

УДК 37.015.311:37.016:512-053.6  
DOI: 10.24144/2524-0609.2019.44.169-173

**Семенець Сергій Петрович**

доктор педагогічних наук, професор,  
професор кафедри математичного аналізу  
Житомирський державний університет імені І. Франка  
м. Житомир, Україна  
Sergij.Semenets@zu.edu.ua  
ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-2733-0539>

**Чугунова Олена Василівна**

аспірант  
кафедра математичного аналізу  
Житомирський державний університет імені І. Франка  
м. Житомир, Україна  
olenachg@gmail.com  
ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0001-6868-6297>

## РОЗВИТОК МАТЕМАТИЧНИХ ЗДІБНОСТЕЙ СТАРШОКЛАСНИКІВ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ І ПОЧАТКІВ АНАЛІЗУ: РЕАЛІЗАЦІЯ ЗАДАЧНОГО ПІДХОДУ

**Анотація.** У статті зроблено теоретичний аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури в контексті специфіки реалізації задачного підходу в навчанні старшокласників алгебри і початків аналізу. Наразі недостатньо вивченою залишається проблема розвитку математичних здібностей як індивідуально-психологічних утворень особистості та водночас основи розвитку відповідної компетентності. Дотепер мало дослідженими залишаються питання методично виваженого застосування задачного підходу до розвитку математичних здібностей старшокласників. Метою представленого дослідження є висвітлення наукових засад реалізації задачного підходу до розвитку математичних здібностей старшокласників, окреслення теоретичних аспектів його впровадження в процесі вивчення ними алгебри і початків аналізу. Було використано методи теоретичного аналізу (проблеми задачного підходу до розвитку математичних здібностей старшокласників), структурно-системного аналізу (для побудови задачної системи та встановлення кореляційних зв'язків між компонентами), структурно-дидактичного аналізу (змісту алгебри і початків аналізу в контексті порушеної проблеми), змістово-теоретичного узагальнення (у формулюванні висновків). За результатами проведеного дослідження виділено такі типи задач: математичні, задачі в структурі навчально-математичної діяльності, компетентнісні задачі з математики. Обґрунтовано, що саме така задачна система активізує навчально-математичну діяльність старшокласників, забезпечує розвиток у них системотвірного, кодувально-формалізованого, когнітивно-узагальнювального та мнемічно-узагальнювального компонентів математичних здібностей.

**Ключові слова:** задачний підхід; навчально-математична діяльність; математичні здібності старшокласників; навчання алгебри і початків аналізу.

**Вступ.** У Концепції Нової української школи ключовою є ідея компетентнісного підходу до навчання, що передбачає формування системи знань, навичок, умінь, досвіду, здібностей і ставлень особистості. Так у математичній освіті зроблено акцент на формуванні та розвитку інтегрованої характеристики якості особистості, якою слугує математична компетентність. Обґрунтовується думка про те, що математична компетентність забезпечує пізнання навколишнього світу методами й засобами математики, вона передбачає застосування математичних знань у реальному житті та, водночас, є важливим складником готовності до подальшої освітньої й професійної діяльності. Однак дотепер у педагогічній теорії і практиці недостатньо вивченою залишається проблема розвитку математичних здібностей старшокласників як основи особистісного виміру математичної компетентності. Наразі актуальним залишається питання методично виваженого застосування задачного підходу до розвитку індивідуально-психологічних утворень старшокласників – їхніх математичних здібностей.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблеми розвитку здібностей особистості в навчальній діяльності, питанням сензитивності шкільного вікового періоду присвячені дослідження психологів, з-поміж яких В. В. Давидов, О. К. Дусавицький, З. І. Калмикова, В. О. Моляко, О. Л. Музика, Ж. Піаже, Б. М. Теплов, Ю. М. Швалб та інші. Зміст, структура і типологія математичних здібностей школярів, методичні аспекти їх розвитку студіюються в робо-

тах В. А. Крутецького, М. П. Пихтаря, С. П. Семенця, С. О. Скворцової, З. І. Слепкань, О. С. Чашечникової та інших. Теорії задач та її застосуванню в умовах навчальної діяльності присвячені роботи Г. О. Балла, М. І. Бурди, М. Я. Ігнатенка, Ю. М. Колягіна, І. В. Малафіїка, Є. І. Машбиця, та інших.

