Міністерство освіти і науки України

Державний вищий навчальний заклад
„Ужгородський національний університет“

Олександр Кирилюк, Ігор Шапочка

ВИЩА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Ужгород
Видавництво УжНУ „Говерла“
2013

УДК 512.6
ББК 22.14
К 431

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор *В. В. Маринець*;

кандидат фізико-математичних наук, доцент *В. М. Петечук*

Кирилюк О. А., Шапочка І. В. Вища алгебра. Навчальний посібник. – Ужгород: Вид-во ДВНЗ „Ужгород. нац. ун-т“ „Говерла“, 2013 – 141 с.

У навчальному посібнику розглядаються і вивчаються найпростіші властивості таких понять як матриця, детермінант, система лінійних рівнянь, лінійний простір, ранг матриці, лінійний оператор, власний вектор та власне значення, евклідовий та унітарний простори, ортогональний та симетричний оператори, білінійна та квадратична форми, група й підгрупа. Посібник містить також завдання для самостійної роботи студентів.

Для студентів вищих навчальних закладів напряму підготовки 6.040203 „фізика“ і 6.040204 „прикладна фізика“.

Зміст

Передмова 4

§1. Матриці. Операції над матрицями 5

§2. Детермінанти n-го порядку. Властивості детермінантів 14

§3. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. Детермінант добутку матриць. Обернена матриця 22

§4. Системи лінійних рівнянь. Метод Ґаусса розв'язування систем лінійних рівнянь 28

§5. Правило Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь 38

§6. Лінійні простори. Лінійна залежність елементів лінійного простору. Розмірність і базис скінченновимірного лінійного простору 42

§7. Координати елемента скінченновимірного лінійного простору. Зв'язок між базисами. Ізоморфізм лінійних просторів 52

§8. Ранг матриці. Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі 61

§9. Лінійні оператори лінійного простору. Ядро і образ лінійного оператора. Матриця лінійного оператора. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах . . . 72

§10. Невироджені лінійні оператори. Дії над лінійними операторами 82

§11. Власні вектори і власні значення лінійного оператора 89

§12. Евклідові та унітарні простори 98

§13. Лінійні оператори евклідових та унітарних просторів 109

§14. Білійні та квадратичні форми. Канонічний і нормальний вигляди квадратичних форм. Додатно визначені квадратичні форми 120

§15. Групи. Підгрупи 133

Література 140

Передмова

Навчальними програмами напрямів підготовки 6.040203 „фізика“ і 6.040204 „прикладна фізика“ передбачено вивчення студентами першого курсу навчальної дисципліни „Аналітична геометрія і вища алгебра“. Цей навчальний посібник написаний для того, щоб допомогти студентам фізичного факультету опанувати ту частину програмного матеріалу згадуваної дисципліни, що читається у другому семестрі. Даний курс охоплює наступні теми: матриці та дії над ними, детермінанти, системи лінійних рівнянь, лінійні простори, ранг матриці, лінійні оператори, власні вектори та власні значення, евклідові та унітарні простори, ортогональні та симетричні оператори, білінійні та квадратичні форми, групи й підгрупи. Всі згадувані вище поняття у тій чи іншій мірі зустрічаються у будь-якому розділі математики та фізики.

Кожен параграф посібника складається із трьох частин. Перша частина має довідковий характер, тут даються означення і формулюються основні твердження. Доведення тверджень читач зможе знайти у навчальних посібниках з алгебри (див. [1–8]), які включені у список рекомендованої літератури. У другій частині параграфу наводяться зразки розв'язування прикладів і задач з найбільш важливих питань програми курсу "Вища алгебра". Третя частина параграфу складається з вправ, самостійне розв'язання яких дасть можливість читачу глибше зрозуміти теоретичний матеріал першої частини і виробити певні навики оперування вище згаданими поняттями алгебри. Джерелом при складанні авторами цих вправ послужив цілий ряд прекрасних збірників задач, які були видані, як ще в Радянському Союзі так і в сучасних Російській Федерації та Україні (див. [9–15]).

Вважаємо, що систематичне опрацювання студентом кожного із параграфів практикуму сприятиме у вивченні курсу "Вища алгебра", а також допоможе підготуватися до складання заліку і екзамену з цього предмету.

Автори висловлюють щиру вдячність колективу кафедри алгебри Ужгородського університету за слушні зауваження та цінні поради, врахування яких сприяло поліпшенню якості цього посібника.

Автори

§1. Матриці. Операції над матрицями

Головним об'єктом вивчення цього параграфу є матриці, елементами яких є числа з деякої, наперед обумовленої, множини чисел (наприклад множини $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел або множини $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел, або множини $\mathbb{C}$ всіх комплексних чисел). Вибір множини чисел залежить від задачі, що розв'язується, та галузі науки, в контексті якої розглядається поставлена задача. Зокрема, в геометрії і механіці звичайно необхідно розглядати множину дійсних чисел, а в теорії чисел — множину раціональних чисел. Тому, для того щоб уможливити застосування результатів цього параграфу до більш широкого класу задач, варто не фіксувати вибір конкретної множини чисел. За домовленістю, надалі множини всіх раціональних, дійсних та комплексних чисел будемо відповідно називати полями раціональних, дійсних, та комплексних чисел. У свою чергу фраза "нехай F є полем" означатиме, що нехай $F = \mathbb{Q}$ або $F = \mathbb{R}$ або $F = \mathbb{C}$.

Отже, нехай надалі F є полем, m і n — деякі натуральні числа. Прямокутна таблиця, що складається з $m \cdot n$ чисел поля F, розташованих в m рядках та n стовпцях, називається *$m\times n$-матрицею* або просто *матрицею* над полем F. Зазвичай матриці позначаються великими латинськими літерами A, B, C і т. д.

Таким чином, матриця A з елементами a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ з поля F має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Часто замість такого розгорнутого запису матриці вживають короткий: $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ або $\|a_{ij}\|$, якщо зрозуміло з контексту, про матрицю яких розмірів йде мова. Надалі символом $F_{m\times n}$ ми будемо позначати множину всіх $m\times n$-матриць над полем F. Звертаємо увагу також на індексацію елементів матриці A, вона є подвійною. Так, a_{12} слід читати як "а-один-два а не "а-дванадцять".

Матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із $F_{m\times n}$ називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Сума матриць і добуток числа на матрицю. *Сумою матриць* $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із $F_{m\times n}$ називається така $m\times n$-матриця $C = \|c_{ij}\|$ над F, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Суму C матриць A і B позначають через $A + B$.

Теорема 1. *Для довільних матриць A, B, $C \in F_{m\times n}$ справедливі наступні рівності:*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*асоціативна властивість*);
2) $A + B = B + A$ (*комутативна властивість*).

Матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$ називається *нульовою* матрицею, якщо для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ справедлива рівність $\mathbf{0} + A = A$.

Теорема 2. *Існує єдина нульова матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$, причому, всі елементи матриці $\mathbf{0}$ є нулями.*

Матриця $-A$ називається *протилежною* до матриці A, якщо $-A + A = \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ існує єдина протилежна матриця $-A$, причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$, то $-A = \|-a_{ij}\|$.*

Із цієї теореми слідує можливість задати операцію віднімання матриць. *Різниця $A - B$ матриць A* і *B* із $F_{m\times n}$ визначається як сума $A + (-B)$.

Добутком числа $\gamma \in F$ на матрицю $A = \|a_{ij}\| \in F_{m\times n}$ називається така $m\times n$-матриця $D = \|d_{ij}\|$ над F, що

$$d_{ij} = \gamma a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Добуток D числа γ на матрицю A позначають через γA.

Теорема 4. *Для довільних чисел α, $\beta \in F$ та матриць A, $B \in F_{m\times n}$ справедливі наступні рівності:*

1) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
3) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
4) $1 \cdot A = A$.

Добуток матриць. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна $m\times n$-матриця, $B = \|b_{ij}\|$ — довільна $n\times r$-матриця ($m,\ n,\ r \in \mathbb{N},\ a_{ij}, b_{ij} \in F$). *Добутком матриці A на матрицю B* називається така $m\times r$-матриця $C = \|c_{ij}\|$, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Добуток C матриці A на матрицю B позначають через AB.

Зуваження 1. *Звертаємо увагу читача, що добуток матриці A на матрицю B визначений лише у випадку, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Тому, навіть якщо добуток матриці A на матрицю B визначений, добуток матриці B на матрицю A може бути не визначеним.*

Теорема 5. *Для довільних матриць $A,\ A' \in F_{m\times n},\ B,\ B' \in$ $\in F_{n\times r},\ C \in F_{r\times s}$ та довільного числа $\gamma \in F$ справедливі наступні рівності:*

1) $(AB)C = A(BC)$;
2) $A(B + B') = AB + AB'$;
3) $(A + A')B = AB + A'B$;
4) $(\gamma A)B = A(\gamma B) = \gamma(AB)$.

Зуваження 2. *Якщо $n \geq 2$, то існують $n\times n$-матриці A, B над F такі, що $AB \neq BA$. Наприклад, у випадку $n = 2$ можна покласти*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратні матриці. Якщо число рядків матриці A дорівнює числу стовпців цієї матриці, то матрицю A називають *квадратною матрицею*, а число її рядків чи стовпців називають *порядком матриці*. Якщо $A = \|a_{ij}\|$ — квадратна матриця порядку n, то елементи $a_{11},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{nn}$ називають *головною діагоналлю* матриці A. Квадратна матриця A називається *діагональною матрицею*, якщо всі її елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця називається *скалярною матрицею*, якщо всі її діагональні елементи попарно рівні. Надалі замість словосполучення "квадратна матриця порядку n" будемо вживати просто термін "матриця порядку n".

Матриця E порядку n називається *одиничною матрицею*, якщо для довільної матриці $A \in F_{n\times n}$ справедливі рівності $EA = AE = A$.

Теорема 6. *Для довільного натурального числа n існує єдина одинична матриця E порядку n, причому,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транспонована матриця. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна $m\times n$-матриця над полем F вигляду (1). Матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називають *транспонованою* до матриці A і позначають її символом A^T.

Теорема 7. *Для довільних матриць A, $B \in F_{m\times n}$, $C \in F_{n\times s}$ та довільного числа $\alpha \in F$ справедливі наступні рівності:*

1) $(A^T)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
4) $(AC)^T = C^T A^T$.

Приклади розв'язування задач

1. Електроприлади A, B, C торгової марки K° мають потужність відповідно 1300 Вт, 200 Вт, 500 Вт. Аналогічні прилади A, B, C торгової марки K^* мають потужність відповідно 1200 Вт, 300 Вт, 450 Вт. Скласти порівняльну матрицю потужностей електроприладів A, B, C названих торгових марок (значення потужностей відповідних приладів записувати у стовпці). Обчислити матрицю витрат у кВт/год протягом 10 годин безперервної роботи вказаних приладів.

Розв'язання. Шукана порівняльна матриця має вигляд

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} K^\circ \\ K^* \end{array} & \begin{pmatrix} 1300 & 200 & 500 \\ 1200 & 300 & 450 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Для обчислення ж матриці витрат у кВт/год протягом 10 годин безперервної роботи вказаних приладів необхідно вищенаведену матрицю помножити на 10, а потім на 1/1000:

$$\frac{1}{1000} \cdot 10 \cdot \begin{pmatrix} 1300 & 200 & 500 \\ 1200 & 300 & 450 \end{pmatrix} = 0,01 \cdot \begin{pmatrix} 1300 & 200 & 500 \\ 1200 & 300 & 450 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,01 \cdot 1300 & 0,01 \cdot 200 & 0,01 \cdot 500 \\ 0,01 \cdot 1200 & 0,01 \cdot 300 & 0,01 \cdot 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 \\ 12 & 3 & 4,5 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти матрицю X, якщо $3A + X = B - 2C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки A, B, C — 3×2-матриці, то із означень добутку числа на матрицю та суми матриць слідує, що X є також 3×2-матрицею. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо матриці $3A + X$ і $B - 2C$:

$$3A + X = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + x_{11} & 6 + x_{12} \\ 9 + x_{21} & 12 + x_{22} \\ 15 + x_{31} & 18 + x_{32} \end{pmatrix},$$

$$B - 2C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ -1 & 7 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Із означення рівності матриць $3A + X$ і $B - 2C$ слідує, що

$$3 + x_{11} = 8, \quad 6 + x_{12} = -18, \quad 9 + x_{21} = -1,$$

$$12 + x_{22} = 7, \quad 15 + x_{31} = 12, \quad 18 + x_{32} = -5.$$

Звідси

$$x_{11} = 5,\ x_{12} = -24,\ x_{21} = -10,\ x_{22} = -5,\ x_{31} = -3,\ x_{32} = -23.$$

Отже,

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -24 \\ -10 & -5 \\ -3 & -23 \end{pmatrix}.$$

Запропонуємо, ще один метод розв'язування цієї задачі. Оскільки для довільної матриці існує протилежна, то існує матриця $-3A$. Додамо матрицю $-3A$ до лівої і правої частин рівності

$$3A + X = B - 2C.$$

Одержимо

$$-3A + 3A + X = -3A + B - 2C.$$

Звідси

$$X = -3A + B - 2C = \begin{pmatrix} 5 & -24 \\ -10 & -5 \\ -3 & -23 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити добуток матриці A на матрицю B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 & a \cdot c + b \cdot b + c \cdot a \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot c + 2 \cdot b + 1 \cdot a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a + b + c & 2ac + b^2 \\ 6 & 3c + 2b + a \end{pmatrix}.$$

4. Обчислити $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти всі матриці над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, які комутують з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Потрібно знайти всі такі матриці X, що $AX = XA$. Із означення добутку матриць випливає, що X має бути квадратною матрицею другого порядку. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді умова $AX = XA$ набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \\ x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Із означення рівності матриць та із (2) випливає, що

$$x_3 = x_2, \quad x_4 = x_1 + x_2,$$

$$x_1 + x_3 = x_4, \quad x_2 + x_4 = x_3 + x_4.$$

Звідси

$$x_3 = x_2, \quad x_4 = x_1 + x_2.$$

Надамо x_1 та x_2 довільні значення α і β із поля $\mathbb{R}$. Тоді $x_3 = \beta$, $x_4 = \alpha + \beta$.

Отже, будь-яка матриця X, що комутує з матрицею A має вигляд

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

де α і β — деякі дійсні числа. Навпаки при довільних дійсних значеннях α і β матриця вигляду (3) комутує з матрицею A.

Вправи для самостійної роботи

1. Виписати 3×2-матрицю, в якої кожен елемент, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпцю дорівнює:

а) $i+j$; б) $i-j$; в) ij; г) i^j; д) $\cos\left(\frac{\pi}{i}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{j}\right)$;

д) $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \neq j, \\ 1, & \text{якщо } i = j, \end{cases}$ де $i \in \{1,2,3\}$; $j \in \{1,2\}$.

2. Обчислити:

а) $3A+2B$; б) $2A-3B$; в) $B+2C^T$; г) $(-A+B)^T + C$,

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \\ -6 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 1 \\ 8 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити добутки матриць:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ 3 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

є) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$. ж) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; з) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$; і) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

4. Як зміниться добуток AB матриць A і B, якщо:

а) поміняти місцями i-ий та j-ий рядки матриці A;

б) до i-го рядка матриці A додати її j-ий рядок, помножений на число α;

в) поміняти місцями i-ий та j-ий стовпці матриці B;

г) до i-го стовпця матриці B додати її j-ий стовпець, помножений на число α.

5. *Слідом* квадратної матриці називається сума її елементів, що знаходяться на головній діагоналі. Довести, що слід добутку AB дорівнює сліду добутку BA.

6. Довести, що для будь-яких квадратних матриць A і B порядку n, $AB - BA \neq E$, де E — одинична матриця порядку n.

7. Нехай A і B — матриці одного й того ж порядку. Довести, що $AB = BA$ тоді і тільки тоді, коли справедлива одна із наступних рівностей:
а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

8. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Довести, що

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = \mathbf{0},$$

де E, $\mathbf{0}$ — відповідно одинична та нульова матриці другого порядку.

9. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці.

10. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці.

11. Знайти всі матриці, що комутують з матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

§2. Детермінанти n-го порядку. Властивості детермінантів

Нехай A — матриця порядку n над полем F вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де n — деяке натуральне число відмінне від 1. Далі, нехай j — номер деякого стовпця матриці A. Позначимо через A_j матрицю, одержану із матриці A шляхом викреслювання першого рядка та j-го стовпця цієї матриці, тобто матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Визначимо тепер індуктивно детермінант довільної квадратної матриці. Інакше кажучи, сформулюємо спочатку означення детермінанта 1-го порядку, за його допомогою дамо означення детермінанта 2-го порядку, далі 3-го і т.д. За нижче наведеним означенням детермінантом матриці A є число з поля F, яке обчислюється за певним правилом. Детермінант матриці A позначається через $|A|$.

Детермінантом матриці $A = \|a_{11}\|$ називається число a_{11}. Нехай n — довільне натуральне число, для якого вже визначено детермінант довільної матриці n-го порядку. *Детермінантом матриці* $A = \|a_{ij}\|$ порядку $n+1$ називається число, що дорівнює

$$a_{11}|A_1| - a_{12}|A_2| + a_{13}|A_3| - a_{14}|A_4| + \dots + (-1)^{(n+2)} a_{1\,n+1}|A_{n+1}|.$$

Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$

Розглянемо всілякі добутки по n елементів матриці $A = \|a_{ij}\|$ порядку n вигляду (1), розміщених в різних рядках і різних стовпцях цієї матриці, тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\cdots a_{ni_n}. \tag{3}$$

Індекси i_1, i_2, i_3, ..., i_n складають деяку так звану *перестановку* (розміщення) із чисел 1, 2, 3, ..., n. У цьому випадку кажуть, що i_1, i_2, i_3, ..., i_n є перестановкою з n елементів. Наприклад, числа 1, 2, 3, 4 можна розмістити наступним чином: 3, 2, 4, 1 або 2, 4, 1, 3.

Позначимо $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (читається: "ен-факторіал").

Теорема 1. *Число всіх перестановок із n елементів дорівнює* $n!$.

Кажуть, що в даній перестановці числа i та j утворюють *інверсію*, якщо $i > j$, але i стоїть раніше j. Перестановка називається *парною*, якщо її елементи утворюють парне число інверсій, і *непарною* — в протилежному випадку. Очевидно, перестановка 1, 2, ..., n є парною для довільного $n \in \mathbb{N}$ тому, що число інверсій в ній дорівнює нулю. Число всіх інверсій у перестановці i_1, i_2, i_3, ..., i_n будемо позначати через $\mathrm{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Наприклад, $\mathrm{inv}(3, 2, 4, 1) = 4$ (інверсії утворюють наступні пари: 3 і 2, 3 і 1, 2 і 1, 4 і 1).

Теорема 2. *Для довільного натурального числа n, відмінного від* 1, *число парних перестановок із n елементів дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Теорема 3. *Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна матриця порядку n над полем F. Тоді*

$$|A| = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n \in P_n} (-1)^{\mathrm{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \tag{4}$$

де сумування ведетьcя по множині P_n всіх перестановок із n елементів.

Інакше кажучи, за теоремою 3 детермінант матриці A порядку n дорівнює сумі $n!$ доданків, кожен з яких є добутком n елементів матриці A, взятих по одному з кожного рядка та кожного стовпця цієї матриці, причому доданок береться із знаком $+$, якщо відповідна йому перестановка, складена з індексів елементів, є парною, і знаком $-$ у протилежному випадку.

Теорема 4. *Детермінант матриці A дорівнює детермінанту транспонованої до неї матриці A^T.*

Із теореми 4 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справедливе і для її стовпців і навпаки. Тому наступні теореми 5–12 будуть сформульовані тільки для рядків детермінанта. Зауважимо також, що під рядком або стовпцем детермінанта ми надалі розумітимемо відповідно рядок або стовпець матриці, детермінант якої обчислюємо.

Теорема 5. *Якщо один із рядків детермінанта складається з нулів, то детермінант дорівнює нулю.*

Теорема 6. *Якщо в детермінанті поміняти місцями два рядки, то він поміняє знак на протилежний.*

Теорема 7. *Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.*

Теорема 8. *Якщо всі елементи деякого рядка детермінанта помножити на число γ, то і сам детермінант помножиться на γ.*

Теорема 9. *Детермінант, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.*

Теорема 10. *Якщо всі елементи i-го рядка детермінанта n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

то детермінант дорівнює сумі детермінантів, у яких всі рядки, крім i-го, — ті ж самі, як і в даному детермінанті, а i-ий рядок в одному із цих детермінантів складається з елементів b_j, а в іншому — із елементів c_j.

Користуючись методом математичної індукції, можна узагальнити теорему 10 на випадок, коли кожний елемент i-го рядка представляється у вигляді суми k доданків, де $k \geq 2$.

Будемо говорити, що i-ий рядок детермінанта матриці (1) є *лінійною комбінацією* рядків з номерами k_1, k_2, ..., k_s, якщо існують такі числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, що

$$a_{ij} = \gamma_1 a_{k_1 j} + \gamma_2 a_{k_2 j} + \cdots + \gamma_s a_{k_s j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 11. *Якщо один із рядків детермінанта є лінійною комбінацією деяких інших рядків, то детермінант дорівнює нулю.*

Теорема 12. *Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.*

Приклади розв'язування задач

1. Обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За означенням детермінанта:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5;$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$

2. Точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ і $C(x_3, y_3)$ є вершинами трикутника ABC. Обчислити площу трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай A', B' і C' є проекціями відповідно точок A, B і C на вісь Ox. Розглянемо випадок, коли точки A, B, C мають взаємне розташування, як на рис. 1.

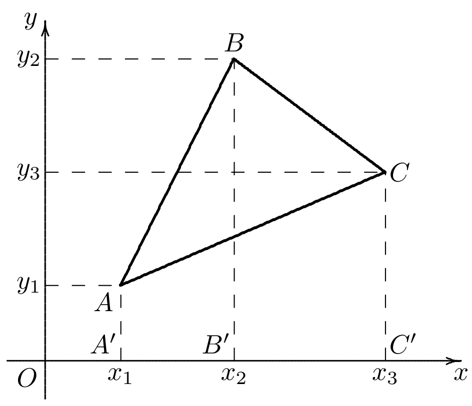

Рис. 1.

Тоді площа трикутника ABC дорівнює

$$S_{ABC} = S_{A'ABB'} + S_{B'BCC'} - S_{A'ACC'},$$

де $S_{A'ABB'}$, $S_{B'BCC'}$ і $S_{A'ACC'}$ — відповідно площі трапецій $A'ABB'$, $B'BCC'$ і $A'ACC'$. Оскільки

$$S_{A'ABB'} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1),$$

$$S_{B'BCC'} = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2),$$

$$S_{A'ACC'} = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1),$$

то

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}(y_1x_2 - y_1x_1 + y_2x_2 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_2x_2 + y_3x_3 - y_3x_2 - \\ -y_1x_3 + y_1x_1 - y_3x_3 + y_3x_1) = \tfrac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_3x_2 - y_1x_3 + y_3x_1) = \\ = \tfrac{1}{2}(y_2x_3 - y_3x_2) - \tfrac{1}{2}(y_1x_3 - y_3x_1) + \tfrac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1).$$

Суму, що стоїть у правій частині попередньої рівності можна трактувати, як детермінант

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Нескладно переконатися, що у загальному випадку площа S_{ABC}, заданого в умові задачі трикутника, дорівнює абсолютній величині детермінанта (5).

3. Підібрати натуральні значення для k та l таким чином, щоб добуток $a_{1k}a_{32}a_{4l}a_{25}a_{53}$ входив у детермінант матриці $A = \|a_{ij}\|$ п'ятого порядку з знаком плюс.

