МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"
Факультет інформаційних технологій
Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Коцовський В. М.

Дискретна математика та теорія алгоритмів

Методичні матеріали до практичних робіт

Ужгород – 2019

ЗМІСТ

ВСТУП

Навчальна дисципліна "Дискретна математика та теорія алгоритмів" вивчається студентами факультету інформаційних технологій на протязі перших двох семестрів. Вивчення дисципліни є актуальним, оскільки переважна більшість навчальних дисциплін, які входять до складу галузі знань 12 — "Інформатика та обчислювальна техніка", широко використовують позначення, поняття, моделі, методи та алгоритми дискретної математики. У зв’язку з цим великого значення набуває вироблення у студентів умінь і навичок розв’язування практичних задач із дискретної математики.

Видання містить задачі з теорії множин, теорії бінарних відношень, математичної логіки, теорії булевих функцій, теорії алгебраїчних систем та теорії графів. Методичні матеріали можуть бути використані при проведенні практичних занять з курсу "Дискретна математика та теорія алгоритмів". Наведені у виданні задачі також можуть виявитися корисними у процесі підготовки студентів до модульного та семестрового контролю. Більш широкий перелік задач читач може знайти в [1-17]. Теоретичний матеріал, володіння яким є достатнім для успішного розв’язування наведених у виданні завдань, може бути знайденим у [18, 19].

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Операції над множинами

1. Чи вірно, що
   a. $\{1,4,5\}=\{5,1,4\}$;
   b. $\varnothing=\{\varnothing\}$; $\varnothing\subset\{\varnothing\}$; $\varnothing\subset\varnothing$; $\varnothing\subseteq\varnothing$;
   c. $\{\{a,b\},\{c,d,e\}\}=\{a,b,c,d,e\}$; $\{a,c,e\}\subset\{a,\{b,c\},d,e\}$.
2. Чи вірно, що
   a. $\{1,3\}\in\{3,2,4,5,1\}$;
   b. $a=\{a\}$; $a\subseteq\{a\}$; $\varnothing\subset\{a\}$; $(\{a\}\setminus\varnothing)\subset(\{a\}\cup\varnothing)$;
3. Знайти $A\Delta\left(\bar{B}\cap C\right)$ за умови, що

   $U=\{1,2,...,20\}$, $A=\{x-2\,|\,5x+1-\text{квадрат цілого числа}\}$, $B=\left\{x\,|\,x^2>60\right\}$,

   $C=\left\{x\middle|(3x-1)-\text{просте число}\right\}$.
4. Нехай $U=\{5,6,...,30\}$ — універсальна множина, $A=\{5,7,8,10,11,14,20,21,22,26\}$, $B=\{2x-7\,|\,x-\text{непарне}\}$, $C=\left\{x\,|\,x^2+1-\text{просте число}\right\}$. Вказати перелік елементів множини $D=B\Delta\left(\bar{A}\cup C\right)$.
5. На діаграмі Ейлера-Венна зобразити множини
   a. $\overline{A\Delta\bar{\bar{C}}}\setminus(B\cup A)$.
   b. $(\bar{A}\cap B)\cup(B\Delta C)$.
6. Довести, що для довільних множин *A*, *B* та *C* справджуються рівності
   a. $\bar{C}\Delta\left(\left(A\cup\bar{B}\right)\cap\bar{C}\right)=B\setminus(A\cup C)$.
   b. $C\setminus\overline{\bar{A}\cup B}=B\cap C\cup(C\setminus A)$.
7. Нехай *A* — множина трикутників, *B* — множина чотирикутників, *C* — множина правильних многокутників, *D* — множина многокутників, які мають принаймні один прямий кут, *E* — множина рівносторонніх многокутників. Вказати множини:
   a. $((D\cap A)\setminus(C\cap B))\,\Delta\,(A\cap E)$.

b. $\overline{B\cap(C\cup D)}\cap E\cap B$.

8. Нехай S — множина усіх квадратів, R — множина усі прямокутників, L — множина усіх ромбів, P — множина усіх правильних многокутників площини. Вказати множини
   a. $(L\setminus S)\cap(R\setminus\bar{P})$.
   b. $(P\setminus S)\cup(R\setminus\bar{L})$.
9. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
   a. $\bar{A}\setminus B=\overline{A\cup\bar{A}\cap B}$;
   b. $(B\setminus A)\cup\bar{A}=\overline{C\setminus\bar{A}}\setminus A$;
10. Довести, що у алгебрі множин виконуються наступні рівності:
   a. $\bar{A}\cup B\cup(C\setminus A)=\overline{A\setminus B}$;
   b. $(A\Delta(A\cap\bar{B}))\cap(\bar{B}\Delta\bar{C})=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

1.2. Потужність множини

11. Нехай $U=\{0,1,2,\ldots,12\}$, $A_1=\{2,4,5,6,8,9,11,12\}$, $A_2=\{x\mid x^2 \vdots 12\}$. Знайти $\left|B\left(A_1\cap\bar{A}_2\right)\right|$.
12. Нехай $U=\{3,4,\ldots,15\}$, $A_1=\{5,7,9,11,12,14\}$, $A_2=\{x\mid(x^2-x)\vdots 6\}$. Знайти кількість власних підмножин множини $A_1\Delta A_2$.
13. У групі вчиться 25 студентів. Відомо, що 5 студентів отримали п'ятірку з математики, 8 — з програмування, 7 — з фізики. Троє студентів отримали п'ятірку з математики і програмування, 4 — з програмування та фізики, 2 — з математики та фізики. Один студент отримав п'ятірки з усіх трьох дисциплін. Знайти кількість студентів, які
   a. Не отримали жодної п'ятірки;
   b. Отримали рівно одну п'ятірку.
14. Троє з 23 мандрівників не були жодного разу ні у Парижі, ні у Лондоні, ні у Римі, 12 було у Лондоні, 10 — у Римі, 4 — тільки у Парижі, 4 — і у Парижі і у Лондоні, 6 — і у Лондоні і у Римі, 5 — і у Парижі і у Римі. Знайти кількість мандрівників, які були в усіх трьох містах.

15. Нехай $|U|=50,\ |A|=20,\ \left|\overline{A\cup B}\right|=15,\ |A\cap B|=10$. Знайти

a. $|B\setminus A|$;

b. $|A\cup\overline{B}|$.

16. Нехай $|U|=60,\ |A|=25,\ \left|\overline{A\cap B}\right|=45,\ |B\setminus A|=18$. Знайти

a. $|A\cup B|$;

b. $|B\,\Delta\,\overline{A}|$.

1.3. Метод математичної індукції

1. Довести тотожності

   a. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   b. $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

2. Довести, що для довільного натурального n число n^3-7n ділиться на 6.
3. Довести, що для довільного натурального n число $6^{2n-1}+1$ ділиться на 7.
4. Довести, що число $2^{2^n}+1$ закінчується цифрою 7 $(n>1)$.
5. Довести, що $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{n-1}{n}$
6. Знайти суму $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{(n-2)(n-1)n},\ n\in\mathbb{N},\ n>2.$

2. ТЕОРІЯ БІНАРНИХ ВІДНОШЕНЬ

2.1. Операції над відношеннями

1. Нехай $A=\{k,l,m,n\}$, $B=\{1,2,5,7,8\}, C=\{a,b,c,d,e\}$,

   $R=\{(k,1),(n,2),(n,1),(l,5),(l,8),\ (m,2),(m,8),(k,7)\}$, $S=\{(2,b),(7,c),(8,b),(5,e)\}$,

   $T=S\circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти

   $\left(A\setminus T^{-1}\left[\{c,e\}\right]\right)\times\left(C\setminus \text{пр}_2 T\right)$.

