Міністерство освіти України
Ужгородський державний університет

О. А. Кирилюк, І. В. Шапочка, І. Й. Шулла

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З КУРСУ „МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ“

Ужгород
Видавництво УжДУ
2000

УДК 51
ББК 22.1
М 545

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор *П. М. Гудивок*

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент *Є. Я. Погоріляк*

Методичні вказівки до проведення занять з курсу „Методика викладання математики“/ Кирилюк О. А., Шапочка І. В., Шулла І. Й. –Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 2000. – 122 с.

У методичних вказівках у відповідності до діючих програм з курсу „Методика викладання математики“ для державних університетів дано розробку шістнадцяти практичних занять з цієї дисципліни.

Для студентів вищих навчальних закладів спеціальності „математика“.

Зміст

Передмова

У методичних вказівках у відповідності до діючих програм з курсу „Методика викладання математики“ для державних університетів дано розробку шістнадцяти практичних занять з цієї дисципліни.

Структура кожного із практичних занять у вказівках є такою:

1) подається план його проведення;
2) наводяться методичні зауваження;
3) даються завдання для аудиторних занять та самостійної роботи студентів.

Зміст та обсяг практичних занять підібраний так, щоб при їх проведенні поглибити знання студентів — майбутніх викладачів математики з таких питань:

- розвитку логіко-математичної культури учнів;
- розуміння суті та особливостей тотожних перетворень;
- реалізації в процесі навчання математики в школі змістовних ліній, що стосуються вивчення функцій, рівнянь та нерівностей;
- методики розв'язування задач методом рівнянь та їх систем;
- розв'язування планіметричних та стереометричних задач на обчислення, доведення та побудову;
- використання координатного та векторного методів при розв'язуванні задач;
- особливостей вивчення перших розділів стереометрії та многогранників.

Для виконання самостійних завдань студенти повинні опрацювати відповідні підручники та посібники, науково-методичну літературу, ознайомитись з досвідом кращих вчителів-практиків.

Розробленими у методичних вказівках заняттями можна користуватись як при проведенні лабораторних, так і практичних занять з методики викладання математики.

На проведення заняття потрібно відводити 2 год, в окремих випадках — 4 год.

Дані методичні вказівки складені на основі багаторічного досвіду роботи їх авторів.

Автори

Заняття 1

Математичні поняття та твердження. Структура математичних теорем

План

1. Зміст і обсяг поняття.
2. Види означень та вимоги до них.
3. Класифікація понять.
4. Види теорем та зв'язок між ними.
5. Необхідні і достатні умови.

Методичні зауваження

Поняття є однією з основних форм мислення. Думка про об'єкт, в якій відображаються загальні та істотні його ознаки, називається поняттям. У математичних поняттях відображаються, в основному, просторові форми і кількісні відношення об'єктів матеріального світу.

Розрізняють основні (істотні), відокремлювальні і суперечливі ознаки даного поняття. Якщо деяка ознака належить всім об'єктам, які охоплюються даним поняттям, то вона називається основною; якщо деяким, але не всім, — то відокремлювальною; якщо жодному об'єкту — то суперечливою. Важливо, щоб відокремлювальні ознаки не видавалися за основні, що зустрічається в практиці вивчення математики.

Сукупність всіх істотних ознак даного поняття складає його зміст. Обсяг поняття — це сукупність всіх об'єктів, які охоплюються даним поняттям.

Між змістом та обсягом поняття існує така залежність: чим більший обсяг поняття, тим менший його зміст, і навпаки.

Обсяги понять прийнято зображати кругами Ейлера (рис. 1).

Зміст поняття „прямокутник“ більший за зміст поняття „паралелограм“, зміст поняття „функція“ менший за зміст поняття „обернена функція“.

Якщо обсяг одного поняття є частиною обсягу другого, то перше поняття називають видовим, а друге — родовим.

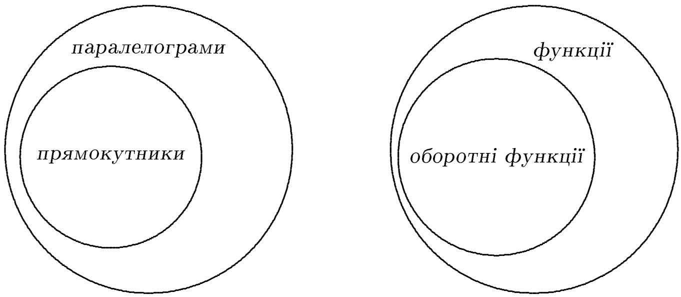

Рис. 1.

Переважна більшість понять вводиться в розгляд через означення. Означенням нового поняття в науці вважають тільки таке формулювання, яке повністю зводить дане поняття до вже відомих понять тієї самої науки. Ясно, що дати означення всім поняттям неможливо. В процесі вивчення математики неминуче приходимо до першопочаткових понять, які називають ще основними, первісними або неозначуваними поняттями.

До первісних понять та відношень в шкільному курсі планіметрії тепер відносять такі: „точка", „пряма", „належить" (для точок і прямих), „лежить між" (для точок на прямій), „міра" (довжина відрізка; градусна міра кута).

Важливо розрізняти неозначувані поняття і означувані поняття. В процесі доведень означувані поняття, як правило, заміняють їх означеннями.

Найчастіше поняття вводяться в розгляд через означення такими способами:

1) через найближчий рід і видову ознаку;
2) генетично (конструктивно);
3) у вигляді формул;
4) через перелік.

При цьому слід мати на увазі, що в означення математичного поняття включають такі ознаки, кожна з яких є необхідною, а в сукупності вони є достатніми, щоб виділити нове поняття від раніше введених.

Цікавим є питання про еквівалентні означення даного поняття, класифікація понять, з якими обов'язково слід познайомити учнів.

В математиці зустрічаються з двома основними типами тверджень: аксіомами і теоремами.

Аксіома (буквальний переклад — гідність, повага, авторитет) — це твердження, яке в даній науковій теорії приймається без доведення.

Теорема (буквальний переклад — придивляюся, спостерігаю) — це твердження, в істинності якого переконуються шляхом логічних міркувань (доведень).

Переважна більшість теорем має таку структуру: $A \Rightarrow B$ (якщо A, то B), де A — умова теореми, B — висновок. Якщо поміняти умову і висновок теореми $A \Rightarrow B$, яку, зазвичай, називають прямою, то одержимо теорему $B \Rightarrow A$ — обернену теорему до прямої. Заперечивши умову і висновок прямої теореми, одержимо теорему $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ — протилежну до прямої. Заперечивши умову і висновок оберненої теореми, одержимо теорему $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ — протилежну до оберненої (обернену до протилежної).

Легко обґрунтувати рівносильність наступних двох пар теорем: 1) $A \Rightarrow B$ і $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$; 2) $B \Rightarrow A$ і $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$. Цією рівносильністю, у розумінні, що названі пари теорем є одночасно істинними або хибними, нерідко користуються у процесі доведень.

Обернена теорема до прямої може бути істинною або хибною. А тому слід мати на увазі, що обернену теорему завжди потрібно доводити; і що не можна підміняти доведення прямої теореми доведенням оберненої.

Безпосередньо з структурою теорем пов'язане питання про необхідні і достатні умови. Якщо істинною є теорема $A \Rightarrow B$, то умова A називається достатньою для B, а B називаються необхідною умовою для A.

Якщо вірною є обернена теорема до прямої, то формулювання таких двох теорем можна об'єднати з використанням одного з таких словосполучень: „необхідно і достатньо“, „ті і тільки ті“, „тоді і тільки тоді“, „критерій“.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Для понять „квадрат“, „ромб“, „прямокутник“ та „паралелограм“ назвати основні, відокремлювальні та суперечливі ознаки (властивості).

2. Навести приклад означень: а) через найближчий рід і видову ознаку; б) генетичних (конструктивних).

3. Які з нижче наведених нижче рівностей є означеннями:

$$(-a)(-b) = ab; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad a^n : a^k = a^{n-k}; \quad a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}; \quad a^1 = a;$$

$$0! = 1; \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x?$$

4. Зобразити кругами Ейлера обсяги таких понять:

а) „натуральне число“, „ціле число“, „ціле непарне число“;

б) „функція“, „парна функція“, „непарна функція“.

5. Спростувати помилки наведенням контрприкладів у таких означеннях:

а) паралелограмом називається многокутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні;

б) чотирикутник із рівними діагоналями називається прямокутником;

в) середньою лінією трикутника називається лінія, що сполучає середини двох його сторін;

г) правильною називається така піраміда, в основі якої лежить правильний многокутник;

д) арксинусом числа a називається таке число, що синус його дорівнює a.

6. Навести приклади еквівалентних означень поняття.

7. Навести одну із можливих класифікацій таких понять: „трикутник“, „чотирикутник“, „дійсне число“. Зобразити її кругами Ейлера і блок-схемами.

8. Навести приклади теорем: а) до яких обернені є вірними; б) до яких обернені є хибними.

9. Для теорем „Якщо кути рівні, то вони вертикальні“ і „Якщо $\bar{a}\bar{b} = 0$ ($\bar{a}$ і $\bar{b}$ — ненульові вектори), то вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні“ сформулювати: обернені, протилежні теореми; обернені до протилежних теорем. Які із сформульованих теорем є вірними?

10. Сформулювати і довести обернені теореми до наведених нижче теорем. Об'єднати формулювання прямих і обернених теорем.

а) Якщо чотирикутник — паралелограм, то його протилежні сторони рівні.

б) Протилежні кути паралелограма рівні між собою.

в) В прямокутному трикутнику медіана проведена з вершини прямого кута до гіпотенузи, дорівнює половині цієї гіпотенузи.

е) Якщо трикутник — прямокутний, то $\sin\angle A+\sin\angle B = \cos\angle A + \cos\angle B$, де $\angle A$, $\angle B$ — гострі кути трикутника.

д) Якщо кути трикутника ABC задовольняють співвідношення $\cos^2\angle A + \cos^2\angle B + \cos^2\angle C = 1$, то трикутник ABC — прямокутний.

11. Навести приклади умов: а) необхідних, але не достатніх; б) достатніх, але не необхідних; в) необхідних і достатніх.

12. Для того, щоб принаймні один із коренів рівняння $x^2 + px + q = 0$ дорівнював нулеві необхідно й достатньо, щоб $q = 0$. Довести це.

13. Довести, що послідовність $\{a_n\}$ є арифметичною прогресією тоді і тільки тоді, коли $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, де $k = 2, 3, \ldots, n, \ldots$

14. Для того, щоб послідовність $\{b_n\}$ була геометричною прогресією необхідно і достатньо, щоб $b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$, де $k = 2, 3, \ldots, n, \ldots$ Довести це.

15. Нехай n — деяке натуральне число, a і b — деякі взаємно прості натуральні числа. Довести, що n ділиться на ab тоді і тільки тоді, коли n ділиться на кожне із чисел a і b.

16. Для того, щоб трикутник був рівнобедренним необхідно і достатньо, щоб його дві його медіани були рівні. Довести це.

17. Показати, що чотирикутник є паралелограмом тоді і тільки тоді, коли його діагоналі точкою перетину діляться пополам.

18. Довести, що трикутник ABC — рівнобедренний з вершиною A тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\sin\angle A = 2\cos\angle B\cos\angle C$.

19. Для того, щоб многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ ділився на лінійний многочлен $x - c$ необхідно і досить, щоб $f(c) = 0$. Довести це.

20. Нехай a, b, c — деякі дійсні числа. Довести, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ приймає цілі значення для довільного цілого значення x тоді і тільки тоді, коли $2a$, $a + b$, c — цілі числа.

З а н я т т я 2

Методи доведень математичних тверджень

План

1. Індуктивні методи доведень: неповна, повна та математична індукції.
2. Аналогія та її використання.
3. Синтетичний та аналітичний методи — різновидності дедуктивних методів.
4. Доведення методом від супротивного. Софізми в доведеннях.

Методичні зауваження

В навчанні математиці зустрічаються з індуктивним та дедуктивним доведеннями. Серед індуктивних методів доведення виділяють неповну, повну та математичну індукції.

Умовивід, при якому загальний висновок робиться на основі розгляду не всіх можливих окремих випадків називається неповною індукцією. Схематично неповну індукцію можна подати так: кожен з елементів $x_1, x_2, \ldots, x_k$ множини M має властивість $\mathcal{P}$. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ не вичерпують всіх елементів цієї множини. Всі елементи множини M мають властивість $\mathcal{P}$.

Умовивід, при якому загальний висновок робиться на основі розгляду всіх можливих окремих випадків називається повною індукцією. Схематично: кожен з елементів x_1, x_2, $\ldots$, x_k множини M має властивість $\mathcal{P}$. x_1, x_2, $\ldots$, x_k вичерпують всі елементи множини M. Всі елементи множини M мають властивість $\mathcal{P}$.

Метод математичної індукції ґрунтується на математичному твердженні, яке приймається без доведення. Це твердження називається принципом математичної індукції і формулюється так: якщо висловлювання $S(n)$ істинне для $n = 1$ і із припущення, що воно істинне для $n = k$ $(k \geq 1)$ випливає, що воно істинне для $n = k + 1$, то висловлювання $S(n)$ істинне для довільного натурального n.

Неповна індукція не є строгим методом доведення. Нею користуються для відкриття гіпотези, істинність якої потрібно довести або спростувати її.

Приклад 1. Вивести формулу для обчислення суми n перших непарних чисел натурального ряду.

Розв'язування. Нехай $S(n) = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$ $(n \in \mathbb{N})$. Тоді $S(1) = 1$, $S(2) = 1 + 3 = 4$, $S(3) = 1 + 3 + 5 = 9$. За неповною індукцією легко зробити висновок, що сума $S(n) = n^2$. Доведемо це методом математичної індукції.

