n_i \qquad (13.4)$$

Якщо дані подаються інтервальним рядом, то перехід до статистичного ряду виконують, обчислюючи для кожного інтервалу його середину.

Якщо число варіант досить велике, то для спрощення обчислень застосовують групування емпіричних даних. Розіб'ємо інтервал, в якому лежать вибіркові дані, на деяке число s рівних частин довжини h. Якщо x_i – середина $i-oï$ частини, n_i – число варіант, що потрапили в $i-y$ частину, то $\bar{x}$ і s^2 обчислюються за формулами (13.3) і (13.4).

Для дальшого спрощення обчислень застосовують так званий метод умовних варіант. Умовні варіанти визгачаються рівністю:

$$u_i = \frac{x_i - c}{h}, \tag{13.5}$$

де c — умовний нуль (новий початок відліку).

Найбільша простота обчислень досягається тоді, коли за умовний нуль взятии варіанту, яка розміщена приблизно посередині варіаційного ряду і, яка має найбільшу частоту (хоча це і не обов'язково). Тоді:

$$\bar{x} = h\bar{u} + c \tag{13.6}$$

$$s^2 = h^2(\overline{u^2} - (\bar{u})^2) \tag{13.7}$$

Приклад 13.1. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 32$. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\bar{x},\ s^2$.

Розв'язання. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів:

$$\Delta x = \frac{\max(x_i) - \min(x_i)}{7};\ \Delta x = \frac{9{,}2 - 2{,}2}{7} = 1.$$

Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2—3,2	3,2—4,2	4,2—5,2	5,2—6,2	6,2—7,2	7,2—8,2	8,2—9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму (рис. 9).

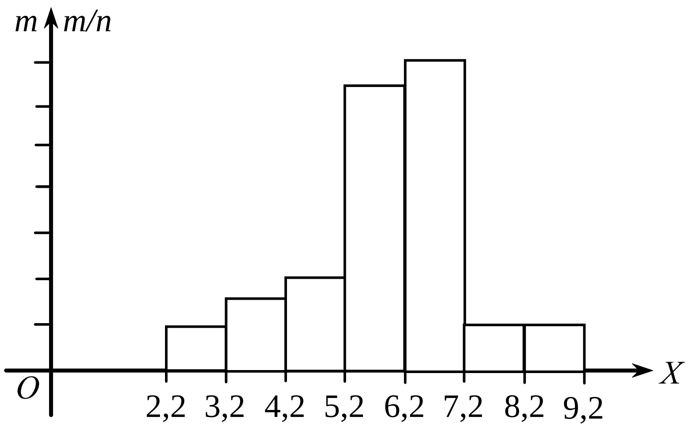


Рис. 9

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.

Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів x_i, їхні частоти n_i і нові змінні u_i. Візьмемо c, що дорівнює $x_6 = 6{,}7$. У наступних стовпцях обчислені значення $n_i u_i, n_i {u_i}^2$, а в останньому рядку таблиці – їхні суми.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i {u_i}^2$
2,7	2	–4	–8	32
3,7	3	–3	–9	27
4,7	4	–2	–8	16
5,7	9	–1	–9	9
6,7	10	0	0	0
7,7	2	1	2	2
8,7	2	2	4	8
Сума	32	—	–28	94

$$c = 6{,}7; h = 1;$$
$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i u_i = \frac{-28}{32} = 0{,}875;\ \overline{u^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i {u_i}^2 = \frac{94}{32} = 2{,}9;$$
$$s^2 = h^2\left(\overline{u^2} - (\bar{u})^2\right) = 2{,}9 - 0{,}875 = 2{,}025;$$
$$\bar{x} = h\bar{u} + c = 0{,}875 + 6{,}7 = 7{,}575.$$

Лекція 14. *Точкові оцінювання невідомих параметрів розподілу.*

14.1. Класифікація статистичних оцінок

Оцінка параметра розподілу сукупності θ у загальному випадку є випадковою величиною, яка визначається за даними вибірки і використовується замість невідомого значення параметра, який потрібно оцінити.

При точковому оцінюванні параметра необхідно знайти функцію $h = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$, значення якої при заданій реалізації $x_1, x_2, \dots, x_n$ вибірки $X_1, X_2, \dots, X_n$ приймають за наближене значення параметра θ_0. Для того, щоб порівнювати різні оцінки і вибрати кращу, існує така їх класифікація.

Оцінка $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ параметра θ називається **незміщеною**, якщо $M\hat{\theta} = \theta$ її математичне сподівання збігається зі значенням параметра. Якщо $M\hat{\theta} = \theta + b(\theta)$, то $b(\theta)$ називають **зсувом** оцінки $\hat{\theta}$.

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n = h(X_1, X_2, \dots, X_n), n = 1,2, \dots$ параметра θ називається **спроможною**, якщо $\hat{\theta}_n \overset{p}{\rightarrow} \theta, n \rightarrow \infty$.

Послідовність оцінок $\hat{\theta}_n = h(X_1, X_2, \dots, X_n), n = 1,2, \dots$ параметра θ називається **сильно спроможною**, якщо $\hat{\theta}_n \rightarrow \theta$ з імовірністю одиниця при $n \rightarrow \infty$.

Найчастіше застосовується критерій, який полягає у виборі оцінки, що має найменшу можливу дисперсію при даному об'єму вибірки. Така оцінка називається **ефективною**.