Розв'язання. Упорядкуємо множники вказаного в умові добутку в порядку зростання перших індексів: $a_{1k}a_{25}a_{32}a_{4l}a_{53}$. Для того, щоб цей добуток входив у детермінант матриці A необхідно, щоб $(k, l) = (1, 4)$ або $(k, l) = (4, 1)$. Нехай $k = 1$, а $l = 4$, тоді випишемо перестановку, складену з других індексів співмножників: $1, 5, 2, 4, 3$. Оскільки $\mathrm{inv}(1, 5, 2, 4, 3) = 4$, то ця перестановка парна, а, отже, за теоремою 3 добуток $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{54}$ входить у детермінант п'ятого порядку з знаком плюс.

У другому ж випадку перестановка $4, 5, 2, 1, 3$, складена з других індексів співмножників є непарною, а це не задовольняє умову задачі.

4. Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Розв'язання. Запропонуємо читачеві два способи обчислення даного в умові задачі детермінанта Δ.

1-й спосіб. Нехай A — матриця, детермінант Δ якої ми обчислюємо. Тоді за означенням детермінанта

$$\Delta = a_{11}|A_1| - a_{12}|A_2| + a_{13}|A_3| + \dots + (-1)^{(n+1)}a_{1n}|A_n|,$$

де A_j — матриця одержана із матриці A шляхом викреслювання першого рядка та j-го стовпця цієї матриці, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ (див. позначення (2)).

У кожної з матриць A_2, A_3, ..., A_n перший стовпець є нульовим, а отже, детермінант будь-якої з цих матриць за теоремою 5 дорівнює 0. Тому

$$\Delta = a_{11}|A_1| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Далі, аналогічним чином обчислюючи детермінант $|A_1|$, одержимо

$$|A_1| = a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тому

$$\Delta = a_{11}a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продовжуючи цей процес, на n-му кроці одержимо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}.$$

2-й спосіб. Розглянемо довільну перестановку $i_1, i_2, \dots i_n$ чисел $1, 2, \dots, n$ і відповідний їй добуток $d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, що входить у детермінант Δ (відзначимо, що $a_{ij} = 0$ при $i > j$). Якщо $i_n \neq n$, тоді $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq$ $\neq n-1$, то $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, в і цьому випадку $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі... Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки $i_1, i_2, \dots, i_n$, відмінної від перестановки $1, 2, \dots, n$, добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ дорівнює 0. Звідки за теоремою 3 слідує, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3\,n-2} & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}$.

2. Виявснити, які з наведених нижче добутків входять у детермінанти відповідних порядків і з якими знаками:

а) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; б) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

в) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{kk}$ $(1 \le k \le n)$; г) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

3. Вибрати значення i, j, k так, щоб добуток $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входив у детермінант шостого порядку з знаком мінус.

4. Як зміниться детермінант, якщо:

а) його перший стовпець поставити на останнє місце, а всі інші стовпці зсунути вліво, зберігаючи їхнє взаємне розташування;

б) його рядки записати в зворотному порядку?

5. Як зміниться детермінант, якщо:

а) до кожного його стовпця, починаючи з другого, додати попередній;

б) до кожного його рядка, починаючи з другого, додати всі попередні рядки?

6. Нехай $\Delta = |a_{jk}|$ $(a_{jk} \in \mathbb{C})$ — детермінант порядку n з елементами, що задовольняють умовам: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$ при $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$ при $j \geq k$ (i — уявна одиниця). При яких значеннях n детермінант Δ є дійсним числом?

7. Як зміниться детермінант, якщо кожний його елемент a_{jk} помножити на c^{j-k}, де $c \neq 0$?

8. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 і 289 діляться на 17. Довести, що детермінант

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ділиться на 17.

9. Чому дорівнює детермінант, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

10. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

11. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \ldots & x \\ x & a_2+x & \ldots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \ldots & a_n+x \end{vmatrix}.$$

§3. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа. Детермінант добутку матриць. Обернена матриця

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n з елементами із поля F. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1), впорядковані по зростанню, тобто

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \tag{2}$$

називається *мінором k-го порядку* розміщеним в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$ або мінором, що знаходиться на перетині вказаних рядків та стовпців. Інколи кажуть, що мінор (2) отримали з детермінанта (1) шляхом викреслювання рядків з номерами відмінними від $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпців з номерами відмінними від $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Далі, нехай M' — мінор детермінанта Δ, отриманий за допомогою викреслювання рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпців з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Мінор M' називається *доповнюючим мінором* до мінору M. Очевидно, мінор M є доповнюючим до мінору M'.

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Число $(-1)^{s_M} M'$ називається *алгебраїчним доповненням* до мінору M.

Теорема 1 (Лаплас). *Нехай в детермінанті порядку n довільно вибрані k рядків (або k стовпців), $1 \le k \le n-1$. Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів k-го порядку, що розміщені в цих рядках (стовпцях), на їх алгебраїчні доповнення.*

Наслідок 1. *Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Тобто, якщо Δ — деякий детермінант n-го порядку (див. (1)), а M_{ij} — доповнюючий мінор до елемента a_{ij} цього детермінанта, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}. \qquad (3)$$

Формула (3) називається *розкладом детермінанта Δ за елементами i-го рядка.*

Теорема 2. *Детермінант добутку довільних матриць порядку n дорівнює добутку детермінантів цих матриць.*

Інакше кажучи для будь-яких матриць A і B порядку n справедлива формула

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Матриця порядку n називається *невиродженою*, якщо її детермінант не дорівнює нулю.

Матриця B порядку n називається *оберненою* для деякої матриці A порядку n, якщо $AB = BA = E$, де E — одинична матриця порядку n. Якщо для матриці A існує обернена, то звично її позначають символом A^{-1} і при цьому кажуть, що A — *оборотна* матриця.

Теорема 3. *Матриця порядку n є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона є невиродженою. Причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$ — оборотна матриця порядку n, то існує лише одна обернена до неї матриця, що дорівнює матриці*

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A.

Теорема 4. *Для довільних оборотних матриць A і B порядку n справедливі наступні рівності:* 1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$; 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Приклади розв'язування задач

1. Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант по третьому стовпцю. Оскільки два елементи цього стовпця дорівнюють нулю, матимемо

$$\Delta = (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюючи вказані вище детермінанти третього порядку, отримаємо

$$\Delta = 2\cdot 49 + 7\cdot 10 = 168.$$

2. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках. Всі інші мінори другого порядку в цих рядках дорівнюють нулю, оскільки містять нульовий стовпець.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3}} M_3' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} M_k \cdot (-1)^{s_{M_k}} M_k' = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

3. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку детермінант матриці A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким чином матриця A є невиродженою і за теоремою 3 існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A, що знаходяться на перетині i-го рядка та j-го стовпця $(i, j = 1, 2, 3)$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді шукана обернена матриця для матриці A дорівнює

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійної роботи

Обчислити детермінанти:

1. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **11.** $\begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \sin\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$. **23.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Знайти обернені матриці до наступних матриць:

24. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **25.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

29. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

§4. Системи лінійних рівнянь. Метод Ґаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай F — деяке поле. Під *системою лінійних рівнянь* з n *невідомими* x_1, x_2, …, x_n над полем F будемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа, a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ — деякі числа з поля F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається *коефіцієнтом*, число b_i називається *вільним членом* i-го рівняння. Звертаємо увагу на позначення коефіцієнтів системи з подвійною індексацією.

Якщо всі вільні члени системи (1) дорівнюють нулю, то така система називається *системою лінійних однорідних рівнянь*.

Коефіцієнти при невідомих складають матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

яку називають *матрицею системи лінійних рівнянь* (1).

$s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A, а останній складається із вільних членів системи (1) називається *розширеною матрицею системи лінійних рівнянь* (1).

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел γ_1, γ_2, …, γ_n з поля F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідно числами γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь (1) ми будемо називати систему n виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів довільні значення із поля F, ми отримаємо множину всіх розв'язків системи (1).

Система лінійних рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку і *сумісною* в протилежному випадку, тобто якщо вона має хоча б один розв'язок. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Нехай нам дано крім системи (1) ще одну систему t лінійних рівнянь з n невідомими

$$\left\{\begin{array}{c} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b'_t. \end{array}\right. \tag{3}$$

Системи лінійних рівнянь (1) і (3) називаються *еквівалентними*, якщо вони або обидві несумісні, або сумісні і множини їх розв'язків співпадають. Еквівалентність двох систем (1) і (3) будемо позначати символом (1) $\sim$ (3).

Очевидно, що визначена вище еквівалентність систем задовольняє наступним властивостям. Довільна система еквівалентна сама собі. Якщо система (1) еквівалентна системі (3), то система (3) еквівалентна системі (1). Далі, якщо система (1) еквівалентна системі (3), а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі $(*)$, то система (1) еквівалентна системі $(*)$.

Нехай число t рівнянь системи (3) дорівнює числу s рівнянь системи (1). Будемо говорити, що система (3) одержана із системи (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рівняння, крім i-го та j-го, залишились попередніми, а i-ве та j-ве рівняння помінялися місцями. Якщо ж в системі рівнянь (3) всі рівняння, крім i-го, ті ж самі, що і в (1), а i-ве рівняння системи (3) має вигляд

$$ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i,$$

де c — деяке число з поля F, то будемо говорити, що система рівнянь (3) одержана із системи (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (II). Нарешті, якщо в системі рівнянь (3) всі рівняння, крім i-го, ті ж самі, що і в (1), а i-ве рівняння системи рівнянь (3) має вигляд

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

де $k \neq i$, c — деяке число з поля F, то будемо говорити, що система (3) отримана із системи (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (III).

Теорема 1. *Якщо одну із двох даних систем лінійних рівнянь можна одержати з другої шляхом послідовного виконання скінченного числа елементарних перетворень типу* (I)*, або типу* (II)*, або типу* (III)*, то ці системи лінійних рівнянь еквівалентні.*

Розглянемо тепер системи лінійних рівнянь специфічного вигляду. Надалі домовимося, що у випадку, коли перші k коефіцієнтів деякого i-го рівняння системи (1) дорівнюють нулю, де $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, а $a_{ik+1} \neq 0$, то це рівняння писатимемо у вигляді

$$a_{ik+1}x_{k+1} + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Якщо ж всі коефіцієнти при невідомих i-го рівняння дорівнюють нулю, то писатимемо це рівняння у вигляді

$$0 = b_i.$$

Очевидно, якщо система лінійних рівнянь містить рівняння вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, то ця система лінійних рівнянь є несумісною.

Нарешті, якщо система лінійних рівнянь місить рівняння вигляду $0 = 0$, то домовимось його не писати. Це не впливає на множину розв'язків цієї системи лінійних рівнянь, оскільки будь-який впорядкований набір чисел із поля F є розв'язком рівняння вигляду $0 = 0$.

Система лінійних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вигляду

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + \cdots + a_{1k_2}x_{k_2} + \cdots + a_{1k_r}x_{k_r} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{2k_2}x_{k_2} + \cdots + a_{2k_r}x_{k_r} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{rk_r}x_{k_r} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_s, \end{cases} \tag{4}$$

де $r \leq n$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$, $a_{jk_j} \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, називається *системою лінійних рівнянь східчастого вигляду.*

Теорема 2 (Ґаусс)**.** *Для будь-якої системи лінійних рівнянь з коефіцієнтами з поля F існує скінченна послідовність елементарних перетворень, за допомогою яких можна одержати систему лінійних рівнянь східчастого вигляду.*

Наслідок 1. *Система лінійних рівнянь є сумісною тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, яка не містить рівнянь вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$.*

Наслідок 2. *Система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, яка не містить рівнянь вигляду $0 = b$, де $b \neq 0$, і у якої число рівнянь дорівнює числу невідомих.*

Приклади розв'язування задач

1. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо такі елементарні перетворення системи рівнянь (5), щоб у новій системі лінійних рівнянь було б тільки одне рівняння, яке мало б ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи рівнянь (5) додати її перше рівняння, помножене на -1. Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{6}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи рівнянь (6) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільки одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (6)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{7}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (7) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} - 3x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{8}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи рівнянь (8) додамо її третє рівняння, помножене на -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = \quad 1, \\ \qquad\quad x_2 - \ x_3 + \ x_4 = -3, \\ \qquad\qquad - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \quad 0. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, система лінійних рівнянь (9) еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = \quad 1, \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + \ x_4 = -3, \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = \quad 6. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки система лінійних рівнянь (10) має східчастий вигляд, то із наслідку 2 випливає, що система рівнянь (5) — невизначена.

З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2x_4$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (10), визначимо з нього x_2

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - x_4 + 6 + 2x_4 = 3 + x_4.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 в перше рівняння, визначимо x_1

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3x_4 - 9 - 3x_4 = -8.$$

Отже,

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 3 + x_4, \quad x_3 = 6 + 2x_4,$$

а тому система чисел

$$-8, \quad 3 + c, \quad 6 + 2c, \quad c,$$

де c — довільне дійсне число, є загальним розв'язком даної в умові системи лінійних рівнянь.

Зауваження. На прикладі розв'язання попереднього завдання можна пересвідчитися, що при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь методом Гаусса всі елементарні перетворення систем доцільно проводити над відповідними їм розширеними матрицями. І якщо A і B — матриці еквівалентних систем лінійних рівнянь, то писатимемо $A \sim B$. Проілюструємо це в наступному прикладі.

2. Розв'язати методом Ґаусса систему лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи лінійних рівнянь (11), в якій для зручності стовпець вільних членів відокремимо вертикальною рискою

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Звернемо увагу читача, що коефіцієнти даної в умові системи лінійних рівнянь є цілими раціональними числами. У цьому випадку можна показати, що існує така послідовність елементарних перетворень систем лінійних рівнянь, за допомогою яких одержимо систему лінійних рівнянь східчастого вигляду, і при цьому коефіцієнти кожної з одержаних систем лінійних рівнянь у результаті цих перетворень є цілими раціональними числами.

Тому, щоб уникнути незручних обчислень з нецілими дробовими коефіцієнтами, виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий, помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Далі, послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Додамо до третього рядка матриці C четвертий, помножений на -3, а потім поміняємо місцями другий та третій рядки. Будемо мати, що

$$C \sim D = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Далі, послідовно додавши до третього та четвертого рядків матриці D її другий рядок, помножений відповідно на -7 і -5, одержимо

$$D \sim F = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array}\right).$$

Нарешті, до третього рядка матриці D додамо четвертий, помножений на -1, а після цього до четвертого рядка додамо третій, помножений на -30. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -568 \end{array}\right).$$

Матриця G є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ \qquad x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ \qquad\qquad - 10x_4 = 21, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -568, \end{cases}$$

в якій ліва частина останнього рівняння дорівнює нулю, а права частина відмінна від нуля. Така система лінійних рівнянь немає розв'язків, тобто є несумісною. Отже, дана в умові система рівнянь є несумісною.

3. Знайти силу струму на кожній з дільниць BK, KC та KL схеми зображеної на рис. 2. Внутрішніми опорами елементів знехтувати.

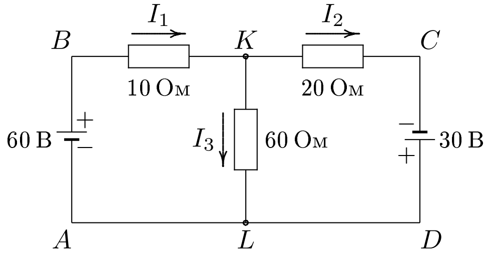

Рис. 2.

Розв'язання. Маємо розгалужене коло, в якому є два вузли в точках K і L та три контури $ABCD$, $ABKL$ і $LKCD$. Отже, можемо скласти одне рівняння за першим законом Кірхгофа і три рівняння за другим законом Кірхгофа:

для вузла K: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$;

для контуру $ABCD$: $10I_1 + 20I_2 = 90$;

для контуру $ABKL$: $10I_1 + 60I_3 = 60$;

для контуру $LKCD$: $20I_2 - 60I_3 = 30$.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0, \\ 10I_1 + 20I_2 = 90, \\ 10I_1 + 60I_3 = 60, \\ 20I_2 - 60I_3 = 30. \end{cases}$$

методом Ґаусса. Випишемо розширену матрицю цієї системи лінійних рівнянь

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 90 \\ 10 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 20 & -60 & 30 \end{array}\right).$$

Додамо послідовно до другого, а потім до третього рядків матриці A перший, помножений на -10. Одержимо матрицю

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 90 \\ 0 & 10 & 70 & 60 \\ 0 & 20 & -60 & 30 \end{array}\right).$$

Поміняємо місцями другий та третій рядки матриці B, а потім в одержаній матриці послідовно до третього та четвертого рядків додамо другий, відповідно помножений на -3 і -2. У результаті цих перетворень одержимо матрицю

$$C = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 70 & 60 \\ 0 & 0 & -200 & -90 \\ 0 & 0 & -200 & -90 \end{array}\right).$$

Нарешті, додамо до четвертого рядка матриці C третій, помножений на -1, а далі помножимо другий рядок $\frac{1}{10}$, а третій — на $-\frac{1}{200}$. Одержимо матрицю

$$D = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звертаємо увагу читача, що матриця D є розширеною матрицею системи лінійних рівнянь східчастого вигляду, яка за наслідком 2 теореми 2 є визначеною системою лінійних рівнянь. Виконаємо додатково наступні елементарні перетворення матриці D: додамо до другого рядка цієї матриці третій, помножений на -7, а потім до першого рядка додамо послідовно "новий" другий та третій рядки матриці. У результаті цих перетворень одержимо матрицю

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3,3 \\ 0 & 1 & 0 & 2,85 \\ 0 & 0 & 1 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином $I_1 = 3,3\,\text{А}$; $I_2 = 2,85\,\text{А}$; $I_3 = 0,45\,\text{А}$.

Вправи для самостійної роботи

Розв'язати системи лінійних рівнянь:

1. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2=0, \\ x_1+3x_2+x_3-5=0, \\ x_1+x_2+5x_3+7=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3-14=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+1=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-1=0, \\ x_1+x_2+x_3-3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-1=0. \end{cases}$

Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

11. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3-10x_4=11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2. \end{cases}$

§5. Правило Крамера розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай F є деяким полем. Розглянемо довільну систему лінійних рівнянь з коефіцієнтами з поля F, в якій число рівнянь n дорівнює числу невідомих, тобто систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Детермінант матриці цієї системи рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

будемо називати *детермінантом системи лінійних рівнянь* (1).

Далі, для довільного $j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ розглянемо детермінант порядку n вигляду

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

який одержують із детермінанта Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи рівнянь (1).

Теорема 1. *Нехай $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_n$ — розв'язок системи лінійних рівнянь вигляду* (1)*. Тоді $\Delta\gamma_j = \Delta_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.*

Теорема 2 (Крамер)**.** *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих відмінний від нуля, тоді ця система рівнянь є визначеною. Причому, якщо Δ_j — детермінант, одержаний із Δ шляхом заміни j-го стовпця $(j = 1, 2, \dots, n)$ стовпцем вільних членів системи рівнянь, то система чисел*

$$\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

є розв'язком цієї системи лінійних рівнянь.

Наслідок 1. *Якщо система n лінійних рівнянь від n невідомих є несумісною або невизначеною, тоді детермінант цієї системи дорівнює нулю.*

Наслідок 2. *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих дорівнює нулю і хоча б один із детермінантів, одержаних із Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи, не дорівнює нулю, тоді ця система лінійних рівнянь є несумісною.*

Приклади розв'язування задач

1. Розв'язати наступну систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант даної в умові системи лінійних рівнянь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то за теоремою Крамера дана в умові система рівнянь є визначеною і ми можемо знайти її розв'язок за правилом Крамера. Для цього обчислимо наступні детермінанти:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -94, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3$$

є розв'язком даної в умові системи лінійних рівнянь.

2. Знайти, при яких значеннях параметра λ наступна система лінійних рівнянь є несумісною:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + (\lambda - 10)x_3 = -2, \\ 4x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант системи рівнянь (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & \lambda - 10 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 25\lambda + 93.$$

Із наслідку 1 випливає, що для того, щоб система рівнянь (4) була несумісною, необхідно, щоб $\Delta = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння $-2\lambda^2 + 25\lambda + 93 = 0$, одержимо, що $\Delta = 0$ при значеннях параметра $\lambda = -3$ або $\lambda = \frac{31}{2}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda = \frac{31}{2}$. Обчислимо детермінант

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & \frac{31}{2} - 10 \\ 1 & \frac{31}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{703}{4}.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то із наслідку 2 випливає, що при $\lambda = \frac{31}{2}$ система рівнянь (4) є несумісною.

Якщо ж $\lambda = -3$, тоді можна показати, що всі три детермінанти, які одержуються з детермінанта системи рівнянь (4) заміною відповідно першого, другого, третього стовпців стовпцем вільних членів системи рівнянь, дорівнюють нулю. Тому у цьому випадку для визначення чи є система рівнянь (4) сумісною, розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{35}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси та з теореми 2 §4 випливає, що при $\lambda = -3$ система рівнянь (4) є сумісною.

Таким чином система рівнянь (4) є несумісною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = -\frac{31}{2}$.

Вправи для самостійної роботи

Наступні системи рівнянь розв'язати за правилом Крамера:

1. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

9. Перевірити, що система чисел 1, 1, 1, 1 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0, \end{cases}$$

і обчислити детермінант цієї системи.

10. Розв'язати систему рівнянь від невідомих x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

де α_1, α_2, α_3 — попарно різні дійсні числа; β_1, β_2, $\beta_3 \in \mathbb{R}$.

§6. Лінійні простори. Лінійна залежність елементів лінійного простору. Розмірність і базис скінченновимірного лінійного простору

Нехай F — довільне поле, елементи якого ми будемо позначати малими грецькими літерами, 1 — одиниця поля F, 0 — нуль поля F.

Нехай L — непорожня множина елементів довільної природи, які ми будемо позначати в основному латинськими літерами. Множина L називається *лінійним простором над полем* F, якщо в множині L введено дії, що задовольняють певним вимогам (аксіомам лінійного простору), а саме:

I) *дія додавання* кожній впорядкованій парі a, b елементів множини L ставить у відповідність єдиний елемент цієї ж множини, який називається *сумою елементів* a *і* b і позначається через $a + b$;

II) *дія множення* елементів поля F на елементи множини L ставить у відповідність кожному елементу $\beta \in F$ і кожному елементу $a \in L$ єдиний елемент із L, що називається *добутком* β *на* a і позначається через βa;

III) аксіоми лінійного простору:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних елементів a, b, $c \in L$,
2) $a + b = b + a$ для довільних елементів a, $b \in L$,
3) існує такий елемент $\bar{0}$ із L, що $a + \bar{0} = a$ для довільного елемента a із L,
4) для будь-якого $a \in L$ існує такий елемент $a' \in L$, що $a + a' = \bar{0}$,
5) $\beta(\gamma a) = (\beta\gamma)a$ для довільних елементів β, $\gamma \in F$ і $a \in L$,
6) $1a = a$ для довільного елемента a із L,
7) $\gamma(a+b) = \gamma a+\gamma b$ для довільних елементів $\gamma \in F$ і a, $b \in L$,
8) $(\beta + \gamma)a = \beta a + \gamma a$ для довільних елементів β, $\gamma \in F$ і $a \in L$.

Лема 1. *Нехай L є лінійним простором над полем F. Тоді в L існує тільки один елемент $\bar{0}$, такий що $a + \bar{0} = a$ для довільного елемента a із L. Для кожного елемента a із L існує тільки один елемент $a' \in L$, такий що $a + a' = \bar{0}$.*

Єдиний елемент $\bar{0}$ в L будемо називати *нульовим елементом* простору L. Для кожного вектора $a \in L$ єдиний елемент $a' \in L$, що задовольняє аксіомі 4) будемо називати *протилежним елементом до елемента* a і будемо позначати його символом "$-a$".