2. Нехай $A=\{k,l,m,n\}$, $B=\{1,2,3,4\}, C=\{x,y,z,t,u,v\}$,

   $$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix},\ S=\{(1,u),(2,x),(2,z),(2,t),(4,x),(4,v)\},\ T=S\circ R.$$

   Задати відношення T за допомогою графу і знайти $\left(C\setminus T\left[\{l,n\}\right]\right)\times\left(A\setminus \text{pr}_2 T^{-1}\right)$.

3. Нехай R — бінарне відношення "<", визначене на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^m, де $m\in\mathbb{N}$.
4. Нехай R — бінарне відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$. Знайти R^m, де $m\in\mathbb{N}$.
5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
6. Навести приклад бінарного відношення R, такого що $R^2\neq\varnothing$, $R^2\cap R=\varnothing$.

2.2. Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R=\{(x,y)\mid |x-y|\le 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$.
2. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\ge 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$.
3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2\setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.

4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2 \setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.
5. Для однорідного БВ $R=\{(1,2),(1,3),(2,5)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5\}$, побудувати його замикання, яке є симетричним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,4\}]$.
6. Для однорідного БВ $R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,b)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S[\{b,d,f\}]$.
7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, визначеного на множині $\{a,b,c,d\}$.

2.3. Відношення еквівалентності

1. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:

   а) $\{\{1,2,4,8\},\{5\},\{3,7\}\}$;

   б) $\{\{1,2,6\},\{4,5\},\{2,3,7\},\{4,8\}\}$;

   в) $\{\{1,2,6\},\{4,7\},\{3,5,8\}\}$.
2. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$:

   а) $\{\{b,e,g\},\{a,d\},\{b,c,h\}\}$;

   б) $\{\{d,e\},\{b,c,g\},\{d,h\},\{a,b,f\}\}$;

   в) $\{\{c,e,h\},\{a,b,f\},\{d,g\}\}$.
3. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
4. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).

5. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
   а) паралельність площин у просторі;
   б) відношення знайомства на множині людей;
   в) відношення "одногрупник";
   г) відношення рівнопотужності.
6. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
   а) перпендикулярність прямих на площині;
   б) відношення "мати однаковий вік" на множині людей;
   в) відношення "знаходитися у одній чверті" на множині точок координатної площини;
   г) відношення "бути родичем" на множині людей.
7. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення

$R=\{(t,v),(w,x),(w,z),(u,y),(x,z),(w,w),(x,x),(z,x),(v,v),(z,z),(z,w),(x,w),(y,u),(y,y),(u,u),(t,t),(v,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R.

8. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ бінарне відношення

$$R=\{(b,f),(a,g),(b,b),(f,c),(d,d),(b,c),(g,a),(c,c),(g,g),(c,f),(f,f),(c,b),(e,e),(a,a),(f,b)\}$$

відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину A/R.

9. Вказати визначене на множині $[0,1]$ бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 5 класів еквівалентності.
10. Вказати визначене на множині $\mathbb{Z}$ бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 13 класів еквівалентності.
11. Для бінарного відношення $R=\{(1,2),(3,2),(2,4),(2,7),(4,9),(10,5),(3,3)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,\ldots,10\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення S, яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R\subseteq S$.
12. Для бінарного відношення $R=\{(b,a),(c,b),(f,b),(b,g),(d,k),(h,f),(i,j)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,\ldots,k\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне

відношення S, яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$.

2.4. Відношення порядку

1. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:

   а) відношення знайомства на множині людей; б) відношення "бути старшим"; в) відношення "бути сином"; г) відношення "бути предком".

2. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:

   а) відношення "бути нащадком"; б) відношення "бути молодшим"; в) відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини; г) відношення "бути родичем" на множині людей.

3. Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку R, якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 1. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини $\{A, C, E\}$ Знайти $\sup\{C, E\}$ та $\inf\{D, E\}$. Чи буде впорядкована множина ґраткою?

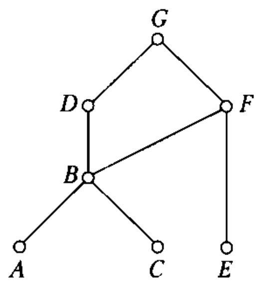


Рис. 1

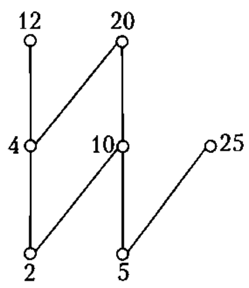


Рис. 2.

4. Вказати бінарне відношення часткового порядку R на множині, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2. Вказати екстремальні елементи відповідної впорядкованої множини. Знайти $\sup\{10,12\}$ та $\inf\{10,12\}$.

5. На рис 3. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

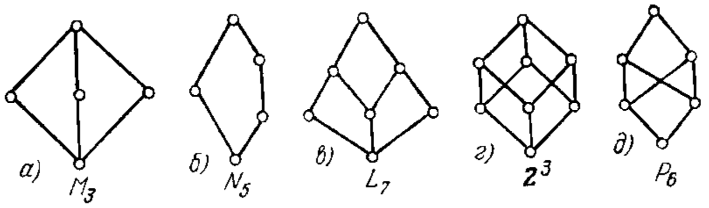


Рис. 3.

6. На рис 4. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

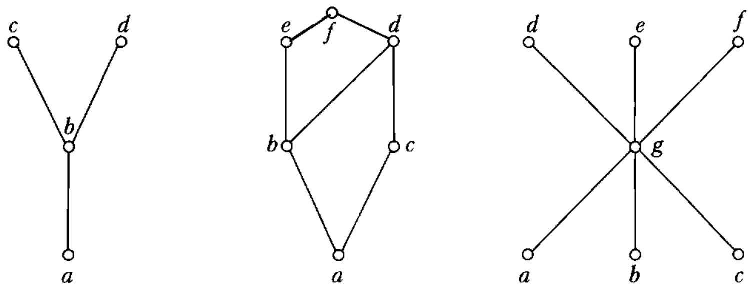


Рис. 4.

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{1, 2, 3, 4\}$, яке було би відношенням:

   а) нестрогого порядку;

   б) строгого порядку;

   в) лінійного порядку.

   Вказати екстремальні елементи множини *A* за побудованим відношенням.

8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке було би відношенням:

   а) нестрогого порядку;

   б) строгого порядку;

   в) лінійного порядку.

   Вказати екстремальні елементи множини *A* за побудованим відношенням.

9. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(c,a),(b,d),(d,c),(f,c)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке б містило у собі відношення *R* і було відношенням:

а) часткового порядку;

б) строгого порядку;

в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A,S).

10. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(7,4),(2,3),(4,1),(5,4),(3,4)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке б містило у собі відношення *R* і було відношенням:

а) часткового порядку;

б) строгого порядку;

в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A,S).

11. Перевірити, чи є бінарне відношення $R=I_A\cup\{(2,1),(4,1),(1,3),(5,1),(4,3)\}\cup\cup\{(2,3),(5,3),(5,4)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A=\{1,2,3,4,5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A,R) та її вказати екстремальні елементи.

12. Перевірити, чи є бінарне відношення *R* з матрицею

$$M(R)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A=\{x,y,z,u,v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення *R* та вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню *R*.