Для $n = 1$, очевидно, формула суми істинна. Припустимо, що ця формула є істинною для $n = k$, де k — деяке фіксоване натуральне число. Тобто $S(k) = k^2$. Доведемо, що тоді вона буде істинною для $n = k + 1$, або теж саме, що $S(k+1) = (k+1)^2$. Дійсно,

$$\begin{aligned} S(k+1) = 1 + 3 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = \\ = S(k) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Отже, формула $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ є істинною для довільного натурального n.

Методи повної та математичної індукцій є строгими методами доведення.

Крім неповної індукції для відкриття гіпотез користуються аналогією. Умовивід від схожості двох об'єктів за одними ознаками до схожості цих об'єктів за іншими ознаками називається аналогією. Схематично аналогію можна подати так: A має властивості $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$; B має властивості $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$; можливо і B має властивість $\mathcal{P}_4$.

Серед дедуктивних методів доведень виділяють синтетичний та аналітичний методи доведень. Під синтетичним методом доведення розуміють шлях логічного міркування від даного до шуканого (від відомого до невідомого). Шлях логічного міркування від шуканого до даного (від невідомого до відомого) називають аналітичним методом доведення. Синтетичний метод доведення є строгим дедуктивним методом, аналітичний (його різновидність — низхідний аналіз) використовується для відшукання плану доведення або заперечення сформульованого твердження.

Приклад 2. Користуючись низхідним аналізом знайти план доведення нерівності $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, де a, b — будь-які додатні дійсні числа. Доведення оформити синтетичним методом.

Розв'язування. Виходимо із твердження, яке потрібно довести. Вважаємо, що воно істинне. Тоді маємо

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \;\Leftrightarrow\; a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2 \geq 0.$$

Оформлення доведення синтетичним методом виглядатиме, наприклад, таким чином.

Очевидно, що для довільних додатних дійсних чисел a, b має місце нерівність $(a-b)^2 \geq 0$. Звідси $a^2-2ab+b^2 \geq 0$. Тому $a^2+b^2 \geq 2ab$. Оскільки $ab > 0$, то поділивши обидві частини останньої нерівності на ab одержимо, що $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Зауважимо, що додаткові умови можна послабити. Досить вважати, що $ab > 0$.

Різновидність аналітичного методу доведення — висхідний аналіз є строгим дедуктивним методом доведення. Суть його полягає ось в чому. Для доведення твердження $A \Rightarrow B$ поступають так: для B підбирають достатню умову B_1, так, щоб була вірною імплікація $B_1 \Rightarrow B$. Для B_1 підбирають достатню умову B_2, так, щоб була вірною імплікація $B_2 \Rightarrow B_1$. Цей процес продовжують до тих пір, поки не одержать імплікацію $A \Rightarrow B_n$. Тоді вірним є і твердження $A \Rightarrow B$. Справді тут наявною є така ситуація

$$(A \Rightarrow B_n) \wedge (B_n \Rightarrow B_{n-1}) \wedge \ldots \wedge (B_2 \Rightarrow B_1) \wedge (B_1 \Rightarrow B).$$

За законом силогізму формальної логіки одержують, що $A \Rightarrow B$.

В процесі доведень тверджень часто користуються методом від протилежного, суть якого полягає у наступному: приймається за істинне твердження, яке є запереченням того, що потрібно довести, і шляхом логічних міркувань приходять до протиріччя з умовою твердження або з раніше доведеним твердженням.

Цікавим для учнів є задачі на відшукання помилок в доведеннях.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Користуючись неповною індукцією записати формули:

а) для обчислення n-го члена арифметичної прогресії;

б) для обчислення n-го члена геометричної прогресії;

в) для обчислення суми кубів n перших чисел натурального ряду;

г) для обчислення суми $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2$.

Записані формули довести методом математичної індукції.

2. Навести приклади неправильних тверджень, зроблених за неповною індукцією.

3. Користуючись методом математичної індукції довести, що при будь-якому натуральному n:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

в) $\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}=\frac{n}{4(3n+4)}$;

г) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

д) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$;

е) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

4. Довести, що при будь-якому натуральному n:

а) n^3+11n ділиться на 6;

б) $7^{2n}-1$ кратне 48;

в) $4^n+15n-1$ кратне 9;

г) $10^n+18n-28$ кратне 27.

5. Користуючись повною індукцією довести, що при довільному натуральному n:

а) $n(n+1)(2n+1)$ кратне 6;

б) n^3+5n кратне 6;

г) сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

6. Якщо суму цифр деякого двоцифрового числа додати до її квадрата, то одержимо дане двоцифрове число. Знайти це число.

7. Знайти двоцифрове число, яке дорівнює сумі своїх цифр і квадрату їх різниці.

8. Довести, що площа трикутника ABC дорівнює $\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle C$. Чому при доведенні потрібно розглядати випадки: $0^\circ<\angle C<90^\circ$; $\angle C=90^\circ$; $90^\circ<\angle C<180^\circ$?

9. Розв'язати рівняння:

а) $|x+1|+|x-1|=2$;

б) $\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0$;

в) $\frac{9\cos x}{(x+4)^2}+|\cos x|=0$;

г) $|x+2|+|x|+|x-2|=4$.

10. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки даного правильного трикутника до його сторін є величина стала. За аналогією узагальнити це твердження і довести його: а) для квадрата; б) правильного тетраедра; в) довільного правильного многокутника.

11. Навести приклади неправильних тверджень, зроблених за аналогією.

12. Розв'язати такі дві системи рівнянь і знайти аналогію в їх розв'язуванні:

$$\text{а)} \begin{cases} x + y = a, \\ y + z = b, \\ z + x = c; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} xy = a, \\ yz = b, \\ zx = c. \end{cases}$$

13. Користуючись низхідним аналізом, знайти план доведення нерівностей:

а) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$, якщо $xy \geq 0$;

б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}$, якщо $a > 0$, $b > 0$;

в) $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, якщо $x > 0$, $y > 0$;

г) $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$.

Доведення оформити синтетичним методом.

14. Довести методом від протилежного такі твердження:

а) не існує випуклого многокутника, який має більше трьох гострих кутів;

б) якщо $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a}| + |\bar{b}|$, то вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні;

в) $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$ для довільного дійсного числа a.

15. Користуючись висхідним аналізом, довести наступні твердження.

а) Через довільну точку всередині круга проведено пучок хорд. Довести, що добуток довжин відрізків, на які розбивається кожна з цих хорд даною точкою є сталою величиною.

б) Через точку, взяту поза колом, проведено до кола дотичну AM та січну AC. Довести, що $AM^2 = AB{\cdot}AC$, де M — точка дотику, B, C — точки перетину січної з даним колом.

Заняття 3
Тотожні перетворення в шкільному курсі математики

План

1. Поняття тотожності.
2. Методика вивчення тотожних перетворень.
3. Тотожні перетворення ірраціональних виразів.

Методичні зауваження

Два вирази називаються тотожно рівними, якщо при будь-яких значеннях змінних відповідні значення цих виразів рівні.

Тотожністю називають рівність, правильну при будь-яких значеннях змінних.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають тотожним перетворенням виразу.

Наведені вище поняття вводяться в розгляд у 7-му класі. У зв'язку із вивченням виразів, що містять змінні в знаменнику, ірраціональних, тригонометричних та логарифмічних виразів, поняття тотожності, тотожно рівних виразів уточнюється.

Зокрема, у 8-му класі дається таке означення: рівність, яка є правильною для всіх допустимих значеннях змінних, що входять до неї, називається тотожністю.

Для свідомого виконання тотожних перетворень виразів, розуміння їх суті, в процесі вивчення математики доцільно звертати увагу учнів на такі моменти:

- двостороннє засвоєння формул, що вивчаються ними;
- область допустимих значень змінної, що входять в певну формулу (тотожність);
- загальний характер формул.

Спостереження показують, що учні краще засвоюють і використовують формули зліва направо, ніж у зворотному напрямку. Це слід враховувати при підборі завдань для тотожних перетворень.

На одній із математичних олімпіад учням було запропоновано обчислити значення такого виразу:

$$\operatorname{tg} 4^\circ \cdot \operatorname{tg} 8^\circ + \operatorname{tg} 8^\circ \cdot \operatorname{tg} 12^\circ + \cdots + \operatorname{tg} 172^\circ \cdot \operatorname{tg} 176^\circ.$$

Із цим завданням учні не справилися, очевидно, і тому, що вони формально засвоїли формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

За допомогою цієї формули можна в іншому вигляді подати добуток тангенсів двох кутів, а вони цього не використали.

Мало, щоб учні вміли записувати окремі тотожності, наприклад:

$$a^{\log_a x}=x; \quad \sin(\arcsin a)=a; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a;$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}; \quad \frac{x^2-4}{x-2}=x+2; \quad \frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1.$$

Потрібно, щоб вони правильно називали області допустимих значень змінних, які входять в ці тотожності.

Треба домогтися, щоб учні розуміли таке: якщо в тотожність замість будь-якої змінної скрізь написати один і той же вираз, то знову дістанемо тотожність. Наприклад, якщо в тотожності $2(a-3)+6=2a$ змінну a скрізь замінити виразом $\sin x+3$, то дістанемо нову тотожність $2\sin x+6=2(\sin x+3)$.

Доводити тотожності можна трьома способами:

1) перетворенням лівої частини тотожності до такого виду, який має права частина;
2) перетворенням правої частини тотожності до такого виду, який має ліва частина;
3) зведенням лівої і правої частин тотожності до якогось одного виду.

При виконанні тотожних перетворень широко використовуються усні обчислення. З другого боку окремі тотожності дають можливість розширити прийоми усних обчислень. Наприклад, тотожність $(10a+5)^2=100a(a+1)+25$ дає можливість усно знаходити квадрати двоцифрових чисел кратних 5.

При виконанні тотожних перетворень виразів, які містять радикали, треба мати на увазі, що під радикалами розуміють їх арифметичні значення.

Приклад. Спростити вираз $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}$, якщо $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

Розв'язування.

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{|\sin\alpha+\cos\alpha|+|\sin\alpha-\cos\alpha|}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)-(\sin\alpha-\cos\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\sin\alpha.$$

При виконанні дій над степенями з нульовими, від'ємними, дробовими показниками слід мати на увазі, що вони виконуються за такими ж правилами, що і відповідні дії над степенями з натуральними показниками.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Довести тотожність $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

2. Дано, що $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$. Довести, що $a=b=c$.

3. Довести, що із рівності $\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2+y^2}{2xy}=2$ випливає, що $x=y$.

4. Довести, що коли $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, то $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=$ $=(ax+by+cz)^2$.

5. Довести, що якщо $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$, то $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0$.

6. Довести, що якщо $\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, де $abc\neq 0$, то принаймні два із цих чисел рівні за модулем і протилежні за знаком.

7. Послідовність $\{a_n\}$ є арифметичною прогресією з додатними членами. Довести, що для довільного натурального числа k

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{k-1}a_k}=\frac{k-1}{a_1a_k}.$$

8. Довести, що якщо послідовність $\{a_n\}$ є арифметичною прогресією, то для довільного натурального числа k

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{k-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_k}}.$$

9. Нехай квадрати a^2, b^2, c^2 деяких дійсних чисел a, b і c утворюють арифметичну прогресію. Довести, що числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.

10. Довести різними способами тотожність

$$\frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Знайти область допустимих значень змінної x, яка входить в тотожність.

11. Спростити вирази:

а) $\frac{2}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\left(\frac{m-2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}+n}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}+\frac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)$;

б) $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}\right)^{-4}$;

в) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}-1}{1-\sqrt{5}+\sqrt{x}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}+2\right)\cdot\sqrt{0,2}$;

г) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$, якщо $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$;

д) $\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}$, якщо $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$;

е) $\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+6a+9}$.

12. Чому дорівнює:
а) $\sin(\arccos x)$; б) $\cos(\arcsin x)$; в) $\operatorname{ctg}(\arccos x)$; г) $\operatorname{tg}(\arcsin x)$?

13. Довести істинність таких рівностей:

а) $\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ=\frac{1}{16}$;

б) $\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}55^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ=\operatorname{tg}15^\circ$;

в) $\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=3$;

г) $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$;

д) $\arccos(-\frac{13}{14})-\arccos(-\frac{1}{7})=\frac{\pi}{3}$;

е) $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi$.

14. Довести тотожності:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$;

в) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 2\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\alpha \in (\pi; 2\pi)$;

г) $\frac{\cos\angle A}{\sin\angle B \sin\angle C} + \frac{\cos\angle B}{\sin\angle A \sin\angle C} + \frac{\cos\angle C}{\sin\angle A \sin\angle B} = 2$, якщо $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$;

д) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$;

е) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2(1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$;

є) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha = 1$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

15. Довести тотожності:

а) $\log_{ab} N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$;

б) $\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_{b_1} a} + \frac{1}{\log_{b_2} a} + \cdots + \frac{1}{\log_{b_n} a}$, якщо $b = b_1 b_2 \cdots b_n$, $n \in \mathbb{N}$;

в) якщо $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ і $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$, то $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

Заняття 4
Функції в шкільному курсі математики

План

1. Поняття функції.
2. План вивчення функцій.
3. Використання властивостей функцій.
4. Перетворення графіків функцій.
5. Оборотні та обернені функції.

Методичні зауваження

Функціональна лінія шкільного курсу математики є однією з провідних, яка визначає стиль вивчення багатьох тем і розділів алгебри та початків аналізу.

Систематичне вивчення функцій розпочинається в 7-му класі, де вводиться таке поняття: залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

В 10-му класі повертаються до означення функції, дещо узагальнюючи його: функцією з областю визначення D називається відповідність, при якій кожному числу x з множини D ставиться у відповідність деяке цілком певне число y.

Наведені вище означення не можна вважати цілком строгими. В більш загальному плані поняття функції визначається через поняття „відношення“, зміст якого, в свою чергу, розкривається через поняття „декартів добуток двох множин“.

В молодших класах корисно проводити підготовчу роботу, пов'язану з формуванням в учнів поняття функції, тобто здійснювати функціональну пропедевтику.