Лема 2. *Нехай L є лінійним простором над полем F. Тоді для довільних елементів $\beta \in F$ та $a \in L$ справедливі рівності:*

$$0a = \bar{0}, \qquad \beta\bar{0} = \bar{0}, \qquad (-1)a = -a.$$

Причому $\alpha a = \bar{0}$ тоді і тільки тоді, коли або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.

Різницю двох елементів лінійного простору, суму 3-х елементів лінійного простору, суму 4-х елементів лінійного простору і т. д. визначимо за правилами:

$$a - b = a + (-b);$$
$$a + b + c = (a + b) + c;$$
$$a + b + c + d = (a + b + c) + d$$

і т. д.

Наведемо приклади лінійних просторів.

1. *Нульовий простір* $L = \{a\}$ складається із одного елемента a, дії над яким виконуються за правилами:

$$a + a = a, \qquad \beta a = a \quad (\beta \in F).$$

Очевидно, елемент a є нульовим елементом.

2. *Простір* F^n. Будь-яка впорядкована сукупність n елементів поля F називається *n-вимірним вектором над полем F*. n-вимірний вектор над полем F, утворений елементами α_1, α_1, ..., α_n поля F, будемо позначати через $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і називати α_1 — 1-ю компонентою, α_2 — 2-ю компонентою і т.д., α_n — n-ю компонентою цього вектора. Два n-вимірні вектори над полем F називаються *рівними*, якщо рівні відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через F^n множину всіх n-вимірних векторів над полем F. Введемо в множині F^n дії:

I) якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ і $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in F^n$, то визначимо суму $a + b$ за правилом

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n);$$

II) якщо $\gamma \in P$ і $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, то добуток γa визначимо за правилом

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n).$$

Очевидно, $a + b \in F^n$ і $\gamma a \in F^n$ для довільних n-вимірних векторів a, b над полем F та довільного елемента γ поля F. Користуючись аксіомами поля F неважко показати, що вказані дії над елементами із F^n задовольняють аксіомам лінійного простору. Лінійний простір F^n з вказаними діями над n-вимірними векторами називається *n-вимірним векторним простором над полем F*. В процесі перевірки аксіом лінійного простору буде встановлено, що нульовим елементом простору F^n є n-вимірний вектор $(0, 0, \ldots, 0)$, а протилежним елементом $-a$ до n-вимірного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ є n-вимірний вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

3. *Простір* $\mathbb{R}_{s\times t}$. Нехай $\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел. Позначимо через $\mathbb{R}_{s\times t}$ множину всіх $s\times t$-матриць елементами з поля $\mathbb{R}$. Як відомо (див. §1), на цій множині можна ввести операції додавання матриць та множення елемента поля $\mathbb{R}$ на матрицю. Рекомендуємо читачу самостійно переконатися, в тому що множина $\mathbb{R}_{s\times t}$ відносно цих дій є лінійним простором.

4. *Простір* $C_{[\alpha,\beta]}$. Нехай α, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\alpha < \beta$. Через $C_{[\alpha,\beta]}$ позначимо множину всіх функцій $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$. Дві функції f, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ називаються рівними, якщо

$$f(x) = g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Введемо дії над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$:

I) якщо $f, g \in C_{[\alpha,\beta]}$, то суму $f + g$ визначимо за правилом

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

II) якщо $\gamma \in \mathbb{R}$ і $f \in C_{[\alpha,\beta]}$, то добуток γf визначимо за правилом

$$(\gamma f)(x) = \gamma f(x) \qquad (x \in [\alpha, \beta]).$$

Із відомих теорем математичного аналізу слідує, що $f + g$ і γf — неперервні функції на сегменті $[\alpha, \beta]$, тобто $f + g \in C_{[\alpha,\beta]}$ і $\gamma f \in C_{[\alpha,\beta]}$. Як і в попередньому прикладі можна показати, що $C_{[\alpha,\beta]}$ є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ відносно вказаних дій над елементами із $C_{[\alpha,\beta]}$.

Нехай L — лінійний простір над полем F. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається *підпростором лінійного простору* L, якщо A є лінійним простором відносно дій, заданих в L. Якщо ж для непорожньої підмножини A лінійного простору L над полем F виконуються умови:

1) сума будь-яких елементів із A є також елементом із A;
2) добуток будь-якого елемента із F на будь-який елемент із A є також елементом із A,

то будемо говорити, що множина A *замкнена відносно дій в* L.

Теорема 1. *Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем F є підпростором лінійного простору L над полем F тоді і тільки тоді, коли множина A замкнена відносно дій в L.*

Будь-яку впорядковану множину елементів лінійного простору L над полем F будемо називати *системою елементів*. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система елементів із L, β_1, β_1, ..., β_s — довільні елементи поля F. Елемент

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

лінійного простору L називається *лінійною комбінацією елементів a_1, a_2, ..., a_s відповідно з коефіцієнтами β_1, β_2, ..., β_s.*

Система елементів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається *лінійно залежною системою*, якщо існують такі елементи α_1, α_2, ..., α_s поля F, не всі рівні нулю одночасно, що виконується рівність

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s = \bar{0},$$

де $\bar{0}$ — нульовий елемент лінійного простору L над полем F. Система елементів a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L називається *лінійно незалежною системою*, якщо для будь-яких елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ поля F, які не рівні нулю одночасно, лінійна комбінація $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s$ не є нульовим елементом лінійного простору L.

Теорема 2 (ознака лінійно залежної системи). *Система елементів лінійного простору L над полем F є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один із елементів цієї системи є лінійною комбінацію інших елементів даної системи.*

Підсистемою системи елементів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L над полем F називається впорядкована підмножина цієї підсистеми, порядок взаємного розташування елементів у якій такий ж як і в даній системі.

Теорема 3 (про систему і підсистему)**.** *Якщо деяка підсистема даної системи елементів лінійного простору L над полем F є лінійно залежною, то і сама система також є лінійно залежною. Якщо дана система елементів лінійного простору L над полем F є лінійно незалежною, то і будь-яка підсистема цієї системи також є лінійно незалежною.*

Система елементів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L над полем F називається *базисом лінійного простору L*, якщо виконуються наступні умови:

1) система елементів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною;

2) будь-який елемент лінійного простору L над полем F є лінійною комбінацією системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Лінійний простір L над полем F називається *скінченновимірним лінійним простором*, якщо в ньому існує базис. У протилежному випадку лінійний простір L над полем F називається *нескінченновимірним лінійним простором.*

n-вимірний векторний простір F^n над полем F є прикладом скінченновимірного лінійного простору ($n \in \mathbb{N}$). Система n-вимірних векторів:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

є базисом простору F^n. Цей базис називається *канонічним базисом* простору F^n.

Теорема 4. *Будь-яку лінійно незалежну систему елементів скінченновимірного лінійного простору L над полем F можна включити в деякий базис цього простору.*

Теорема 5. *Будь-які два базиси скінченновимірного лінійного простору L над полем F складаються з однакового числа елементів.*

Розмірністю скінченновимірного лінійного простору L над полем F називається число елементів будь-якого базису цього лінійного простору. За домовленістю нульовий простір є скінченновимірним лінійним простором, розмірність якого рівна нулю. Розмірність нескінченновимірного простору вважають умовно рівною ∞. Розмірність лінійного простору L над полем F позначають через $\dim_F L$.

Приклади розв'язування задач

1. Чи є множина всіх дійсних матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

скінченновимірним лінійним простором над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел відносно звичайних дій додавання матриць та множення дійсного числа на матрицю?

Розв'язання. Нехай

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Очевидно, що множина $\mathcal{C}$ є підмножиною лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Перевіримо, чи є множина $\mathcal{C}$ замкненою відносно дій в $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Нехай U, V — довільні матриці з множини $\mathcal{C}$, а w — довільне дійсне число. Тоді

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

для деяких дійсних чисел a, b, c, d. Обчислимо

$$U + V = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$w \cdot U = w \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wa & wb \\ -wb & wa \end{pmatrix}.$$

Оскільки $U+V \in \mathcal{C}$ і $w \cdot U \in \mathcal{C}$, то множина $\mathcal{C}$ є замкненою відносно дій в лінійному просторі $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Це, в свою чергу, означає, що множина $\mathcal{C}$ є лінійним підпростором лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$, а отже, і лінійним простором (див. теорему 1 цього параграфу).

Покажемо, що $\mathcal{C}$ є скінченновимірним лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Розглянемо матриці

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система матриць E, I є лінійно незалежною системою елементів лінійного простору $\mathcal{C}$. Дійсно, у протилежно випадку існували б дійсні числа x і y одночасно не рівні нулю такі, що $xE + yI = \mathbf{0}$, де $\mathbf{0}$ — нульова матриця із $\mathbb{R}_{2\times 2}$. Оскільки

$$xE + yI = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

то ми одержали б суперечність, яка полягає у тому, що $x = y = 0$.

Далі, будь-яка матриця U із лінійного простору $\mathcal{C}$ представляється у вигляді лінійної комбінації системи матриць E, I. Якщо

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

то $U = aE + bI$. Підсумовуючи вище сказане, робимо висновок, що система матриць E, I є базисом лінійного простору $\mathcal{C}$. Це доводить, що лінійний простір $\mathcal{C}$ є скінченновимірним лінійним простором над полем дійсних чисел розмірності 2.

2. Довести, що система векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки існує система ненульових чисел 1, -1, що лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору, тобто $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$.

Тоді із теореми 3 випливає, що і вся, вказана в умові система векторів, є лінійно залежною.

3. Довести, що система векторів

$$a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, 0, 1, 1),\ a_3 = (1, 1, 0, 1),\ a_4 = (1, 1, 1, 0)$$

є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$.

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 — деякі дійсні числа. Обчислимо лінійну комбінацію

$$\begin{aligned} &\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 + \gamma_4 a_4 = \\ &\quad = (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \phantom{{}+ x_2} + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+ x_3} + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+ x_4} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Обчислимо детермінант системи лінійних рівнянь (2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Тоді за теоремою Крамера система лінійних рівнянь (2) є визначеною. Очевидно, нульовий вектор є розв'язком цієї системи лінійних рівнянь, а отже, єдиним розв'язком системи лінійних рівнянь (2).

Таким чином лінійна комбінація (1) дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.$$

Це означає, що система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 є лінійно незалежною.

Покажемо тепер, що будь-який вектор $b = (\beta_1, \beta_3, \beta_3, \beta_4)$ векторного простору $\mathbb{R}^4$ є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, a_4. Для цього розв'яжемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \beta_1, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 = \beta_2, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = \beta_3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} = \beta_4. \end{cases}$$

Одержимо $x_1 = -2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$, $x_2 = \beta_1 - \beta_2$, $x_3 = \beta_1 - \beta_3$, $x_4 = \beta_1 - \beta_4$. Звідси випливає, що

$$b = (-2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)a_1 + (\beta_1 - \beta_2)a_2 + (\beta_1 - \beta_3)a_3 + (\beta_1 - \beta_4)a_4.$$

Підсумувавши все вище сказане, робимо висновок, що система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$.

Зауваження. Для того, щоб довести, що система із n n-вимірних векторів є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ досить показати, що детермінант, складений із компонент даних векторів, відмінний від нуля. Дійсно, цим самим буде доведено, що ця система векторів є лінійно незалежною системою. За теоремою 4 дану систему векторів можна включити в деякий базис простору $\mathbb{R}^n$, який складається за теоремою 5 з n векторів (нагадаємо про канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$). Оскільки дана система n-вимірних векторів сама складається n векторів, то це означає, що вона є базисом простору $\mathbb{R}^n$.

Вправи для самостійної роботи

1. Чи є лінійним простором над полем дійсних чисел множина всіх 3-вимірних векторів з дійсними компонентами, що є розв'язками рівняння $x_1+x_2+x_3=0$, відносно звичайних дій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор?

2. Чи є лінійним простором над полем дійсних чисел множина всіх n-вимірних векторів з дійсними компонентами, що є розв'язками рівняння $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, відносно звичайних дій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор?

3. Чи є лінійним простором над полем дійсних чисел множина всіх симетричних матриць порядку n з дійсними елементами відносно звичайних дій додавання матриць та множення дійсного числа на матрицю?

4. Нехай $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ — деяка система n-вимірних векторів з дійсними компонентами. Чи є лінійним простором над полем дійсних чисел множина всіх лінійних комбінацій цієї системи векторів з дійсними коефіцієнтами відносно звичайних дій додавання векторів та множення дійсного числа на вектор?

5. Знайти лінійну комбінацію $3a_1+5a_2-a_3$ векторів

$$a_1=(4,1,3,-2),\ a_2=(1,2,-3,2),\ a_3=(16,9,1,-3).$$

6. Знайти вектори x та y із рівнянь:
а) $a_1+2a_2+3a_3+4x=\bar{0}$, б) $3(a_1-y)+2(a_2+y)=4(a_3-y)$,
де $a_1=(5,-8,-1,2)$, $a_2=(2,-1,4,-3)$, $a_3=(-3,2,-5,4)$.

7. Визначити, чи є лінійно залежними наступні системи векторів:
а) $a_1=(5,4,3)$, $a_2=(3,3,2)$, $a_3=(8,1,3)$;
б) $b_1=(2,-4,1)$, $b_2=(0,5,-6)$, $b_3=(1,-2,4)$;
в) $c_1=(4,-5,2,6)$, $c_2=(2,-2,1,3)$, $c_3=(6,-3,3,9)$, $c_4=(4,-1,5,6)$;
г) $d_1=(1,0,0,2,5)$, $d_2=(0,1,0,3,4)$, $d_3=(0,0,1,4,7)$,
$d_4=(2,-3,4,11,12)$.

8. Довести, що система векторів, яка містить два пропорційні вектори, є лінійно залежною.

9. Довести, що система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна.

10. Довести, якщо система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною і вектор a_3 не є лінійною комбінацією векторів a_1, a_2, то або вектор a_1 пропорційний вектору a_2, або, навпаки, вектор a_2 пропорційний вектору a_1.

11. Нехай $a_1 = (0,1,0,2,0)$, $a_2 = (7,4,1,8,3)$, $a_3 = (0,3,0,6,0)$. Чи можна підібрати дійсні числа β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, δ_1, δ_2, δ_3 так, щоб система векторів b, c, d, де

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3, \; c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3, \; d = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3$$

була б лінійно незалежною?

12. Знайти всі значення параметра λ, при яких вектор b є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, a_3, якщо:
а) $a_1 = (2,3,5)$, $a_2 = (3,7,8)$, $a_3 = (1,-6,1)$, $b = (7,-2,\lambda)$;
б) $a_1 = (4,4,3)$, $a_2 = (7,2,1)$, $a_3 = (4,1,6)$, $b = (5,9,\lambda)$;
в) $a_1 = (3,2,5)$, $a_2 = (2,4,7)$, $a_3 = (5,6,\lambda)$, $b = (1,3,5)$;
г) $a_1 = (3,2,6)$, $a_2 = (7,3,9)$, $a_3 = (5,1,3)$, $b = (\lambda,2,5)$.

§7. Координати елемента скінченновимірного лінійного простору. Зв'язок між базисами. Ізоморфізм лінійних просторів

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F і система елементів a_1, a_2, …, a_n — деякий базис простору L ($n = \dim_F L$). Тоді будь-який елемент b із L є лінійною комбінацією системи a_1, a_2, …, a_n, тобто

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_, \tag{1}$$

для деяких елементів β_1, β_2, …, β_n поля F. Рівність (1) називається *розкладом елемента елемента b у базисі* a_1, a_2, …, a_n. При цьому коефіцієнти β_1, β_2, …, β_n відповідно називають 1*-ю координатою*, 2*-ю координатою*, …, n*-ю координатою елемента a у базисі* a_1, a_2, …, a_n. Коректність цього означення слідує із наступної теореми.

Теорема 1 (про розклад). *Будь-який елемент скінченновимірного лінійного простору однозначно розкладається у фіксованому базисі цього лінійного простору.*

n-вимірний вектор $(\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n)$ будемо називати *координатним рядком елемента b* у базисі a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L над полем F. Відмітимо, що координатні рядки базисних елементів a_1, a_2, …, a_n співпадають відповідно з n-вимірними векторами e_1, e_2, …, e_n канонічного базису векторного простору F^n.

Теорема 2 (про дії над елементами у координатній формі). *Нехай у скінченновимірному лінійному просторі L над полем F вибрано базис і елементи цього простору розкладені у цьому базисі. Тоді координати суми елементів рівні сумам відповідних координат цих елементів. Щоб одержати координати добутку елемента поля на елемент простору L потрібно помножити заданий елемент поля на координати даного елемента простору L.*

Нехай системи елементів a_1, a_2, …, a_n та a'_1, a'_2, …, a'_n — це деякі два базиси скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Розкладемо елементи другого з цих базисів у першому базисі простору L:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \tau_{11} a_1 + \tau_{21} a_2 + \cdots + \tau_{n1} a_n, \\ a'_2 &= \tau_{12} a_1 + \tau_{22} a_2 + \cdots + \tau_{n2} a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_n &= \tau_{1n} a_1 + \tau_{2n} a_2 + \cdots + \tau_{nn} a_n, \end{aligned}$$

де $\tau_{ij} \in F$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ (звернути увагу, як виписується матриця T).

Теорема 3. *Нехай T є матрицею переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Тоді T є оборотною матрицею. Причому обернена матриця T^{-1} до матриці T є матрицею переходу від базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ до базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору L.*

Розкладемо довільний елемент b простору L у обох базисах:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n \quad b = \beta'_1 a'_1 + \beta'_2 a'_2 + \cdots + \beta'_n a'_n,$$

де $\beta_i, \beta'_j \in F$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Далі, підставивши у останню рівність розклади базисних елементів $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та використавши теорему 1, одержимо рівності

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \tau_{11}\beta'_1 + \tau_{12}\beta'_2 + \cdots + \tau_{1n}\beta'_n, \\ \beta_2 &= \tau_{21}\beta'_1 + \tau_{22}\beta'_2 + \cdots + \tau_{2n}\beta'_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_n &= \tau_{n1}\beta'_1 + \tau_{n2}\beta'_2 + \cdots + \tau_{nn}\beta'_n. \end{aligned} \tag{2}$$

Рівності (2) називаються *формулами перетворення координат елемента* при переході від одного базису скінченновимірного лінійного простору до іншого базису цього простору. Вони вказують на зв'язок між координатами одного й того ж елемента у різних базисах скінченновимірного лінійного простору.

Формули перетворення координат можна записати у матричній формі. Нехай $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $(\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n)$ — координатні рядки елемента b відповідно у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ простору L і $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^T$, $B' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n)^T$. Тоді

$$B = TB'.$$

Ізоморфізм лінійних просторів. Нехай L і L' — деякі лінійні простори над одним і тим же полем F. Відображення $\varphi : L \to L'$ множин називається *лінійним відображенням* простору L у простір L', якщо виконуються наступні умови:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a)$$

для довільних елементів a, b лінійного простору L і довільного елемента α поля F. Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L у лінійний простір L' називається *ізоморфізмом*, якщо φ — лінійне відображення лінійних просторів і φ — взаємно однозначне відображення множини L на множину L'. *Взаємна однозначність відображення φ множини L на L'* означає, що кожний елемент із L' є образом деякого елемента із L і образи різних елементів із L є різними елементами в L'.

Будемо говорити, що *лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L'*, якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів. Запис $L \cong L'$ означає, що простір L ізоморфний простору L'.

Теорема 4 (класифікаційна теорема)**.** *Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем F розмірності n. Тоді L ізоморфний n-вимірному векторному простору F^n. Причому якщо $n \neq m$, то простір F^n не ізоморфний простору F^m.*

Приклади розв'язування задач

1. Нехай $\mathbb{R}[x]_2$ — лінійний простір всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 2, відносно звичайних дій додавання многочленів та множення дійсного числа на многочлен. Довести, що система многочленів 1, $x-1$, $(x-1)^2$ є базисом простору $\mathbb{R}[x]_2$. Знайти координати многочлена x^2+x+1 у цьому базисі.

Розв'язання. Покажемо, що будь-який многочлен $f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ лінійного простору $\mathbb{R}[x]_2$ однозначно представляється у вигляді лінійної комбінації системи многочленів 1, $x-1$, $(x-1)^2$. Цього достатньо, щоб довести, що дана система многочленів є базисом простору $\mathbb{R}[x]_2$. Дійсно, із однозначності представлення нульового многочлена у вигляді

$$0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2$$

випливає лінійна незалежність даної системи многочленів, а інша умова базису виконуватиметься автоматично.

Доведемо спочатку однозначність такого представлення, припустивши його існування. Нехай для довільного многочлена $f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ лінійного простору $\mathbb{R}[x]_2$ існують дійсні числа β_0, β_1, β_2 такі, що

$$f(x) = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot (x-1) + \beta_2 \cdot (x-1)^2.$$

Тоді

$$\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = \beta_2 x^2 + (\beta_1 - 2\beta_2)x + (\beta_0 - \beta_1 + \beta_2).$$

Із означення рівності многочленів звідси слідує, що

$$\alpha_2 = \beta_2, \qquad \alpha_1 = \beta_1 - 2\beta_2, \qquad \alpha_0 = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2.$$

Тому

$$\beta_2 = \alpha_2, \qquad \beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \qquad \beta_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

Отже, числа β_0, β_1, β_2 однозначно визначаться коефіцієнтами α_0, α_1, α_2 многочлена $f(x)$.

Із вище сказаного легко слідує можливість представлення довільного многочлена $f(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ із $\mathbb{R}[x]_2$ у вигляді лінійної комбінації системи многочленів 1, $x-1$, $(x-1)^2$:

$$f(x) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) \cdot 1 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot (x-1) + \alpha_2 \cdot (x-1)^2.$$

Нарешті,

$$x^2 + x + 1 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2,$$

тобто $(3, 3, 1)$ є шуканим координатним рядком многочлена x^2+x+1 у базисі 1, $x-1$, $(x-1)^2$ лінійного простору $\mathbb{R}[x]_2$.

2. Довести, що системи векторів $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (2,1,1)$, $a_3 = (3,2,3)$ та $b_1 = (0,1,0)$, $b_2 = (1,1,2)$, $b_3 = (1,2,1)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1,2,3)$ в обох базисах, а потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

Розв'язання. Обчислимо детермінанти, складені відповідно з компонент векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Оскільки обидва детермінанти не дорівнюють нулю, то системи векторів a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3 є базисами простору $\mathbb{R}^3$.

Знайдемо матрицю переходу від першого до другого базису. Для цього потрібно знайти координати векторів другого базису у першому базисі. Нехай τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} — координати вектора b_j у базисі a_1, a_2, a_3 $(j = 1, 2, 3)$, тоді

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3, \\ b_2 &= \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3, \\ b_3 &= \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Перейшовши від рівностей векторів (3) до рівностей відповідних компонент, одержимо три системи лінійних рівнянь від невідомих τ_{1j}, τ_{2j}, τ_{3j} $(j = 1, 2, 3)$:

$$\begin{cases} \tau_{11} + 2\tau_{21} + 3\tau_{31} = 0, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 2\tau_{31} = 1, \\ \tau_{11} + \tau_{21} + 3\tau_{31} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau_{12} + 2\tau_{22} + 3\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 2\tau_{32} = 1, \\ \tau_{12} + \tau_{22} + 3\tau_{32} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{13} + 2\tau_{23} + 3\tau_{33} = 1, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 2\tau_{33} = 2, \\ \tau_{13} + \tau_{23} + 3\tau_{33} = 1. \end{cases}$$

Оскільки ці системи лінійних рівнянь мають одну й ту ж матрицю, то розв'яжемо їх одночасно, виконуючи наступні елементарні перетворення над матрицею, складеною з компонент векторів a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким чином,

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від базису a_1, a_2, a_3 до базису b_1, b_2, b_3.