13. Перевірити, чи є відношення $S = R \circ (R \cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, якщо $R = \{(b,g),(a,e),(c,g),(b,c),(a,b),(c,e),(d,f)\}$. Якщо так, то

а) зобразити діаграму Хассе відношення *S*;

б) вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням *S*;

в) знайти $\inf\{b,g,e\}$ та $\sup\{a,b,h\}$.

2.5. Функціональні відношення

1. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:

   а) $R_1 = \{(x,y) \mid xy = 2\}$;

   б) $R_2 = \{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$;

   в) $R_3 = \{(x,y) \mid 2x > y\}$;

   г) $R_4 = \{(x,y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$;

   д) $R_5 = \{(x,y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$.

2. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:

   а) $R_1 = \{(x,y) \mid y = 2^x\}$;

   б) $R_2 = \{(x,y) \mid y \ge -1, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\}$;

   в) $R_3 = \{(x,y) \mid x + y = 1\}$;

   г) $R_4 = \{(x,y) \mid x^2 = |y|\}$;

   д) $R_5 = \{(x,y) \mid x = \sin y\}$.

3. За бінарним відношенням $R = \{(2,b),(5,d),(4,b)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним;

4. За бінарним відношенням $R=\{(1,b),(3,d),(4,a)\}\subset\{1,2,3,4,5\}\times\{a,b,c,d,e\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $R\subseteq f$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним;

5. За бінарним відношенням $R=\{(2,b),(5,d),(4,b),(1,a),(2,c),(5,a)\}\subset\{1,2,3,4,5\}\times$ $\times\{a,b,c,d\}$ побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $f\subseteq R$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним;

6. За бінарним відношенням $R=\{(b,2),(d,5),(a,4),(e,3),(c,4),(d,3),(a,1)\}\subset$ $\subset\{a,b,c,d,e\}\times\{1,2,3,4,5\}$ побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $f\subseteq R$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним;

3. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

3.1. Формули логіки висловлювань.

1. Вказати порядок виконання операцій у формулі

$$\varphi = (\neg A) \Rightarrow \Big(B \Leftrightarrow \big(\neg\big((C \vee A) \wedge (\neg D)\big)\big)\Big)$$

   та перейти від φ до відповідної їй формули за домовленістю.

2. Відновити дужки у формулі

$$\varphi = B \wedge \bar{A} \Rightarrow D \Leftrightarrow \left(\bar{C} \vee A\right) \wedge B \Rightarrow \bar{D}.$$

3. Розв'язати логічні рівняння
   a. $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0$.
   b. $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R$.
4. Розв'язати логічні рівняння
   a. $\bar{Q} \vee P \Rightarrow Q \wedge \bar{R} = 0$.
   b. $P \Leftrightarrow \bar{Q} \wedge R = \bar{P} \vee R$.
5. Побудувати таблицю істинності формули $\varphi = \bar{P} \vee Q \Rightarrow R \Leftrightarrow \overline{R \vee P} \wedge Q$.
6. Побудувати таблицю істинності формули $\varphi = \left(P \Rightarrow \bar{Q} \Leftrightarrow R\right) \vee \overline{\bar{R} \Rightarrow P \wedge \bar{Q}}$.
7. Перевірити, чи є виконуваною формула $\varphi = \overline{\bar{A} \wedge C} \Leftrightarrow A \vee \left(\bar{B} \Rightarrow C\right)$.
8. Перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \left(A \wedge \bar{C} \Leftrightarrow B\right) \Rightarrow \overline{A \Rightarrow B} \vee \left(C \Rightarrow B\right)$.
9. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = \overline{A \wedge B \Rightarrow \left(A \vee \bar{A} \wedge C\right) \wedge B}$.
10. З використанням методу від супротивного перевірити, чи є тотожно істинною формула $\varphi = \overline{\bar{A} \Rightarrow B} \Rightarrow \left(\bar{A} \vee C \Leftrightarrow \bar{A}\right)$.

3.2. Рівносильні перетворення формул алгебри висловлювань

1. Для формули $\varphi = \left(\bar{Q} \Leftrightarrow P\right) \Rightarrow P \wedge \bar{R}$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми та символи операцій диз'юнкції і заперечення.

2. Для формули $\varphi = \left(\overline{R} \vee P\right) \Leftrightarrow \left(Q \Rightarrow R\right)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми і символи операцій кон'юнкції та заперечення.
3. Для формули $\varphi = \left(\overline{R} \vee P\right) \Leftrightarrow \left(Q \Rightarrow R \wedge \overline{P}\right)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.
4. Для формули $\varphi = \left(\overline{P} \Leftrightarrow Q\right) \Rightarrow \left(Q \Rightarrow R \wedge \overline{P}\right)$ побудувати рівносильну їй формулу, яка би містила лише атоми, символи операцій кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення, причому заперечення відноситься лише до атомів.
5. Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = \left(\overline{P} \Leftrightarrow Q \wedge R\right) \vee \left(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}\right)$ та $\varphi_2 = \left(Q \Rightarrow P \wedge \overline{Q}\right) \vee \left(\overline{P} \Rightarrow Q \wedge R\right)$.
6. Перевірити, чи є рівносильними формули $\varphi_1 = \left(Q \wedge P \Rightarrow R \vee Q\right) \wedge \left(\overline{P} \Leftrightarrow P \wedge Q\right)$ та $\varphi_2 = \overline{P \wedge \overline{Q} \Rightarrow \overline{R \Rightarrow P}}$.
7. Перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{P \Rightarrow \overline{R}} \Rightarrow \left(P \vee \overline{Q} \Leftrightarrow P\right)$.
8. Перевірити, чи є суперечливою формула $\varphi = \overline{Q \wedge P \Rightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{Q} \wedge R\right) \wedge P}$.
9. З використанням методу рівносильних перетворень перевірити, чи є загальнозначущою формула $\varphi = \overline{\overline{P} \Rightarrow P \wedge Q} \Rightarrow \overline{R} \vee \left(\overline{P} \Leftrightarrow R\right)$.
10. Довести, що формула $\varphi = P \wedge \overline{Q} \Rightarrow R \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow \left(\overline{R} \vee Q\right) \wedge P \Rightarrow Q$ є тотожно істинною.

3.3. Логічне слідування

1. Перевірити, чи є формула $\varphi = \overline{Q} \wedge R \vee \overline{P}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \overline{R} \Rightarrow \overline{Q}$ та $\varphi_2 = R \wedge P \Leftrightarrow \overline{P}$.
2. Перевірити, чи має місце логічне слідування $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \vDash \varphi$, якщо $\varphi_1 = \overline{Q} \Rightarrow \overline{Q} \wedge R$, $\varphi_2 = \overline{P} \Leftrightarrow Q$, $\varphi_3 = R \Rightarrow \overline{P} \wedge \overline{R}$, $\varphi = \overline{\overline{Q} \Leftrightarrow R}$.
3. Перевірити, чи є формула $\varphi = P \vee \overline{P} \wedge \overline{Q} \wedge \overline{R}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \overline{R} \wedge \overline{P} \Leftrightarrow P$ та $\varphi_2 = R \Rightarrow \overline{Q} \wedge R$.
4. Перевірити, чи є формула $\varphi = \overline{R} \Rightarrow \overline{P \Rightarrow \overline{Q}}$ логічним наслідком формул $\varphi_1 = \overline{Q} \wedge \overline{R} \Leftrightarrow Q$ та $\varphi_2 = P \Rightarrow \overline{Q} \Leftrightarrow Q \wedge R$.