**Мета:** з огляду на зміст, структуру і типологію математичних здібностей школярів розкрити теоретичні засади реалізації задачного підходу в процесі вивчення старшокласниками алгебри і початків аналізу. **Завдання:** проаналізувати психолого-педагогічну та навчально-методичну літературу з порушеної проблеми, розкрити зміст задачного підходу в навчанні математики; побудувати задачну систему розвитку математичних здібностей старшокласників у навчанні алгебри і початків аналізу; розкрити зв'язок структурних компонентів математичних здібностей старшокласників з типами задач у навчанні алгебри і початків аналізу.

**Методи дослідження:** теоретичний аналіз (проблеми задачного підходу до розвитку математичних здібностей старшокласників), структурно-системний аналіз (для побудови задачної системи та встановлення кореляцій між компонентами), структурно-дидактичний аналіз (змісту алгебри і початків аналізу в контексті порушеної проблеми), змістово-теоретичне узагальнення (у формулюванні висновків).

**Виклад основного матеріалу.** Зміст навчання старшокласників алгебри і початків аналізу містить два крупні блоки: теоретичний матеріал і задачі. За-

провадження компетентнісного підходу передбачає, що саме задачі мають відігравати засадничу та системотвірну роль. Тут одним із концептуальних положень є твердження про те, що навчально-математична діяльність старшокласників представляється у формі цілісної задачної системи. Теоретичний аналіз порушеної проблеми привів до висновку, що під задачним підходом розуміється навчальна діяльність, в основу якої покладено задачну структуру, компонентом якої є навчальна задача, яка, з одного боку, спрямована на зовнішній об'єкт, а з іншого – містить неявно виражені вимоги до суб'єкта, який її розв'язує (Лов'янова & Слюсаренко, 2010).

Погоджуючись з таким визначенням, зазначимо, що будь-яка діяльність має задачну структуру, а тому задачний підхід, на нашу думку, репрезентує сукупність універсальних способів планування, організації, розвитку та діагностики діяльності суб'єкта, у якій системно поєднуються зовнішні прояви (способи дій у процесі розв'язування задач, усне та писемне мовлення, відповідь на поставлене питання) та внутрішні її прояви (потреби, мотиви, цінності, пам'ять, мислення, самоконтроль, самооцінка та здібності). З огляду на таке формулювання *задачний підхід у навчанні математики – це сукупність способів планування, організації, розвитку і діагностики навчально-математичної діяльності суб'єкта, що системно поєднує її зовнішні прояви (способи дій у процесі розв'язування задач з математики, математичне моделювання, усне і писемне математичне мовлення, формулювання відповіді) та внутрішні прояви (мотиви навчання математики, ціннісні до неї ставлення, математичну пам'ять, математичне мислення, самоконтроль і самооцінку оволодіння матеріалом математики, математичні здібності)*.

Реалізуючи задачний підхід до навчання старшокласників алгебри і початків аналізу, виокремлюємо такі три типи задач: математичні задачі; задачі в структурі навчально-математичної діяльності; компетентнісні задачі з математики.

Під математичними задачами будемо розуміти – задачі, умова й вимога яких стосується математичних об'єктів і які розв'язуються усіма засобами математики (Тарасенкова & Лов'янова, 2015).