Нехай $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ і $(\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3')$ — координатні рядки вектора $x \in \mathbb{R}^3$ відповідно у базисах a_1, a_2, a_3 та b_1, b_2, b_3. Тоді

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \gamma_3' \end{pmatrix}$$

— шукана формула перетворення координат у матричній формі при переході від першого до другого із заданих в умові базисів $\mathbb{R}^3$.

Перевіримо цю рівність у випадку вектора $c = (1, 2, 3)$. Знайдемо спочатку координати вектора c у базисі a_1, a_2, a_3, а потім у базисі b_1, b_2, b_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = -2$, $\gamma_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Отже, $\gamma_1' = 2$, $\gamma_2' = 2$, $\gamma_3' = -1$. Далі переконуємося у правильності рівності

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Довести, що лінійний простір $\mathbb{R}_{2\times 2}$ всіх дійсних матриць порядку 2 ізоморфний 4-вимірному векторному простору $\mathbb{R}^4$.

Розв'язання. Нескладно довести, що система матриць

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є базисом лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times2}$. Тому $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_{2\times2}=4$. Тоді за теоремою 4 лінійний простір $\mathbb{R}_{2\times2}$ ізоморфний 4-вимірному векторному простору $\mathbb{R}^4$.

Але ми пропонуємо читачеві в інший спосіб довести ізоморфізм вказаних в умові задачі лінійних просторів, побудувавши деякий ізоморфізм із $\mathbb{R}_{2\times2}$ в $\mathbb{R}^4$.

Нехай X — довільна матриця із $\mathbb{R}_{2\times2}$ вигляду

$$X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

де α, β, γ, δ — деякі дійсні числа. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times2}$ у векторний простір $\mathbb{R}^4$, при якій матриці X відповідає 4-вимірний вектор $x=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Відповідність φ є взаємно однозначним відображенням, оскільки для будь-якого вектора $x'=(\alpha',\beta',\gamma',\delta')$ із $\mathbb{R}^4$ існує цілком визначена матриця

$$X'=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_{2\times2}$$

така, що $\varphi(X')=x'$. Для довільних різних матриць

$$X=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad X'=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}_{2\times2} \tag{4}$$

$$\varphi(X)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\neq(\alpha',\beta',\gamma',\delta')=\varphi(X').$$

Відображення $\varphi: L\to L'$ є лінійним, оскільки для довільних матриць X і X' вигляду (4) та для довільного дійсного числа λ правильні наступні рівності:

$$\varphi(X+X')=\varphi\left(\begin{pmatrix}\alpha+\alpha' & \beta+\beta'\\ \gamma+\gamma' & \delta+\delta'\end{pmatrix}\right)=$$
$$=(\alpha+\alpha',\beta+\beta',\gamma+\gamma',\delta+\delta')=\varphi(X)+\varphi(X'),$$
$$\varphi(\lambda X)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda\alpha & \lambda\beta\\ \lambda\gamma & \lambda\delta\end{pmatrix}\right)=(\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma,\lambda\delta)=\lambda\varphi(X).$$

Таким чином φ є ізоморфізмом лінійних просторів $\mathbb{R}_{2\times2}$ і $\mathbb{R}^4$, а тому $\mathbb{R}_{2\times2}\cong\mathbb{R}^4$.

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що система векторів a_1, a_2, a_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ є базисом цього простору. Знайти координати вектора x із $\mathbb{R}^3$ у базисі a_1, a_2, a_3, якщо:
а) $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (1,1,2)$, $a_3 = (1,2,3)$, $x = (6,9,14)$;
б) $a_1 = (2,1,-3)$, $a_2 = (3,2,-5)$, $a_3 = (1,-1,1)$, $x = (6,2,-7)$.

2. Довести, що система векторів a_1, a_2, a_3, a_4 векторного простору $\mathbb{R}^4$ є базисом цього простору. Знайти координати вектора x із $\mathbb{R}^4$ у базисі a_1, a_2, a_3, a_4 якщо $a_1 = (1,2,-1,-2)$, $a_2 = (2,3,0,-1)$, $a_3 = (1,2,1,4)$, $a_4 = (1,3,-1,0)$, $x = (7,14,-1,2)$.

3. Знайти координати матриці A лінійного простору матриць $\mathbb{R}_{2\times 2}$ у базисі U_1, U_2, U_3, U_4 цього простору, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Довести, що системи векторів $a_1 = (1,2,1)$, $a_2 = (2,3,3)$, $a_3 = (3,7,1)$ та $b_1 = (3,1,4)$, $b_2 = (5,2,1)$, $b_3 = (1,1,-6)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису.

5. Довести, що системи векторів $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,2,1,1)$, $a_3 = (1,1,2,1)$, $a_4 = (1,3,2,3)$ та $b_1 = (1,0,3,3)$, $b_2 = (-2,-3,-5,-4)$, $b_3 = (2,2,5,4)$, $b_4 = (-2,-3,-4,-4)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^4$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису.

6. Нехай $\mathbb{R}[x]_3$ — лінійний простір всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами, степінь яких не перевищує 3, відносно звичайних дій додавання многочленів та множення дійсного числа на многочлен. Знайти матриць переходу від базису 1, $x-1$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ до базису 1, x, x^2, x^3 простору $\mathbb{R}[x]_3$.

7. Як зміниться матриця переходу від одного базису до другого базису, якщо: а) переставити два перших елементи першого базису? б) переставити два перших елементи другого базису? в) записати елементи обох базисів у зворотному порядку?

8. Нехай $\varphi : L \to L'$ є ізоморфізмом скінченновимірних лінійних просторів L і L'. Довести, що:
а) $\varphi(\bar{0}) = (\bar{0}')$, де $\bar{0}$, $\bar{0}'$ — нульові елементи відповідно лінійних просторів L і L';
б) $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_s)$ — лінійно незалежна система елементів простору L', якщо a_1, a_2, $\ldots$, a_s — лінійно незалежна система простору L;
в) $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ — базис простору L', якщо $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис простору L.

9. Довести, що лінійний простір всіх симетричних матриць з дійсними елементами відносно звичайних дій додавання матриць та множення дійсного числа на матрицю ізоморфний векторному простору $\mathbb{R}^3$.

§8. Ранг матриці. Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай L — лінійний простір над полем F і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система елементів простору. *Рангом системи елементів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається число, що дорівнює максимальному серед чисел, з яких складаються лінійно незалежні підсистеми даної системи елементів.

Далі, нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{sn} \end{pmatrix}$$

— довільна $s \times n$-матриця з елементами із поля F дійсних чисел, де s і n — довільні натуральні числа. Тоді на стовпці цієї матриці можна дивитися як на s-вимірні вектори, а на її рядки — як на n-вимірні вектори. Розглянемо систему векторів-рядків матриці A:

$$a_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \quad \ldots, \quad a_s = (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}).$$

Рангом матриці A називається ранг системи її векторів-рядків. Ранг матриці A будемо позначати через $\operatorname{rank} A$.

Теорема 1. *Ранг ненульової матриці A дорівнює натуральному числу найбільшому серед порядків відмінних від нуля мінорів матриці A.*

Наслідок 1. *Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.*

Теорема 2. *Ранг системи векторів-стовпців матриці A дорівнює рангу системи її векторів-рядків, тобто дорівнює рангу матриці A.*

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями. Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на довільне дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (II).

Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є добутком довільного ненульового дійсного числа на i-ий рядок (стовпець) матриці A.

Матриця B називається *еквівалентною* матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A. Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 3. *Будь-яка $s \times n$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно r ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де $1 \le j_1 < j_2 \ldots < j_r \le t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Наслідок 1. *Дві $s \times n$-матриці A і B еквівалентні тоді і тільки тоді, коли* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Системи лінійних рівнянь. Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Теорема 4 (Кронекер, Капеллі)**.** *Система лінійних рівнянь* (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $\bar{A}$ даної системи лінійних рівнянь дорівнює рангу матриці A цієї системи рівнянь.*

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівнянням залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі оголошуємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення і обчислюючи значення інших невідомих за правилом Крамера, ми одержимо всі розв'язки системи (1).

Наслідок 1. *Сумісна система* (1) *тоді і тільки тоді є визначеною, якщо ранг матриці A дорівнює числу невідомих.*

Системи лінійних однорідних рівнянь. *Системою лінійних однорідних рівнянь* називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, система рівнянь (2) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 5. *Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь* (2) *від n невідомих має ранг r. Якщо $r = n$, тоді система рівнянь* (2) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку $r < n$ система рівнянь* (2) *є невизначеною.*

Наслідок 1. *Система n лінійних однорідних рівнянь від n невідомих має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці цієї системи дорівнює нулю.*

Теорема 6. *Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ є деякими розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь* (2)*. Тоді для довільного дійсного числа α вектори*

$$\alpha b = (\alpha\beta_1, \ldots, \alpha\beta_n), \qquad b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n)$$

є розв'язками системи рівнянь (2).

Наслідок 1. *Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь відносно дій додавання розв'язків та множення дійсного числа на розв'язок є скінченновимірним лінійним простором.*

Множину всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (2) називають *простором розв'язків* цієї системи рівнянь. Нехай S — простір розв'язків невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь (2). *Фундаментальною системою розв'язків* системи лінійних однорідних рівнянь (2) називається базис простору розв'язків цієї системи рівнянь. У невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь існує безліч фундаментальних систем розв'язків. Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків складаються із одного й того ж числа розв'язків.

Теорема 7. *Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (2) *менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи* (2) *складається із $n-r$ розв'язків.*

Нехай дано систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{3}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{4}$$

одержана із системи (3) заміною всіх вільних членів нулями, називається *зведеною системою рівнянь* для системи рівнянь (3). Між розв'язками систем рівнянь (3) і (4) існує тісний зв'язок, на який вказують наступні теореми.

Теорема 8. *Сума будь-якого розв'язку системи рівнянь* (3) *з будь-яким розв'язком зведеної системи рівнянь* (4) *є розв'язком системи рівнянь* (3).

Теорема 9. *Різниця будь-яких двох розв'язків системи рівнянь* (3) *є розв'язком зведеної системи рівнянь* (4).

Приклади розв'язування задач

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо теорему 1 для обчислення рангу матриці A. Слід пам'ятати, що при цьому слід переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено відмінний від нуля мінор M_k порядку k, то далі потрібно обчислювати лише ті мінори $(k+1)$-го порядку, які обводять мінор M_k. Якщо всі ці мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінору δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$). Але обидва мінори четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінору δ_3, дорівнюють нулю:

$$\delta_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює трьом.

2. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього, четвертого, п'ятого рядків перший, відповідно помножений на -4, 2, -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2. А потім поміняємо місцями перший та четвертий стовпці. Наступним кроком, помноживши третій і п'ятий рядки на -1, ми прийдемо до такої матриці

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_2, ми одержимо, що

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 3.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A системи і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему, яка складається із перших двох рівнянь заданої в умові системи, від невідомих x_1, x_2. Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \tfrac{\Delta_1}{M} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{3}{4}x_4 - x_5,$$
$$x_2 = \tfrac{\Delta_2}{M} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{4}x_3 + \tfrac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд $(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta)$, де α, β, δ — довільні дійсні числа.

4. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи рівнянь (5). Мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

розташований в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінору M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому обвідні мінори, утворені за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі рівнянь (5) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі. Інші три невідомі x_3, x_4, x_5 оголошуємо вільними

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ \qquad x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \tag{6}$$

Складаємо таблицю для значень невідомих $x_1, \ldots, x_5$, відокремивши в ній вільні та головні невідомі, і надаємо вільним невідомим вказані в таблиці значення.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

Таблиця 1

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему рівнянь (6) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:

1) для першого набору $x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 0$ із (6) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;

2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (6) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;

3) для третього набору $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ із (6) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$.

Таким чином, заповнивши вільні місця в таблиці 1, одержимо нову таблицю.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Таблиця 2

Таблиця 2 задає три розв'язки $a_1 = (1,0,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0,1,0)$, $a_3 = (1,1,0,0,1)$ системи рівнянь (6), а, отже, і системи лінійних однорідних рівнянь (5). Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (5).

Загальним розв'язком системи (5) є довільна лінійна комбінація розв'язків фундаментальної системи

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

де δ_1, δ_2, δ_3 — довільні дійсні числа.

Вправи для самостійної роботи

1. Обчислити ранг наступних матриць методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення параметра λ, при яких матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

має найменший ранг.

3. Чому дорівнює ранг наступних матриць при різних значеннях параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити ранг наступних матриць за допомогою елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

5. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок наступних систем лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

є) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$

6. Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+\ \ 4x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+3x_3+\ \ 7x_4=1, \\ 8x_1-6x_2-\ \ x_3-\ \ 5x_4=9, \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=\lambda; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+\ \ 4x_4=3, \\ 2x_1+3x_2+6x_3+\ \ 8x_4=5, \\ -x_1+6x_2+9x_3+20x_4=11, \\ 4x_1+\ \ x_2+4x_3+\ \ \lambda x_4=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-\ \ x_2+3x_3+\ \ 4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+\ \ 6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+\ \ 8x_4=9, \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+\ \ 3x_2+\ \ x_3+2x_4=3, \\ 4x_1+\ \ 6x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 6x_1+\ \ 9x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4=9. \end{cases}$

7. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок для систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+\ \ 4x_3-\ \ 3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+\ \ 6x_3-\ \ 4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-\ \ 2x_3+\ \ 3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+\ \ 5x_3+\ \ 3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+\ \ 4x_3+\ \ 2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ \ x_3+3x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0, \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0, \\ 3x_1+2x_2\qquad\quad +4x_4+8x_5=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0, \\ x_1+\ \ x_2-4x_3=0, \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_2-x_4=0, \\ -x_1+x_3-x_5=0, \\ -x_2+x_4-x_6=0, \\ -x_3+x_5=0, \\ -x_4+x_6=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0, \\ x_2-x_4+x_6=0, \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0, \\ x_2-x_3+x_6=0, \\ x_1-x_4+x_5=0. \end{cases}$

8. Знайти системи лінійних однорідних рівнянь, для яких наступні системи векторів були б фундаментальними системами розв'язків:

а) $(3,4,2,1,6)$, $(5,9,7,4,7)$; б) $(4,3,-1,-1,11)$, $(1,6,8,5,-4)$.

§9. Лінійні оператори лінійного простору. Ядро і образ лінійного оператора. Матриця лінійного оператора. Зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L над полем F в себе називається *оператором* простору L. Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L над полем F називається *лінійним оператором* простору L, якщо виконуються умови:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$$

для довільних елементів x і y із L та довільного елемента α поля F. Таким чином, лінійний оператор лінійного простору L це лінійне відображення простору L в себе. Тому прикладом лінійного оператора є будь-який ізоморфізм лінійного простору L в себе.

Теорема 1 (про властивості лінійного оператора)**.** *Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем F. Тоді:*

1) $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$, *де* $\bar{0}$ *— нульовий елемент лінійного простору* L*;*
2) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ *для довільного елемента* $x \in L$*;*
3) *для довільних* $a_1, a_2, \ldots, a_s \in L$ *і* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in F$

$$\varphi(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_s a_s) = \alpha_1\varphi(a_1) + \cdots + \alpha_s\varphi(a_s);$$

4) *якщо* $a_1, \ldots, a_s$ *— лінійно залежна система елементів із* L*, то система* $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_s)$ *їхніх образів також лінійно залежна;*
5) *система елементів* $a_1, \ldots, a_s$ *із* L *є лінійно незалежною, якщо система образів* $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_s)$ *є лінійно незалежною.*

Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем F. Множина

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in L \mid \varphi(x) = \bar{0}\},$$

тобто множина всіх тих елементів із L, образи яких рівні нульовому елементу з L, називається *ядром оператора* φ, а множина

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in L\},$$

тобто множина всіх елементів із L, які є образами деяких елементів із L, називається *образом відображення* φ.

Теорема 2. *Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору L над полем F. Тоді* $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ *— підпростори лінійного простору L. Причому, якщо L — скінченновимірний лінійний простір над полем F, то* $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ *також є скінченновимірними лінійними просторами і*

$$\dim_F(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim_F(\operatorname{Im}\varphi) = \dim_F L.$$

Розмірність образу $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L називається *рангом* лінійного оператора φ, а розмірність ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного оператора φ простору L називається *дефектом* лінійного оператора φ. Із теореми 2 випливає, що сума рангу та дефекту лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору L дорівнює розмірності цього простору.

Теорема 3 (про існування і єдиність лінійного оператора)**.** *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F і a_1, a_2, …, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-якої системи елементів b_1, b_2, …, b_n лінійного простору L існує і тільки один лінійний оператор φ лінійного простору L над полем F такий, що $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, …, $\varphi(a_n) = b_n$.*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F і φ — його лінійний оператор. Виберемо у просторі L деякий базис a_1, a_2, …, a_n. Розкладемо образи елементів a_1, a_2, …, a_n по цьому ж базису простору L:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,\\
\varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n
\end{aligned}$$

де α_{ij} — деякий елемент поля F $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Із коефіцієнтів цих розкладів складемо матрицю

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Відмітимо, що i-ий стовпець матриці A_φ є координатним стовпцем елемента $\varphi(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Матриця A_φ називається *матрицею* *лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n* лінійного простору L над полем F.

Теорема 4. *Якщо у скінченновимірному лінійному просторі L над полем F вибрано базис a_1, a_2, ..., a_n, то відповідність між множиною всіх лінійних операторів простору L та множиною $F_{n\times n}$ всіх матриць порядку n з елементами з поля F, при якій кожному лінійному оператору ставиться у відповідність матриця цього лінійного оператора у базисі a_1, a_2, ..., a_n, є взаємно однозначним відображенням вказаних множин.*

Далі, нехай x — деякий елемент лінійного простору L, а y — образ елемента елемента x, тобто $y = \varphi(x)$. Розкладемо обидва елементи x і y у базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L:

$$x = \chi_1 a_1 + \chi_2 a_2 + \cdots + \chi_n a_n,$$
$$y = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n,$$

де χ_i, $\gamma_j \in F$ $(i, j = 1, 2 \ldots, n)$. Позначимо через X стовпець координат елемента x, а через Y — стовпець координат його образу y, тобто $X = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)^T$, $Y = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$. Тоді

$$Y = A_\varphi X.$$

Наведена формула називається *матричною формулою для координат образу вектора* при лінійному оператору φ.

Зв'язок матриць лінійного відображення при заміні базисів. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F і φ — лінійний оператор простору L. Розглянемо у просторі L деякі базиси a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_n. Нехай A_φ — матриця лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n, а B_φ — матриця лінійного оператора φ у базисі b_1, b_2, ..., b_n. Тоді справедливою є рівність

$$B_\varphi = T^{-1} A_\varphi T, \tag{1}$$

де T — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n.

Матриці A і B порядку n з елементами з поля F називаються *подібними*, якщо існує оборотна матриця T порядку n з елементами з поля F така, що виконується рівність $B = T^{-1}AT$.

Теорема 5. *Матриці одного й того ж лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору у різних базисах цього простору є подібними матрицями.*

Приклади розв'язування задач

1. Оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ кожному вектору $x = (x_1, x_2, x_3)$ ставить у відповідність вектор

$$\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, 3x_2 - x_1).$$

Довести, що φ є лінійним оператором векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1,1,1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю лінійного оператора φ у цьому ж базисі.

Розв'язання. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — довільні вектори простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$\varphi(x+y) = \varphi[(x_1+\gamma_1, x_2+\gamma_2, x_3+\gamma_3)] =$$
$$= (x_1+\gamma_1+x_2+\gamma_2+x_3+\gamma_3, 2(x_1+\gamma_1) - (x_3+\gamma_3),$$
$$3(x_2+\gamma_2) - (x_1+\gamma_1)) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1-x_3, 3x_2-x_1) +$$
$$+ (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3, 2\gamma_1-\gamma_3, 3\gamma_2-\gamma_1) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(\lambda x) = \varphi[(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)] = (\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3, 2(\lambda x_1) - \lambda x_3,$$
$$3(\lambda x_2) - \lambda x_1) = \lambda(x_1+x_2+x_3, 2x_1-x_3, 3x_2-x_1) = \lambda\varphi(x),$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$. Отже, за означенням φ — лінійний оператор векторного простору $\mathbb{R}^3$.

Нехай $\varphi(x) = x'_1e_1 + x'_2e_2 + x'_3e_3$, для деяких x'_1, x'_2, $x'_3 \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi(x) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1-x_3, 3x_2-x_1)$ і координати довільного вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 співпадають з його компонентами, то одержуємо формули для координат образу вектора у базисі e_1, e_2, e_3

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ x'_2 = 2x_1 - x_3, \\ x'_3 = 3x_2 - x_1, \end{cases}$$

або в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно

$$\varphi(a) = (3,1,2),\ \varphi(e_1) = (1,2,-1),\ \varphi(e_2) = (1,0,3),\ \varphi(e_3) = (1,-1,0).$$

Оскільки

$$\varphi(e_1) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3,$$
$$\varphi(e_2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3,$$
$$\varphi(e_3) = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

то матриця

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ у базисі e_1, e_2, e_3.

2. Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що відображає вектори базису $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0)$, $a_3 = (2, 2, 1)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (0, 0, 0)$, $b_2 = (1, 0, 0)$, $b_3 = (1, 1, 0)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

Розв'язання. Нехай x — довільний вектор простору $\mathbb{R}^3$ і

$$x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$$

— розклад вектора a у базисі a_1, a_2, a_3. Розглянемо відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, яке кожному вектору $x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ ставить у відповідність вектор

$$\varphi(x) = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3.$$

Доведемо, що φ — лінійний оператор векторного простору $\mathbb{R}^3$ Нехай $y = \gamma_1a_1 + \gamma_2a_2 + \gamma_3a_3$ — також довільний вектор простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$\varphi(x + y) = \varphi[(x_1 + \gamma_1)a_1 + (x_2 + \gamma_2)a_2 + (x_3 + \gamma_3)a_3] =$$
$$= (x_1 + \gamma_1)b_1 + (x_2 + \gamma_2)b_2 + (x_3 + \gamma_3)b_3 =$$
$$= (x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) + (\gamma_1b_1 + \gamma_2b_2 + \gamma_3b_3) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(\lambda x) = \varphi[(\lambda x_1)a_1 + (\lambda x_2)a_2 + (\lambda x_3)a_3] = (\lambda x_1)b_1 +$$
$$+(\lambda x_2)b_2 + (\lambda x_3)b_3 = \lambda(x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3) = \lambda\varphi(x),$$

для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$. Це означає що, φ — лінійний оператор. Очевидно $\varphi(a_1) = b_1$, $\varphi(a_2) = b_2$, $\varphi(a_3) = b_3$.

Знайдемо матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3. Для цього обчислимо координати образів базисних векторів у цьому ж базисі.

Нехай

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) &= b_1 = \tau_{11}a_1 + \tau_{21}a_2 + \tau_{31}a_3,\\ \varphi(a_2) &= b_2 = \tau_{12}a_1 + \tau_{22}a_2 + \tau_{32}a_3,\\ \varphi(a_3) &= b_3 = \tau_{13}a_1 + \tau_{23}a_2 + \tau_{33}a_3.\end{aligned} \tag{2}$$

Склавши матрицю із компонент векторів a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 і виконавши наступні елементарні перетворення над рядками цієї матриці, ми отримаємо значення координат τ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, що задовольняють рівностям (2).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Таким чином,

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

— матриця оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

3. Нехай

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Im}\varphi + \dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Ker}\varphi = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$.