5. Вказати структуру висловлювання "Якщо студент написав усі модульні роботи на 2, то він складе іспит на два, хіба що він ретельно вивчить усі питання".
6. Проаналізувати міркування

   а) Якщо програміст володіє мовою PHP або мовою Java, то він може розробляти серверне ПЗ.

   б) Програміст може підтримувати сайт тоді і тільки тоді, коли він може розробляти серверне ПЗ.

   в) Програміст не може підтримувати сайт.

   Отже, програміст не володіє ні PHP, ні Java.
7. Проаналізувати міркування

   а) Якщо Сергій оволодіє німецькою мовою, то він зможе читати твори Ніцше та Кафки в оригіналі.

   б) Сергій оволодіє німецькою мовою, якщо почне її вивчати.

   Отже, Сергій зможе читати Кафку в оригіналі тоді і тільки тоді, якщо він почне вивчати німецьку мову.
8. Проаналізувати міркування

   а) Число ділиться на 5 тоді і тільки тоді, коли його остання цифра рівна 0 або 5;

   б) Рівність останньої цифри числа 0 є достатньою для його парності;

   в) Число ділиться на 5 і є непарним.

   Отже, остання цифра цього числа не рівна 0.
9. Проаналізувати міркування

   а) Якщо ціле число більше за одиницю, то воно є простим або складеним.

   б) Якщо ціле число більше за два, то воно більше за один.

   в) Якщо ціле число більше двох і парне, то воно складене.

   Отже, якщо ціле число більше за два і парне, то воно є складеним.
10. Проаналізувати міркування

   а) Якщо падає сніг або на дорозі ожеледиця, то машиною важко керувати.

   б) Якщо машиною важко керувати, то я спізнюся або зовсім не приїду.

   в) Сніг не падає.

   Отже, я спізнюся або на дорозі ожеледиця.

4. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

1. Вказати, яким є (тотожно істинним, тотожно фальшивим чи виконуваним) предикат $f(x)$, визначений на множині натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

   a. $f(x): x^2+8x+15\ge 0$.

   b. $f(x): \cos x=0$.

   c. $f(x): x^4\ge 16$.

   d. $f(x): x^3>-1$.

2. Вказати, до якого типу належить однорідний двомісний предикат $f(x,y): x^2+y^2\ge 2$, визначений на множині а) $\mathbb{Z}$; б) $\mathbb{N}$; в) $[0,1)$.

3. Вказати множину істинності предиката $f(x,y)\Rightarrow \overline{g(y)}\wedge h(x)$, якщо предикати $f(x,y): x+y$ — просте число, $g(x): x^2+3$ кратне 4, $h(x)$: "x кратне 3" визначені на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

4. Предикати $f(x,y):(y+1)/(x-1)$ — ціле число та $g(x)$: $x^2-10x+16=0$ визначені на множині A = {2, 3, 5, 7, 9, 11}. Перевірити, чи є один із предикатів $\exists y\, f(x,y)$ та $g(x)$ наслідком іншого.

5. Знайти множину істинності предиката $\overline{\exists x\big(f(x,y)\Leftrightarrow g(x)\big)}$, якщо предикати $f(x,y): x+y$ — просте число та $g(x)$: остача від ділення x^2+7 на 4 рівна 1 або 3 визначені на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

6. Знайти $\forall x\left(\exists y\, f(x,y)\Rightarrow \overline{g(x)}\right)$, якщо предикати $f(x,y)$: x^2+y^2 — просте число, $g(x): 2x^2+3$ кратне 5 визначені на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

7. Вказати множину істинності предиката $\exists x\big(f(x,y)\wedge g(x,y)\big)$, якщо $f(x,y): x<y$ — однорідний двомісний предикат, визначений на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $g(x,y)$ — однорідний двомісний предикат на множині A, множина істинності якого рівна $\{(2,5),(3,2),(4,7),(7,7),(7,8)\}$.

8. Вказати таблицю значень предиката $\exists x\, f(x,y)\Rightarrow \forall y\,\overline{g(x,y)}$, якщо двомісні предикати $f(x,y)$: $y^2>2x+10$ та $g(x,y)$: "$x+y$ кратне 6" визначені на множинах $A_1=\{1,3,4,7,8,9\}$ та $A_2=\{-5,0,3,5,7\}$.

9. Проаналізувати міркування

   а) Кожний атлет сильний.
   б) Кожний, хто сильний і розумний, досягне успіху.
   в) Петро — розумний атлет.

   Отже, Петро досягне успіху.

5. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

5.1. Булеві вектори

1. Вказати номер та норму Хеммінга булевого вектора
   a. $\mathbf{x}=(0,1,1,0,0,0,1,0,1)$.
   b. $\mathbf{x}=(0,1,1,0,0,0,1,0,1)$.
2. Знайти $d(\mathbf{x},\mathbf{z})$, якщо
   a. $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}_2^7,\ N(\mathbf{x})=49,\ \mathbf{y}=(1,0,1,0,0,0,1),\ \mathbf{z}=\overline{\mathbf{x}}\vee\mathbf{y}$.
   b. $\mathbf{x}=(1,0,1,0,0,0,1),\ \mathbf{y}\in\mathbb{Z}_2^8,\ N(\mathbf{y})=101\ ,\ \mathbf{z}=\mathbf{x}\oplus\overline{\mathbf{y}}$.
3. Обчислити
   a. $(\mathbf{y}<<<4)\oplus(\mathbf{x}>>\|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{y}\in Z_2^8,\ n(\mathbf{y})=113,\ \mathbf{x}=(0,0,1,0,1,1,0,0)$.
   b. $(\mathbf{y}>>>5)\wedge(\overline{\mathbf{x}}<<\|\mathbf{y}\|)$, де $\mathbf{x}\in Z_2^8,\ n(\mathbf{x})=59,\ \mathbf{y}=(0,0,1,0,1,1,0,0)$.

5.2. Булеві функції

1. Побудувати таблицю значень булевих функцій $f(x,y,z)$ і $f^*(x,y,z)$ та вказати їх номери, якщо
   a. $f(x,y,z)=\overline{x\,|\,(\overline{y}\downarrow z)}\oplus(z\Rightarrow\overline{x})$.
   b. $f(x,y,z)=(\overline{x}\downarrow(z\vee\overline{y}))\Leftrightarrow(z\,|\,\overline{y})$.
2. Вказати суттєві та видалити фіктивні змінні булевої функції $f(x_1,x_2,x_3)$, якщо
   a. $N(\tilde{f})=250$.
   b. $N(\tilde{f})=153$.
3. Перевірити, чи є самодвоїстою булева функція $f(x,y,z)$, якщо
   a. $f(x,y,z)=(x\oplus\overline{y})\Leftrightarrow z$.
   b. $f(x,y,z)=(\overline{x}\,|\,(y\Rightarrow z))\Rightarrow((x\overline{z})\downarrow y)$.
4. Знайти номер функції $f^*(x,y,z)$, якщо
   a. $f(x,y,z)=(\overline{x}\downarrow z)\oplus y$.

b. $f(x,y,z)=(\bar{y}\Leftrightarrow z)\,|\,\overline{x\downarrow\bar{z}}$.

5. Задати булеву функцію $f(x,y,z)$ формулою над множиною функцій $\{\neg,\vee,\wedge\}$, якщо

a. $f(x,y,z)=\overline{z\Rightarrow(\bar{x}\downarrow y)}\Rightarrow(\bar{z}\oplus(\bar{z}\,|\,x))$.

b. $f(x,y,z)=(xy\Leftrightarrow\bar{z})\downarrow(\bar{x}\,|\,(\bar{y}\oplus z))$.