Загальновідомою класифікаційною основою математичних задач є зміст вимоги в їх структурі. Тому в теорії навчання математики класифікують чотири різновиди задач: на обчислення (потрібно знайти число або множину чисел), на побудову (задачі на побудову графіків, фігур тощо), на доведення (потрібно довести сформульоване твердження) та задачі на дослідження (потрібно дослідити що-небудь) (Слепкань, 2006). Відповідно до чинної навчальної програми з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів основними змістовними лініями є: функціональна; рівняння і нерівності; елементи комбінаторики; початки теорії ймовірностей та елементи математичної статистики. Значне місце займають задачі на обчислення та спрощення трансцендентних виразів, а також задачі, що передбачають тотожні перетворення тригонометричних, степеневих та логарифмічних виразів.

У представленому дослідженні засадничим є положення про те, що здібності, в тому числі й математичні, формуються і розвиваються в процесі спеціально організованої діяльності, у структурі якої ключову роль відіграють позитивна (внутрішня) мотивація та інтерес. Погоджуємося, що в навчанні математики має реалізовуватися такий розвивальний триплет: *інтерес до математики <=> навчально-математична діяльність <=> математичні здібності*.

Підтримуємо ідею про те, що навчально-математична діяльність має задачну структуру, яка конструється згідно з принципом розвивальної наступності. Отож навчання математики має бути організоване так, що кожен наступний тип задач відрізняється від попереднього вищим рівнем змістового теоретичного узагальнення. Втілення такої ідеї дозволило виокремити *базові, навчальні, навчально-теоретичні та навчально-дослідницькі задачі з математики* (Семенець, 2015).

Вивчення ключових тем з алгебри і початків аналізу, на нашу думку, варто розпочинати з формулювання та розв'язування *базових задач*. Тут йдеться про прикладні задачі, за результатами розв'язування яких створюються математичні моделі, виокремлюються вихідні відношення, що реалізуються в багатьох часткових випадках. Такі задачі відносно до задач першого рівня змістово-теоретичного узагальнення, вони є фундаментом для введення (формулювання) нового математичного поняття та розв'язування математичних задач.

Другий рівень змістово-теоретичного узагальнення займають *навчальні задачі з алгебри і початків аналізу*. Результатом розв'язування навчальних задач є створення узагальненого способу дій (навчальної моделі), що реалізується в процесі розв'язування типових математичних задач. Тому навчальна задача з алгебри і початків аналізу передбачає узагальнення типових задач курсу, конструювання способу (методу) їх розв'язування, в якому чільне місце займають навчальні дії самоконтролю і самооцінки.

На третьому рівні змістово-теоретичного узагальнення задачної системи виділяємо *навчально-теоретичні задачі з алгебри і початків аналізу*. Тут формуються узагальнені способи дій під час вивчення змістових ліній, оволодіння старшокласниками загально-математичними методами (математичного моделювання, векторним, координатним, математичної індукції, границь, диференціального та інтегрального числення), а також спеціальними методами алгебри (розкладання на множники, заміни, інтервалів, рівносильних перетворень, графічним, функціональним та ін.).

Четвертий рівень задачної системи займають *навчально-дослідницькі задачі з алгебри і початків аналізу*, які, окрім рівня змістового-теоретичного узагальнення, різняться мірою новизни одержаного продукту. Розв'язуючи такі задачі, учні виконують дослідницькі кроки, отримують нові знання та формують об'єктивно нові способи діяльності. Навчально-дослідницькі задачі з алгебри і початків аналізу розв'язують, як правило, математично обдаровані старшокласники в рамках математичних конкурсів, зокрема, конкурсів-захистів учнівських робіт Малої академії наук.