Розв'язання. Нехай x — довільний вектор із $\mathbb{R}^4$ і

$$x = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$$

— розклад вектора x у базисі c_1, c_2, c_3, c_4 векторного простору $\mathbb{R}^4$ (x_j — деяке дійсне число, $j = 1, 2, 3, 4$). Тоді

$$\varphi(x) = x_1\varphi(c_1) + x_2\varphi(c_2) + x_3\varphi(c_3) + x_4\varphi(c_4),$$

тобто образ $\varphi(x)$ вектора x є лінійною комбінацією образів $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$, $\varphi(c_3)$, $\varphi(c_4)$ базисних векторів c_1, c_2, c_3, c_4. Навпаки, для довільних дійсних чисел x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 лінійна комбінація

$$x'_1\varphi(c_1) + x'_2\varphi(c_2) + x'_3\varphi(c_3) + x'_4\varphi(c_4)$$

є образом вектора

$$x' = x'_1c_1 + x'_2c_2 + x'_3c_3 + x'_4c_4.$$

Це означає, що образ $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного оператора φ є множиною всіх лінійних комбінацій системи векторів $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$, $\varphi(c_3)$, $\varphi(c_4)$.

Далі, знайдемо ранг цієї системи векторів. Для цього обчислимо ранг матриці A_φ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} A_\varphi = 2$.

Із означень рангу матриці, рангу системи елементів лінійного простору та ознаки лінійно залежної системи елементів звідси одержуємо, що система $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$ є лінійно незалежною системою векторів, а вектори $\varphi(c_3)$, $\varphi(c_4)$ можна представити у вигляді лінійної комбінації системи векторів $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$.

Підсумовуючи все вище сказане робимо висновок, що система векторів $\varphi(c_1)$, $\varphi(c_2)$ є базисом підпростору $\operatorname{Im}\varphi$. Тому $\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Im}\varphi = 2$.

Знайдемо тепер базис підпростору $\operatorname{Ker}\varphi$. Нехай

$$x = x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3 + x_4c_4$$

— довільний вектор із ядра $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного оператора φ. Тоді для координат x_1, x_2, x_3, x_4 цього вектора справедлива рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь (3) відносно невідомих x_1, x_2, x_3, x_4. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

— мінор матриці A_φ максимального порядку, відмінний від нуля, то система (3) еквівалентна системі рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 - 4x_4, \\ -2x_1 + x_2 = x_3 + 3x_4. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4, \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

Отже, $\operatorname{Ker}\varphi = \{x_3u_1 + x_4u_2 \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, де $u_1 = -c_1 - c_2 + c_3$, $u_2 = -2c_1 - c_2 + c_4$. Тому $\dim_{\mathbb{R}}\operatorname{Ker}\varphi = 2$ і система векторів u_1, u_2 є базисом підпростору $\operatorname{Ker}\varphi$.

4. Лінійний оператор φ скінченновимірного лінійного простору L над полем F має матрицю

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

у базисі a_1, a_2 простору L. Знайти матрицю лінійного оператора φ у базисі b_1, b_2 простору L, якщо $b_1 = 2a_1 - 3a_2$, $b_2 = a_1 - 2a_2$.

Розв'язання. Випишемо матрицю переходу T від базису a_1, a_2 до базису b_1, b_2:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю до матриці T:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця B_φ оператора φ у базисі b_1, b_2 обчислюється за формулою

$$B_\varphi = T^{-1} A_\varphi T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. З'ясувати, які з наступних операторів векторного простору $\mathbb{R}^3$ є лінійними операторами:

а) $\varphi(x) = (2x_1, 0, -2x_3)$;
б) $\psi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
в) $\phi(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$;
г) $\rho(x) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3^2)$;
д) $\sigma(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
е) $o(x) = (0, 0, 0)$;
є) $\varepsilon(x) = (x_1, x_2, x_3)$,

де $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. У випадку лінійності оператора знайти його матрицю у канонічному базисі векторного простору $\mathbb{R}^3$, базиси образу та ядра цього лінійного оператора.

2. Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що відображає вектори базису a_1, a_2, a_3 цього простору відповідно у вектори b_1, b_2, b_3. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3, якщо:

а) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 0)$;
$b_1 = (-4, -1, 1)$, $b_2 = (7, -1, 0)$, $b_3 = (0, -1, 0)$.
б) $a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (2, -1, 1)$;
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.

3. Довести, що множення кожної матриці із лінійного простору $\mathbb{R}_{2\times 2}$ всіх дійсних матриць другого порядку: а) зліва, б) справа на дану матрицю

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times 2}$$

є лінійним оператором. Знайти матриці цих операторів у базисі

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Довести, що диференціювання многочленів із лінійного простору всіх многочленів від змінної x з дійсними коефіцієнтами, степені яких не перевищують 4, є лінійним оператором. Знайти матриці цього лінійного оператора у базисах:

а) $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$; б) $1,\ x-1,\ (x-1)^2,\ (x-1)^3,\ (x-1)^4$.

5. Нехай A — матриця лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L у базисі a_1, a_2, a_3 цього простору. Знайти координатний рядок образу $\varphi(x)$ елемента x із L, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$(1, -2, 3)$ — координатний рядок елемента x у базисі a_1, a_2, a_3.

6. Лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ має матрицю A у базисі a_1, a_2, a_3. Знайти матрицю лінійного оператора φ у базисі b_1, b_2, b_3, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $a_1 = (0,0,1)$, $a_2 = (0,1,0)$, $a_3 = (1,0,0)$, $b_1 = (2,3,1)$, $b_2 = (3,4,1)$, $b_3 = (1,2,2)$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_1 = (0,-1,0)$, $a_2 = (0,1,-1)$, $a_3 = (1,0,0)$, $b_1 = (1,3,2)$, $b_2 = (-1,0,0)$, $b_3 = (1,1,1)$.

7. Лінійний оператор φ скінченновимірного лінійного простору L над полем F має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

у базисі a_1, a_2, a_3, a_4 простору L. Знайти матрицю лінійного оператора φ у базисі b_1, b_2, b_3, b_4, якщо:

а) $b_1 = a_4$, $b_2 = a_3$, $b_3 = a_2$, $b_4 = a_1$;

б) $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $b_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$;

в) $b_1 = a_1 + 3a_2$, $b_2 = 2a_1 + 5a_2$, $b_3 = a_3$, $b_4 = a_4$.

§10. Невироджені лінійні оператори. Дії над лінійними операторами

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F і φ — деякий лінійний оператор простору L. Лінійний оператор φ називається *невиродженим*, якщо його ранг дорівнює розмірності лінійного простору L над полем F. У протилежному випадку лінійний оператор φ називається *виродженим.*

Теорема 1. *Лінійний оператор φ скінченновимірного простору L над полем F є невиродженим тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:*

1) *образ $\operatorname{Im}\varphi$ лінійного оператора співпадає з простором L;*
2) *дефект лінійного оператора дорівнює 0;*
3) *ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ лінійного оператора складається лише з нульового елемента.*

Теорема 2. *Нехай φ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Якщо φ є невиродженим лінійним оператором, то матриця цього оператора у будь-якому базисі простору L є невиродженою матрицею. Якщо матриця лінійного оператора φ у деякому базисі лінійного простору L є невиродженою матрицею, то оператор φ є невиродженим лінійним оператором простору L.*

Теорема 3. *Нехай φ — невироджений лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Тоді образ $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, …, $\varphi(a_s)$ будь-якої лінійно неналежної системи елементів a_1, a_2, …, a_s простору L є лінійно незалежною системою.*

Наслідок 1. *Нехай φ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Якщо φ є невиродженим лінійним оператором, то образ будь-якого базису простору L є базисом лінійного простору L над полем F. Якщо образом деякого базису лінійного простору L є базис простору L, то оператор φ є невиродженим лінійним оператором простору L.*

Нехай L — довільні лінійний простір над полем F. Множину всіх лінійних операторів простору L будемо позначати через $\mathcal{L}_F(L)$. Введемо на цій множині дії додавання операторів і множення елементів поля F на оператори із $\mathcal{L}_F(L)$.

Сумою лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L називається оператор ω простору L такий, що $\omega(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ для довільного елемента x із L. Суму лінійних операторів φ і ψ позначають символом $\varphi + \psi$ (тобто у даному випадку $\omega = \varphi + \psi$).

Добутком елемента α поля F на лінійний оператор φ лінійного простору L над полем F називається оператор ϕ простору L такий, що $\phi(x) = \alpha\varphi(x)$ для довільного елемента x із L. Позначають добуток елемента α поля F на лінійний оператор φ через $\alpha\varphi$.

Добутком лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L над полем F називається оператор σ простору L такий, що $\sigma(x) = \varphi(\psi(x))$ для довільного елемента x із L. Позначають добуток лінійних операторів φ і ψ через $\varphi\psi$.

Теорема 4. *Сума лінійних операторів лінійного простору L над полем F є лінійним оператором цього простору. Добуток елемента поля F на лінійний оператор простору L є лінійним оператором простору L. Добуток лінійних операторів лінійного простору L над полем F є лінійним оператором простору L.*

Теорема 5. *Множина $\mathcal{L}_F(L)$ всіх лінійних операторів лінійного простору L над полем F відносно дій додавання лінійних операторів і множення елемента поля F на лінійний оператор є лінійним простором над полем F*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F. Виберемо в просторі L деякий базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Розглянемо відображення Γ лінійного простору $\mathcal{L}_F(L)$ у лінійний простір $F_{n\times n}$, яке кожному лінійному оператору φ із $\mathcal{L}_F(L)$ ставить у відповідність матрицю лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору L. Тоді для довільних лінійних операторів φ і ψ лінійного простору L і для довільного елемента α поля F справедливі рівності:

$$\Gamma(\varphi + \psi) = \Gamma(\varphi) + \Gamma(\psi), \quad \Gamma(\alpha\varphi) = \alpha\Gamma(\varphi), \quad \Gamma(\varphi\psi) = \Gamma(\varphi)\Gamma(\psi).$$

Ці рівності встановлюють зв'язок дій над лінійними лінійними операторами з діями над їх матрицями. Інакше кажучи справедлива наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F. Матриця суми $\varphi + \psi$ лінійних операторів φ і ψ простору L у довільно вибраному базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору L дорівнює сумі матриць операторів φ і ψ у тому ж базисі. Матриця добутку елемента поля F на лінійний оператор φ простору L дорівнює добутку цього елемента поля на матрицю оператора φ у тому ж базисі. Матриця добутку $\varphi\psi$ лінійних операторів φ і ψ простору L*

у довільно вибраному базисі простору L дорівнює добутку матриць операторів φ і ψ у тому ж базисі.

Обернений оператор. Нехай L — лінійний простір над полем F. Лінійний оператор лінійного простору L, що відображає кожний елемент із L в себе називається *одиничним* або *тотожним* оператором простору L. Позначимо цей оператор через Id. Отже,

$$Id(x) = x \qquad (x \in L).$$

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' простору L такий, що $\varphi'\varphi = Id$ (відповідно $\varphi\varphi' = Id$), то φ' називається *лівим оберненим* (відповідно *правим оберненим*) оператором для оператора φ.

Теорема 7. *Якщо для лінійного оператора φ існують лівий обернений і правий обернений, то ці обернені оператори співпадають.*

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається *оборотним оператором*, якщо існує такий лінійний оператор $\varphi' \in \mathcal{L}_F(L)$, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = Id$. Оператор φ' при цьому називається *оберненим* до оператора φ і позначається символом φ^{-1}.

Відмітимо, що для нескінченновимірного лінійного простору L можуть існувати лінійні оператори, які мають ліві обернені (або праві) і не мають правих (відповідно лівих) обернених.

Теорема 8. *Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем F є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:*

1) *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*

2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Наслідок 1. *Лінійний оператор φ скінченновимірного лінійного простору L над полем F є оборотним тоді і тільки тоді, коли φ є невиродженим лінійним оператором.*

Приклади розв'язування задач

1. Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ відображає вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор $\varphi(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$,

$$B_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі $b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (2, -1, 1)$, $b_3 = (3, -2, 3)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів $2\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= (1, 0, -1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 - 1 \cdot e_3, \\ \varphi(e_2) &= (-1, 1, 0) = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3, \\ \varphi(e_3) &= (0, -1, 1) = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \end{aligned}$$

то

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матриця оператора φ у канонічному базисі.

Знайдемо матрицю переходу T від базису b_1, b_2, b_3 до канонічного базису e_1, e_2, e_3. Очевидно,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

— матриця переходу від базису e_1, e_2, e_3 до базису b_1, b_2, b_3. Обчислимо матрицю T, обернену до матриці T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця A_ψ оператора ψ у канонічному базисі дорівнює

$$A_\psi = T^{-1}B_\psi T = \begin{pmatrix} -3 & -31 & -14 \\ 2 & 19 & 8 \\ -4 & -26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо матриці $A_{2\varphi-\psi}$, $A_{\varphi\psi}$, $A_{\psi\varphi}$ відповідно операторів $2\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$ у базисі e_1, e_2, e_3.

$$A_{2\varphi-\psi} = 2A_\varphi - 3A_\psi = \begin{pmatrix} 5 & 29 & 14 \\ -2 & -17 & -10 \\ 2 & 26 & -8 \end{pmatrix},$$

$$A_{\varphi\psi} = A_\varphi A_\psi = \begin{pmatrix} -5 & -50 & -22 \\ 6 & 45 & 18 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_{\psi\varphi} = A_\psi A_\varphi = \begin{pmatrix} 11 & -28 & 17 \\ -6 & 17 & -11 \\ 6 & -22 & 16 \end{pmatrix}.$$

2. Нехай $C^\infty_{[0,1]}$ — лінійний простір всіх нескінченно диференційованих функцій на проміжку $[0,1]$ над полем дійсних чисел. Розглянемо оператор D диференціюванння і оператор I інтегрування простору $C^\infty_{[0,1]}$, визначені наступним чином:

$$D\left(f(x)\right) = f'(x), \qquad I\left(f(x)\right) = \int_0^x f(t)dt$$

де $f(x) \in C^\infty_{[0,1]}$. Показати, що D і I — лінійні оператори простору $C^\infty_{[0,1]}$. Довести, що D є лівим оберненим до оператора I, але не є правим оберненим для цього оператора.

Розв'язання. Із властивостей похідної та визначеного інтегралу функції слідує, що для для довільних функцій $f(x)$ і $g(x) \in C^\infty_{[0,1]}$ та для довільного дійсного числа α справедливі рівності:

$$D(f(x)+g(x)) = (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = D(f(x))+D(g(x)),$$
$$D(\alpha f(x)) = (\alpha f(x))' = \alpha f'(x) = \alpha D(f(x)),$$
$$I(f(x)+g(x)) = \int_0^x (f(t)+g(t))dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt =$$
$$= I(f(x)) + I(g(x)),$$
$$I(\alpha f(x)) = \int_0^x \alpha f(t)dt = \alpha \int_0^x f(t)dt = \alpha I(f(x)).$$

Це у свою чергу означає, що D і I є лінійними операторами простору $C^{\infty}_{[0,1]}$.

Далі, нехай $f(x)$ — довільна функція із простору $C^{\infty}_{[0,1]}$, а $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$ (тобто $F'(x) = f(x)$). Тоді

$$DI(f(x)) = D(I(f(x)) = \left(\int_0^x f(t)dt\right)' =$$
$$= (F(x) - F(0))' = F'(x) = f(x),$$
$$ID(f(x)) = I(D(f(x)) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0).$$

Звідси одержуємо, що $DI = Id$, а $ID \neq Id$, бо, наприклад,

$$ID(\cos(x)) = \cos(x) - 1.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Чи є лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ невиродженим, якщо

а) $\varphi(x) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 - 3x_2 + 2x_3)$, де $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, 3x_1 - x_2)$, де $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$?

2. Нехай A — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у базисі a_1, a_2, a_3 цього простору. Чи є лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ невиродженим, якщо

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?

Якщо φ є невиродженим лінійним оператором, то знайти матрицю оберненого лінійного оператора φ^{-1} у базисі a_1, a_2, a_3 простору $\mathbb{R}^3$.

3. Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ відображає вектор $x = (x_1, x_2)$ у вектор $\varphi(x) = (2x_1 + x_2, x_1 - 2x_2)$, а лінійний оператор ψ цього ж простору відображає вектор $x = (x_1, x_2)$ у вектор $\psi(x) = (3x_2, 4x_1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^2$ матриці лінійних операторів $\varphi + \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

4. Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^2$ в базисі a_1, a_2 має матрицю A, а лінійний оператор ψ цього ж простору в базисі b_1, b_2 має матрицю B. Знайти матрицю C лінійного оператора $\varphi + \psi$

а) у базисі a_1, a_2, якщо $a_1 = (1, -2)$, $a_2 = (3, -5)$, $b_1 = (1, 2)$, $b_2 = (2, 5)$,

$$A = \begin{pmatrix} 37 & -13 \\ 108 & -38 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

б) у базисі b_1, b_2, якщо $a_1 = (7, 3)$, $a_2 = (2, 1)$, $b_1 = (6, 1)$, $b_2 = (5, 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. Нехай φ — лінійний оператор лінійного простору всіх многочленів, степінь яких менше або дорівнює 3, з дійсними коефіцієнтами, який відображає кожен многочлен у його похідну. Довести, що φ^4 є нульовим оператором, тобто $\operatorname{Im} \varphi^4 = \{\bar{0}\}$.

6. Нехай φ — лінійний оператор диференціювання, ψ — лінійний оператор множення на x у лінійному просторі $\mathbb{R}[x]$ всіх многочленів від змінної x з дійсними коефіцієнтами. Довести, що для довільного натурального числа n справедлива рівність $\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$.

§11. Власні вектори і власні значення лінійного оператора

Нехай L — лінійний простір над полем F і $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор простору L. Ненульовий вектор a простору L називається *власним вектором* оператора φ, якщо існує такий елемент α поля F, що $\varphi(a) = \alpha a$. Елемент α поля F називається *власним значенням* оператора φ, якщо існує такий ненульовий елемент a простору L, що $\varphi(a) = \alpha a$. Будемо говорити, що *власний вектор* $a \in L$ оператора φ *належить власному значенню* $\alpha \in F$ цього оператора, якщо $\varphi(a) = \alpha a$. Підкреслимо, що власними векторами оператора φ можуть бути тільки ненульові вектори простору L. Власне значення оператора φ може бути і нульовим елементом поля F.

Теорема 1. *Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор лінійного простору L над полем F, α — власне значення оператора φ. Множина L_α всіх власних векторів, які належать власному значенню α, разом з нульовим вектором простору L є підпростором лінійного простору L.*

Теорема 2. *Множина власних векторів лінійного оператора $\varphi : L \to L$, які належать попарно різним власним значенням цього оператора є лінійно незалежною системою.*

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— квадратна матриця порядку n над полем F, λ — деяка невідома. Матриця

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

називається *характеристичною матрицею* матриці A (E — одинична матриця порядку n). Детермінант $|A - \lambda E|$ матриці $A - \lambda E$ називається *характеристичним многочленом матриці* A. Це многочлен степеня n від невідомої λ над полем F:

$$|A - \lambda E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \gamma_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^{n-k} \gamma_k \lambda^k + \dots + \gamma_n.$$

Коефіцієнт γ_k є сумою всіх тих мінорів порядку k, які нанизані на діагональ матриці A (тобто діагоналі цих мінорів містяться в діагоналі матриці A) ($k = 1, 2, \ldots, n$). Відмітимо, що $\gamma_n = |A|$, а $\gamma_1 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}$ називається *слідом* матриці A і позначається через $tr\,A$.

Для $n = 2$ і $n = 3$ характеристичні многочлени мають вигляд:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\lambda + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\lambda^2 -$$

$$- \left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + |A|.$$

Квадратні матриці A і B порядку n над полем F називаються *подібними матрицями*, якщо існує така невироджена порядку n над полем F матриця T, що $B = T^{-1}AT$.

Теорема 3. *Характеристичні многочлени подібних матриць співпадають.*

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем F, $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор цього простору і A — матриця оператора φ в деякому базисі простору L. Характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A називається *характеристичним многочленом лінійного оператора* φ.

Теорема 4. *Характеристичний многочлен лінійного оператора φ скінченновимірного лінійного простору L над полем F не залежить від вибору матриці A (вірніше від вибору базису простору L для знаходження цієї матриці).*

Теорема 5. *Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем F і $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор цього простору. Елемент α поля F є власним значенням оператора φ тоді і тільки тоді, коли α є коренем характеристичного многочлена лінійного оператора φ.*

Алгоритм знаходження власних значень та векторів, що їм належать, лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору. Нехай $\varphi : L \to L$ — лінійний оператор скінченновимірного лінійного простору L над полем F. Для того, щоб знайти власні значень та векторів, що їм належать, лінійного оператора φ потрібно:

1-й крок. Вибрати в просторі L деякий базис $a_1, \ldots, a_n$ і знайти матрицю A лінійного оператора φ у цьому базисі.

2-й крок. Знайти характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ лінійного оператора φ.

3-й крок. Знайти всі (попарно різні) корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ многочлена $|A - \lambda E|$, які належать полю F.

4-й крок. Для кожного власного значення $\alpha = \alpha_i$ $(i \in \{1, 2, \ldots, s\})$ складаємо систему лінійних однорідних рівнянь з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$ із матрицею $A - \alpha E$:

$$(A - \alpha E)X = \bar{0}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо фундаментальну систему розв'язків цієї системи рівнянь. Для кожного розв'язку $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in F)$ із фундаментальної системи розв'язків складемо вектор $b = \gamma_1 a_1 + {} + \gamma_2 a_2 \cdots + \gamma_n a_n$. Нехай $b_1, \ldots, b_r$ — система векторів простору L, які за цим правилом одержуються із всіх розв'язків фундаментальної системи. Тоді множина всіх власних векторів оператора φ, які належать власному значенню $\alpha = \alpha_i$ співпадає з множиною всіх лінійних комбінацій $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_r b_r$, де $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ — довільні елементи поля F не рівні нулю одночасно.

Відмітимо, якщо у скінченновимірному лінійному просторі L з лінійним оператором φ існує базис з власних векторів оператора φ, то матриця оператора φ в цьому базисі є діагональною матрицею.

Приклади розв'язування задач

1. Показати, що власний вектор оператора φ належить тільки одному власному значенню цього оператора.

Розв'язання. Нехай L — лінійний простір над полем F, φ — лінійний оператор цього простору і a — власний вектор оператора φ. Припустимо протилежне, тобто нехай власний вектор a належить двом різним власним значенням α і β оператора φ. Це означає, що

$\varphi(a) = \alpha a$ і $\varphi(a) = \beta a$. Звідси $\alpha a = \beta a$. Отже, $(\alpha - \beta)a = 0$. Оскільки $a \neq 0$, то $\alpha - \beta = 0$, тобто $\alpha = \beta$. Це суперечить тому, що α і β — різні елементи поля F.

2. Нехай $C^{\infty}_{[0,1]}$ — лінійний простір нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел і D — оператор диференціювання:

$$D\,(f(x)) = f'(x) \quad (f(x) \in C^{\infty}_{[0,1]}).$$

Показати, що любе дійсне число є власним значенням оператора D.

Розв'язання. Нехай α — довільне дійсне число. Розглянемо функцію $f(x) = e^{\alpha x}$. Очевидно $e^{\alpha x} \in C^{\infty}_{[0,1]}$ і

$$D(e^{\alpha x}) = (e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}.$$

Отже, функція $f(x) = e^{\alpha x}$ є власним вектором лінійного оператора D, що належить власному значенню α.