6. Задати булеву функцію $f^{*}(x,y,z,t)$ формулою над множиною функцій $\{\neg,\vee,\wedge\}$, якщо

a. $f(x,y,z,t)=\overline{x\bar{y}\vee\bar{z}}(yt\Rightarrow\bar{z})\vee(\bar{z}\oplus t)$.

b. $f(x,y,z,t)=(x\oplus\bar{y}t)(zt\Rightarrow\bar{x})\vee(x\bar{y}\downarrow\bar{z})$.

5.3. Спеціальні форми подання БФ

1. Розкласти булеву функцію $f(x,y,z)$ за змінними *x* та *y*:

a. $f(x,y,z)=\overline{z\Rightarrow(\bar{x}\downarrow y)}\Rightarrow(\bar{z}\oplus(\bar{z}\,|\,x))$;

b. $f(x,y,z)=(xy\Leftrightarrow\bar{z})\downarrow(\bar{x}\,|\,(\bar{y}\oplus z))$.

2. Побудувати ДНФ булевої функції $f(x,y,z)$ методом рівносильних перетворень:

a. $f(x,y,z)=(yz\Rightarrow(\bar{x}\downarrow z))\,|\,(x\oplus\bar{z})$;

b. $f(x,y,z)=(y\vee\bar{x}\Leftrightarrow z)\,|\,(\bar{x}\downarrow(\bar{y}\oplus z))$.

3. Побудувати КНФ булевої функції $f(x,y,z)$ методом рівносильних перетворень:

a. $f(x,y,z)=(y\vee\bar{x}\Leftrightarrow z)\,|\,(\bar{x}\downarrow(\bar{y}\oplus z))$;

b. $f(x,y,z)=(yz\Rightarrow(\bar{x}\downarrow z))\,|\,(x\oplus\bar{z})$.

4. За таблицею значень булевої функції $f(x,y,z)$ побудувати її ДДНФ та ДКНФ.

a. $f(x,y,z)=\overline{\bar{z}\oplus(\bar{x}\downarrow z)}\Rightarrow((x\Leftrightarrow\bar{y})\,|\,z)$;

b. $f(x,y,z)=(z\downarrow(\bar{x}\oplus y))\overline{\bar{z}\Leftrightarrow(z\,|\,\bar{x})}$.

5. Побудувати ДДНФ та ДКНФ булевої функції $f(x,y,z)$ методом рівносильних перетворень:

a. $f(x,y,z)=\overline{\bar{z}\oplus(\bar{x}\downarrow z)}\Rightarrow((x\Leftrightarrow\bar{y})\,|\,z)$;

b. $f(x,y,z)=\left(z\downarrow(\bar{x}\oplus y)\right)\overline{\bar{z}\Leftrightarrow(z\mid\bar{x})}$.

6. Побудувати поліном Жегалкіна булевої функції $f(x,y,z)$, якщо

   a. $f(x,y,z)=\overline{\bar{z}\oplus(\bar{x}\downarrow z)}\Rightarrow\left((x\Leftrightarrow\bar{y})\mid z\right)$;

   b. $f(x,y,z)=\left(z\downarrow(\bar{x}\oplus y)\right)\overline{\bar{z}\Leftrightarrow(z\mid\bar{x})}$.

5.4. Повнота та замкненість систем булевих функцій

1. Перевірити, до якого з 5 основних замкнених класів належить булева функція $f(x,y,z)$, якщо

   a. $N(\tilde{f})=77$.

   b. $N(\tilde{f})=87$.

2. Якими є найбільший та найменший можливі значення номера монотонної булевої функцій $f(x,y,z,t)$, якщо

   a. $f(1,0,1,0)=0,\ f(1,0,0,1)=1$.

   b. $f(0,0,1,1)=1,\ f(0,1,1,0)=0$.

3. Вказати замикання системи функцій A, якщо

   a. $A=\{xy,1,x\Leftrightarrow y\}$.

   b. $A=\{xy,0,x\Leftrightarrow y\}$.

   c. $A=\{x\vee y,1,x\oplus y\}$.

   d. $A=\{x\vee y,0,x\oplus y\}$

4. Перевірити, чи є функціонально повною система булевих функцій C. Якщо так, то вказати усі її базиси.

   a. $C=\{x\oplus y,x\Leftrightarrow y,x\oplus y\oplus z,x\wedge y,x\mid\bar{y}\}$.

   b. $C=\{x\oplus y,1,x\wedge y,x\Leftrightarrow y\vee x\}$.

5.5. Основні поняття теорії логічних та контактних схем

1. Побудувати функції провідності контактних схем, наведених на

   a. на рис. 5;

   b. на рис. 6.

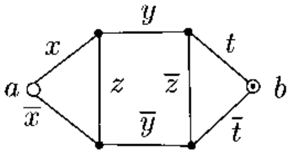


Рис. 5.

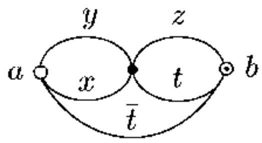


Рис. 6.

2. Побудувати функції провідності логічної схеми.

a.

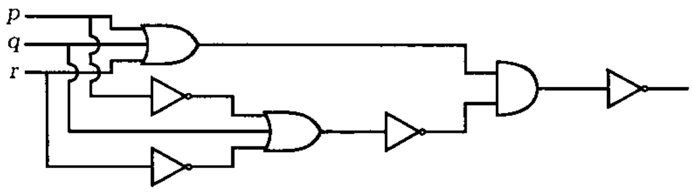


Рис. 7.

b.

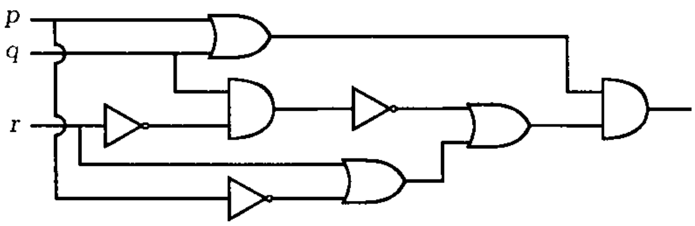


Рис. 8.

3. Спростити логічну схему

a.

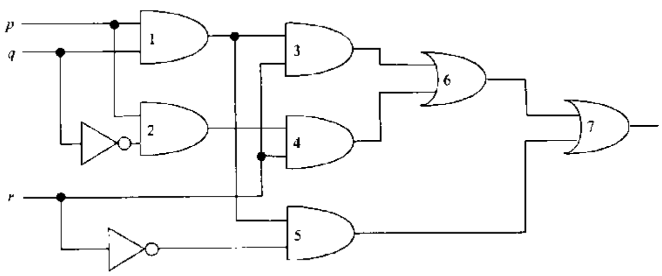
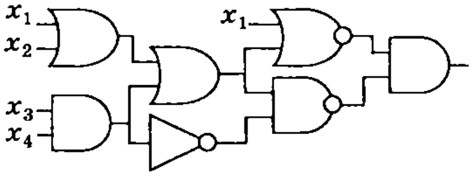


Рис. 9.

b.



c.

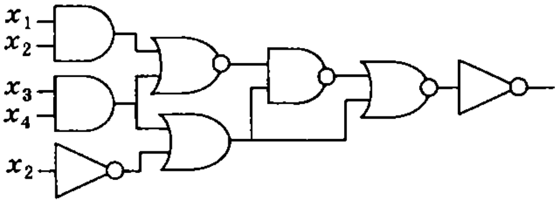


Рис. 10.