Під час навчання в школі учні вивчають такі елементарні функції:

$$y = kx + b; \quad y = x^n; \quad y = \frac{k}{x}; \quad y = ax^2 + bx + c; \quad y = \sin x;$$
$$y = \cos x; \quad y = \operatorname{tg} x; \quad y = \operatorname{ctg} x; \quad y = a^x; \quad y = \log_a x.$$

Вивчення функцій рекомендується здійснювати за таким планом:

1) розгляд прикладів, які приводять до формули, що задає функцію;

2) означення функції, запис формули, розкриття змісту параметрів, що входять до неї;
3) вивчення властивостей функції аналітичним методом;
4) графічне зображення функції;
5) застосування вивчених властивостей у конкретних ситуаціях.

Проілюструємо застосування властивостей лінійної функції на прикладі такої задачі.

Приклад. Відстань між двома містами A і B дорівнює l км. Потреба в нафті міста A становить a т нафти на добу, а міста B — b т. Вартість перевезення 1 т нафти на відстань 1 км становить c коп. Де будувати нафтобазу, щоб витрати на перевезення нафти були найменшими?

Розв'язування. Очевидно, що розв'язування задачі зводиться до знаходження найменшого значення функції $y = axc + b(l - x)c$, або ж $y = (a - b)cx + blc$ на відрізку $[0; l]$, де x — відстань від A до нафтобази, y — витрати на перевезення нафти.

Якщо $a > b$, то y — зростаюча функція. Отже, найменше значення функції досягає на лівому кінці відрізка. Нафтобазу слід будувати в місті A. Якщо $a < b$, то нафтобазу слід будувати в B. Якщо ж $a = b$, то все olyj, де будувати нафтобазу. Можна взяти до уваги якісь нові параметри.

Доцільно навчити учнів використовувати графіки функцій для відтворення їх властивостей — навчити їх „читати“ графіки.

„Читання“ графіків функцій включає в себе вміння знайти за побудованим графіком: значення функції, яке відповідає заданому значенню аргументу; значення аргументу, яке відповідає заданому значенню функції; значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, більше нуля, менше нуля; проміжки зростання і спадання функції; точки екстремуму; найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку, тощо.

Розв'язування квадратичної нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$ зводиться, по суті, до такої задачі: знаходження значень аргументу, для яких функція $y = ax^2 + bx + c$ приймає більші за нуль значення. Іншими словами — до читання графіку квадратичної функції. Всі можливі випадки, які при цьому можуть трапитися, зображені на рисунку 2.

Ясно, які проміжки у наведених ситуаціях є розв'язками нерівності $ax^2 + bx + c < 0$.

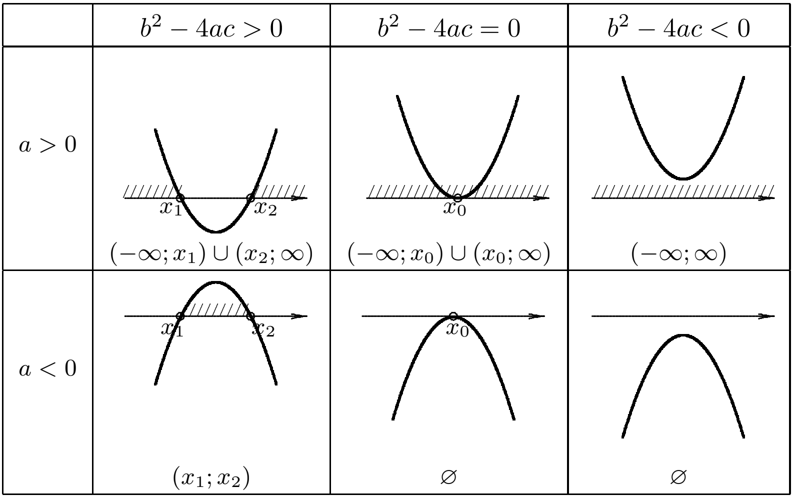

Рис. 2. $ax^2 + bx + c > 0$.

Цікавим є питання про перетворення графіків функцій. Учнів потрібно навчити за графіком функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій таких функцій: $y = -f(x)$; $y = f(-x)$; $y = f(x+a)$; $y = f(x) + b$; $y = |f(x)|$; $y = f(|x|)$; $y = mf(x)$; $y = f(kx + b)$, де a, b, m, k — дійсні числа.

Серед елементарних функцій, що вивчаються в шкільному курсі, виділяють клас оборотних функцій. Функція f, яка набуває кожного свого значення в єдиній точці області визначення, називається оборотною.

Для оборотної функції існує обернена функція. Функція g, яка в кожній точці y, що належить області значень оборотної функції f, набуває такого значення x, що $f(x) = y$, називається оберненою до функції f.

З поняттям оберненої функції учні ознайомлюються в 11-му класі при вивченні показникової та логарифмічної функцій.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Охарактеризувати функціональну пропедевтику до введення поняття функції, яка проводиться в 5–6-х класах.

2. Підібрати задачі практичного змісту, які приводять до поняття функції.

3. Як одержати з графіків функцій

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 3^x, \quad y = \lg x$$

відповідно графіки таких функцій

$$y = x^2 + x - 2, \quad y = \frac{1}{x-1}, \quad y = -3^x + 1, \quad y = \lg|x+2|.$$

4. Побудувати графіки таких функцій:

а) $y = x^2 - 6|x| + 8$;

б) $y = |x^2 - 6x + 8|$;

в) $y = |\operatorname{tg} 3x|$;

г) $y = \frac{1}{2x-1}$;

д) $y = \frac{(x+2)(15-2x-x^2)}{x+3}$;

е) $y = \frac{x^3+1}{x+1}$;

є) $y = \sin\frac{x+|x|}{2}$.

5. Розв'язати графічно нерівності:

а) $2x^2 + x + 1 > 0$;

б) $x^2 - x - 12 < 0$;

в) $2x^2 + 4x + 1 < 0$;

г) $\sin 2x < \frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 1$;

е) $|2x - 1| > 1$,

є) $x^2 - 3|x| + 2 < 0$.

6. Дати графічну інтерпретацію розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей.

7. Розв'язати графічно такі рівняння: $\sin x = x$, $\operatorname{tg} x = x$, $2^x = x^2$.

8. Серед елементарних функцій назвати оборотні функції. На яких проміжках є оборотними функції: $y = 2x + 1$, $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$?

9. Зобразити на одному малюнку графіки функцій:

а) $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^4$, $y = \sqrt[4]{x}$;

б) $y = x$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^5$, $y = \sqrt[5]{x}$.

Що є характерним в розміщенні побудованих графіків?

10. Побудувати графіки таких функцій:

а) $y = \sin(\arcsin x)$, $y = \cos(\arccos x)$, $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;

б) $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

11. Знайти число коренів рівнянь:

а) $\sin x = \frac{2x}{201\pi}$;

б) $|\cos \pi x| = \frac{x^2}{4n^2}$, де $n \in \mathbb{N}$;

в) $\left[\frac{x}{2} + 1\right] = x + 1$, де $[a]$ — ціла частина числа a;

г) $\{x\} = \frac{x^2}{16}$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x;

д) $(x - 1)(\ln |x| - 1) = 1 + x$;

е) $x^2 - 2x - 3 = \log_2 |1 - x|$.

12. Скільки коренів має рівняння залежно від параметра a? Встановити це графічно.

а) $\frac{x^2-1}{x-1} = a$;

б) $\frac{x^3+1}{x+1} = a$;

в) $\frac{(x-1)(6+x-x^2)}{x-3} = a$;

г) $\frac{x^2+x-6}{x+3} = a$;

д) $|4x + 2| + |4x - 2| = a$;

е) $|x + 1| + 2|x| + |x - 1| = a$.

13. Для даної функції знайти обернену функцію і побудувати схематично їх графіки в одній і тій же системі координат.

а) $y = 2x + 1$;

б) $y = \frac{1}{x-1}$;

в) $y = \sqrt{x + 1}$;

г) $y = \left[\begin{array}{ll} x - 1, & \text{якщо } x \le 0, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } x > 0; \end{array}\right.$

д) $y = \left[\begin{array}{ll} x, & \text{якщо } x \le 0, \\ 2^x, & \text{якщо } x > 0. \end{array}\right.$

14. Навести приклади функцій, обернених самих собі.

Заняття 5
Рівняння та системи рівнянь у шкільному курсі математики

План

1. Поняття рівняння.
2. Рівносильність рівнянь.
3. Втрата коренів та поява сторонніх коренів.
4. Системи рівнянь.

Методичні зауваження

Рівність, яка містить невідоме число, називається рівнянням. Знайдене значення невідомого називається коренем рівняння.

Таке трактування поняття рівняння та його кореня зустрічається в 5-му класі.

В 6-му класі зміст поняття рівняння та його кореня розкривається через поняття змінної. Рівність із змінною називають рівнянням. Коренем рівняння називається значення змінної, при якому рівняння перетворюється в правильну рівність. Змінну в рівності називають також невідомим числом чи просто невідомим.

Взагалі, рівнянням з однією змінною називається предикат вигляду $f(x) = g(x)$. Коренем (розв'язком) рівняння називається значення змінної, при якому відповідний предикат перетворюється в істинне висловлювання.

Найпростіші рівняння учні розв'язують уже в 1–4-х класах. Спочатку розв'язування рівнянь здійснюється на основі залежностей між компонентами і результатами дій.

Починаючи з 7-го класу, розв'язування рівнянь здійснюється з використанням теорем про рівносильність (еквівалентність) рівнянь. Рівняння, які мають рівні множини коренів, називають рівносильними. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають коренів.

Рівносильність рівнянь залежить від множини, на якій вони розглядаються. Так, рівняння $x+2 = 0$ і $(x+2)(x^2-2) = 0$ — рівносильні на множині раціональних чисел, і не рівносильні на множині дійсних чисел.

Сформулюємо в загальному теореми про рівносильність рівнянь.

Теорема 1. *Рівняння $f(x) = g(x)$ і рівняння $f(x) + w(x) = g(x) + w(x)$ рівносильні, якщо функція w — визначена в області допустимих значень змінної (ОДЗ) першого рівняння.*

ОДЗ рівняння $f(x) = g(x)$ — це спільна частина областей визначень функцій f і g.

Теорема 2. *Рівняння $f(x) = g(x)$ і рівняння $f(x)w(x) = g(x)w(x)$ рівносильні, якщо функція w — визначена в ОДЗ першого рівняння і крім того в цій області $w(x) \neq 0$.*

Доведення цих теорем просте. Кожне з рівнянь, про яке йде мова в теоремах, є наслідком одне одного. З двох рівнянь друге називається наслідком першого, якщо довільний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння.

В 7-му класі формулювання цих теорем дається в спрощеному вигляді і доведення їх ілюструється на конкретних прикладах.

При порушенні вимог сформульованих теорем відбувається втрата коренів чи поява сторонніх коренів. Джерелом втрати коренів може бути також звуження ОДЗ рівняння, появи сторонніх коренів — її розширення.

Приклад 1. При розв'язуванні рівняння $\lg x^2 = 2$ його замінили рівнянням $2\lg x = 2$ і одержали, що $x = 10$. Правильне розв'язування таке: $x^2 = 10^2$; звідси $x = \pm 10$. Втрата кореня тут відбулася за рахунок звуження ОДЗ рівняння. ОДЗ першого рівняння — множина дійсних чисел, крім $x = 0$, ОДЗ другого рівняння — множина дійсних додатних чисел.

Сторонні корені можуть з'явитися внаслідок піднесення частин рівняння до парного степеня. Таку операцію часто виконують, зокрема, при розв'язуванні ірраціональних рівнянь.

Серед різних методів розв'язування рівнянь досить універсальним є метод зведення лівої частини рівняння $f(x) = 0$, права частина якого є нуль, до вигляду: $f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = 0$. Розв'язування такого рівняння зводиться, до розв'язування сукупності рівнянь: $f_1(x) = 0$ або $f_2(x) = 0$, ..., або $f_n(x) = 0$. При цьому можуть з'явитися сторонні корені за рахунок того, що ОДЗ окремих рівнянь сукупності є ширшим за ОДЗ даного рівняння.

Приклад 2. При розв'язуванні рівняння $(x-2)(x-4)\sqrt{x-3} = 0$ його замінили сукупністю рівнянь: $x - 2 = 0$ або $x - 4 = 0$ або $\sqrt{x-3} = 0$. Одержали: $x = 2$ або $x = 4$ або $x = 3$. Але 2 — сторонній корінь розглядуваного рівняння, оскільки ОДЗ рівняння $x - 2 = 0$ ширша за ОДЗ даного рівняння. Відповідь: $x = 3$ або $x = 4$.

Заслуговує на увагу питання про перевірку розв'язків рівняння. Якщо при розв'язуванні даного рівняння його заміняють йому еквівалентним, то така перевірка не є потрібною. Якщо при розв'язуванні рівняння переходять до його наслідку, тоді перевірка є необхідною складовою частиною розв'язування рівняння. Проводиться вона з метою виявлення сторонніх коренів.

На практиці треба добре знати конкретні джерела появи і втрати розв'язків рівнянь і враховувати це в процесі їх розв'язування.

Починаючи з 7-го класу в школі вивчаються системи рівнянь з двома змінними (невідомими). Спочатку вивчаються системи лінійних рівнянь, а пізніше — другого степеня і деякі інші системи нелінійних рівнянь.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі значення змінних, які задовольняють кожне рівняння системи або довести, що їх немає.

Розв'язування систем двох рівнянь з двома невідомими різними аналітичними методами (метод підстановки, метод додавання) доцільно поєднувати з графічним тлумаченням множини розв'язків цих систем. Так, наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

в залежності від коефіцієнтів системи може мати: 1) один розв'язок (це означає, що прямі, які є графіками, кожного з цих рівнянь, перетинаються в одній точці); 2) безліч розв'язків (це означає, що відповідні прямі співпадають); 3) немає розв'язків (це означає, що відповідні прямі є паралельними).