3. Нехай F — поле, $L = F^2$ і φ — лінійний оператор простору L, який в деякому базисі цього простору має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показати, що

1) якщо $F = \mathbb{R}$, то оператор φ не має власних значень;
2) якщо $F = \mathbb{C}$, то оператор φ має два власні значення.

Розв'язання. Знайдемо характеристичний многочлен лінійного оператора φ:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Якщо многочлен $\lambda^2 + 1$ розглядати над полем $\mathbb{R}$ дійних чисел, то цей многочлен не має коренів. А це означає, що лінійний оператор φ дійсного двовимірного векторного простору $\mathbb{R}^2$, який має матрицю A у деякому базисі цього простору, не має власних значень.

Якщо ж многочлен $\lambda^2 + 1$ розглядати над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, то цей многочлен має два кореня, а саме i та $-i$. Тому лінійний оператор φ комплексного двовимірного векторного простору $\mathbb{C}^2$, який має матрицю A у деякому базисі цього простору, має два власних значення i та $-i$.

4. Розглянемо динамічну систему (див. рис. 3), яка складається з двох тіл однакової маси m горизонтально з'єднаних між собою трьома однаковими пружинами з коефіцієнтом жорсткості k та закріпленими до двох нерухомих стінок. Знайти закони руху кожного з вказаних тіл у випадку горизонтального зміщення цих тіл, якщо на ці тіла не діють сили гравітації та опору (масами пружин знехтувати).

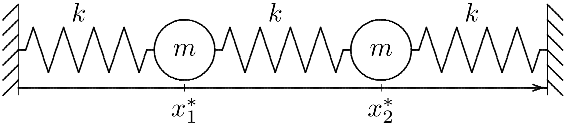

Рис. 3. Стан рівноваги.

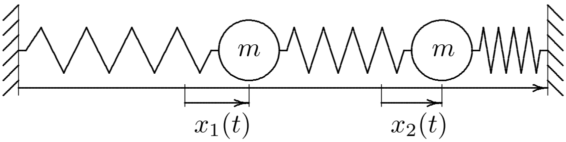

Рис. 4. Стан після зміщення.

Розв'язання. Нехай $x_1(t)$ — величина зміщення лівого тіла від положення рівноваги x_1^* у момент часу t, а x_2^* — величина зміщення правого тіла від свого положення рівноваги x_2^* у цей момент часу. Тоді згідно другого закону Ньютона сила, що діє на перше тіло, дорівнює

$$m(x_1(t) + x_1^*)'' = mx_1''(t).$$

Аналогічно, сила, що діє на друге тіло, дорівнює $mx_2''(t)$.

З іншого боку тіла знаходяться під впливом сил розтягу чи стискання пружин, які згідно закону Гука прямо пропорційні величині розтягу чи стиску пружини. Тому за третім законом Ньтона справедливі наступні рівності:

$$\begin{cases} mx_1''(t) = -kx_1(t) + k(x_2(t) - x_1(t)), \\ mx_2''(t) = -kx_2(t) + k(x_1(t) - x_2(t)). \end{cases} \tag{1}$$

Таким чином, щоб знайти закони руху кожного з тіл, досить розв'язати так звану систему лінійних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$

$$\begin{cases} mx_1''(t) = -2kx_1(t) + kx_2(t), \\ mx_2''(t) = kx_1(t) - 2kx_2(t). \end{cases} \tag{2}$$

Із теорії систем лінійних диференціальних рівнянь слідує, що розв'язок системи рівнянь (2) є лінійною комбінацією розв'язків, що мають наступний вигляд

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\omega t} \\ C_2 e^{\omega t} \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, ω — деякі константи, причому ω може бути комплексним числом. Якщо $\omega = a + bi \in \mathbb{C}$, то "твірні" розв'язки шукають у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_1 e^{at}\cos(bt) \\ C_2 e^{at}\cos(bt) \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} C_1 e^{at}\sin(bt) \\ C_2 e^{at}\sin(bt) \end{pmatrix}.$$

Підставимо замість $x_1(t)$ і $x_2(t)$ відповідно $C_1 e^{\omega t}$ і $C_2 e^{\omega t}$ у систему рівнянь (2). Одержимо

$$\begin{cases} mC_1\omega^2 e^{\omega t} = -2kC_1 e^{\omega t} + kC_2 e^{\omega t}, \\ mC_2\omega^2 e^{\omega t} = kC_1 e^{\omega t} - 2kC_2 e^{\omega t}. \end{cases} \tag{3}$$

Оскільки рівності (3) справедливі для довільного значення t, то звідси випливає, що

$$\begin{cases} mC_1\omega^2 = -2kC_1 + kC_2, \\ mC_2\omega^2 = kC_1 - 2kC_2. \end{cases} \tag{4}$$

Поділимо ліву і праву частини кожної із рівностей (4) на m, а опісля перепишемо нові рівності у матричній формі

$$\omega^2 \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ω^2 є власним значенням, а вектор (C_1, C_2) — власним вектором, що йому належить, деякого лінійного оператора φ двовимірного дійсного векторного простору, який задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

у деякому базисі цього простору.

Обчислимо характеристичний многочлен матриці A:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2k}{m}-\lambda & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4k}{m}\lambda + \frac{3k^2}{m^2}.$$

Далі знаходимо його корені:

$$\lambda_1 = -\frac{k}{m}, \qquad \lambda_2 = -\frac{3k}{m}.$$

Тому

$$\omega^2 = -\frac{k}{m} \quad \text{або} \quad \omega^2 = -\frac{3k}{m}.$$

Звідси

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i \quad \text{або} \quad \omega = \pm\sqrt{\frac{3k}{m}}i.$$

Далі, знаходимо власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$. Для цього досить розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} -\frac{2k}{m}-\lambda_1 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m}-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}.$$

Не важко бачити, що вектор $(1,1)$ утворює фундаментальну систему розв'язків цієї системи лінійних однорідних рівнянь. Тому всі власні вектори, що належать власному значенню $\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ мають вигляд $\alpha \cdot (1,\ 1)$, де α — довільне дійсне число відмінне від нуля.

Аналогічно можна показати, що всі власні вектори лінійного оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ мають вигляд $\beta \cdot (1,\ -1)$, де β — довільне дійсне число відмінне від нуля.

Підсумувавши все вище сказане, із теорії систем лінійних диференціальних рівнянь слідує, що розв'язок системи рівнянь (2) має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \alpha \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \\ &+\gamma \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \\ -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \\ -\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

де α, β, γ, δ — довільні дійсні числа. Використовуючи властивості тригонометричних функцій cos та sin розв'язок (5) можна переписати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) \\ \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_1\right) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right) \\ \\ -\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \theta_2\right) \end{pmatrix}.$$

Залишимо читачеві можливість обґрунтувати фізичний зміст констант A_1, A_2, θ_1, θ_2 та наявність двох власних значень, яким відповідно належать власні вектори $(1, 1)$ та $(1, -1)$.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора φ двовимірного дійсного векторного простору $\mathbb{R}^2$, заданого у канонічному базисі цього простору матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора ψ тривимірного дійсного векторного простору $\mathbb{R}^3$, заданого у деякому базисі a_1, a_2, a_3 цього простору матрицею B, якщо:

а) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$; г) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; е) $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора ψ дійсного векторного простору $\mathbb{R}^4$, якщо:

а) $\psi(x) = (x_1, 0, 0, x_4)$, де $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$;

б) $\psi(x) = (x_1 + x_3, 0, 0, x_4)$, де $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

4. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора φ лінійного простору L над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, якщо:

а) $L = R[x]_n$, $\varphi(f(x)) = f'(x)$, де $f(x) \in R[x]_n$;

б) $L = R_{n\times n}$, $\varphi(A) = A^T$, де $A \in R_{n\times n}$;

в) $L = \langle \cos x, \sin x\rangle$, $\varphi(f(x)) = f'(x)$, де $f(x) \in L$.

5. Вияснити, які з наступних матриць подібні діагональним матрицям:

а) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & 10 & -12 \\ 3 & 8 & -9 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

§12. Евклідові та унітарні простори

Лінійний простір L над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ називається *евклідовим простором*, якщо в просторі L окрім лінійних операцій над векторами введено ще одну дію. Нова дія кожній впорядкованій парі векторів x, y простору L ставить у відповідність дійсне число, що позначається через (x, y), називається *скалярним добутком* векторів x та y і ця дія задовольняє наступним умовам (*аксіомам скалярного добутку*):

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4) $(x, x) > 0$ $(x \neq 0)$

для довільних векторів x, x_1, x_2, y із L і довільного числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Прикладами евклідових просторів є:

а) n-вимірний векторний простір $\mathbb{R}^n$ відносно скалярного добутку

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, його називають *$n$-вимірним евклідовим простором*;

б) простір $C_{[0,1]}$ всіх неперервних на сегменті $[0, 1]$ функцій відносно скалярного добутку

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \qquad (f, g \in C_{[0,1]}).$$

Нехай L евклідів простір, $a_1, \ldots, a_s$ — довільна система векторів в L і

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_s a_s, \quad y = y_1 a_1 + \cdots + y_s a_s$$

де $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{R}$. Тоді із властивостей скалярного добутку випливає, що

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} x_i y_j (a_i, a_j). \tag{1}$$

Матриця

$$\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_s) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_s, a_1) & (a_s, a_2) & \ldots & (a_s, a_s) \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Ґрама системи векторів* $a_1, \ldots, a_s$.

Якщо система векторів $a_1, \ldots, a_s$ є базисом простору L, то формула (1) для (x, y) встановлює *скалярний добуток векторів* x *і* y *із* L *у координатній формі.*

Базис $a_1, \ldots, a_n$ скінченновимірного евклідового простору L називається *ортонормованим базисом*, якщо

$$(a_i, a_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j; \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$$

Теорема 1. *Якщо* $a_1, \ldots, a_n$ *— ортонормований базис евклідового простору* L*, то скалярний добуток векторів* x *та* y *із* L *у координатній формі має вигляд*

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

($(x_1, \ldots, x_n)$*,* $(y_1, \ldots, y_n)$ *— координатні рядки відповідно векторів* x *та* y *відносно базису* $a_1, \ldots, a_n$*).*

Вектори a і b евклідового простору L називаються *ортогональними*, якщо $(a, b) = 0$. Система попарно ортогональних векторів називається *ортогональною системою.*

Теорема 2. *Ортогональна система ненульових векторів евклідового простору* L *є лінійно незалежною системою векторів.*

Нехай A — непорожня множина векторів простору L. Позначимо через $A^{\perp}$ множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до всіх векторів множини A. Множина $A^{\perp}$ називається *ортогональним доповненням* множини A.

Теорема 3. *Нехай* A*,* B *— непорожні підмножини евклідового простору* L*. Тоді:*

1) *ортогональне доповнення* $A^{\perp}$ *множини* A *є лінійним підпростором простору* L*;*
2) $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$*;*
3) $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ $(A \cap B \neq \emptyset)$*;*
4) $\{\bar{0}\}^{\perp} = L$*;*
5) $L^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

Нехай L — евклідів простір і $x \in L$. Число $\sqrt{(x, x)}$ називається *нормою* або *довжиною* вектора x і позначається через $\|x\|$.

Теорема 4 (нерівність Коші-Буняковського). *Для довільних векторів x, y евклідового простору L справедлива нерівність*

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

Наслідок 1. *Для довільних дійсних чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$*

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \le (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} (y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Наслідок 2. *Для довільних неперервних на сегменті $[0, 1]$ функцій f і g*

$$\left|\int_0^1 f(t) g(t)\, dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_0^1 g^2(t)\, dt}.$$

Теорема 5 (властивості норми). *Для довільних векторів x, y евклідового простору L і будь-якого дійсного числа α справедливі наступні рівність та дві нерівності:*

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
2) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$,
3) $|\|x\| - \|y\|| \le \|x + y\|$.

Останні дві нерівності називаються *нерівностями трикутника.*

Теорема 6 (теорема Піфагора). *Нехай $a_1, \ldots, a_s$ — ортогональна система векторів евклідового простору L. Тоді*

$$\|a_1 + \cdots + a_s\|^2 = \|a_1\|^2 + \cdots + \|a_s\|^2.$$

Процес ортогоналізації. Нехай $a_1, \ldots, a_s$ — лінійно незалежна система векторів евклідового простору L. Побудуємо нову систему векторів:

$$\begin{aligned}
&b_1 = a_1,\\
&b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1,\\
&b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_s = a_s - \frac{(a_s, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_s, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \cdots - \frac{(a_s, b_{s-1})}{(b_{s-1}, b_{s-1})} b_{s-1}.
\end{aligned}$$

Лема 1. *Вище побудована система векторів $b_1, \ldots, b_s$ є ортогональною системою ненульових векторів. Лінійні оболонки, натягнені відповідно на системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ і $b_1, \ldots, b_s$, співпадають.*

Побудова системи векторів $b_1, \ldots, b_s$ за вище приведеним алгоритмом називається *процесом ортогоналізації Ґрама-Шмідта* системи векторів $a_1, \ldots, a_s$.

Побудова ортонормованих базисів. Нехай L — скінченновимірний евклідів простір і $a_1, \ldots, a_n$ — базис простору L. Застосуємо до цього базису процес ортогоналізації. В результаті одержимо ортогональний базис $b_1, \ldots, b_n$ простору L. *Пронормуємо* кожний вектор цього базису:

$$c_1 = \frac{1}{\|b_1\|}b_1, \quad c_2 = \frac{1}{\|b_2\|}b_2, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{1}{\|b_n\|}b_n.$$

Система векторів c_1, c_2, $\ldots$,c_n є ортонормованим базисом простору L.

Нехай L і L' — евклідові простори. Ізоморфізм $\varphi : L \cong L'$ лінійних просторів над полем $\mathbb{R}$ називається *ізометрією* евклідового простору L на евклідів простір L', якщо $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$.

Теорема 7. *Будь-який скінченновимірний евклідів простір ізометричний n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Якщо $n \neq m$, то евклідові простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ не ізометричні.*

Унітарний простір. Лінійний простір L над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ називається *унітарним простором*, якщо в L окрім лінійних операцій над векторами введено ще одну дію. Нова дія кожній впорядкованій парі векторів x та y простору L ставить у відповідність комплексне число, що називається скалярним добутком векторів x та y, позначається через (x, y) і ця дія задовольняє наступним умовам (аксіомам скалярного добутку в унітарному просторі):

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
4) (x, x) — додатне дійсне число, якщо $x \neq 0$

для довільних векторів x, x_1, x_2, y із L і довільного числа $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\overline{\alpha}$ — число комплексно-спряжене до α).

Прикладом унітарного простору є n-вимірний комплексний векторний простір $\mathbb{C}^n$, якщо скалярний добуток векторів x, $y \in \mathbb{C}^n$ визначити за правилом

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n},$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

На унітарний простір переносяться означення наступних понять, що розглядались в евклідовому просторі: матриця Грама, ортонормований базис, ортогональність системи векторів, ортогональне доповнення, норма вектора, процес ортогоналізації, ізометрія. Залишаються, в основному, справедливими теореми цього параграфу із заміною терміну "евклідів простір" на "унітарний простір" і поля $\mathbb{R}$ на поле $\mathbb{C}$.

Укажемо деякі відмінності:

1) формулу (1) для скалярного добутку (x, y) потрібно замінити формулою

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} x_i\overline{y_j}(a_i, a_j) \quad (x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s \in \mathbb{C});$$

2) у теоремі 1 про скалярний добуток векторів евклідовоо простору L у координатах векторів відносно ортонормованого базису простору L формула для (x, y) замінюється на формулу

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Знайти ортогональне доповнення $L^{\perp}$ до підпростору L в $\mathbb{R}^4$.

Розв'язання. Позначимо через a_1, a_2, a_3 рядки матриці даної системи лінійних однорідних рівнянь (2), тобто

$$a_1 = (1, 2, -1, 1), \quad a_2 = (2, 3, 4, -1), \quad a_3 = (1, 1, 5, -2).$$

Якщо $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ — деякий розв'язок цієї системи рівнянь, то

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3 + \beta_4 = 0, \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 + 4\beta_3 - \beta_4 = 0, \\ \beta_1 + \beta_2 + 5\beta_3 - 2\beta_4 = 0. \end{cases}$$

Це у свою чергу означає, що

$$(a_1, b) = 0, \quad (a_2, b) = 0, \quad (a_3, b) = 0.$$

Тому за властивістю скалярного добутку для довільних дійсних чисел α_1, α_2, α_3

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, b) = \alpha_1 (a_1, b) + \alpha_2 (a_2, b) + \alpha_3 (a_3, b) = 0.$$

Отже, довільна лінійна комбінація системи векторів a_1, a_2, a_3 є ортогональною до будь-якому розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь (2), а тому довільна лінійна комбінація системи векторів a_1, a_2, a_3 належить ортогональному доповненню $L^\perp$.

Нехай тепер $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ — довільний вектор із ортогонального доповнення $L^\perp$. Тоді для довільного розв'язку $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ системи рівнянь (2) виконується рівність

$$(c, b) = \gamma_1 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2 + \gamma_3 \beta_3 + \gamma_4 \beta_4 = 0.$$

Звідси слідує, що система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

еквівалентна системі рівнянь (2), оскільки множини розв'язків цих систем рівнянь співпадають. За теоремою 7 §8 звідси випливає, що матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{pmatrix}$$

мають однакові ранги. Тому останній рядок матриці A' є лінійною комбінацією рядків матриці A, тобто

$$c = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, α_3.

Таким чином, шуканим ортогональним доповненням $L^{\perp}$ до підпростору L розв'язків даної системи лінійних однорідних рівнянь є множина всіх лінійних комбінацій рядків матриці цієї системи рівнянь.

Знайдемо ранг матриці A. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\operatorname{rank} A = 2$ і система векторів $a_1 = (1, 2, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 4, -1)$ є базисом простору $L^{\perp}$.

2. Перевірити, чи є ортогональними вектори $u_1 = (1, -i, -1, 0)$ і $u_2 = (0, 1, i, 1)$ унітарного простору $\mathbb{C}^4$. Якщо так, то доповнити систему цих векторів до ортогонального базису простору, у якому вони розглядаються. Пронормувати знайдений базис.

Розв'язання. Оскільки

$$(u_1, u_2) = 1 \cdot \bar{0} + (-i) \cdot \bar{1} + (-1) \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{1} = 0 - i + i + 0 = 0,$$

то вектори u_1 і u_2 ортогональні.

Для того, щоб доповнити систему векторів u_1, u_2 до ортогонального базису простору $\mathbb{C}^4$, знайдемо ортогональне доповнення $\{u_1, u_2\}^{\perp}$ у цьому просторі. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{u_1, u_2\}^{\perp}$, тоді

$$0 = (x, u_1) = x_1 \cdot \bar{1} + x_2 \cdot (\overline{-i}) + x_3 \cdot (\overline{-1}) + x_4 \cdot \bar{0} = x_1 + ix_2 - x_3,$$
$$0 = (x, u_2) = x_1 \cdot \bar{0} + x_2 \cdot \bar{1} + x_3 \cdot \bar{i} + x_4 \cdot \bar{1} = x_2 - ix_3 + x_4.$$

Звідси

$$\begin{cases} x_1 + ix_2 - x_3 = 0, \\ x_2 - ix_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'яжемо систему лінійних однорідних рівнянь вигляду (4), вважаючи x_1, x_2, x_3, x_4 невідомими. Спочатку із другого рівняння цієї системи рівнянь виражаємо x_2 через x_3, x_4, а потім підставляємо одержаний вираз для x_2 у перше рівняння системи рівнянь (4) і знаходимо x_1:

$$\begin{cases} x_2 = ix_3 - x_4, \\ x_1 = -ix_2 + x_3 = -i(ix_3 - x_4) + x_3 = 2x_3 + ix_4. \end{cases}$$

Тому загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь (4) має вигляд

$$(2x_3 + ix_4,\ ix_3 - x_4,\ x_3,\ x_4),$$

де x_3, x_4 — довільні комплексні числа. У якості фундаментальної системи розв'язків цієї системи лінійний однорідних рівнянь можна взяти наступну пару векторів: $v_1 = (2, i, 1, 0)$, $v_2 = (i, -1, 0, 1)$. Ця система векторів утворює базис ортогонального доповнення $\{u_1,\ u_2\}^{\perp}$. Якби вектори v_1, v_2 були б ортогональними, то шуканим ортогональним базисом могла б стати система векторів u_1, u_2, v_1, v_2.

У нашому випадку $(v_1, v_2) = -3i \neq 0$, а тому проортогоналізуємо систему векторів v_1, v_2:

$$w_1 = v_1 = (2, i, 1, 0),$$

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 = (i, -1, 0, 1) - \frac{-3i}{6}(2, i, 1, 0) = (2i, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}i, 1).$$

Тоді система векторів $u_1 = (1, -i, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, i, 1)$, $w_1 = (2, i, 1, 0)$, $w_2 = (2i, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}i, 1)$ є ортогональною системою ненульових векторів, а тому за аналогом теореми 2 для унітарних просторів є ортогональним базисом унітарного простору $\mathbb{C}^4$.

Залишилося пронормувати цей базис:

$$u_1' = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, -i, -1, 0) = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{3}, -\tfrac{\sqrt{3}}{3} i, -\tfrac{\sqrt{3}}{3}, 0\right),$$

$$u_2' = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (0, 1, i, 1) = \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{3} i, \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$w_1' = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, i, 1, 0) = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{3}, \tfrac{\sqrt{6}}{6} i, \tfrac{\sqrt{6}}{6}, 0\right),$$

$$w_2' = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{2}}} \cdot (2i, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}i, 1) = \left(\tfrac{2\sqrt{30}}{15} i, -\tfrac{\sqrt{30}}{10}, \tfrac{\sqrt{30}}{30}, \tfrac{\sqrt{30}}{15}\right).$$

Система векторів u_1', u_2', w_1', w_1' є ортонормованим базисом унітарного простору $\mathbb{C}^4$.

3. В евклідовому просторі $C_{[0,1]}$ всіх неперервних на сегменті $[0,1]$ функцій ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$.

Розв'язання. Покладемо

$$b_1 = p_1 = 1, \qquad b_2 = p_2 + \lambda_1^{(2)} b_1,$$

де

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x\,dx}{\int\limits_0^1 1\,dx} = -\frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

Тому $b_2 = x - \frac{1}{2}$. Вектор b_3 будемо шукати у вигляді

$$b_3 = p_3 + \lambda_1^{(3)} b_1 + \lambda_2^{(3)} b_2,$$

де коефіцієнти $\lambda_1^{(3)}$, $\lambda_2^{(3)}$ обчислюємо за формулами

$$\lambda_1^{(3)} = -\frac{(p_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^2\,dx}{1} = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{3},$$

$$\lambda_2^{(3)} = -\frac{(p_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^2(-\frac{1}{2} + x)\,dx}{\int\limits_0^1 (-\frac{1}{2} + x)^2\,dx} = -\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = -1.$$

Отже,

$$b_3 = x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - x = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Для вектора

$$b_4 = p_4 + \lambda_1^{(4)} b_1 + \lambda_2^{(4)} b_2 + \lambda_3^{(4)} b_3$$

коефіцієнти $\lambda_1^{(4)}$, $\lambda_2^{(4)}$, $\lambda_3^{(4)}$ обчислюємо за формулами

$$\lambda_1^{(4)} = -\frac{(p_4, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3\,dx}{1} = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = -\frac{1}{4},$$

$$\lambda_2^{(4)} = -\frac{(p_4, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3(-\frac{1}{2}+x)\,dx}{\int\limits_0^1 (-\frac{1}{2}+x)^2\,dx} = -\frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}} = -\frac{9}{10},$$

$$\lambda_3^{(4)} = -\frac{(p_4, b_3)}{(b_3, b_3)} = -\frac{\int\limits_0^1 x^3(\frac{1}{6}-x+x^2)\,dx}{\int\limits_0^1 (\frac{1}{6}-x+x^2)^2\,dx} = -\frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}} = -\frac{3}{2}.$$

Звідси

$$b_4 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}.$$

Таким чином, шукана ортогональна система векторів складається з наступних многочленів:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = x - \tfrac{1}{2}, \quad b_3 = x^2 - x + \tfrac{1}{6}, \quad b_4 = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{20}.$$

Вправи для самостійної роботи

1. Довести, що з означення скалярного добутку випливають наступні властивості векторів евклідового простору L:

а) $(x, y_1+y_2) = (x, y_1)+(x, y_2)$ для довільних векторів x, y_1, $y_2 \in L$;

б) $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$ для довільних векторів x, $y \in L$ та довільного дійсного числа α;

в) $(x, \bar{0}) = 0$ для довільного вектора $x \in L$ ($\bar{0}$ — нульовий вектор із L, 0 — нуль із $\mathbb{R}$).