У такий спосіб побудована задачна система навчання алгебри і початків аналізу цілком відповідає одній із ключових феноменологічних характеристик математичних здібностей – здібності узагальнювати зміст математики. Організована у формі задачної системи навчально-математична діяльність актуалізує такі структурні компоненти математичних здібностей:

- *системотвірний* (математична спрямованість розуму як особистісна характеристика, що виявляється в структурно-математичному мисленні, інтересі до побудови, дослідження й реалізації математичних моделей);
- *кодувально-формалізований* (здібності до формалізації в процесі встановлення математичної структури теоретичного й практичного матеріалу,



Рис.1. Кореляційні зв'язки структурних компонентів математичних здібностей з типами задач в навчанні алгебри і початків аналізу

створення й дослідження знако-символьних інтерпретацій задачних ситуацій);

- *когнітивно-узагальнювальний* (здібності до змістового узагальнення математичного матеріалу на декількох рівнях, знаходження альтернативних (варіативних) та раціональних розв'язків, мисленнєвого (інтуїтивного) «схоплення» формальної структури (алгоритму) на основі часткового випадку);
- *мнемічно-узагальнювальний* (запам'ятовування математичного матеріалу на різних рівнях теоретичного узагальнення: пам'ять на типові відношення (формули), загальні схеми міркувань (алгоритми), структуру методів і способів розв'язування задач (доведення і дослідження) (Семенець, 2015).

Кореляційні зв'язки між структурними компонентами математичних здібностей, типами задач та змістом навчання алгебри і початків аналізу подано на рисунку 1.

Інший тип задач, який ми виокремлюємо – *це компетентнісні задачі з алгебри і початків аналізу*. Дослідниця М. В. Дубова розглядає компетентнісні задачі як форму організації навчального матеріалу, змодельовану у вигляді квазі-життєвої ситуації, що

покликана формувати предметні, міжпредметні і ключові компетентності учнів (Дубова, 2011).

Поділяємо думку О. Г. Кузьмінської та Н. В. Морзе про те, що компетентнісні задачі сприяють інтелектуальній активності і самостійності як у процесі розв'язування, так і оцінювання (самооцінювання, взаємооцінювання) інтелектуального завдання, вони слугують здатності до цілепокладання, оцінювання, ефективної дії та рефлексії (Кузьмінська & Морзе, 2008). Саме такі задачі є умовою, засобом і водночас результатом формування математичних компетентностей старшокласників. Тут варто зазначити, що ефективність цього процесу зумовлена рівнем розвитку математичних здібностей, а з іншого боку, розв'язування компетентнісних задач з алгебри і початків аналізу слугує розвитку математичних здібностей старшокласників. На нашу думку, місце таких задач у представленій задачній системі навчання алгебри і початків аналізу має визначатися відповідно до принципу розвивальної наступності та співвідноситися з базовими, навчальними, навчально-теоретичними і навчально-дослідницькими задачами. У процесі їх розв'язування мають системно поєднуватися зовнішні прояви компетентності (способи дій у про-



цесі розв'язування задач, усне й писемне мовлення, альтернативність розв'язань, відповідь на поставлене питання) та внутрішні її прояви (мотиви, цінності, пам'ять, мислення, самооцінка та математичні здібності).

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Підсумовуючи результати досліджень, зазначимо, що задачний підхід у навчанні математики – це сукупність способів планування, організації, розвитку і діагностики навчально-математичної діяльності суб'єкта, що системно поєднує зовнішні і внутрішні її прояви. У зовнішньому прояві превалюють способи дій у процесі розв'язування задач з математики, математичне моделювання, усне і писемне математичне мовлення, формулювання відповіді, тоді як внутрішній її прояв репрезентують мотиви навчання

математики, ціннісні до неї ставлення, пам'ять, мислення, самооцінка та математичні здібності. Задачна система розвитку математичних здібностей старшокласників у навчанні алгебри і початків аналізу будується за принципом розвивальної наступності, вона представлена математичними задачами, задачами в структурі навчально-математичної діяльності, компетентнісними задачами. За результатами структурно-системного аналізу встановлено кореляційні зв'язки між структурними компонентами математичних здібностей старшокласників і типами задач в навчанні алгебри і початків аналізу.

До перспектив подальших досліджень відносимо вчення про зони найближчого математичного розвитку старшокласників у навчанні алгебри і початків аналізу.