В школі ставиться і вивчається питання про графічне розв'язування систем рівнянь. Алгоритм розв'язування системи рівнянь

$$\begin{cases} F(x;y) = 0; \\ G(x;y) = 0 \end{cases}$$

такий: 1) будують графіки кожного з рівнянь системи; 2) знаходять координати (абсциси і ординати) точок перетину графіків цих рівнянь; 3) записують відповідь — розв'язки системи.

Заслуговує на увагу метод розв'язування рівнянь та їх систем з використанням заміни змінних, яким не достатньо користуються в практиці роботи школи.

Слід приділити увагу розв'язуванню рівнянь та їх систем, в яких невідомі знаходяться під знаком модуля.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння, проаналізувавши можливі втрати коренів:

а) $\sqrt{x^2+2x+1} = -(x+1)$;

б) $(x^2-4x)(\lg x - 1) = 3(\lg x - 1)$;

в) $x^4+2x^3-x-2=0$;

г) $x^2(\cos x+1) = (2x+3)(\cos x+1)$;

д) $\sqrt{1-\sin^2 x} + \sqrt{1-\cos^2 x} = 1$;

е) $\log_3(x-1)^2 + \log_3(x+3)^2 = 2$.

2. Розв'язати рівняння, виявивши при цьому можливі причини появи сторонніх коренів:

а) $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$;

б) $\frac{x^2-6x+9}{x-3} + x^2 - 9 = 0$;

в) $2\lg\lg x = \lg(3-2\lg x)$;

г) $1+2\sqrt{2x+7} = x-3$;

д) $\sqrt{x+2}(\sin x - 1) = x(\sin x - 1)$;

е) $\sqrt{2x+1}\cos x = (x-1)\cos x$.

3. Виходячи з означення кореня рівняння, знайти розв'язки рівняння:

а) $(x+2)^2 + (x^2-x-6)^2 = 0$;

б) $(x^2-3x+2)^6 + (x^2-6x+8)^6 = 0$;

в) $(2x-1)^4 + (2x^2-3x+1)^4 = 0$;

г) $(x^2-4)^8 + (3x^2-10x+3)^8 = 0$.

4. Довести, що рівняння не мають коренів.

а) $x^2 + \frac{1}{x^2-4} = 16 + \frac{1}{x^2-16}$;

б) $x^4+x^2+1 = \arcsin\frac{1}{3}$;

в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{x-9}$;

г) $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{9-x}$;

д) $\lg(10-x^2) = \sqrt{x} + \sqrt{x+2}$;

е) $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

5. Розв'язати системи рівнянь і дати графічне тлумачення множини їх розв'язків:

а) $\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - y = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + y = 6, \\ 10x + 2,5y = 16; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 2y = 5, \\ 6x + 3y = 7,5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ x - y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x - 4y = 6, \\ 1,5x - 6y = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = 6, \\ 5x + 7,5y = 10. \end{cases}$

6. Розв'язати рівняння з модулями:

а) $|x-1| + 3 = x$;

б) $4x^2 - 17|x| + 4 = 0$;

в) $x^2 - 3|x+2| - 7 = 0$;

г) $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = 5$;

д) $||x+2| - |x-6|| = |x|$;

е) $|3x+1| + |3x-1| = 2$.

7. Розв'язати рівняння методом заміни змінних:

а) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$;

б) $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2$;

в) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$;

г) $(8x^2 - 3x + 1)^2 = 32x^2 - 12x + 1$;

д) $x(x+3)(x+5)(x+8) = 100$;

е) $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$.

8. Розв'язати системи рівнянь методом заміни змінних:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$

9. Розв'язати систему рівнянь, використавши теорему Вієта:

а) $\begin{cases} x + y = 11, \\ xy = 30; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 16, \\ xy = -48; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^3 + y^3 = -1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

10. Знайти таке значення a, при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ дорівнює 68.

11. Дано рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Виразити суму кубів його коренів через коефіцієнти a, b, c.

12. Нехай k і l — корені рівняння $x^2 + ax + b = 0$. Виразити через k і l корені рівняння $bx^2 + ax + 1 = 0$.

13. Розв'язати рівняння в натуральних числах:

а) $xy - 3x + 5y = 25$;

б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$;

в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$;

г) $y - \frac{x^3+3}{x+3} = 0$;

д) $x + y = x^2 - xy + y^2$.

14. Знайти число розв'язків системи рівнянь залежно від параметра a:

а) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ x - ay = 0. \end{cases}$

З а н я т т я   6

Доведення нерівностей

План

1. Числові нерівності та їхні властивості.
2. Деякі класичні нерівності.
3. Основні методи доведення нерівностей.

Методичні зауваження

Поряд з розв'язуванням нерівностей, що містять змінні, важливе місце в математичній підготовці учнів відводиться доведенню нерівностей. Довести певну нерівність із змінними це означає показати, що вона перетворюється в правильну (істинну) числову нерівність при будь-яких допустимих значеннях змінних, що входять до неї. При доведенні нерівностей часто використовують означення числової нерівності, а також відповідні їх властивості.

За означенням число a вважається більшим за число b, якщо різниця $a - b$ — число додатне; число a — меншим від числа b, якщо різниця $a - b$ — число від'ємне.

Наведемо властивості числових нерівностей:

а) якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$;

б) якщо $a < b$ і c — довільне число, то $a + c < b + c$;

в) якщо $a < b$ і c — довільне додатне число, то $ac < bc$;

г) нерівності з однаковими знаками можна почленно додавати;

д) нерівності з однаковими знаками можна почленно перемножувати, якщо їхні ліві і праві частини — додатні числа;

е) для будь-яких чисел a і b таких, що $0 \le a \le b$, виконується нерівність $\sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{b}$.

Наведені властивості числових нерівностей доводяться в шкільних підручниках.

Розглянемо окремі методи доведення нерівностей.

Метод, в основу якого покладено означення числової нерівності.

Приклад 1. Довести, що для довільних невід'ємних дійсних чисел a і b є правильною нерівність $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.

Розв'язування.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0.$$

Приклад 2. Довести, що $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, якщо $ab>0$.

Розв'язування.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0.$$

Метод, в основу якого покладено дії над відомими або раніше доведеними нерівностями. Ці дії здійснюються за властивостями числових нерівностей.

Приклад 3. Довести, що

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}},$$

де a, b, c — довільні додатні числа.

Розв'язування. Оскільки середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їхнього середнього геометричного, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{ab}},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{bc}},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

Додавши почленно ці нерівності одержимо нерівність, яку потрібно було довести.

Метод доведення від супротивного. При доведенні цим методом нерівності $a<b$ припускаємо, що істинною є нерівність $a\geq b$, з якої логічним міркуванням приходимо до суперечливої нерівності. Зрозуміло, що запереченням нерівності $a>b$ є нерівність $a\leq b$, нерівності $a\leq b$ — нерівність $a>b$, нерівності $a\geq b$ — нерівність $a<b$.

Приклад 4. Довести нерівність $\dfrac{a}{9a^2+4}\leq\dfrac{1}{12}$.

Розв'язування. Припустимо, що нерівність, яку треба довести, є хибною. Тоді істинною є нерівність $\frac{a}{9a^2+4}>\frac{1}{12}$. Звідси $12a>9a^2+4$. Із останньої нерівності випливає, що $(3a-2)^2<0$. Ця ж нерівність є хибною. Отже, істинною є нерівність, яку потрібно було довести.

Метод доведення через посилення або послаблення нерівності. Суть цього методу полягає в тому, що для доведення нерівності $a < b$ доводять нерівність $c < b$, де $c > a$ (сильнішу нерівність). На основі відповідної властивості числової нерівності роблять висновок про істинність нерівності $a < b$. Для доведення нерівності $a > b$ доводять нерівність $c > b$, де $c < a$ (слабшу нерівність), на основі чого роблять висновок про істинність нерівності $a > b$.

Приклад 5. Довести, що $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \le 1$, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язування. Доведемо сильнішу нерівність

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \le 1.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \\ = 1 - \frac{1}{n} \le 1.$$

Оскільки

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} > \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

то істинною є нерівність, яку потрібно було довести.

Метод математичної індукції, що є досить часто зручним для доведення нерівностей, залежних від натурального n.

Приклад 6. Довести нерівність

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2,$$

де a_1, a_2, $\ldots$, a_n — довільні додатні дійсні числа, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язування. Очевидно, що при $n = 1$ нерівність, яку треба довести, є правильною, оскільки $a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1$. Припустимо, що нерівність істинна при $n = k$ $(k \ge 1)$. Доведемо, що вона істинна і при

$n = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
&(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k+1}} \right) = \\
&\qquad = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \right) + \\
&+ (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \frac{1}{a_{k+1}} + a_{k+1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \right) + 1 \geq k^2 + \\
&+ \left(\frac{a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_2} \right) + \cdots + \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) + 1 \geq \\
&\qquad \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.
\end{aligned}
$$

Кожна з доведених нерівностей є математичним твердженням і тому їх можна використовувати при доведенні нових нерівностей.

Цікавими є класичні нерівності, які пов'язують між собою різні середні значення n дійсних додатних чисел.

Якщо a_1, a_2, $\ldots$, a_n — дійсні додатні числа, тоді можна довести, що істинною є така низка нерівностей:

$$
\min\{a_1, \ldots, a_n\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a_1, \ldots, a_n\},
$$

де

$$
H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}
$$

— середнє гармонійне,

$$
G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}
$$

— середнє геометричне,

$$
A = \frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n}
$$

— середнє арифметичне,

$$
Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{2}}
$$

— середнє квадратичне даних чисел, $\min\{a_1, \ldots, a_n\}$ — найменше із даних чисел, $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ — найбільше із даних чисел.

При доведенні нерівностей, пов'язаних з властивостями геометричних фігур та нерівностей, що містять елементарні функції, використовують розглянуті вище методи, а також відповідні властивості геометричних фігур та функцій.

Приклад 7. Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник. Довести, що його площа S_{ABCD} не більша за $\frac{(AB+CD)(BC+AD)}{4}$.

Розв'язування. Користуючись формулою для площі трикутника маємо

$$2S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} + S_{DAB} + S_{BCD} = \tfrac{1}{2}AB \cdot BC \sin\angle B +$$
$$+ \tfrac{1}{2}CD \cdot AD \sin\angle D + \tfrac{1}{2}AD \cdot AB \sin\angle A + \tfrac{1}{2}BC \cdot CD \sin\angle C.$$

Оскільки максимальне значення функції синус дорівнює 1, то

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{4}(AB \cdot BC + CD \cdot BC + AB \cdot AD + CD \cdot AD) =$$

$$= \frac{(AB + CD)(BC + AD)}{4}.$$

Приклад 8. Довести, що $\frac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \le 1$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язування. Розглянемо функцію $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. По суті треба довести, що $y \in [\frac{1}{2}; 1]$, якщо $x \in \mathbb{R}$. Маємо

$$y = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}.$$

Оскільки $\cos^2 2x \in [0; 1]$, якщо $x \in \mathbb{R}$, то $y \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Приклад 9. Довести, що $\operatorname{tg} x > x$, якщо $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Розв'язування. Введемо в розгляд функцію $y = \operatorname{tg} x - x$. Тоді

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x > 0.$$

Отже, функція на даному проміжку зростає. Оскільки $y(0) = 0$, то $\operatorname{tg} x - x > 0$. Звідси слідує нерівність, яку потрібно було довести.

Зауважимо, що одну і ту ж нерівність нерідко можна довести різними методами і, що для доведення певних нерівностей треба використати кілька методів.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Користуючись означенням числової нерівності, довести такі нерівності:

а) $\frac{a^2}{1+a^4} \leq \frac{1}{2}$;

б) $\frac{(a+b)}{(a^2+b^2)} \geq \frac{(a^3+b^3)}{(a^4+b^4)}$ $(a > 0,\, b > 0)$;

в) $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ $(b > a > 0)$;

г) $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ $(a > b > 0)$;

д) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a + b \geq 0)$;

е) $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

2. Використовуючи нерівність $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, де $ab > 0$, довести такі нерівності:

а) $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6$ $(x > 0,\, y > 0,\, z > 0)$;

б) $\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)}{abc} \geq 27$ $(a > 0,\, b > 0,\, c > 0)$;

в) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geq 2$ $(\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}))$;

г) $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$ $(a > 0,\, b > 0,\, c > 0)$.

3. Довести, що послідовність $a_n = n^2 - 2n + 3$ — монотонно зростаюча, а послідовність $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ — монотонно спадаюча.

4. Користуючись залежністю між середнім арифметичним та середнім геометричним n дійсних чисел, довести такі нерівності:

а) $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$, де a, b, c —довільні дійсні додатні числа;

б) $(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 2^n$, якщо a_1, a_2, $\ldots a_n$ — довільні дійсні додатні числа і $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$;

в) $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \sqrt{a_{n-1} a_n} + \sqrt{a_n a_1} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, де a_1, a_2, $\ldots a_n$ — довільні дійсні додатні числа;

г) $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$, де a_1, a_2, $\ldots a_n$ — довільні дійсні додатні числа;

д) $\sin^2\alpha\cos^6\alpha \le \frac{3^3}{4^4}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

5. Користуючись методом математичної індукції, довести такі нерівності:

а) $2^{n+2} > 2n+5$ $(n \in \mathbb{N})$;

б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$;

в) $3^{n+1} > 3n+2$ $(n \in \mathbb{N})$;

г) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 1)$.

6. За допомогою похідної довести нерівності:

а) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1 > 0$ $(x \ge 0)$;

б) $a^3 - 3a + 2 > 0$ $(a > 1)$;

в) $\sin x < x$ $(x > 0)$;

г) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ $(x > 0)$;

д) $\ln(1+x) < x$ $(x > 0)$;

е) $x^2 - 1 > 2\ln x$ $(x > 1)$;

є) $e^x > 1 + x$ $(x > 0)$;

ж) $\frac{x^n}{e^x} \le \left(\frac{n}{e}\right)^n$ $(x > 0,\ n \in \mathbb{N})$.