4. Спростити контактні схеми

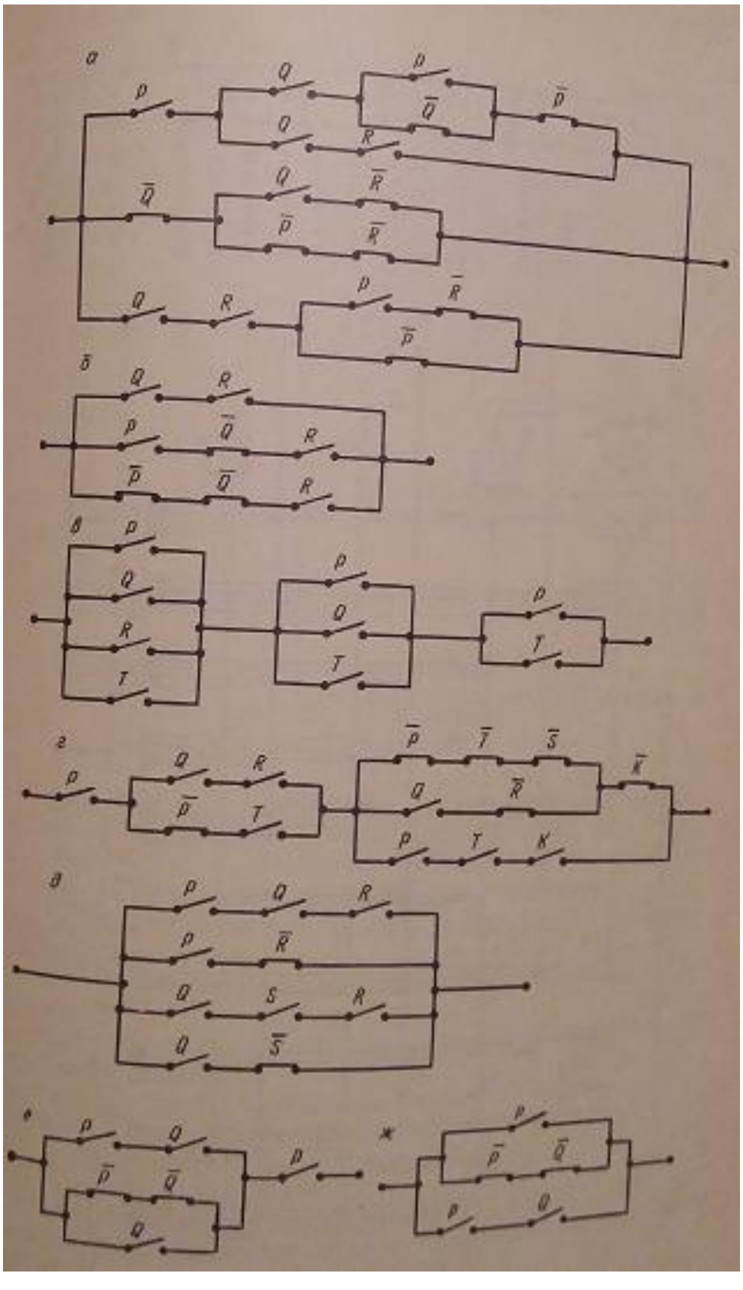


Рис. 11.

5. Побудувати логічну схему для
   a. обчислення норми Хеммінга 3-вимірного вектора;
   b. реалізації булевої функції, двоїстої до функції $f(x, y, z) = (\bar{x} \mid \bar{y}) \oplus (\bar{z} \Rightarrow \bar{y})$;
   c. обчислення скалярного добутку двовимірних булевих векторів;
6. Побудувати логічну схему для
   a. обчислення максимуму із двох чисел, кожне з яких лежить у межах від 0 до 3;
   b. обчислення добутку двобітових чисел;
   c. обчислення суми трьох бітових змінних.
7. У великій кімнаті світло має включатися або виключатися за допомогою одного з трьох вимикачів. Побудувати відповідну контактну схему.
8. Комітет складається із п'яти учасників. Рішення виноситься більшістю голосів. Якщо голова комітету голосує проти, то рішення не приймається. Побудувати контактну схему так, щоб при голосуванні кожний натискав би на кнопку і у випадку прийняття рішення загоралася би сигнальна лампа.
9. Комітет складається із чотирьох членів. Рішення приймається більшістю голосів. У випадку рівності голосів рішення не приймається. Побудувати контактну схему для забезпечення процесу голосування.
10. Кандидат відповідає на три питання. Побудувати контактну схему із двома виходами для виводу кількості неправильних відповідей.

6. АЛГЕБРАЇЧНІ СИСТЕМИ

6.1. Алгебри типу (2)

1. Навести приклад визначеної на множині $\mathbb{Z}$ операції, яка є комутативною та не є асоціативною.
2. Розглянемо алгебру $\langle A;\circ\rangle$, де $A\subset\mathbb{R}$ і бінарна операція $\circ$ визначається наступним чином:
   a) $a\circ b=\max\{a,b\}$;
   b) $a\circ b=\min\{a,b\}$.

   Довести, що алгебра $\langle A;\circ\rangle$ є комутативною півгрупою. Вказати, для яких множин алгебра $\langle A;\circ\rangle$ буде моноїдом. Довести, що операція звичайного додавання дистрибутивна відносно операції $\circ$.
3. Встановити, до яких алгебраїчних структур належить алгебра $\langle\mathbb{Q};\circ\rangle$, якщо
   a) $x\circ y=x+y+xy$;
   b) $x\circ y=x\cdot t\cdot y,\ (t\in\mathbb{Q})$.
4. Побудувати таблицю Келлі алгебри $\langle A;\cdot\rangle$ усіх функцій вигляду
   a) $f:\{1,2\}\to\{1,2\}$;
   b) $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$

за умови, що $(f\cdot g)(x)=f(g(x))$. Перевірити, чи є отримана алгебра моноїдом. Якщо так, то вказати порядки усіх елементів та усі оборотні елементи алгебри $\langle A;\cdot\rangle$.

5. Довизначити таблицю Келлі групи

a.

$\circ$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d			
c	c	b			
d	d	e			

b.

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b			
c	c			

6. Побудувати таблицю Келі для групи G, якщо

   a) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

   b) $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

7. Нехай C_n — циклічна група n-го порядку. Вказати елемент найбільшого порядку в групі

   a) $C_{12} \times C_8$.

   b) $S_3 \times C_{21}$.

8. Перевірити, чи є підмножина H групи G її підгрупою. Якщо так, то вказати групу, ізоморфну до H.

   a) $G = \langle \mathbb{R};+ \rangle,\ H = \left\{ 2^n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$;

   b) $G = \langle \mathbb{R}^*;\cdot \rangle,\ H = \left\{ 3^n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$.

   c) $G = \langle \mathbb{R};+ \rangle,\ H = \left\{ \log_2 5^n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$;

   d) $G = \langle \mathbb{R}^*;\cdot \rangle,\ H = \left\{ \log_2 5^n \middle| n \in \mathbb{Z} \right\}$.

9. Перевірити, чи групами відносно операції множення наступні підмножини

   a) множина усіх коренів n-го степеня з 1.

10. Довести, що є групою

   a) алгебра афінних функцій однієї змінної $\langle L;* \rangle$, де $L = \{ax + b \mid a, b \in \mathrm{R},\ a \neq 0\}$ — множина лінійних функцій, * — операція лінійної заміни змінних: $(ax+b)*(cx+d) = (ac)x + (ad+b)$;

   b) алгебра функцій вигляду $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, \left(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0\right)$ відносно операції множення (композиції) функцій.