2. Чи є ортогональними функції f і g із евклідового простору $C_{[-\pi,\pi]}$ всіх неперервних на проміжку $[-\pi, \pi]$ функцій відносно скалярного добутку

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx,$$

якщо: а) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$; б) $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$; в) $f(x) = x$, $g(x) = \cos x$; г) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$.

3. Знайти базис ортогонального доповнення до підмножини A евклідового простору $\mathbb{R}^3$ якщо:

а) $A = \{(1, -2, 3)\}$;

б) $A = \{(1, -1, 2),\ (1, 0, 1),\ (2, -1, 4)\}$;

в) A — простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Знайти базис ортогонального доповнення до підмножини A унітарного простору $\mathbb{C}^4$ якщо:

а) $A = \{(1, 1, 0, -2),\ (2, 1, -1, 1),\ (3, 2, -1, -1)\}$;

б) $A = \{(1, -i, 2, 1),\ (1, 0, 1, -i),\ (2, -i, 3, 1 - i)\}$;

в) A — простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + ix_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортогоналізувати систему векторів a_1, a_2, a_3, a_4:

а) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, 1)$;

б) $a_1 = (1, -1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 1, 1)$, $a_4 = (0, 0, 1, -1)$;

в) $a_1 = (1, 1, -1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 0, 0)$.

6. В евклідовому просторі $C_{[\alpha,\beta]}$ всіх неперервних на проміжку $[\alpha, \beta]$ функцій ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C_{[\alpha,\beta]}$ визначається так $(f, g) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx$):

а) $\alpha = 0$, $\beta = 1$; б) $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

7. Знайти вектори, які доповнюють дану систему векторів a_1, $a_2, \dots, a_k$ до ортонормованого базису евклідового простору L, якщо:

а) $a_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $L = \mathbb{R}^3$;

б) $a_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $L = \mathbb{R}^3$;

в) $a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $L = \mathbb{R}^4$.

§13. Лінійні оператори евклідових та унітарних просторів

Спряжені оператори. Нехай L — евклідів або унітарний простір, а φ — лінійний оператор евклідового (унітарного) простору L. Оператор φ^* евклідового (унітарного) простору L називається *спряженим з лінійним оператором* φ, якщо для довільних векторів x і y простору L справедлива рівність

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)).$$

Теорема 1. *Для довільного лінійного оператора φ евклідового (унітарного) простору L існує єдиний спряжений з ним оператор φ^*, причому оператор φ^* є також лінійним оператором простору L.*

Надалі для довільного лінійного оператора φ евклідового (унітарного) простору L символом φ^* будемо позначати спряжений з φ лінійний оператор.

Теорема 2. *Для довільних лінійних операторів φ і ψ евклідового (унітарного) простору L та довільного дійсного (комплексного) числа γ справедливі рівності:*

$$1)\ (\varphi^*)^* = \varphi; \qquad 2)\ (\gamma\varphi)^* = \bar{\gamma}\varphi^*;$$

$$3)\ (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*; \qquad 4)\ (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*.$$

Для довільного невиродженого лінійного оператора ρ евклідового (унітарного) простору L справедлива рівність

$$\left(\rho^{-1}\right)^* = \left(\rho^*\right)^{-1}$$

Нехай A — матриця порядку n з комплексними елементами. Тоді матрицю $A^* = \overline{A}^T$ (матрицю, що одержується з матриці A транспонуванням і заміною елементів на їх комплексно спряжені) називають ермітово-спряженою з матрицею A. Зрозуміло, що $A^* = A^T$, якщо A — матриця з дійсними елементами.

Теорема 3. *Нехай L є скінченновимірним евклідовим (унітарним) простором, а φ є лінійним оператором простору L. Якщо A є матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору L, то матриця A^* є матрицею лінійного оператора φ^* спряженого з оператором φ.*

Симетричні та ермітові оператори. Лінійний оператор φ евклідового (унітарного) простору L називається *симетричним* (*ермітовим*) *оператором* простору L, якщо він співпадає з своїм спряженим оператором φ^*, тобто $\varphi = \varphi^*$.

Дійсна (комплексна) матриця A порядку n називається *симетричною* (*ермітовою*) *матрицею*, якщо $A^* = A$.

Теорема 4. *Симетричний (ермітовий) оператор скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L в будь-якому ортонормованому базисі простору L має симетричну (ермітову) матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну (ермітову) матрицю, то цей оператор є симетричним (ермітовим).*

Теорема 5. *Симетричний оператор скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.*

Наслідок 1. *Всі корені (в полі $\mathbb{C}$) характеристичного многочлена дійсної симетричної матриці є дійсними числами.*

Теорема 6. *Всі власні значення ермітового оператора скінченновимірного унітарного простору є дійсними числами.*

Теорема 7. *Власні вектори, які належать різним власним значенням симетричного (ермітового) оператора є ортогональними векторами.*

Теорема 8 (основна теорема про симетричні і ермітові оператори)**.** *Лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L є симетричним (ермітовим) оператором тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, що складаєтьcя з власних векторів оператора φ.*

Ортогональні та унітарні оператори. Нехай L — евклідів або унітарний простір. Лінійний оператор φ евклідового (унітарного) простору L називається *ортогональним* (*унітарним*) *оператором*, якщо цей оператор зберігає скалярний квадрат довільного вектора простору L, тобто

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) \qquad (x \in L).$$

Оскільки $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ $(x \in L)$, то ортогональний (унітарний) оператор евклідового (унітарного) простору L можна було б визначити, як такий лінійний оператор φ, що зберігає норми векторів, тобто

$$\|\varphi(x)\| = \|x\| \qquad (x \in L).$$

Теорема 9. *Лінійний оператор φ евклідового (унітарного) простору L є ортогональним (унітарним) оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли оператор φ зберігає скалярний добуток будь-яких векторів, тобто $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ $(x, y \in L)$.*

Теорема 10. *Лінійний оператор φ евклідового (унітарного) простору L є ортогональним (унітарним) оператором цього простору тоді і тільки тоді, коли $\varphi^* = \varphi^{-1}$.*

Теорема 11 (властивості власних значень і власних векторів ортогонального та унітарного операторів)**.** *Нехай L — евклідів (унітарний) простір і φ ортогональний (унітарний) оператор простору L. Тоді:*

1) *якщо число α є власним значенням ортогонального (унітарного) оператора φ, то $|\alpha| = 1$;*
2) *власні вектори оператора φ, які належать різним власним значенням, є ортогональними векторами;*
3) *унітарний оператор скінченновимірного унітарного простору L завжди має власні значення.*

Теорема 12 (про образ ортонормованого базису)**.** *Образ ортонормованого базису ортогонального (унітарного) оператора скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L є також ортонормованим базисом цього простору. Навпаки, якщо лінійний оператор скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L відображає деякий ортонормований базис L в ортонормований базис простору L, то цей оператор є ортогональним (унітарним) оператором простору L.*

Дійсна (комплексна) матриця A порядку n називається *ортогональною (унітарною) матрицею*, якщо $A^*A = E$ (E — одинична матриця порядку n).

Якщо всі елементи унітарної матриці A є дійсними числами, то матриця A — ортогональна. Будемо вважати стовпці і рядки дійсної (комплексної) матриці $A = \|\alpha_{ij}\|$ порядку n елементами евклідового простору $\mathbb{R}^n$ (унітарного простору $\mathbb{C}^n$). Тоді *скалярний добуток i-го та j-го стовпців* матриці A дорівнює $\alpha_{1i}\alpha_{1j} + \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + \alpha_{ni}\alpha_{nj}$, якщо A — дійсна матриця і рівний $\alpha_{1i}\overline{\alpha_{1j}} + \alpha_{2i}\overline{\alpha_{2j}} + \cdots + \alpha_{ni}\overline{\alpha_{nj}}$, якщо A — комплексна матриця.

Теорема 13 (ознаки ортогональності та унітарності матриці). *Квадратна дійсна (комплексна) матриця A є ортогональною (унітарною) тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох стовпців матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будьякого стовпця матриці A дорівнює одиниці.*

Квадратна дійсна (комплексна) матриця A є ортогональною (унітарною) тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток будь-яких двох рядків матриці A з різними номерами дорівнює нулю, а скалярний квадрат будь-якого рядка матриці A дорівнює одиниці.

Теорема 14. *Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею.*

Теорема 15. *Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Теорема 16. *Ортогональний (унітарний) оператор скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L у будь-якому ортонормованому базисі цього простору має ортогональну (унітарну) матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор скінченновимірного евклідового (унітарного) простору L у деякому ортонормованому базисі простору L має ортогональну (унітарну) матрицю, то цей оператор є ортогональним (унітарним) оператором простору L.*

Теорема 17 (про канонічний вигляд матриці ортогонального оператора). *Нехай φ — ортогональний оператор скінченновимірного евклідового простору L. Тоді у просторі L існує ортонормований базис, в якому матриця A оператора φ має блочно діагональний вигляд, на діагоналі якої знаходиться деяке кількість кліток вигляду* 1 *або* -1, *або кліток вигляду*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

де α — деяке дійсне число таке, що $\alpha \neq \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Теорема 18 (основна теорема про унітарні оператори). *Якщо в скінченновимірному унітарному просторі L діє унітарний оператор φ, то в просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора φ.*

Теорема 19 (про полярний розклад). *Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L можна представи-*

ти у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.

Наслідок 1. *Будь-яку дійсну (комплексну) квадратну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої симетричної (самоспряженої) та деякої ортогональної (унітарної) матриць.*

Приклади розв'язування задач

1. Нехай α — дійсне число, φ_α — лінійний оператор евклідового простору $\mathbb{R}^2$ такий, що

$$\varphi_\alpha\big((x_1,x_2)\big) = (x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha),$$

де $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ (цей оператор називають оператором повороту). Довести, що φ_α є ортогональним оператором. Показати, якщо $\alpha\neq\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$, то оператор повороту φ_α не має власних значень.

Розв'язання. Знайдемо матрицю заданого в умові лінійного оператора φ_α у канонічному базисі $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$ простору $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(e_1) &= (\cos\alpha,\sin\alpha) = \cos\alpha\cdot e_1 + \sin\alpha\cdot e_2,\\ \varphi_\alpha(e_2) &= (-\sin\alpha,\cos\alpha) = -\sin\alpha\cdot e_1 + \cos\alpha\cdot e_2.\end{aligned}$$

Отже,

$$A_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора φ_α у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^2$.

Далі обчислимо

$$A_\alpha A_\alpha^T = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos^2\alpha+\sin^2\alpha & 0\\ 0 & \cos^2\alpha+\sin^2\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Це означає, що A_α є ортогональною матрицею.

Оскільки канонічний базис евклідового простору $\mathbb{R}^2$ є ортонормованим базисом і матриця лінійного оператора φ_α у цьому базисі є ортогональною матрицею, то за теоремою 16 цей оператор є ортогональним оператором.

Знайдемо характеристичний многочлен ортогонального оператора φ_α:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\alpha\cdot\lambda + 1.$$

Якщо $\alpha \neq \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, то дискримінант

$$D = (2\cos\alpha)^2 - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1)$$

цього квадратного тричлена є від'ємним дійсним числом, а тому не має дійсних коренів. Звідси слідує, що за умови $\alpha \neq \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ лінійний оператор φ_α не має власних значень.

2. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

— матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є симетричним оператором і знайти ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

Розв'язання. Очевидно, що транспонована до A матриця A^T співпадає з матрицею A. Отже, A — симетрична матриця і, таким чином, φ — симетричний оператор евклідового простору $\mathbb{R}^4$, оскільки має симетричну матрицю у ортонормованому базисі.

Знайдемо власні значення і власні вектори оператора φ. Для цього обчислюємо характеристичний многочлен цього оператора:

$$|A-\lambda E| = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \begin{vmatrix} 7-4\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 7-4\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 7-4\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 7-4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^4 \begin{vmatrix} 8-4\lambda & 0 & 0 & -8+4\lambda \\ 0 & 8-4\lambda & -8+4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8-4\lambda & 8-4\lambda \\ -1 & 1 & 1 & 7-4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}(2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6-4\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(1-\lambda).$$

Отже $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ — власні значення оператора φ. Знаходимо власні вектори оператора φ, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$. Для цього розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\{\alpha(1, -1, -1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0\}$$

— множина всіх власних векторів, що належать власному значенню $\lambda_1 = 1$.

Далі розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Одержуємо, що

$$\{\alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(1, 1, 0, 0) \mid \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R},\ |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0\}$$

— множина всіх власних векторів, що належать власному значенню $\lambda_2 = 2$.

Розглянемо систему векторів

$$a_1 = (1, -1, -1, 1),\ a_2 = (1, 0, 0, -1),\ a_3 = (1, 0, 1, 0),\ a_4 = (1, 1, 0, 0).$$

Ортогоналізуємо цю систему векторів, а потім пронормуємо одержану ортогональну систему векторів. У результаті отримаємо наступну систему векторів

$$a_1' = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right), \quad a_2' = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$a'_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad a'_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right),$$

яка є шуканим ортонормованим базисом, що складається з власних векторів оператора φ:

$$\varphi(a'_1) = a'_1, \quad \varphi(a'_2) = 2a'_2, \quad \varphi(a'_3) = 2a'_3, \quad \varphi(a'_4) = 2a'_4.$$

Тому матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

є матрицею симетричного оператора φ у базисі a'_1, a'_2, a'_3, a'_4.

3. Для даної ермітової матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$$

знайти унітарну матрицю C та діагональну матрицю B такі, що $B = C^T AC$.

Розв'язання. Розглянемо унітарний простір $\mathbb{C}^2$ і лінійний оператор ψ цього простору, який задається матрицею A у канонічному базисі $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ цього простору. Оскільки матриця A є ермітовою матрицею (очевидно $A^* = A$), а базис e_1, e_2 є ортонормованим базисом, то за теоремою 4 лінійний оператор ψ є ермітовим оператором унітарного простору $\mathbb{C}^2$. Тоді за теоремою 8 існує ортонормований базис простору $\mathbb{C}^2$, що складається з власних векторів оператора ψ.

Знайдемо власні значення і власні вектори оператора ψ. Для цього спочатку обчислюємо характеристичний многочлен оператора ψ:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Отже, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ є власними значеннями лінійного оператора ψ. Далі шукаємо власні вектори, що відповідно їм належать.

Для власного значення $\lambda_1 = 5$ розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} -2 & 2+2i \\ 2-2i & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1-i \end{pmatrix}.$$

Звідси слідує, що $\{\alpha(1+i,\ 1) \mid \alpha \in \mathbb{C}\ \alpha \neq 0\}$ — множина всіх власних векторів оператора ψ, що належать власному значенню 5.

Далі, для власного значення $\lambda_2 = 2$ розв'язуємо систему лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} 4 & 2+2i \\ 2-2i & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому $\{\alpha(1,\ -1+i) \mid \alpha \in \mathbb{C}\ \alpha \neq 0\}$ є множиною всіх власних векторів оператора ψ, що належать власному значенню -1.

Вектори $a_1 = (1+i,\ 1)$, $a_2 = (1,\ -1+i)$ є ортогональними векторами (це також випливає з теореми 7), а тому утворюють ортогональний базис унітарного простору $\mathbb{C}^2$. Пронормувавши їх, ми одержимо ортонормований базис простору $\mathbb{C}^2$:

$$b_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad b_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right).$$

Оскільки

$$\psi(b_1) = 5b_1, \quad \psi(b_2) = -b_2,$$

то

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного оператора ψ в ортонормованому базисі b_1, b_2 простору $\mathbb{C}^2$.

Матриці A і B є матрицями одного й того ж лінійного оператора ψ унітарного простору $\mathbb{C}^2$, а тому $B = C^{-1}AC$, де

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \end{pmatrix}$$

— матриця переходу від канонічного базису e_1, e_2 до базису b_1, b_2 унітарного простору $\mathbb{C}^2$. Оскільки обидва базиси є ортонормованими, то можна показати, що C — унітарна матриця. А, отже, $C^{-1} = C^T$ (бо $C^TC = E$) і тому $B = C^TAC$. Це означає, що матриці B і C є шуканими.

Зауважимо тільки, що це не єдина пара матриць, що задовольняє умову задачі.

Вправи для самостійної роботи

1. Нехай L — евклідів простір і a — ненульовий вектор простору L. Довести ортогональність оператора φ_a такого, що

$$\varphi_a(x) = x - \frac{2(x,a)}{(a,a)}a \qquad (x \in L).$$

2. Нехай $\mathbb{R}[x]_3$ — евклідів простір із скалярним добутком

$$(f,g) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

де $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $g = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \in \mathbb{R}[x]_3$. Чи є ортогональними лінійні оператори:

а) $\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = -a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0$;

б) $\psi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$,

де $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]_3$?

3. Нехай a — ненульовий вектор тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$. Чи є ортогональним лінійний оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, якщо $\varphi(x) = [x,a]$, де $x \in \mathbb{R}^3$, $[x,a]$ — векторний добуток векторів x і a?

4. Нехай a_1, a_2, a_3 — деякий ортонормований базис тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$; φ — лінійний оператор простору $\mathbb{R}^3$, який задається матрицею A у базисі a_1, a_2, a_3. Чи є лінійний оператор φ ортогональним, якщо

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}?$$

Якщо φ є ортогональним оператором, то знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^3$, у якому матриця оператора φ має канонічний вигляд.

5. Нехай $\mathbb{C}_{2\times 2}$ — унітарний простір всіх комплексних матриць другого порядку з скалярним добутком

$$(A,B) = a_{11}\overline{b_{11}} + a_{12}\overline{b_{12}} + a_{21}\overline{b_{21}} + a_{22}\overline{b_{22}},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{2\times 2}.$$

Довести, що для довільної фіксованої унітарної матриці C із $\mathbb{C}_{2\times 2}$, множення зліва матриці C на матриці з $\mathbb{C}_{2\times 2}$ є унітарним оператором простору $\mathbb{C}_{2\times 2}$.

6. Для даної унітарної матриці

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

знайти діагональну матрицю B та унітарну матрицю Q такі, що $B = Q^{-1}AQ$.

7. Довести, що лінійна комбінація симетричних операторів евклідового простору L з дійсними коефіцієнтами є симетричним оператором простору L.

8. Чи є симетричними лінійні оператори, визначені у вправі 2?

9. Довести, що якщо φ, ψ — ермітові оператори унітарного простору U, то ермітовими є також оператори $\varphi\psi + \psi\varphi$ та $i(\varphi\psi - \psi\varphi)$.

10. Знайти ортонормований базис, що складається із власних векторів лінійного оператора φ тривимірного евклідового простору $\mathbb{R}^3$, та матрицю оператора φ у цьому базисі, якщо лінійний оператор φ у деякому ортонормованому базисі a_1, a_2, a_3 задається матрицею

а) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$.

11. Для даної матриці

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}$

знайти діагональну матрицю B та унітарну матрицю Q такі, що $B = Q^{-1}AQ$.

§14. Білійні та квадратичні форми. Канонічний і нормальний вигляди квадратичних форм. Додатно визначені квадратичні форми

Білінійні форми. Нехай L — лінійний простір над полем F. *Білінійною формою на просторі* L називається відображення

$$\sigma : L \times L \to F,$$

що задане на впорядкованих парах векторів $x, y \in L$, приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі F і задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\begin{aligned}
&\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),\\
&\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),\\
&\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),\\
&\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)
\end{aligned}$$

для довільних x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$; $\alpha \in F$.

Якщо L — евклідів простір, то в якості прикладу білінійної форми можна навести скалярний добуток векторів із L. Ця білінійна форма є симетричною у сенсі наступного означення.

Якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ $(\sigma(x, y) = -\sigma(y, x))$ для довільних x, $y \in L$, то білінійна форма σ називається *симетричною* (*кососиметричною*).

Сумою білінійних форм σ і δ на просторі L називається відображення $\sigma + \delta : L \times L \to F$ таке, що

$$[\sigma + \delta](x, y) = \sigma(x, y) + \delta(x, y), \qquad (x, y) \in L \times L.$$

Теорема 1. *Будь-яка білінійна форма на лінійному просторі* L *над полем* F *є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі* L.

Білінійна форма σ на просторі L називається *невиродженою*, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо в просторі L базис a_1, a_2, …, a_n. Нехай $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$ $(\alpha_{ij} \in F;\ 1 \le i, j \le n)$. Вектори x та y простору L розкладемо по базису

$$x = x_1a_1 + \dots + x_na_n,\ y = y_1a_1 + \dots + y_na_n\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in F).$$

Тоді

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j,$$

або в матричному вигляді $\sigma(x, y) = X^T AY$, де X, Y — координатні стовпці векторів x і y,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)).$$

Матриця A називається *матрицею білінійної форми* σ *у базисі* a_1, a_2, ..., a_n. Якщо форма σ симетрична, то A — симетрична матриця: $A^T = A$; якщо σ — кососиметрична, то A — кососиметрична матриця: $A^T = -A$.

Теорема 2. *Нехай σ — білінійна форма на просторі L, A і B — матриці білінійної форми σ відповідно у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_n простору L. Тоді $B = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису b_1, b_2, ..., b_n.*

Теорема 3. *Білінійна форма σ на просторі L невироджена тоді і тільки тоді, коли матриця A цієї форми у деякому базисі простору L є невиродженою.*

Теорема 4 (основна теорема про симетричні білінійні форми)**.** *Нехай σ — симетрична білінійна форма на просторі L. Тоді в просторі L існує такий базис, що в координатах векторів $x, y \in L$ відносно цього базису форма σ має вигляд*

$$\sigma(x, y) = \alpha_1 x_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n y_n,$$

де α_1, ..., α_n деякі елементи поля F.

Квадратичні форми. Нехай F — поле і $x_1, \dots, x_n$ — невідомі над полем F. Нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля F таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

називається *квадратичною формою* від n невідомих x_1, ..., x_n над полем F з коефіцієнтами α_{ij}. Якщо замість невідомих x_1, ..., x_n

підставити відповідно елементи $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ поля F, то елемент поля F

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\gamma_i\gamma_j$$

називається *значенням квадратичної форми* для даних значень невідомих. Із коефіцієнтів α_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна скласти квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається *матрицею квадратичної форми* $f(x_1,\ldots,x_n)$. Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то матриця A є симетричною, тобто $A^T = A$.

Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді квадратичну форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ можна записати у вигляді добутку матриць

$$f(x_1, \ldots, x_n) = X^T AX.$$

Цей запис називається *матричним записом квадратичної форми* $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Рангом квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$ називається ранг матриці A цієї форми. Поряд з невідомими $x_1, \ldots, x_n$ над полем F ми будемо розглядати й інші системи невідомих над полем F.

Лінійним перетворенням невідомих $x_1, \ldots, x_n$ над полем F в нові невідомі $y_1, \ldots, y_n$ над полем F називається такий перехід до нових невідомих, коли старі невідомі виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля F:

$$x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \cdots + \tau_{1n}y_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \cdots + \tau_{nn}y_n$$

$(\tau_{ij} \in F;\ 1 \leq i, j \leq n)$. Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається *матрицею лінійного перетворення* невідомих. Лінійне перетворення невідомих можна записати у вигляді добутку $X = QY$, де X, Y — стовпці невідомих, Q — матриця перетворення.

Лінійне перетворення невідомих називається *невиродженим перетворенням*, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ невироджене лінійне перетворення невідомих X в невідомі Y, то $Y = Q^{-1}X$ є *оберненим лінійним перетворенням невідомих Y в X.* Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових невідомих до початкових невідомих.

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$ (Z — стовпець невідомих $z_1, \dots, z_n$ над полем F) називається *добутком* цих перетворень. Добуток лінійних перетворень є також лінійне перетворення і матриця добутку є добутком матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$.

Теорема 5. *Добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням.*

Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \dots, x_n)$ *перетворення невідомих* означає підставити в квадратичну форму

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_ix_j$$

замість невідомих $x_1, \dots, x_n$ їх вирази через нові невідомі і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 6 (закон зміни квадратичної форми)**.** *Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення невідомих з матрицею Q, то ми одержимо нову квадратичну форму з матрицею $B = Q^TAQ$.*

Цей закон зміни дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Будемо говорити, що квадратична форма $f_1(x_1, \dots, x_n)$ від невідомих $x_1, \dots, x_n$ над полем F *еквівалентна* квадратичній формі $f_2(x_1, \dots, x_n)$ від тих же невідомих, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення невідомих $x_1, \dots, x_n$ в невідомі $y_1, \dots, y_n$, що $f_2(y_1, \dots, y_n) = f_1(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 7. *Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем F. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S над полем F, що $B = S^T AS$.*

Відношення еквівалентності квадратичних форм має наступні властивості:

1) $f(x_1, \dots, x_n) \sim f(x_1, \dots, x_n)$;

2) $f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_2(x_1, \dots, x_n) \;\Leftrightarrow\; f_2(x_1, \dots, x_n) \sim f_1(x_1, \dots, x_n)$;

3) $f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_2(x_1, \dots, x_n),\; f_2(x_1, \dots, x_n) \sim f_3(x_1, \dots, x_n) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x_1, \dots, x_n) \sim f_3(x_1, \dots, x_n)$

(символ $\sim$ означає еквівалентність форм).

Наступна теорема дає необхідну умову еквівалентності квадратичних форм.

Теорема 8 (про інваріантність рангу)**.** *Еквівалентні квадратичні форми мають однакові ранги.*

Сукупність всіх квадратичних форм від n невідомих над полем F розбивається на *класи еквівалентних квадратичних форм.* Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ деякі елементи поля F, серед яких можуть бути і нульові елементи. Квадратичні форми вказаного вигляду називаються квадратичними формами *канонічного вигляду.* Матриця A форми канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A і дорівнює числу квадратів невідомих квадратичної форми цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.

Теорема 9 (основна теорема про квадратичні форми)**.** *Будь-яку квадратичну форму від n невідомих над числовим полем F можна звести до квадратичної форми канонічного вигляду за допомогою деякого невиродженого лінійного перетворення невідомих над цим полем.*

Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тому, що різні канонічні вигляди квадратичних форм можуть бути еквівалентними формами. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень невідомих. Відмітимо, що у всіх цих канонічних виглядах спільним буде число квадратів з ненульовими коефіцієнтами.

Продовження класифікації квадратичних форм над полем F залежить від специфіки поля F.

Комплексні квадратичні форми. Розглянемо канонічний вигляд комплексної (тобто над полем $\mathbb{C}$) квадратичної форми від n невідомих $x_1, \ldots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ деякі комплексні числа. Нехай ранг форми f дорівнює r ($r \leq n$) і нехай $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0, \ldots, \alpha_r \neq 0$. Тоді $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2$.

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_r = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = y_n,
\end{aligned}
$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α. Це перетворення є невиродженим. Виконавши його в квадратичній формі f одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих: $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$. Такий вигляд комплексної квадратичної форми називається *нормальним виглядом.*

Теорема 10 (основна теорема для комплексної квадратичної форми.)**.** *Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n невідомих еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих, де r — ранг даної квадратичної форми.*

Теорема 11 (класифікаційна теорема)**.** *Комплексні квадратичні форми від одного й того ж числа невідомих еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих квадратичних форм рівні.*

Дійсні квадратичні форми. Розглянемо канонічний вигляд дійсної (над полем $\mathbb{R}$) квадратичної форми від n невідомих $x_1, \ldots, x_n$: $f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$, де $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ деякі дійсні числа. Нехай ранг форми f дорівнює r ($r \leq n$) і перші r коефіцієнтів відмінні від нуля. Тоді форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

де $\beta_1, \ldots, \beta_{p+q}$ додатні числа і $p + q = r$.

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned}
&x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1,\\
&\dots\dots\dots\\
&x_r = x_{p+q} = \tfrac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q},\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n),\\
&\dots\dots\dots\\
&x_n = y_n,
\end{aligned}$$

Це перетворення невироджене і має дійсні коефіцієнти. Виконаємо його в квадратичній формі f. Одержимо

$$f \sim y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних квадратів і q від'ємних квадратів невідомих ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = r$). Такий вигляд квадратичної форми називається *нормальним виглядом дійсної квадратичної форми.*

Теорема 12 (основна теорема для дійсних квадратичних форм)**.** *Будь-яка дана дійсна квадратична форма еквівалентна над полем* $\mathbb{R}$ *деякій квадратичній формі нормального вигляду.*

Наступна теорема вказує, що є спільного в нормальних виглядах, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою дійсних невироджених лінійних перетворень невідомих.

Теорема 13 (закон інерції)**.** *Число додатних і число від'ємних квадратів невідомих у квадратичній формі нормального вигляду, яка одержана з даної квадратичної форми* f *за допомогою деякого невиродженого лінійного перетворення невідомих, не залежить від вибору цього перетворення. Інакше кажучи, якщо*

$$y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$$

і

$$z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_{k+l}^2$$

— квадратичні форми нормального вигляду, кожна з яких еквівалентна квадратичній формі f*, то* $p = k$ *і* $q = l$*.*

Нехай дана дійсна квадратична форма $g(x_1, \dots, x_n)$ зведена до нормального вигляду $g \sim y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$. Тоді число p додатних квадратів цього вигляду називається *додатним індексом* інерції даної форми $g(x_1, \dots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів в нормальному вигляді називається *від'ємним індексом* інерції даної форми $g(x_1, \dots, x_n)$. Впорядкована пара (p, q) називається *сигнатурою* даної форми $g(x_1, \dots, x_n)$ (іноді сигнатуру визначають, як різницю $p - q$).

Теорема 14 (класифікаційна теорема). *Дві дійсні квадратичні форми від одного числа невідомих еквівалентні тоді і тільки тоді, коли співпадають ранги цих форм і співпадають сигнатури цих форм.*

Додатно визначені дійсні квадратичні форми Дійсна квадратична форма

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j \qquad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R})$$

називається *додатно визначеною*, якщо $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ для всіх $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R})$.

Теорема 15 (ознака додатної визначеності). *Дійсна квадратична форма від n невідомих додатно визначена тоді і тільки тоді, коли співпадають три числа: число невідомих n, ранг форми і додатній індекс інерції цієї форми.*

Нехай $f = X^T A X$ — дійсна квадратична форма з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Головними мінорами форми f називаються наступні мінори матриці A:

$$\Delta_1 = \alpha_{11}, \quad \dots, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_n = |A|.$$

Теорема 16 (критерій Сільвестра додатної визначеності). *Дійсна квадратична форма додатно визначена тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори додатні.*

Приклади розв'язування задач

1. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел та перетворення невідомих, що зводить форму f до цього вигляду.

Розв'язання. Виконаємо спочатку перетворення невідомих, обернене до перетворення

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$

тобто перетворення

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3$$

з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Після чого одержимо

$$f \sim y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 4y_2y_3.$$

Поклавши

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = y_2 - 2y_3, \quad z_3 = y_3,$$

тобто виконавши лінійне перетворення невідомих з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ми приведемо квадратичну форму f до вигляду

$$f \sim z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 + 4z_3^2 - z_3^2 - 4z_2z_3 - 8z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 - 5z_3^2.$$

Нарешті, виконаємо перетворення

$$z_1 = u_1, \quad z_2 = u_2, \quad z_3 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}u_3,$$

з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

У результаті одержимо нормальний вигляд квадратичної форми f

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

А матриця

$$Q = ABC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

є матрицею лінійного перетворення невідомих, що зводить квадратичну форму f до нормального вигляду.

2. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

додатно визначеною?

Розв'язання. Обчислимо головні мінори квадратичної форми g:

$$A_1 = |3| = 3 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Оскільки всі головні мінори квадратичної форми g є додатними, то g — додатно визначена квадратична форма.

Вправи для самостійної роботи

1. Знайти канонічний вигляд квадратичних форм:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

б) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

2. Знайти нормальний вигляд комплексних квадратичних форм:

а) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

б) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

3. Знайти нормальний вигляд кожної із наступних дійсних квадратичних форм, а також невироджене лінійне перетворення невідомих, за допомогою якого можна одержати відповідний нормальний вигляд:

а) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

в) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

4. Для кожної із наступних пар квадратичних форм f і g знайти невироджене лінійне перетворення невідомих, за допомогою якого із квадратичної форми f можна одержати квадратичну форму g:

а) $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3,$
$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3;$

б) $f = 3x_1^2 + 10x_2^2 + 25x_3^2 - 12x_1x_2 - 18x_1x_3 + 40x_2x_3,$
$g = 5y_1^2 + 6y_2^2 + 12y_1y_2.$

5. З'ясувати, які із наступних дійсних квадратичних форм еквівалентні між собою:

а) $f_1 = x_1^2 - x_2x_3$, $f_2 = y_1y_2 - y_3^2$, $f_3 = z_1z_2 + z_3^2$;

б) $g_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3,$
$g_2 = y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 + 4y_1y_2 - 2y_1y_3 - 4y_2y_3,$
$g_3 = -4z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - 4z_1z_2 + 4z_1z_3 + 18z_2z_3.$

6. Знайти всі значення параметру λ, для яких наступні дійсні квадратичні форми є додатно визначеними:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3.$

§15. Групи. Підгрупи

Нехай M і N — довільні непорожні множини. *Декартовим добутком множин* M і N називається множина всіх впорядкованих пар вигляду (m, n), де m пробігає множину M, а n пробігає N. Позначатимемо цей добуток символом $M \times N$.

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається відображення f множини $M \times M$ у множину M. Отже, бінарна алгебраїчна операція f на множині M — це деяке правило, за яким кожній впорядкованій парі (a, b) $(a, b \in M)$ ставиться у відповідність певний елемент $f(a, b)$ з множини M. Образ $f(a, b)$ будемо позначати наступним чином

$$f(a, b) = a \cdot b = ab.$$

У такому позначенні f називається множенням, а ab — добутком елементів a і b. Інколи позначають $f(a, b) = a + b$. У цьому випадку f називається додаванням, а $a + b$ — сумою елементів a і b.

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення, називається *групою*, якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція асоціативна, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$;

2) існує *одиничний елемент*, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справедливі рівності $ae = ea = a$;

3) для всякого елемента $a \in G$ існує *обернений елемент* a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Групу, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення, будемо називати *мультиплікативною* групою. Групу ж, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, — *адитивною* групою. Одиничний елемент адитивної групи частіше називають *нульовим елементом*, о обернений елемент до даного — *протилежним*. Надалі, якщо не сказано інше, будемо вважати, що група G є мультиплікативною групою.

Теорема 1. *У довільній групі існує єдиний одиничний елемент. Для довільного елемента групи існує єдиний обернений елемент.*

Якщо для довільних елементів a, b групи G виконується рівність $ab = ba$, то група G називається *абелевою*.

Якщо множина G скінченна, то група G називається *скінченною*, а число елементів множини G називається *порядком групи* G і позначається $|G|$.

Нехай G — група з одиничним елементом e, g — деякий елемент групи G, n — довільне натуральне число. Позначимо

$$g^n = \underbrace{g \cdot g \cdot g \cdots g \cdot g}_{n \text{ разів}}.$$

Елемент g^n будемо називати *n-им степенем елемента g* групи G. За означенням $g^0 = e$, $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

Теорема 2. *Нехай G — група, g — будь-який елемент групи G. Тоді для довільних цілих чисел m і n справджуються рівності*

$$g^m \cdot g^n = g^{m+n}, \tag{1}$$

$$(g^m)^n = g^{mn}. \tag{2}$$

Нехай g — елемент групи G. Якщо для довільного натурального числа n елемент g^n відмінний від одиничного елемента e групи G, то g називається *елементом нескінченного порядку*. Якщо ж g не є елементом нескінченного порядку, то найменше з натуральних чисел m таких, що $g^m = e$ називають *порядком елемента g*.

Група G називається *періодичною*, якщо кожен її елемент є елементом скінченного порядку. Група, всі елементи якої, окрім одиничного, є елементами нескінченного порядку, називається *групою без кручення*.

Нехай G — група. Підмножина H групи G називається *підгрупою* групи G, якщо відносно бінарної алгебраїчної операції, заданої на G, підмножина H є групою.

Те, що H є підгрупою групи G, позначають символом $H < G$.

Теорема 3. *Непорожня підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови:*

$$1)\ ab \in H; \qquad 2)\ a^{-1} \in H. \tag{3}$$

Теорема 4 (Лаґранж)**.** *Нехай G — скінченна група, H — підгрупа групи G. Тоді порядок підгрупи H ділить порядок групи G.*

Приклади розв'язування задач

1. Показати, що множина цілих раціональних чисел $\mathbb{Z}$ з операцією додавання є групою і знайти хоча б одну нескінченну підгрупу цієї групи.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих раціональних чисел є бінарною алгебраїчною операцією на множині $\mathbb{Z}$. Добре відомо, що ця операція асоціативна: $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Роль нульового елемента відіграє число 0, оскільки $0 + a = a + 0 = a$ для довільного $a \in \mathbb{Z}$. Протилежним елементом до елемента $a \in \mathbb{Z}$ є число $-a \in \mathbb{Z}$, бо $a + (-a) = (-a) + a = 0$ для довільного $a \in \mathbb{Z}$. Отже, множина $\mathbb{Z}$ з операцією додавання є групою. Цю групу будемо позначати $\mathbb{Z}^+$ і називати адитивною групою цілих чисел.

Зауважимо, що група $\mathbb{Z}^+$ є абелевою групою, оскільки для довільних $a, b \in \mathbb{Z}^+$ виконується рівність $a + b = b + a$. Група $\mathbb{Z}^+$ — нескінченна група без кручення, бо якщо $a \in \mathbb{Z}^+$ $(a \neq 0)$ і $n \in \mathbb{N}$, то $na \neq 0$, тобто a — елемент нескінченного порядку.

Розглянемо підмножину $(m\mathbb{Z})^+$ множини цілих чисел, що складається з чисел кратних деякому цілому числу m. Легко перевірити, що виконуються умови (3), а саме: для довільних ma, $mb \in m\mathbb{Z}$

$$ma + mb = m(a + b) \in m\mathbb{Z}, \quad -ma = m(-a) \in m\mathbb{Z}.$$

Отже $(m\mathbb{Z})^+$ — підгрупа групи $\mathbb{Z}^+$.

Аналогічно визначаються адитивні групи $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{C}^+$ відповідно раціональних, дійсних та комплексних чисел. Очевидно

$$\mathbb{Z}^+ < \mathbb{Q}^+ < \mathbb{R}^+ < \mathbb{C}^+.$$

2. Показати, що множина $GL(n, \mathbb{C})$ всіх оборотних $n \times n$-матриць з комплексними елементами відносно операції множення матриць є групою. Довести, що множина $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid |A| = 1\}$ є підгрупою групи $GL(n, \mathbb{C})$.

Розв'язання. Відомо, що добуток двох оборотних комплексних $n \times n$-матриць є оборотною $n \times n$-матрицею. Операція множення довільних $n \times n$-матриць задовольняє асоціативній властивості, а, отже, асоціативною є і операція множення оборотних матриць. Роль одиничного елемента відіграє одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Нарешті, зрозуміло, якщо $A \in GL(n, \mathbb{C})$, то $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{C})$. Таким чином, множина $GL(n, \mathbb{C})$ з операцією множення матриць є групою. Ця група називається *повною лінійною групою степеня* n над полем $\mathbb{C}$. Оскільки операція множення матриць у загальному випадку не є комутативною, то, очевидно, група $GL(n, \mathbb{C})$ $(n > 1)$ — неабелева. Очевидно, що група $GL(n, \mathbb{C})$ — нескінченна.

Покажемо, що множина $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid |A| = 1\}$ є підгрупою групи $GL(n, \mathbb{C})$. Нехай A, B — довільні матриці із $SL(n, \mathbb{C})$. Тоді $|A| = 1$, $|B| = 1$. Обчислимо

$$|AB| = |A| \cdot |B| = 1 \cdot 1 = 1, \qquad |A^{-1}| = |A|^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

Звідси слідує, що $AB \in SL(n, \mathbb{C})$ і $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{C})$. Це означає, що $SL(n, \mathbb{C})$ — підгрупа групи $GL(n, \mathbb{C})$.

Група $SL(n, \mathbb{C})$ називається *спеціальною лінійною групою степеня* n над полем $\mathbb{C}$.

Аналогічно визначаються групи $GL(n, \mathbb{Q})$ і $GL(n, \mathbb{R})$. Групи $C^* = GL(1, \mathbb{C})$, $R^* = GL(1, \mathbb{R})$ і $Q^* = GL(1, \mathbb{Q})$ називаються мультиплікативними групами відповідно комплексних, дійсних і раціональних чисел.

3. Показати, що підстановка

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

є елементом скінченного порядку симетричної групи S_7 (симетрична група S_n — це група підстановок степеня n відносно операції множення підстановок). Знайти порядок цього елемента.

Розв'язання. Доведемо більш загальне твердження. Покажемо, що будь-який елемент g довільної скінченної групи G порядку n є елементом скінченного порядку. Припустимо протилежне, нехай g —

елемент нескінченного порядку. Оскільки група G складається з n елементів, то серед наступних її елементів

$$g, \quad g^2, \quad g^3, \quad \ldots, \quad g^n, \quad g^{n+1}$$

знайдуться два рівні. Нехай $g^i = g^j$ для деяких $i, j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, причому можна вважати що $i < j$. Помноживши ліву і праву частини цієї рівності на g^{-i}, одержимо $g^{j-i} = e$, де e — одиничний елемент групи G. Оскільки $j - i$ є натуральним числом, то остання рівність суперечить тому, що g — елемент нескінченного порядку.

Симетрична група S_7 є скінченною групою порядку 7!, тому підстановка δ є елементом скінченного порядку. Знайдемо порядок підстановки δ. Для цього обчислимо

$$\delta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \neq e, \quad \delta^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \neq e,$$

$$\delta^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \neq e, \quad \delta^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq e,$$

$$\delta^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = e.$$

Отже, порядок підстановки δ дорівнює 6.

Вправи для самостійної роботи

1. Які із вказаних числових множин із заданими операціями є групами?

а) Множина всіх дійсних чисел відносно операції додавання.

б) Множина всіх комплексних чисел з заданим аргументом φ відносно операції множення.

в) Множина всіх додатних раціональних чисел відносно операції множення.

г) Множина всіх степенів даного дійсного числа $a \neq 0$ з цілими показниками відносно операції множення.

д) Множина всіх дійсних чисел відносно операції $a * b = a^b$ (a, $b \in \mathbb{R}$).

е) Множина всіх дійсних чисел відносно операції $a * b = a^2 b^2$ (a, $b \in \mathbb{R}$).

є) Множина U_n всіх комплексних коренів з одиниці фіксованого степеня n відносно операції множення.

ж) Множина всіх ненульових комплексних чисел з модулем, що не перевищує фіксоване число r, відносно операції множення.

2. Які із вказаних нижче множин $n \times n$-матриць з елементами із поля $\mathbb{R}$ дійсних чисел із заданими операціями є групами?

а) Множина всіх симетричних матриць відносно операції множення.

б) Множина всіх матриць з фіксованим детермінантом d відносно операції множення.

в) Множина всіх невироджених матриць відносно операції додавання.

г) Множина всіх невироджених матриць відносно операції множення.

д) Множина всіх діагональних матриць відносно операції додавання.

е) Множина всіх діагональних матриць відносно операції множення.

ї) Множина всіх ортогональних матриць відносно операції множення.

ж) Множина всіх ненульових матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

відносно операції множення.

з) Множина матриць

$$\left\{ \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(i^2 = -1)$ відносно операції множення.

3. Вияснити, чи є групами наступні множини із заданими операціями:

а) множина всіх поворотів площини навколо фіксованої точки відносно операції послідовного виконання поворотів;

б) множина всіх паралельних переносів площини відносно операції послідовного виконання паралельних переносів.

4. Знайти порядок елемента групи:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$, б) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$,

в) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, г) $\pi \in \mathbb{R}^+$,

д) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$, е) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Q})$,

ї) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, ж) $i \in \mathbb{C}^*$.

5. Знайти всі підгрупи симетричної групи S_3.

6. Показати, що елементи ab та ba в довільній групі G $(a, b \in G)$ мають однакові порядки.

7. Нехай всі елементи групи G, крім одиниці, мають порядок 2. Довести, що група G є абелевою.

Література

1. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
2. *Завало С. Т.* Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 503 с.
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. – 3-е изд. – М.: Физико-математическая литература, 2004. – 272 с.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – 368 с.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
6. Лінійна алгебра / *Баранник В.Ф., Дроботенко Е.С., Рудько В.П., Шапочка І. В.* – Ужгород.: Ужгородський державний університет, 1999. – 92 с.
7. Лінійні простори / *Калужнін Л.А., Вишенський В.А., Шуб Ц.О.* – К.: Вища школа, 1971. – 344 с.
8. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
9. Алгебра і теорія чисел. Пркгикум. Частина I / *Завало С. Т., Левищенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О.* – К.: Вища школа, 1983. – 232 с.
10. *Безущак О. О., Ганюшкін О. Г.* Завдання до пркатичних занять з лінійної алгебри (векторні простори). – К.: Київський університет, 2010. – 257 с.
11. *Икрамов Х. Д.* Задачник по линейной алгебре. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
12. Практикум з алгебри і теорії чисел для студентнів першого курсу / *Гудивок П. М., Погоріляк Є. Я., Шапочка І. В.* – Ужгород.: Ужгородський національний університет, 2002. – 127 с.
13. *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. – 9-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 383 с.
14. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А. И. – 3-е изд. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.
15. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Наука, 1972. – 304 с.

КИРИЛЮК Олександр Антонович

ШАПОЧКА Ігор Валерійович

ВИЩА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Формат $60 \times 84/16$. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 8,20. Замовлення №80.
Наклад 100 прим.

Видавництво Ужгородського національного університету „Говерла“.
88000, м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.
e-mail: hoverla@i.ua

Свідоцтво про внесення до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції —
Серія Зт №32 від 31 травня 2006 року