7. Розмістити в порядку зростання числа:

а) $\sin 2,\ \sin 4,\ \sin 6,\ \sin 8$;

б) $\cos 2,\ \cos 4,\ \cos 6,\ \cos 8$;

в) $\mathrm{tg}\,1,\ \mathrm{tg}\,2,\ \mathrm{tg}\,3,\ \mathrm{tg}\,4$;

г) $\mathrm{ctg}\,1,\ \mathrm{ctg}\,2,\ \mathrm{ctg}\,3,\ \mathrm{ctg}\,4$.

8. Порівняти такі числа:

а) $\dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ та $\dfrac{\sin 5^\circ}{\sin 6^\circ}$; б) $\dfrac{\sin 1}{\sin 2}$ та $\dfrac{\sin 5}{\sin 6}$; в) $\dfrac{\cos 1}{\cos 2}$ та $\dfrac{\cos 4}{\cos 5}$;

г) $\dfrac{\cos 1^\circ}{\cos 2^\circ}$ та $\dfrac{\cos 4^\circ}{\sin 5^\circ}$; д) $\log_2 3$ та $\log_3 4$; е) $\log_4 5$ та $\log_5 6$.

9. Використовуючи один із методів доведення нерівностей або їх комбінацію, довести такі нерівності:

а) $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b}{2}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

б) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$, якщо $x + y + z = 3$;

в) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$, якщо $a + b \geq 1$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$;

д) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ $(a \geq 1)$;

е) $\dfrac{\lg 1 + \lg 2 + \dots + \lg n}{n} < \lg(n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$;

є) $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n| \leq 1$, якщо $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$;

ж) $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y} + \dfrac{y^2 + z^2}{y + z} + \dfrac{z^2 + x^2}{z + x} > x + y + z$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

10. Довести нерівності:

а) $a^3 + b^3 < c^3$, $ab + bc + ac < 2c^2$, якщо a, b — катети, c — гіпотенуза прямокутного трикутника;

б) $\sin^2 \angle C > \sin 2\angle A \sin 2\angle B$, якщо $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника;

в) $\frac{1}{4} \leq \sin^6 x + \cos^6 x \leq 1$ $(x \in \mathbb{R})$;

г) $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ $(x \in \mathbb{R})$;

д) $(1 + a^{2k}) - a^k \geq a^{2k-1} + a^{2k-2} + \dots + a$ $(a > 0,\ k \in \mathbb{N})$.

З а н я т т я 7

Розв'язування нерівностей та їх систем

План

1. Поняття нерівності.
2. Рівносильність нерівностей.
3. Окремі методи розв'язування нерівностей та їх систем.
4. Розв'язування нерівностей з двома змінними.

Методичні зауваження

По відношенню до нерівностей ставлять і розв'язують такі два типи задач:

1) довести нерівність (цей тип задач розглянуто раніше);
2) розв'язати нерівність, що містить змінну (невідому) або систему таких нерівностей.

Зміст понять „нерівність із змінною", „розв'язок нерівності" в шкільному курсі математики розкривають через розгляд конкретних прикладів.

А взагалі, нерівністю з однією змінною називають одномісний предикат вигляду $f(x) > g(x)$ або $f(x) < g(x)$. Розв'язком нерівності називають значення змінної, при яких відповідний предикат перетворюється в істинне висловлювання.

Розв'язування нерівностей з однією змінною ґрунтується на таких теоремах про рівносильність (еквівалентність) двох нерівностей.

Теорема 1. *Дві нерівності* $f(x) > g(x)$ *і* $f(x)+w(x) > g(x)+w(x)$ *еквівалентні, якщо* w *— функція, визначена в ОДЗ першої нерівності.*

Теорема 2. *Дві нерівності* $f(x) > g(x)$ *і* $f(x)w(x) > g(x)w(x)$ *еквівалентні, якщо* w *— функція, визначена в ОДЗ першої нерівності і для довільного значення* x *із цієї області* $w(x) > 0$.

Доведемо другу теорему. Нехай α — розв'язок першої нерівності. Тоді $f(\alpha) > g(\alpha)$ — істинна (правильна) числова нерівність, $w(\alpha)$ — певне додатне число. За відповідною властивістю числової нерівності істинною є числова нерівність $f(\alpha)w(\alpha) > g(\alpha)w(\alpha)$. Отже, α — розв'язок другої нерівності.

Аналогічно доводиться, що будь-який розв'язок другої нерівності є розв'язком першої.

У 8-му класі формулювання цих теорем дається в спрощеному вигляді і доведення їх ілюструється на конкретних прикладах.

При розв'язуванні нерівностей учні нерідко порушують вимоги сформульованих теорем, зокрема, множать (ділять) частини нерівностей на функцію w, знак якої не є визначеним, що призводить до помилок.

Приклад 1. При розв'язуванні нерівності $\frac{x+1}{x+2} > 3$ її замінили нерівністю $x + 1 > 3(x + 2)$ і одержали, що $x < -\frac{5}{2}$. При цьому допущено помилку. Не враховано, що значення функції $w(x) = x+2$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Правильна відповідь: $-2 < x < -\frac{5}{2}$.

Найчастіше застосовують такі методи розв'язування нерівностей: аналітичний, графічний, метод інтервалів.

Для активізації розумової діяльності учнів розв'язування окремих нерівностей варто здійснювати різними методами.

Графічний метод розв'язування нерівностей ґрунтується на схематичному зображенні графіків функцій і на читанні побудованих графіків. Тому пропедевтичною роботою, пов'язаною з підготовкою учнів до розв'язування нерівностей цим методом, можна і потрібно зайнятися вчителям, як тільки розпочнеться систематичне вивчення функцій та їхніх графіків.

Алгоритм розв'язування, наприклад, нерівності $f(x) > 0$ такий:

1) будуємо графік функції $y = f(x)$;
2) знаходимо ті значення x, для яких $f(x) > 0$, тобто абсциси тих точок графіка, де $y > 0$;
3) записуємо відповідь.

Розв'язування нерівностей методом інтервалів вивчається у 9-му класі на індуктивній основі. Певне теоретичне обґрунтування цього методу можна здійснити у 10-му класі з використанням такої теореми.

Теорема 3. *Якщо на інтервалі $(a;b)$ функція f — неперервна і не перетворюється в нуль, то вона на цьому інтервалі зберігає сталий знак.*

Підкреслимо, що для неперервної функції теорема залишається істинною при умові, що інтервал $(a;b)$ є множиною всіх дійсних чисел. Отже, нею можна користуватися для розв'язування нерівностей вигляду $f(x) > 0$ у випадку, коли неперервна функція $y = f(x)$ не має нулів на всій множині дійсних чисел.

При використанні методу інтервалів для розв'язування нерівностей вигляду

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) > 0$$

знак функції, що міститься в лівій частині нерівності, знаходять лише на одному із інтервалів (x_i, x_{i+1}), а потім враховують, що при переході через нуль цієї функції її знак змінюється на протилежний.

Розв'язування систем нерівностей включає в себе два моменти:

1) розв'язування кожної нерівності, яка входить в дану систему;
2) визначення тих значень змінної, які одночасно задовольняють кожну нерівність системи.

Зауважимо, що в математиці, крім поняття „система нерівностей“ розглядають і „сукупність нерівностей“. Розв'язати систему нерівностей — це означає знайти всі значення змінної, які задовольняють кожну нерівність системи; розв'язати сукупність нерівностей — це означає знайти всі значення змінної, які задовольняють принаймні одну нерівність цієї сукупності. Множина розв'язків системи — це переріз множин розв'язків нерівностей, що входять до неї; множина розв'язків сукупності — це об'єднання множин розв'язків всіх її нерівностей.

Цікавим є питання про розв'язування нерівностей з двома змінними. Розв'язком нерівності $f(x; y) > 0$ називається пара чисел (x_0, y_0), яка перетворює її в істинну числову нерівність при відповідній підстановці значень змінних $x = x_0$ і $y = y_0$. Кожному розв'язку нерівності відповідає певна точка числової площини $\mathbb{R}^2$. Множина всіх розв'язків нерівності $f(x; y) > 0$ утворює певну фігуру на площині — область її розв'язків.

Розв'язування нерівностей з двома змінними або систем нерівностей в шкільному курсі математики зводять до зображення області її розв'язків.

Приклад 2. Знайти множину розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ x + y \geq 2. \end{cases}$$

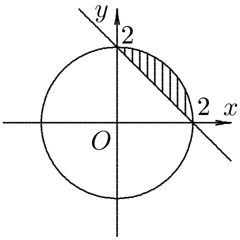

Рис. 3.

Розв'язування. Множиною розв'язків першої нерівності системи є круг радіуса 2 з центром в початку координат. Множиною розв'язків другої нерівності є півплощина. Шуканою множиною ж розв'язків системи є переріз вище згаданих множин, тобто сегмент зображений на рисунку 3.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Розв'язати різними методами (аналітичним, графічним, методом інтервалів) нерівності:

а) $x^2+x-2>0$; б) $4x^2-12x+1>0$; в) $2x^2-3x+1<0$;

г) $x^2+2x+4>0$; д) $x^3-x<0$; е) $(x^2-4)(x^2-9)>0$;

є) $x^4-8x>0$; ж) $2x^3+3x+4<0$; з) $x^3-5x^2+6x\le 0$.

2. При розв'язуванні нерівності $\dfrac{1}{x-1}<\dfrac{2}{x+2}$ її замінили такою: $(x+2)<2(x-1)$. Яку допущено при цьому помилку? Розв'язати нерівність правильно.

3. Які є методи розв'язування нерівностей вигляду:

$$\frac{ax+b}{cx+d}<0 \quad \text{та} \quad \frac{ax+b}{cx+d}>0?$$

Яким методом рекомендується розв'язувати такі нерівності в школі?

4. Для яких значень параметра a рівносильними є нерівності?

а) $x-1>0$ і $(x-a)(x-1)>0$; б) $\sqrt{x}>a$ і $x>a^2$;

в) $\sqrt{x}<-1$ і $\frac{x-a}{x+1}<0$; г) $\sqrt{x}>a$ і $\frac{x}{x^2+1}>0$.

5. Для яких значень параметра a розв'язком нерівності

$$(x-a)^2(x-2)(x+3)\le 0$$

є відрізок?

6. Для яких значень параметра a a нерівність $2x+a>0$ є наслідком нерівності $x+1-3a>0$?

7. Користуючись методом інтервалів, розв'язати нерівності:

а) $(2x+1)(1-3x)(x+1)^2 < 0$;

б) $\dfrac{2x}{x^2+1} < 1$;

в) $\dfrac{x^2-5}{x^2+x+1} > 0$;

г) $\dfrac{(x^2-16)(2x^2+x+1)}{(x+2)^2} < 0$;

д) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} \geq 0$;

е) $\dfrac{x-1}{x^2-4x+3} < \dfrac{2x-4}{x^2-4x+3}$;

є) $\dfrac{2x}{2x^2+x+1} \geq \dfrac{x}{x^2-5x+6}$;

ж) $\dfrac{x}{x^2+3x+2} \leq \dfrac{x}{x^2+7x+12}$;

з) $\dfrac{(x^2-2x-3)(x^2+4x+4)}{(x^2-8x+16)(x^2+2x-3)} \leq 0$;

и) $\dfrac{(x^2+x-2)(x^2-6x+9)}{(x^2-x-2)(4x^2+12x+9)} \geq 0$.

8. Розв'язати нерівності з модулями:

а) $|2x+1| > 3$;

б) $|1-3x| < 5$;

в) $2x^2-3|x|+1 \geq 0$;

г) $|x+1|+|x-1| > 2$;

д) $|2x+1|+|1-2x| > 1$;

е) $|3x-2|x < 1$;

є) $|2x^2+x-1| > |x+1|$;

ж) $|x|-2|x+1|+3|x+2| \geq 4$;

з) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2$;

и) $\left|\dfrac{3x+1}{x-2}\right| < 2$.

9. Знайти всі значення параметра a, при яких корені рівняння є додатними дійсними числами:

а) $x^2 - (a-2)x - a + 3 = 0$; б) $ax^2 - (a^2 + a + 1)x + a + 1 = 0$.

10. Знайти всі значення параметра c, при яких корені рівняння є від'ємними дійсними числами:

а) $x^2 - (c-1)x - c + 2 = 0$; б) $(c-1)x^2 - 2(c+1)x + c - 2 = 0$.

11. Для яких значень параметра b, корені квадратичного рівняння є дійсними числами з різними знаками:

а) $(b-2)x^2 - 3(b+2)x + 6b = 0$; б) $bx^2 - (b^2 + b + 1)x + b + 1 = 0$?

12. Знайти всі значення параметра a, для яких розв'язком нерівності є множина всіх дійсних чисел:

а) $x^2 + (5a+2)x + 4a^2 + 2a > 0$;

б) $(2a+1)x^2 - ax + a - 2 < 0$;

в) $(a^2 - 6a)x^2 - 2(a-1)x - 3 < 0$;

г) $(a-1)x^2 + (a+2)x + a - 1 > 0$;

д) $\dfrac{ax^2 + x + 4}{x^2 + x + 2} \geq 5$;

е) $\dfrac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$.

13. Для яких значень параметра m нерівність $x^2 - (m+5)x - 2 < 0$ виконується для всіх $x \in [-1; 1]$?

14. Знайти значення параметра a, для яких система рівнянь

$$\begin{cases} ax + (3a-8)y = 3a, \\ 2x + (a-2)y = a + 1 \end{cases}$$

має розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 < 0$, $y_0 > 0$.

15. Для яких значень параметра c рівняння

$$\frac{3}{cx - 4} = \frac{5}{3x - c}$$

має додатні розв'язки?