11. Обчислити $\rho = \pi^{-1} \cdot \sigma$ та записати ρ у вигляді добутку незалежних циклів. Знайти парність та порядок перестановок π, ρ та σ, якщо

   a) $\pi = (135)(26),\ \sigma = \begin{pmatrix} 123456 \\ 314265 \end{pmatrix}$.

b) $\sigma=\begin{pmatrix}123456\\214563\end{pmatrix}$, $\pi^{-1}=(135)(26)$.

12. Записати перестановку π у вигляді добутку транспозицій (циклів довжини два) та вказати її парність, якщо

a) $\pi=\begin{pmatrix}1234567\\3541623\end{pmatrix}$;

b) $\pi=\begin{pmatrix}123456789\\819267345\end{pmatrix}$.

13. Записати перестановку π у вигляді добутку перестановок вигляду $(1,k)$, якщо

a) $\pi=\begin{pmatrix}123456\\254361\end{pmatrix}$;

b) $\pi=\begin{pmatrix}12345678\\51867234\end{pmatrix}$.

14. Вказати вигляд та підрахувати кількість елементів найбільшого можливого порядку у групі

a) S_{10};

b) S_{12}.

15. Навести приклад неізоморфних груп

a) порядку 4.

b) порядку 6.

16. Перевірити, чи будуть підгрупами повної лінійної групи $\mathrm{GL}_2(\mathrm{R})$ підмножини

a) невироджених діагональних матриць;

b) невироджених матриць вигляду $\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$;

c) верхніх трикутних матриць;

d) нижніх трикутних матриць.

17. Довести, що множина $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Z})$ є підгрупою групи $\mathrm{SL}_2(\mathrm{R})$. Знайти порядки елементів $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ та $A\cdot B$.

6.2. Кільця

1. Перевірити, чи є кільцем множина многочленів:
   a) із парними коефіцієнтами;
   b) із непарними коефіцієнтами;
   c) які містять лише парні степені невідомої;
   d) які містять лише степені невідомої, кратні 3;
   e) які не містять першу степінь невідомої;
   f) які не містять другу степінь невідомої.
2. Перевірити, чи є кільцем множина матриць R, якщо

   a) $R=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{R}$;

   b) $R=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix},\ a,b,c\in\mathbb{Z}$.

Якщо так, то вказати властивості кільця R.

3. Довизначити операції у кільці з одиницею 1 та вказати його властивості.

a)

+	0	1	*a*	*b*	*c*	*d*
0	0	1	*a*	*b*	*c*	*d*
1	1	*b*	0	*d*	*a*	4
a	*a*	0				
b	*b*	*d*				
c	*c*	*a*				
d	*d*	*c*				

b)

+	0	*a*	*b*	1	*d*	*e*
0	0	*a*	*b*	1	*d*	*e*
a	*a*	0	1	*b*	*e*	*d*
b	*b*	1				
1	1	*b*				
d	*d*	*e*				
e	*e*	*d*				

4. Знайти усі оборотні елементи та усі дільники нуля кілець
   a) $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_4$;
   b) $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6$.
5. Вказати підкільце кільця цілих чисел, твірними елементами якого є
   a) $\{15,21\}$.
   b) $\{12,24,44\}$.
6. Знайти НСД та НСК многочленів над полями $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{Z}_5$

a) $x^4+x^3-3x^2-4x-1$ та x^3+x^2-x-1;

b) x^5+x^4+1 та x^4+x^2+1.

7. Обчислити НСД многочленів $P(x)=x^5+3x^4+x^3+4x^2-3x-1$ та $Q(x)=x^2+x+1$

   a) у кільці $\mathbb{Z}[X]$;

   b) кільці $\mathbb{Z}_7[X]$.

8. Розкласти многочлен у вигляді добутку незвідних многочленів у кільці $\mathbb{Q}[X]$

   a) $x^3-6x^2+11x-6$;

   b) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$.

9. Знайти усі раціональні корені многочленів

   a) $x^3-6x^2+15x-14$;

   b) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$.

10. Кільце R називається булевим, якщо для довільного $a\in R$ $a^2=a$. Навести приклад булевого кільця та довести, що усі булеві кільці є комутативними.

11. Ненульовий елемент a називається нільпотентним елементом кільця з одиницею R, якщо a^n для деякого натурального n. Довести, що тоді елемент $1-a$ є оборотним. Вказати, для яких m кільце $\mathbb{Z}_m$ містить нільпотентні елементи.

6.3. Поля

1. Довести, що

   а) у полі нема дільників нуля;

   б) скінченне поле має додатну характеристику.

2. Для яких $n\in\{2,3,4,\ldots,10\}$ існує поле із n елементів.

3. Розв’язати систему рівнянь

$$x+2z=1,\ y+2z=2,\ 2x+z=1:$$

   а) у полі $\mathbb{Z}_3$.

   б) у полі $\mathbb{Z}_5$.

4. У полі $\mathbb{Z}_{11}$ розв’язати рівняння:

   а) $x^2+3x+7=0$;

   б) $x^2+5x+1=0$.

5. Побудувати поле

   а) GF(9);

   б) GF(16).

6. Перевірити, чи буде будуть полями кільця матриць вигляду:

   а) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{R}$;

   б) $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{Q}$.

   Якщо так, то вказати ізоморфні їм поля.

7. Перевірити, чи можна розширити поле $\mathbb{Z}_5$ за допомогою многочлена $x^3 + x + 1$.

   Якщо так, то знайти елемент поля $\mathrm{GF}(125)$, обернений до елемента $3x + 2$.

8. Вказати загальний вигляд елементів поля, яке отримується із поля раціональних чисел приєднанням елементів $\sqrt{2}$ та $\sqrt{3}$.

6.4. Елементи теорії чисел

1. Розв'язати рівняння у кільці $\mathbb{Z}_{33}$:

   а) $12x = 5$;

   б) $18x = 12$;

   в) $25x = 16$.

2. Розв'язати рівняння

   а) $12x = 20$ у кільці $\mathbb{Z}_{68}$.

   б) $35x = 20$ у кільці $\mathbb{Z}_{75}$.

3. Знайти розв'язок системи

   а) $\begin{cases} x = 3\left(\operatorname{mod} \varphi(12)\right), \\ x = 1 \ (\operatorname{mod} 11), \\ x = 2 \ (\operatorname{mod} 15). \end{cases}$

   б) $\begin{cases} x = 7\left(\operatorname{mod} \varphi(40)\right), \\ x = 2 \ (\operatorname{mod} 11), \\ x = 3 \ (\operatorname{mod} 35). \end{cases}$

4. Знайти розв'язок системи

а) $\begin{cases} x = 3\left(\mathrm{mod}\,\varphi(12)\right), \\ x = 1\ (\mathrm{mod}\,11), \\ x = 2\ (\mathrm{mod}\,15). \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 7\left(\mathrm{mod}\,\varphi(40)\right), \\ x = 2\ (\mathrm{mod}\,11), \\ x = 3\ (\mathrm{mod}\,35). \end{cases}$

5. Знайти загальний розв’язок рівняння

   а) $47x - 111y = 89$;

   б) $12x + 15y = 44$.

6. Обчислити

   а) $\varphi(120)$;

   б) $\varphi(500)$.