#### Список використаної літератури

Дубова М. В., Маслова С. В. Целевой и содержательный аспект понятия «компетентностная задача». *Вестник Волжского университета им. В. Н. Татищева*. 2011. № 8. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/tselevoi-i-soderzhatelnyyaspekt-ponyatiya-kompetentnostnaya-zadacha> (дата звернення: 16.10.2018).

Лов'янова І. В., Слюсаренко М. А. Задачний підхід до вивчення рівнянь математичної фізики як засіб підвищення якості знань студентів. *Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики*: збірник наукових праць: в 3 т. Кривий Ріг: Видавничий відділ НМетАУ, 2010. Т.2: Теорія та методика навчання фізики. 392 с.

Морзе Н. В., Кузьмінська О. Г. Компетентнісні задачі з інформатики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: збірник наукових праць. Редрада. №6(13). 2008. URL: [http://www.ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik\\_KOSN/13/03.pdf](http://www.ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik_KOSN/13/03.pdf). (дата звернення: 20.10.2018).

Семенец С. П. *Методологія і теорія розвивального навчання математики*: монографія. Житомир: О.О.Євенок, 2015. 236 с.

Слепкань З. І. *Методика навчання математики*: підручник. Київ: Вища школа, 2006. 582 с.

Тарасенкова Н. А., Лов'янова І. В. Задачний підхід до професійно спрямованого навчання математики у профільній школі. *Проблеми математичної освіти. (ІМО-2015)*. 2015 URL: <https://drive.google.com/file/d/0B37CUSP7hGgIOEVsOHBRy0owRmc/view> (дата звернення: 17.10.2018).

#### References

Dubova, M.V., & Maslova S.V. (2011). *Tselevoi y soderzhatelnyi aspekt ponyatiya «kompetentnostnaia zadacha»* [Targeted and informative aspect of the concept of «competence task»]. *Vestnik Volzhskoho unyversyteta im. V. N. Tatyshcheva*. 8. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/tselevoi-i-soderzhatelnyyaspekt-ponyatiya-kompetentnostnaya-zadacha> (last accessed: 16.10.2018). [in Russian].

Lovianova, I.V., & Sliusarenko, M.A. (2010). *Zadachnyi pidkhd do vyvchennia rivnian matematychnoi fizyky yak zasib pidvyshchennia yakosti znan studentiv* [Target approach to the study of equations of mathematical physics as a means to improve the quality of knowledge of students]. *Teoriia ta metodyka navchannia matematyky, fizyky, informatyky*. Volume 2: *Teoriia ta metodyka navchannia fizyky*. Kryvyy Rih: NMetAU Publishing Department [in Ukrainian].

Morze, N.V., & Kuzminska, O.H. (2008). *Kompetentnisni zadachi z informatyky* [Competency tasks in computer science]. *Naukovyi chasopys NPU imeni M.P.Drahomanova. Seriya 2. Komp'uterno-orientovani systemy navchannia: zbirnyk naukovykh prats*, 6 (13). URL: [http://www.ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik\\_KOSN/13/03.pdf](http://www.ii.npu.edu.ua/files/Zbirnik_KOSN/13/03.pdf) (last accessed: 20.10.2018). [in Ukrainian].

Semenets, S.P. (2015). *Metodolohiia i teoriia rozvyvalnoho navchannia matematyky*: monohrafiia [Methodology and theory of developmental mathematics education]. Zhytomir: O.O.Yevenok [in Ukrainian].

Slepkan, Z.I. (2006). *Metodyka navchannia matematyky* [Methodology of teaching mathematics]. Kyiv: Vyscha shkola [in Ukrainian].

Tarasenkova, N.A., Lovianova, I.V. (2015). *Zadachnyi pidkhd do profesiino spriamovanoho navchannia matematyky u profilnii shkoli* [Target approach to professionally directed mathematics education in profile school]. URL: <https://drive.google.com/file/d/0B37CUSP7hGgIOEVsOHBRy0owRmc/view> [in Ukrainian].