16. Для яких значень параметра k рівняння

$$\frac{3}{2x - k} = \frac{4}{kx - 8}$$

має від'ємні розв'язки?

17. Розв'язати нерівності та системи нерівностей з двома невідомими x та y:

а) $x + 2y < 4$; б) $y \geq x^2 - 2x + 3$; в) $x^2 < 4$;

г) $\begin{cases} 2x - y - 1 \leq 0, \\ x + 2y + 4 \geq 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x + 2y + 1 \geq 0, \\ 3x + 2y - 2 \leq 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x - y - 2 \geq 0; \end{cases}$ є) $\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \\ x + 3y + 1 \geq 0; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x + y \geq 2, \\ x \geq 0, \\ y \leq 0. \end{cases}$

З а н я т т я 8

Розв'язування задач методом рівнянь та їх систем

План

1. Основні принципи розв'язування задач методом рівнянь та їх систем.
2. Про різні способи розв'язування задач та їхнє письмове оформлення.
3. Пропедевтична робота до розв'язування задач методом рівнянь.

Методичні зауваження

Розв'язування задач за допомогою складання рівнянь та їх систем здійснюється протягом всього навчання учнів в школі. Це повністю виправдано, оскільки рівняння та їх системи є математичними моделями багатьох фізичних, хімічних та інших явищ. Розв'язування задач, які зводяться до відповідних рівнянь чи їх систем, дає можливість формувати в учнів уміння записувати реальні життєві ситуації на математичній мові, що сприяє розвитку логічного мислення, оволодінню операціями мислення — аналізом, синтезом, порівнянням, узагальненням, виховувати такі риси особистості, як самостійність, наполегливість, творчий підхід до справи.

Розв'язування задач методом рівнянь здійснюється, як правило, за таким планом:

1) вибір і позначення основної невідомої величини;
2) вираження решти невідомих величин через основну;
3) складання рівняння;
4) розв'язування рівняння;
5) перевірка відповідності знайдених коренів умові задачі;
6) запис відповіді.

Проілюструємо реалізацію наведеного плану.

Приклад 1. Рейсовий автобус долає шлях відстанню 720 км з певною плановою постійною швидкістю. Підвищивши постійну швидкість автобуса на 10 км/год, вдалося скоротити на одну годину час, що його витрачає автобус на долання цього шляху. Знайти планову швидкість автобусу.

Розв'язування. Нехай планова швидкість автобуса становить x ком/год. Тоді він мав проїхати відстань 720 км за $\frac{720}{x}$ год. Насправді, він рухався зі швидкістю $(x+10)$ км/год і цю відстань подолав за $\frac{720}{x+10}$ год, зекономивши 1 год. Отже,

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+10} = 1.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо два розв'язки: $x_1 = -90$ і $x_2 = 80$. За змістом задачі значення x має бути додатним числом. Цю умову задовольняє лише другий розв'язок.

Відповідь. Планова швидкість автобуса 80 км/год.

Вибір і позначення основної невідомої величини не є однозначним. Наведену задачу можна розв'язати іншим способом. Позначимо через t час в годинах, протягом якого автобус проїхав би з плановою швидкістю 720 км. Тоді планова швидкість його дорівнює $\frac{720}{t}$ км/год, збільшена швидкість — $\frac{720}{t-1}$ км/год. Маємо рівняння

$$\frac{720}{t-1} - \frac{720}{t} = 10.$$

Додатний корінь цього рівняння $t = 9$. Отже, планова швидкість автобуса $\frac{720}{9} = 80$ км/год.

Зауважимо, що цю задачу можна і корисно з навчальною метою розв'язати і за допомогою системи рівнянь із двома невідомими. Нехай планова швидкість автобуса v км/год, а t год — час руху автобуса зі швидкістю v. За умовою задачі одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} vt = 720, \\ (v+10)(t-1) = 720. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, матимемо: $t = -8$, $v = -90$ або $t = 9$, $v = 80$. За змістом задачі v має бути додатним. А тому початкова швидкість автобуса дорівнює 80 км/год.

При складанні рівняння учні інколи одержують тотожність. Причина цього така: деяку з умов задачі використовують два рази, а іншу з умов — жодного разу.

Для розв'язування задач методом рівнянь деколи дані та шукані величини записують у формі таблиці, користуючись якою легко скласти відповідне рівняння або систему рівнянь.

Приклад 2. Команда школярів, яка складалася з хлопців і дівчат, у командних змаганнях з шахів набрала 52 очка. Хлопці цієї команди із 60 зіграних партій виграли 27, а дівчати із 40 зіграних партій програли 20. Хлопці програли на 7 партій більше, ніж дівчата зіграли в нічию. Школярі однієї і тієї ж команди між собою не грали. Скільки очків набрали дівчата цієї команди?

Розв'язування. Нехай x — число програних хлопцями партій, а y — число виграних дівчатами партій. Складемо таблицю.

	Зіграли партій	Виграли	Програли	Нічиї
Хлопці	60	27	x	$33-x$
Дівчата	40	y	20	$20-y$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x-7=20-y, \\ 27+y+\frac{33-x}{2}+\frac{20-y}{2}=52. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x+y=27, \\ x-y=3. \end{cases}$$

Отже $x=15$, $y=12$.

Відповідь. Дівчата набрали 16 очок.

Розв'язування задач методом рівнянь розпочинається у 5-му класі. Уміння розв'язувати задачі за допомогою рівнянь набувається учнями поступово і з певними труднощами. Досить ефективним способом підготовки учнів є попереднє розв'язування вправ такого змісту: назвати число втричі більше за x; записати число, що перевищує на 10 половину числа x; дано два числа x та y. Записати число, що в 5 разів більше різниці цих чисел; сума двох чисел дорівнює 20, більше з них x, назвати менше число; записати число, що містить b одиниць та a десятків.

В молодших класах слід поєднувати алгебраїчні та арифметичні методи розв'язування задач, заохочувати розв'язування однієї і тієї ж задачі різними методами.

В процесі розв'язування будь-якої задачі велика роль відводиться вивченню умови задачі. Цьому сприяє короткий запис тексту задачі, складення схем, рисунків.

При розв'язуванні задач, дані яких виражені параметрами, потрібно провести дослідження розв'язків залежно від параметрів.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Електровоз мав пройти 840 км. На середині шляху він був затриманий на 20 хв, тому, щоб прибути своєчасно, збільшив свою швидкість на 6 км/год. Скільки часу витратив електровоз на весь шлях?

2. З двох пунктів A і B, відстань між якими 24 км, одночасно виїжджають два автомобілі назустріч один одному. Після зустрічі автомобіль, що виїхав з A прибув у B через 16 хв, а другий автомобіль — в A через 4 хв. Знайти швидкість кожного автомобіля.

3. Моторний човен, швидкість якого у стоячій воді 15 км/год, пройшов за течією ріки 35 км, а проти течії — 25 км. На шлях за течією ріки він витратив стільки ж часу, скільки на шлях проти течії. Яка швидкість течії ріки?

4. Щоб пропливти s метрів за течією, плавець повинен затратити часу на t хвилин менше, ніж йому треба на те, щоб пропливти ту саму відстань у стоячій воді. Яка швидкість плавця у стоячій воді, якщо швидкість течії ріки v м/год?

5. За 240 м шляху переднє колесо екіпажу зробило на 20 обертів більше від заднього. Довжина кола переднього колеса на 1 м менша за довжину заднього. Знайти довжину кожного колеса.

6. За 60 м шляху переднє колесо трактора зробило на 10 обертів більше, ніж заднє. Визначити довжину кола кожного колеса, якщо довжина кола заднього колеса на 50 см більша за довжину переднього.

7. Двоцифрове число закінчується цифрою 3. Якщо це число додати до числа, записаного тими самими цифрами, але в зворотному порядку, то буде 55. Знайти це двоцифрове число.

8. Сума квадратів цифр двоцифрового числа дорівнює 10. Якщо від шуканого числа відняти 18, то одержимо число, записане тими цифрами, але в зворотному порядку. Знайти шукане число.

9. Відомо, що 30% числа n на 10 більше за 20% числа k, а 30% числа k на 35 більше 20% числа n. Знайти n і k.

10. Після двох послідовних підняття цін кожен раз на 5% ціна товару стала 220,5 грн. Знайти початкову ціну товару.

11. Ціну товару підвищили на 20%, а через деякий час її понизили на 25%. Ціна товару після цього стала 27 грн. Яка була початкова ціна товару?

12. На ощадну книжку вкладник поклав 500 грн. Через два роки на книжці виявилося 583,2 грн. Скільки відсотків нараховував вкладнику ощадний банк щороку?

13. Бак наповнюється двома трубами за 1 год 20 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?

14. Двоє робітників, виконуючи певне завдання разом, можуть виконати його за 12 днів. Якщо спочатку працюватиме тільки один із них, а коли виконає половину роботи, його замінить другий, то все завдання буде виконано за 25 днів. За скільки днів кожний робітник окремо може виконати все завдання?

15. Майстерня виготовляє певну кількість деталей на суму s грн. Якщо собівартість одної деталі знизити на p коп, то на ту саму суму майстерня виготовить на n деталей більше, ніж раніше. Скільки деталей виготовляє майстерня?

16. Сума перших трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 21. Якщо ці члени збільшити відповідно на 1, 1, 5, то дістанемо геометричну прогресію. Яка була арифметична прогресія?

17. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 28. Якщо ці члени зменшити відповідно на 1, 1, 5, то дістанемо арифметичну прогресію. Яка була геометрична прогресія?

18. Фарфор складається з глини, гіпсу і піску, маси яких пропорційні 25, 1, 2. Скільки треба глини, гіпсу і піску, щоб виготовити 140 кг суміші?

19. Два куски латуні мають масу 30 кг. Перший кусок містить 5 кг чистої міді, а другий — 4 кг. Скільки відсотків міді містить перший кусок латуні, якщо другий містить на 15% більше ніж перший?

З а н я т т я 9

Тригонометричні рівняння та нерівності

План

1. Поняття головних кутів.
2. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей.
3. Основні методи розв'язування тригонометричних рівнянь та нерівностей.
4. Системи тригонометричних рівнянь.

Методичні зауваження

Теорема. *Якщо функція* $y = f(x)$ *є монотонно зростаючою (спадною) в області* X, a *— деяке значення, якого набуває функція в цій області, то рівняння* $f(x) = a$ *має єдиний розв'язок (корінь) в цій області.*

Ця теорема забезпечує коректність означень головних кутів:

$$\arcsin a, \quad \arccos a, \quad \operatorname{arctg} a, \quad \operatorname{arcctg} a.$$

Тригонометричні функції sin, cos, tg, ctg є монотонними відповідно на проміжках $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $[0; \pi]$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $(0; \pi)$, до того ж на цих проміжках набувають всіх своїх можливих значень і тільки один раз, а тому кожне з рівнянь $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ на відповідному проміжку має один і лише один розв'язок (перші два рівняння для значень a таких, що $|a| \leq 1$, а останні два рівняння для довільного $a \in \mathbb{R}$). Ці розв'язки (корені) позначають так: $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$.

Таким чином, на питання: „Що називається $\arcsin a$?“ можна відповісти так: „$\arcsin a$ називається розв'язок рівняння $\sin x = a$ на відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$“. Аналогічно, $\arccos a$ називається розв'язок рівняння $\cos x = a$ на відрізку $[0; \pi]$, $\operatorname{arctg} a$ — розв'язок рівняння $\operatorname{tg} x = a$ в інтервалі $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{arcctg} a$ — розв'язок рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ в інтервалі $(0; \pi)$.

В шкільному курсі математики увага учнів актуалізується на інших означеннях головних кутів, еквівалентним наведеним означенням. А саме: $\arcsin a$ називається таке число, яке задовольняє таким двом умовам: $\arcsin a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ і $\sin(\arcsin a) = a$; $\arccos a$ називається таке число, яке задовольняє таким умовам: $\arccos a \in [0; \pi]$ і

$\cos(\arccos a) = a$; $\operatorname{arctg} a$ називається таке число, яке задовольняє умовам: $\operatorname{arctg} a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ і $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$; $\operatorname{arcctg} a$ називається таке число, яке задовольняє умовам: $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.

Основним принципом розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь та нерівностей є такий: спочатку знаходять розв'язки рівняння (нерівності) на проміжку, довжина якого дорівнює періоду відповідної тригонометричної функції, а потім з врахуванням періоду функції записують всі розв'язки.

При обґрунтуванні формул розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь рекомендують користуватися одиничним колом або графіком відповідної функції.

Для знаходження розв'язків рівняння $\sin x = a$, де $|a| \leq 1$, спочатку знайдемо розв'язки цього рівняння на відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. З означення головного кута та формул зведень випливає, що $\arcsin a$ і $\pi - \arcsin a$ є такими розв'язками. А тому серіями $x = \arcsin a + 2\pi m$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi n$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$ задаються всі розв'язки. Якщо їх об'єднати, то одержимо формулу всіх розв'язків даного рівняння:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

За таким ж принципом одержується формула для розв'язування рівнянь вигляду $\cos x = a$, де $|a| \leq 1$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Очевидними є формули для розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ $(a \in \mathbb{R})$ — відповідно $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ і $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

При розв'язуванні найпростіших тригонометричних нерівностей не рекомендується використовувати загальні формули, а кожен раз розв'язувати конкретну нерівність, використовуючи одиничне коло або графік відповідної функції.