Незміщеною сильно спроможною оцінкою математичного сподівання a випадкової величини X є вибіркове середнє: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Реалізацію цієї оцінки позначають :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (14.1)$$

Вибіркове середнє для дискретного статистичного ряду знаходиться за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i, \qquad (14.2)$$

де $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Вибіркове середнє для інтервального статистичного ряду знаходиться за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} n_i z_i, \qquad (14.3)$$

де $z_i -$ середина i-го інтервалу, $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$.

Незміщенність оцінки $\bar{X}$ математичного сподівання a випадкової величини X випливає з того, що кожне X_i $(i = 1, \ldots, n)$ є копією X, тому має математичне сподівання a і дисперсію σ^2. Отже, $M(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \frac{1}{n} na = a$.

Оскільки для довільного n $M(\bar{X}) = a$, то оцінка $\bar{X}$ матемачного сподівання a також сильно спроможна.

Оцінкою дисперсії σ^2 випадкової величини X є вибіркова дисперсія:

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2. \qquad (14.4)$$

Вибіркова дисперсія $\bar{s}^2$ є зміщеною оцінкою для σ^2. Можна показати, що:

$$M(\bar{s}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

тобто $M(\bar{s}^2) \neq \sigma^2$. Нехай $s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2$, тоді $M(s^2) = \frac{n}{n-1}M(\bar{s}^2) = \sigma^2$. Отже,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

є незміщеною оцінкою дисперсії σ^2 випадкової величини X.

Якщо математичне сподівання a відоме, то незміщеною сильно спроможною оцінкою дисперсії σ^2 є оцінка: $s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$.

Вибіркову дисперсію для статистичного ряду знаходять за формулою:

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(n_i x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad (14.5)$$

Відповідно $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(n_i x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2$.

Вибіркову дисперсію для інтервального ряду знаходять за формулою:

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}(n_i z_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s} n_i z_i^2 - \bar{x}^2$$

відповідно

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{s}(n_i z_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{s} n_i z_i^2 - \bar{x}^2.$$

Величина $\bar{s} = \sqrt{\bar{s}^2}$ називається **вибірковим середнім квадратичним відхиленням**, $s = \sqrt{s^2}$ – **вибірковим виправленим середнім квадратичним відхиленням** (s^2 – вибіркова виправлена дисперсія).

14.2. Означення медіани та моди

Медіаною M_e називають варіанту, яка ділить варіаційний ряд на дві частини, рівні по числу варіант. Для дискретних статистичних рядів:

$$M_e = \begin{cases} x_m, \text{при } n = 2m-1, \\ \dfrac{x_m + x_{m+1}}{2}, \text{при } n = 2m. \end{cases}$$

Для інтервальних статистичних рядів:

$$M_e = x_i + h_i \frac{\frac{n}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} n_j}{n_i},$$

де x_i – початок медіанного інтервалу, тобто такого, якому відповідає перша з нагромаджених частот, що перевищує половину всіх спостережень, h_i –довжина i-го інтервалу, n_i – частота медіанного інтервалу.

Мода – це елемент, який найчастіше трапляється у вибірці. Для дискретних статистичних рядів: $M_0 = x_j$, якщо $n_j = \max n_i$.

Для інтервальних статистичних рядів: $M_0 = x_i + h\frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} + n_{i+1}}$,

де x_i – початок інтервалу з найбільшою частотою, n_i – частота i-го інтервалу.

Приклад 14.1. Обчислити незміщені оцінки математичного сподівання та дисперсії, вибіркову медіану та моду вибірки:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Розв'язання. Об'єм вибірки $n = 5 + 15 + 50 + 16 + 10 + 4 = 100$. Вибіркове середнє: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{1}{100}(5 \cdot 12 + 15 \cdot 14 + 50 \cdot 16 + 16 \cdot 18 +$ $+10 \cdot 20 + 4 \cdot 22) = 16{,}46$;

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i {x_i}^2 = \frac{1}{100}(5 \cdot 12^2 + 15 \cdot 14^2 + 50 \cdot 16^2 + 16 \cdot 18^2 + 10 \cdot 20^2 + 4 \cdot 22^2 =$$

$= 275{,}8$;

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = 275{,}8 - 16{,}46^2 = 4{,}8684;$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2 = \frac{100}{99} \cdot 4{,}8684 = 4{,}92;\ M_e = \frac{16+16}{2} = 16;\ M_0 = 16;$$

Список літератури

1. Барковський В.В., Барковський Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів: теорія ймовірності та математична статистика. – К.: НАУ, 1999. – 447 с.
2. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.1: Теорія ймовірностей. – К.:КНЕУ, 2000. – 304 с.
3. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч.2: Математична статистика. – К.:КНЕУ, 2001. – 333 с.
4. Сеньо П.С. Теорія ймовірності та математична статистика. – К.:Знання, 2007. – 507 с.
5. Черняк І.О., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач (для студентів економічних спеціальностей вищих учбових закладів) – К.:Знання, 2002. – 248 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.:Высшая школа, 2003. – 406 с.

Додаток 1. Таблиця значень функції нормального розподілу Гаусса−Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139

Цілі і десяті частини	Соті частини *x*									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt.$

Цілі і десяті частин и x	Соті частки x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики доктор технічних наук, проф. Гече Ф.Е.

Автори: канд. фіз.-мат. наук, доц. Млавець Ю.Ю.

Рецензенти: канд. техн. наук, доц.Кондрук Н.Е.
канд. фіз.-мат. наук, викл. Синявська О.О.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(стислий конспект лекцій)