Стаття надійшла до редакції 16.03.2019 р.

Стаття прийнята до друку 25.03.2019 р.

#### Семенец Сергей

доктор педагогических наук, профессор  
профессор кафедры математического анализа  
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко  
г. Житомир, Украина

#### Чугунова Елена Васильевна

аспирант  
кафедра математического анализа,  
Житомирский государственный университет имени Ивана Франко  
г. Житомир, Украина

### РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ СТАРШЕКЛАСНИКОВ В ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА: РЕАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧНОГО ПОДХОДА

**Аннотация.** В статье сделан теоретический анализ психолого-педагогической и научно-методической литературы в контексте специфики реализации задачного подхода в обучении старшекласников алгебре и началам анализа. Целью представленного исследования является освещение научных основ реализации задачного подхода к развитию математических способностей старшекласников. Были использованы методы

теоретического анализа (проблемы задачного подхода в обучении и развитии математических способностей старшеклассников), структурно-системного анализа (при построении задачной системы и установлении корреляционных связей между компонентами), структурно-дидактического анализа (содержания алгебры и начал анализа в контексте затронутой проблемы), содержательно-теоретического обобщения (при формулировке выводов). По результатам проведенного исследования выделены следующие типы задач: математические, задачи в структуре учебно-математической деятельности, компетентностные задачи по математике. Обосновано, что такая задачная система активизирует учебно-математическую деятельность старшеклассников, обеспечивает развитие у них системообразующего, кодировочно-формализованного, когнитивно-обобщающего и мнемически-обобщающего компонентов математических способностей.

**Ключевые слова:** задачный подход; учебно-математическая деятельность; математические способности старшеклассников; обучение алгебре и началам анализа.

**Semenets Sergiy**

Doctor of Pedagogical Sciences, Professor

Department of Mathematical Analysis

Zhytomyr State University named after Ivan Franko

Zhytomyr, Ukraine

**Chugunova Olena Vasylivna**

PhD Student

Department of Mathematical Analysis

Zhytomyr State University named after Ivan Franko

Zhytomyr, Ukraine

#### DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL ABILITIES OF SENIOR PUPILS IN TEACHING ALGEBRA AND BEGINNING ANALYSIS: REALIZATION OF THE TASK APPROACH

**Abstract.** The article deals with the theoretical analysis of psychological and pedagogical and scientific-methodical literature in the context of the peculiarities of the implementation of the problem-oriented approach in the study of algebra and the principles of analysis. At present, it is still not studied the problem of developing mathematical abilities of senior pupils as individually psychological entities of a person and at the same time the bases of development of the corresponding competence. The questions of methodically balanced application of the task-oriented approach to the development of mathematical abilities of senior pupils have not been studied until now. The purpose of this research is to highlight the scientific principles of the realization of a problem-oriented approach to the development of mathematical abilities of senior pupils, outline the theoretical aspects of its implementation in the process of studying algebra and the principles of analysis. In order to achieve the goal, are used such methods as theoretical analysis (problems of the task-oriented approach in teaching and development of mathematical abilities of senior pupils), structural-system analysis (in the construction of a task system and the establishment of correlation links between components), structurally-didactic analysis (the content of algebra and the principles of analysis in the context of the raised issue), the content-theoretical generalization (in the formulation of conclusions). According to the results of the research were identified such types of problems as mathematical, problems in the structure of educational and mathematical activity and competency mathematical problems. It is substantiated that such problem system activates the teaching and mathematical activity of senior pupils, and provides them with the development of their system-oriented, coded-formalized, cognitive-generalization and mnemonic-generalization components of mathematical abilities.

**Key words:** task approach; educational and mathematical activities; mathematical abilities of high school students; teaching algebra and the beginnings of analysis.