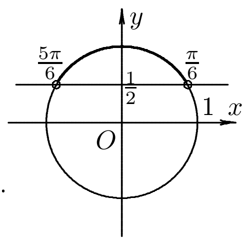

Рис. 4.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язування. Побудуємо одиничне коло (див. рис. 4). Відкладемо на осі Oy точку з ординатою $\frac{1}{2}$ і через неї проведемо пряму, паралельну осі Ox. За означенням синуса кута ця пряма перетинає одиничне коло в точках, що відповідають кутам повороту $\frac{\pi}{6}$ і $\frac{5\pi}{6}$. Тому розв'язками даної нерівності на відрізку

$[0; 2\pi]$ є числа (кути повороту у радіанах) $x \in (\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$. З врахуванням періодичності одержимо всі розв'язки заданої нерівності:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Деколи відповідь записують у вигляді об'єднання проміжків:

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right).$$

При розв'язуванні нерівності $\sin x \leq \frac{1}{2}$ доцільно спочатку знайти розв'язки на відрізку $[\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}]$, а потім виписати всі розв'язки:

$$x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{13\pi}{6} + 2\pi n\right] \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Якщо б на першому кроці знайшли розв'язки цієї ж нерівності на відрізку $[0; 2\pi]$, то помилки не було б. Відповідь одержали би у вигляді об'єднання двох серій інтервалів:

$$x \in \left[2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right] \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

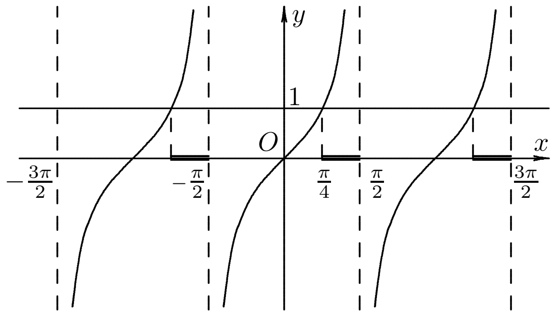

Рис. 5.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x > 1$.

Розв'язування. Побудуємо в одній системі координат (рис. 5) графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = 1$. В інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ розв'язками нерівності є значення x, що належать інтервалу $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. З врахуванням періодичності функції tg запишемо всі розв'язки:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Зауважимо, що не існує загального методу розв'язування тригонометричних рівнянь. Однак, найчастіше тригонометричні рівняння розв'язують розкладанням лівої частини рівняння, права частина якого нуль, на множники або зведенням рівняння до однієї функції одного і того ж аргументу. Наприклад, розв'язування однорідного рівняння n-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$ вигляду

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \cdots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0,$$

де $a_n \neq 0$, зводиться до розв'язування рівняння

$$a_n \operatorname{tg}^n x + a_{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x + \cdots + a_1 \operatorname{tg} x + a_0 = 0$$

діленням лівої і правої частин даного рівняння на $\cos^n x$. Таке ділення можна виконати, оскільки $\cos x \neq 0$ для тих значень x, що є розв'язками даного рівняння. Далі, знаходимо розв'язки $y_1, \ldots, y_k$ рівняння

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0,$$

опісля — розв'язки рівнянь

$$\operatorname{tg} x = y_1, \quad \operatorname{tg} x = y_2, \quad \ldots, \quad \operatorname{tg} x = y_k.$$

До розв'язування однорідного тригонометричного рівняння другого степеня зводиться лінійне тригонометричне рівняння вигляду

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

де a, b, c — деякі ненульові дійсні числа. Воно рівносильне рівнянню

$$2a \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Останнє ж — рівнянню

$$(b+c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c-b)\cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Рівняння $a \sin x + b \cos x = c$ можна розв'язати й іншим методом. Очевидно, воно рівносильно рівнянню

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Нехай тепер α — деяке число з проміжку $[0; 2\pi)$ таке, що

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha.$$

Тоді

$$\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Звичайно, що останнє рівняння має розв'язок за умови $c^2 \le a^2+b^2$.

Рівняння вигляду $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0$, де R — раціональна функція відносно тригонометричних функцій, зводиться до раціонального рівняння відносно тангенса половинного аргументу такими замінами:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

У випадку такої заміни додатково потрібно перевірити, чи є розв'язками даного рівняння значення $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

При розв'язуванні тригонометричних нерівностей використовують методи, які є аналогічними до методів розв'язування рівнянь.

Нерідко одне і те ж рівняння можна розв'язати різними методами. Проілюструємо це на прикладі розв'язання рівняння

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x.$$

Метод зведення до однієї тригонометричної функції.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Розв'язавши відповідне квадратне рівняння одержимо, що $\cos x = \frac{1}{2}$ або $\cos x = -1$. Звідси $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$ або $x = \pi + 2\pi n$ $(m,\, n \in \mathbb{Z})$.

Метод розкладання на множники.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow -\cos 2x = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos x = 0. \Leftrightarrow 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2} = 0 \quad \text{або} \quad \cos\frac{x}{2} = 0.$$

Звідси $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi m$ або $x = \pi + 2\pi n$ $(m,\, n \in \mathbb{Z})$.

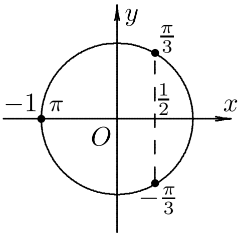

Рис. 6.

Одержані відповіді відрізняються одна від одної, але легко показати, що, по суті, вони співпадають. Для цього на одиничному колі позначимо всі точки, які відповідають числам, що містяться у знайдених серіях. Бачимо, що ці точки співпадають. Більше того, множина розв'язків $x = \pi + 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ є підмножиною розв'язків $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Тому остаточним варіантом відповіді може буде наступний: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Інколи для розв'язування рівняння доцільно зробити оцінку множин значень функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння. Зрозуміло, наприклад, що рівняння $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4$ розв'язків немає.

Рівняння $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3$ рівносильне системі таких трьох рівнянь: $\cos x = 1$, $\cos 2x = 1$, $\cos 3x = 1$. Розв'язки першого рівняння системи $x = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ задовольняють друге і третє рівняння системи. Отже, $x = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ є розв'язком даного рівняння.

Розв'язування систем тригонометричних рівнянь з двома невідомими відповідними перетвореннями зводяться до розв'язування тригонометричних рівнянь з одним невідомим.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Розв'язування. Сума лівих частини, заданих в умові рівнянь, дорівнює сумі правих їх частин. Аналогічно різниця лівих частини — різниці правих їх частин. Тому розв'язки заданої системи рівнянь є розв'язками наступної системи рівнянь (більш того ці системи рівнянь є рівносильними):

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 1; \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n; \\ x + y = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - y = 2\pi n; \\ x + y = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \end{cases}$$

де k і n — деякі цілі числа. Знову почастинно додавши і віднявши рівняння системи знаходимо розв'язки заданої системи рівнянь:

$$(x;y)=\Big(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)\Big)$$

або

$$(x;y)=\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);-\frac{\pi}{3}+\pi(k-n)\Big)$$

де k, $n\in\mathbb{Z}$. Зауважимо, що k і n незалежно пробігають множину цілих чисел.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Довести такі властивості головних кутів:

а) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$; б) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$;

в) $\mathrm{arctg}(-a)=-\mathrm{arctg}\,a$; г) $\mathrm{arcctg}(-a)=\pi-\mathrm{arctg}\,a$.

2. Розв'язати кожне з наступних рівнянь:

$$\sin x=1,\quad \sin x=-1,\quad \cos x=0,\quad \cos x=-1$$

за допомогою загальних формул розв'язків. Довести, що одержані формули для розв'язків рівносильні відповідно таким:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x=\pi+2\pi n,$$

де $n\in\mathbb{Z}$.

3. При розв'язуванні рівняння $2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=0$ його замінили таким $2\,\mathrm{tg}^2\,x-\mathrm{tg}\,x-1=0$. Обґрунтувати рівносильність першого та другого рівнянь. Розв'язати друге рівняння.

4. Розв'язати однорідні рівняння:

а) $2\sin^2 x-5\sin x\cos x+3\cos^2 x=0$;

б) $3\sin^2 2x-\sqrt{3}\sin 4x=3\cos^2 2x$;

в) $\sin^4 x+3\sin^2 x\cos^2 x-4\cos^4 x=0$;

г) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0$;

д) $\sin^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x=0$;

е) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$.

є) $\sin^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x - 4\cos^4 x = 0$;

ж) $\cos^3 t + \cos^2 t\sin t - 4\cos t\sin^2 t - 4\cos^3 t = 0$.

5. Розв'язати рівняння методами розкладання на множники:

а) $\sin x\sin 2x + \cos x\cos 2x = \sin 2x$;

б) $\sin^3 x + \sin x = \sin 2x$;

в) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x = 0$;

г) $\cos x\cos 7x = \cos 5x\cos 8x$;

д) $\sin 4x + \sqrt{2}\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$;

е) $1 + \sin 2x + 2\sin x + \cos x = 0$;

є) $1 + \sin x + \sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} = 0$;

ж) $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$.

6. Розв'язати рівняння, для яких перевірка знайдених розв'язків є складовою частиною їх розв'язування:

а) $\sin 2x\,\mathrm{ctg}\, x = 0$;

б) $(1 - \sin 2x)\,\mathrm{tg}\, 2x = 0$;

в) $(1 - \mathrm{tg}\, x)\cos 2x = 0$;

г) $\dfrac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0$;

д) $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$;

е) $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} = 2$;

є) $\dfrac{\sin x - \sin 2x}{\cos x} = 0$;

ж) $\dfrac{\cos 3x - \cos x}{\sin x} = 2$;

з) $\dfrac{\cos x + \sin 2x}{\sin x} = \mathrm{ctg}\, x$.

7. Розв'язати рівняння вигляду $a\sin x + b\cos x = c$ методом зведення до однорідного рівняння другого степеня або введенням допоміжного кута:

а) $4\sin x - 6\cos x = 1$;

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$;

в) $\sqrt{3}\sin 3x - \cos 3x = 1$;

г) $7\cos x - 8\sin x = 11$;

д) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$;

е) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$;

є) $3\sin x + \cos x = 1$;

ж) $\sqrt{3}\sin(x - 45^\circ) + \sin(x + 45^\circ) = \sqrt{2}$.

8. Використовуючи різні методи, розв'язати такі рівняння:

а) $1 + \sin 2x = \mathrm{ctg}(\frac{\pi}{4} - x)$;

б) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$;

в) $1 - \cos 2x = \operatorname{tg} x$;

г) $(1 - \operatorname{ctg} x)\sin^3 x + (1 - \operatorname{tg} x)\cos^3 x = 0$;

д) $2 - \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{1+\cos x}$;

е) $\sqrt{2}\cos^3(\frac{\pi}{4} + x) = \sin x - \cos x$;

є) $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}(1 + \cos x) = \cos x$;

ж) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$;

з) $2 + \frac{\cos x}{1-\sin x} = \operatorname{tg} x$;

и) $\sqrt{2}\sin^3(\frac{\pi}{4} + x) = \sin x + \cos x$.

9. Розв'язати рівняння:

а) $\cos^2 x + \cos 2x + \cos^2 3x = 1,5$;

б) $\sin^2 x + \sin 22x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x = 2\sin 2x + \frac{5}{2}$;

г) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}\cos 2x + 1$;

д) $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$;

е) $\sqrt{1 - \sin x} = -\cos x$;

є) $\sqrt{1 + 2\sin 2x} = \cos x - \sin x$;

ж) $\sqrt{\cos 2x - \sin 4x} = \sin x - \cos x$;

з) $(\sin x + \cos 2x)^2 + (\sin 2x - 1)^2 + \cos^2 x = 0$;

и) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 0$.

10. Розв'язати нерівності:

а) $2\sin(\frac{\pi}{6} - 3x) \leq 1$;

б) $2\cos(\frac{\pi}{3} - 4x) \leq 1$;

в) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{3} - 3x) + \sqrt{3} \geq 0$;

г) $1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$;

д) $\sin 2x \cos x \geq 0$;

е) $\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$;

є) $1 + \sin x < \operatorname{ctg} x + \cos x$;

ж) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{2} + 1)\sin x - \sqrt{2} < 0$;

з) $\sin x \sin 2x \leq 0$;

и) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} > 0$.

11. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}\pi, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = \frac{3}{4}\pi, \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1,5, \\ y - x = \pi; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1,5, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin y \cos x = 0,75; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0,75, \\ \sin x \sin y = 0,25. \end{cases}$

З а н я т т я 10

Ірраціональні, показникові, логарифмічні рівняння та нерівності

План

1. Ірраціональні рівняння та нерівності.
2. Показникові та логарифмічні рівняння.
3. Показникові та логарифмічні нерівності.

Методичні зауваження

Ірраціональними називають рівняння, що містять невідоме під знаком кореня. До найпростіших рівнянь цього типу відносяться рівняння вигляду $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Традиційно учні розв'язують такі рівняння піднесенням до квадрату з урахуванням області визначення кореня ($f(x) \geq 0$). Але в цьому випадку можуть з'явитись сторонні корені, оскільки тут не враховані області значень функцій $\sqrt{f(x)}$ і $g(x)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $3\sqrt{2x+5} = -x-5$.

Розв'язування. Областю допустимих значень лівої частини рівняння, очевидно, є інтервал $[-\frac{5}{2}; \infty)$. Піднесемо ліву і праву частини нашого рівняння до квадрату. Одержимо $9(2x+5) = (x+5)^2$. Звідси $x = -2$ або $x = 10$, причому, обидва розв'язки останнього рівняння належать $[-\frac{5}{2}; \infty)$. Однак, підстановка першого з цих значень $x = -2$ в початкове рівняння приводить до суперечливої рівності $3 = -3$.

Тому доцільно розв'язувати рівняння, згаданого вище вигляду, заміною його рівносильною йому змішаною системою рівнянь та нерівностей:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2. \end{array} \right.$$

Часто при розв'язуванні ірраціональних рівнянь використовують метод заміни змінних.

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2}.$$

Розв'язування. Позначимо $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ через t. Очевидно, $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{t}$ і $t > 0$. Тоді наше рівняння перепишеться у вигляді $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$. Звідси

$2t^2-3t-2=0$. Розв'язками цього рівняння є числа $t_1=-\frac{1}{2}$, $t_2=-2$. Оскільки $-\frac{1}{2}<0$, то t_1 є стороннім коренем. Тому $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=2$. Звідси $x=-\frac{17}{15}$.