7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

1. Зобразити діаграму графа, який заданий за допомогою:

   а) матриці інцидентності

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   б) матриці сусідства

$$A=\begin{pmatrix} \beta & 2\beta+\alpha & \beta+\alpha & 0 & 0 & \beta \\ \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 & 3\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta & \beta & \beta & 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & 3\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha & 2\beta \end{pmatrix}$$

2. Діаграма графа G наведена на рис. 12, G' — відповідний йому неорієнтований граф. Позначити вершини та ребра та виконати наступні завдання:

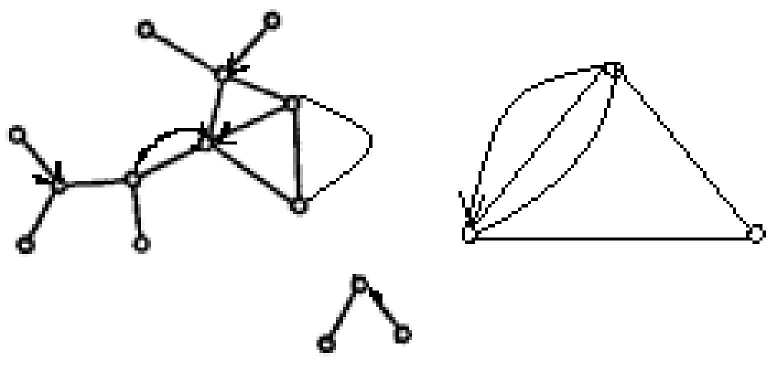


Рис. 12.

   а) Вказати матриці інцидентності та суміжності.

   б) Знайти степені усіх вершин.

в) Вказати компоненти слабкої та сильної зв'язності та визначити цикломатичне число графа G'.

г) Знайти діаметр, радіус та центр графа, який відповідає компоненті зв'язності графа G' з найбільшою кількістю вершин та виконати його обхід з використанням пошуку у глибину та ширину.

д) вказати компоненти графа G', які є ейлеревими та гамільтоновими.

3. Чи існує ейлерів шлях у графах, зображених на рис. 13.

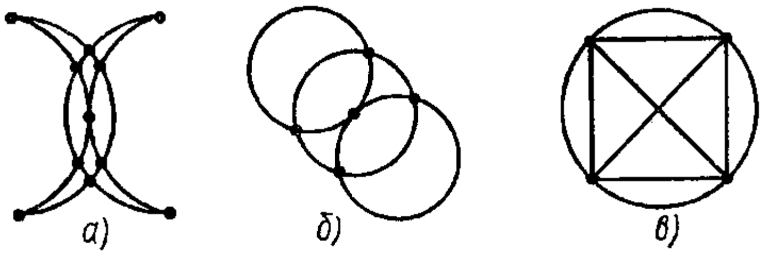


Рис. 13.

Якщо так, то вказати його.

4. Для впорядкованого дерева, діаграма якого зображена на рис. 14, виконати наступні завдання

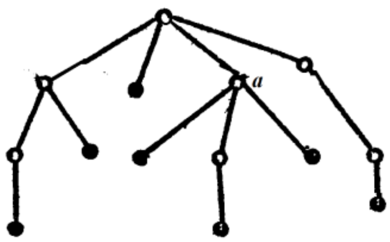


Рис. 14

а) Вказати код Прюфера.

б) Знайти центр дерева.

в) Провести обхід вершин, починаючи із вершини *a*.

г) Зобразити кореневе дерево з коренем у вершині *a*.

д) Зобразити впорядковане дерево за допомогою бінарного дерева.

5. Зобразити дерево із коренем 5, яке має наступний код Прюфера: 4, 1, 2, 1, 1, 9, 1, 3, 4.
6. Записати у префіксній та постфіксній формі наступний вираз

$$\left((a+1)(b+c)-2\right)*(3-b)/(b-a*c)+4.$$

7. Обчислити значення виразу 1, 3, 2, ^, 6, −, +, 2, 3, ^, 5, −, *, 3, 4, *, − та записати його у звичайному (інфіксному) вигляді.
8. Записати усі неізоморфні графи 4-го порядку, які є лісом.
9. Вказати усі неізоморфні звичайні графи, у яких:
   a. Одна вершина має степінь 2, дві — 3, дві — 4.
   b. Три вершини мають степінь 2, дві — 3, одна — 4.
10. Довести, що серед довільних 6 людей є 3 попарно знайомі або три 3 попарно незнайомі.
11. Серед пар графів, зображених на рис. 15, вказати пари ізоморфних.

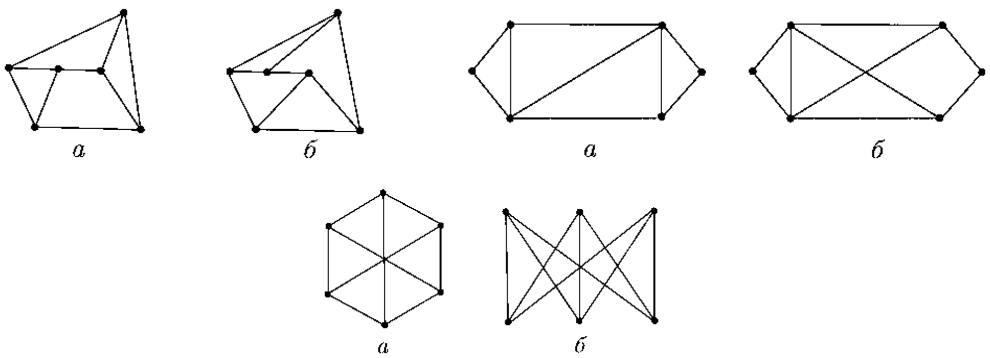


Рис. 15.

12. Для графа, зображеного на рис. 16, знайти цикли з а) 4 ребер; б) 5 ребер; в) 11 ребер;

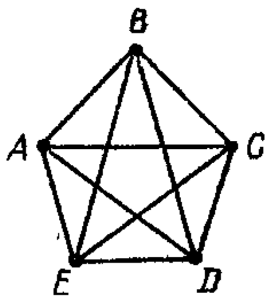


Рис. 16.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М. Основи дискретної математики. — К.: Наукова думка, 2002. — 580 с.
2. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. — Харків: "Компанія Сміт", 2004. — 480 с.
3. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика. — К.: Вища школа, 2002. — 287 с.
4. Андрійчук В. І., Комарницький М. Я., Іщук Ю. Б. Вступ до дискретної математики. — К.: Центр навчальної літератури, 2004. — 254 с.
5. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. — К.: Видавнича група BHV, 2007. — 368 с.
6. Ядренко М. Й., Оленко А. Я. Дискретна математика. навчально-методичний посібник. — К.: Київський університет ім. Т. Шевченка, 1995. — 83 с.
7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. — 480 с.
8. Новиков Ф. А. Дискретная математика: Учебник для вузов. 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 432 с.
9. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — 5-е изд., исправл. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
10. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
11. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика. — СПб.: Вильямс, 2003. — 958 с.
12. Латонин Л. А., Макаренков Ю. А., Николаева В. В., Столяр А. А. Математическая логика: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 269 с.
13. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
14. Вітенько І. В. Математична логіка: Курс лекцій. — Ужгород: УжДУ, 1971. — 224 с.
15. Цейтлін Г. Є. Елементи теорії булевих функцій. — К: Техніка, 1973. — 76 с.

16. Яблонский С. В., Лупанов О. Б. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
17. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В. А. Садовничего. — 4-е изд., стер. — М.: Высшая школа; 2003. — 384 с.
18. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина I: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп’ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення". — Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. — 52 с.
19. Коцовський В. М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина II: Конспект лекцій для студентів спеціальностей: 6.122 — "Комп’ютерні науки", 6.121 — "Інженерія програмного забезпечення". — Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2017. — 66 с.