Особливий тип ірраціональних рівнянь складають рівняння з параметрами.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$, де a — деяке дійсне число.

Розв'язування. Допустимими значеннями параметра a і невідомого x є такі значення, що задовольняють одночасно нерівностям $a+x\geq 0$, $a\geq\sqrt{a+x}$, $x\geq 0$ (з врахуванням арифметичного кореня в лівій частині рівняння). Підносячи до квадрату ліву і праву частини даного рівняння, одержуємо $a-x^2=\sqrt{a+x}$. Далі, додаючи до обох частин x та розкладаючи ліву частину отриманого рівняння на множники, матимемо

$$(\sqrt{a+x}+x)(\sqrt{a+x}-x)=\sqrt{a+x}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+x}+x)(\sqrt{a+x}-x-1)=0. \qquad (1)$$

Оскільки $x\geq 0$ і $\sqrt{a+x}\geq 0$, то $x+\sqrt{a+x}\geq 0$. Якщо

$$x+\sqrt{a+x}=0,$$

то $x=0$ і $\sqrt{a+x}=0$, що можливо лише при $a=0$. Якщо ж

$$x+\sqrt{a+x}>0,$$

то з (1) слідує, що

$$\sqrt{a+x}-x-1=0,$$

тобто

$$\sqrt{a+x}=x+1.$$

Звідси

$$x^2+x+1-a=0. \qquad (2)$$

Розглянемо випадки. Нехай $1-a>0$. Тоді або не існує дійсних коренів рівняння (2), або за теоремою Вієта обидва корені цього рівняння — від'ємні (через те що сума і добуток цих коренів відповідно дорівнюють -1 і $1-a$), що суперечить умові $x\geq 0$. Таким чином, якщо $a<1$, то розв'язків задане в умові рівняння не має.

Нехай $1-a\leq 0$. Тоді розв'язком даного в умові рівняння є тільки невід'ємний корінь квадратного рівняння (2), а саме $\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$.

Відповідь. Якщо $a \geq 1$, то задане в умові рівняння має єдиний розв'язок $\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$, якщо ж $a < 1$, то розв'язків воно не має.

При розв'язуванні найпростіших ірраціональних нерівностей слід мати на увазі наступні еквівалентності (рівносильності):

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > \big(g(x)\big)^{2n}; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (n \in \mathbb{N}); \tag{3}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < \big(g(x)\big)^{2n} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\sqrt{x + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{x - \frac{1}{x^2}} > \frac{2}{x}. \tag{5}$$

Розв'язування. Неважко бачити, що нерівність (5) рівносильна нерівності

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2}} > \frac{2}{x}.$$

Областю допустимих значень даної нерівності є інтервал $[1; \infty)$. Враховуючи це, остання нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{\sqrt{x^3+1}}{x} + \frac{\sqrt{x^3-1}}{x} > \frac{2}{x}.$$

А ця — нерівності

$$\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1} > 2. \tag{6}$$

Права частина нерівності (6) є додатним числом, а ліва приймає додатні значення для довільного $x \in [1; \infty]$. Тому вона рівносильна нерівності

$$\left(\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}\right)^2 > 2^2,$$

тобто нерівності

$$x^3 + 1 + 2\sqrt{x^6-1} + x^3 - 1 > 4.$$

Звідси
$$\sqrt{x^6-1} > 2-x^3.$$

Далі з (3) випливає, що остання нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x^3<0, \\ x^6-1\geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x^3\geq 0, \\ x^6-1>(2-x^3)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язавши дану сукупність нерівностей, отримаємо остаточну відповідь $x\in\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}};\infty\right)$.

Рівняння називають показниковим, якщо невідомі в ньому містяться в показнику степеня. Рівняння називають логарифмічним, якщо невідоме міститься під знаком логарифма. Але часто зустрічаються змішані рівняння показниково-логарифмічні та інші, наприклад
$$x^{\log_2 x}=32, \quad \ln x = x^2-1, \quad 3^x-1=\log_3 x.$$

Всі такі рівняння, разом з тригонометричними і деякими іншими називають трансцендентними. В школі, звичайно, розв'язують лише окремі типи показникових і логарифмічних рівнянь. Зокрема, часто зустрічаються рівняння (або такі, що зводяться до них) вигляду

$$ua^{2f(x)}+v(ab)^{f(x)}+wb^{2f(x)}=0, \tag{7}$$

де a, b, u, v, w — деякі дійсні числа, причому a і b — додатні і відмінні від 1. Поділивши рівняння (7) на $b^{2f(x)}$ і поклавши $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=y$, отримаємо квадратне рівняння $uy^2+vy+w=0$ відносно невідомого y.

Досить поширеними є також рівняння вигляду приведеному у наступному прикладі.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$.

Розв'язування. Характерною ознакою таких рівнянь є одна або дві різні основи, причому показники степеня для кожної основи відрізняються тільки на число. Такі рівняння розв'язують перенесенням степенів з однаковою основою в одну частину рівняння, а всіх інших доданків — в іншу частину.

$$5^{\lg x}+5^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}+3^{\lg x-1}$$

Далі маємо

$$5^{\lg x-1}(5+1)=3^{\lg x-1}(9+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5^{\lg x-2}=3^{\lg x-2}\Leftrightarrow \lg x-2=0\Leftrightarrow x=100.$$

Відповідь. $x=100$.

Серед методів розв'язування логарифмічних рівнянь крім спрощення із застосуванням властивостей логарифма, виділяють потенціювання, заміну невідомого і перехід до іншої основи. Особливу увагу слід звернути на випадки, коли невідоме стоїть в основі логарифма.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $3+2\log_{x+1}3=2\log_3(x+1)$.

Розв'язування. Областю допустимих значень даного рівняння є множина А$=(-1;0)\cup(0;\infty)$ ($x\neq 0$ через те, що основа $x+1$ логарифма $\log_{x+1}3$ відмінна від 1). Перейшовши до основи 3, одержимо

$$3+\frac{2}{\log_3(x+1)}=2\log_3(x+1).$$

Далі, зробивши заміну $y=\log_3(x+1)$, матимемо рівняння

$$3+\frac{2}{y}=2y,$$

яке рівносильне квадратному рівнянню

$$2y^2-3y-2=0.$$

Звідси $y=2$ або $y=-\frac{1}{2}$. Далі $x=8$ або $x=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Обидва корені належать області A допустимих значень невідомого x.

Відповідь. $x=8$ або $x=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Слід застерегти учнів від можливої втрати коренів при нееквівалентних перетвореннях рівнянь.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $(x-1)^{x+1}=(x-1)^3$.

Розв'язування. Учні, зазвичай, розв'язують це рівняння одним із таких способів:

1) оскільки основи рівні, то $x+1=3$, звідки $x=2$;
2) логарифмуючи дану рівність, одержують $(x+1)\lg(x-1)=$ $=3\lg(x-1)$; звідки $(x-2)\lg(x-1)=0$, а далі $x-2=0$ або $\lg(x-1)=0$; нарешті одержують, що $x=2$.

Обидва розв'язання неправильні через те, що області допустимих значень даного в умові рівняння і рівнянь, отриманих учнями після виконання вище вказаних перетворень, не співпадають.

Наведемо правильне розв'язання цього рівняння. Очевидно, це рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ \dfrac{(x-1)^{x+1}}{(x-1)^3}=1. \end{array}\right.$$

Таким чином, $x=1$ або $(x-1)^{x-2}=1$. Остання ж рівність, має місце у випадках:

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad x-1=1, \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-1=-1, \\ x-2\in 2\mathbb{Z}, \end{cases}$$

де $2\mathbb{Z}=\{2k \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Звідси одержимо відповідь: $x=0$ або $x=1$ або $x=2$.

Аналогічні вищезгаданим методи можна використовувати при розв'язуванні показникових та логарифмічних нерівностей. Відмінність полягає в тому, що при множенні нерівності на від'ємне число вона змінює знак на протилежний. Теж саме стосується нерівності, що отримується із даної піднесенням лівої і правої частин до парного степеня у випадку, коли обидві ці частини від'ємні.

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\sqrt[x-1]{0,1}>0,01$.

Розв'язування. Учні, як правило, пропонують таке неправильне розв'язання даної нерівності.

Перепишемо нашу нерівність у вигляді $(0,1)^{\frac{1}{x-1}}>(0,1)^2$. *Оскільки* $0,1<1$, *то функція* $y=(0,1)^x$ *— монотонно спадаюча на всій числовій осі. Тому* $\frac{1}{x-1}<2$. *Далі* $\frac{1}{x-1}-2<0$ (грубою помилкою є також перехід від нерівності $\frac{1}{x-1}<2$ до $1<2(x-1)$). *Звідси* $\frac{3-2x}{x-1}<0$. *Користуючись методом інтервалів, отримаємо, що* $x\in(-\infty;1)\cup(\frac{3}{2};\infty)$.

Таке розв'язання є формальним, оскільки не враховується той факт, що $x-1$ — показник кореня, а не степеневої функції. Тобто $x-1\in\mathbb{N}$. Тому x приймає тільки натуральні значення більше одиниці. І отже, враховуючи наведений розв'язок, правильною відповіддю є $x\in\{2,\,3,\,4,\,5,\,\dots\}$.

При розв'язуванні нерівностей вигляду $\log_{g(x)} f(x) < a$ слід враховувати таку еквівалентність:

$$\log_{g(x)} f(x) < a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < \big(g(x)\big)^a; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 0, \\ g(x) < 1, \\ f(x) > \big(g(x)\big)^a. \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{8}$$

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

Розв'язування. Із (8) випливає, що для розв'язання даної в умові нерівності необхідно і досить знайти розв'язки двох наступних систем нерівностей, а потім об'єднати множини їх розв'язків.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+3 > 1, \\ x^2 \neq 0, \\ x^2 < 2x+3; \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2x+3 > 0, \\ 2x+3 < 1, \\ x^2 > 2x+3. \end{array} \right.$$

Можна показати, що розв'язками цих систем нерівностей відповідно є множини $(-1;0) \cup (0;3)$ і $(-\frac{3}{2};-1)$. Об'єднуючи ці множини одержимо відповідь: $x \in (-\frac{3}{2};-1) \cup (-1;0) \cup (0;3)$.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Розв'язати рівняння:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5$;

б) $x + \sqrt{a+x} = a$ (a — параметр);

в) $21 + \sqrt{2x-7} = x$;

г) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

д) $x^{1+\lg x} = 10^x$;

е) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \dfrac{3}{x}$;

є) $5\sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$;

ж) $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$;

з) $x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9$;

и) $\lg\lg x + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$.

2. Розв'язати нерівності:

а) $\sqrt{9x-20} < x$;

б) $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} > \dfrac{1}{2-x}$;

г) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$;

д) $\log_x 2x \le \sqrt{\log_x(2x^3)}$;

е) $\log_x \log_9(3^x - 9) < 1$;

є) $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$;

ж) $x^{\lg(x^2-6x+5)} > 1$;

з) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} \ge 1$;

и) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{\log_2(x^2-5x+4)-2} \le 0$.

3. Розв'язати нерівності з параметрами:

а) $a\sqrt{x+1} < 1$;

б) $\sqrt{2x-x^2} > a - x$;

в) $\log_a(x-1) + \log_a x > 2$;

г) $\log_a^2 x - 3\log_a^x - 4 < 0$.

4. Розв'язати системи рівнянь та нерівностей:

а) $\begin{cases} \log_{0,1}(x-y)^2 + 2\lg 2 = 0, \\ (0,5)^{3-x}4^{y-1} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10^2 - \lg(x-y) = 2,5, \\ \lg(x-y) - \log_{0,1}(x+y) = 1 + 2\lg 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5\log_y x + 2\log_x y = 6, \\ xy = 64; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \log_3(1+\sqrt{1+x}) = 1 - \log_9 x, \\ x^3 + x^2 y = 4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

е) $1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < 2$;

є) $\begin{cases} \lg^2 x^2 + \lg^2 y^2 = 100, \\ \lg x - \lg y = 1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} (x^2 - x - 11)^{x^2+x-12} > 1, \\ |2x-1| > \sqrt{45}. \end{cases}$

З а н я т т я   11

Методика розв'язування задач на доведення

План

1. Схема пошуку плану розв'язування задач на доведення.
2. Методи розв'язування задач на доведення.
3. Синтез алгебраїчних і геометричних методів.

Методичні зауваження

Задачу, в якій сформульовано деяке твердження і пропонується його довести, називають задачею на доведення.

Розв'язати задачу на доведення — це значить самостійно довести певну теорему.

Розв'язування задач на доведення сприяє розвиткові логічного мислення учнів та свідомому засвоєнню ними теорії, а тому їх потрібно розв'язувати впродовж вивчення всього курсу математики.

У процесі розв'язування задач на доведення доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- вивчити умову і висновок задачі;
- якщо йдеться про геометричні фігури — накреслити їх;
- записати висновки, які безпосередньо випливають з умови задачі;
- якщо в результаті таких міркувань не прийдемо до бажаного висновку, то треба скористатися іншим методом доведення, спробувати розв'язати задачу „з кінця";
- якщо сформульоване в задачі твердження довести не вдалося, прочитати задачу ще раз, виділити всі пункти її умови і висновку, замінити кожне поняття його означенням, скористатися для доведення аналогією;
- після доведення проаналізувати весь хід міркувань, з'ясувати, чи немає в них чогось зайвого, або чи не можна довести задачу іншим методом.

При розв'язування задач на доведення застосовують різні методи доведень (синтетичний та аналітичний методи, метод доведення від супротивного, індуктивні методи та інші), використовують наукові методи пізнання (порівняння та аналогію, узагальнення та спеціалізацію).

Приклад 1. Довести рівність трикутників за медіаною і кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

Розв'язування. Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ — трикутники з медіанами BK і B_1K_1 такі, що $BK = B_1K_1$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (див. рис. 7).

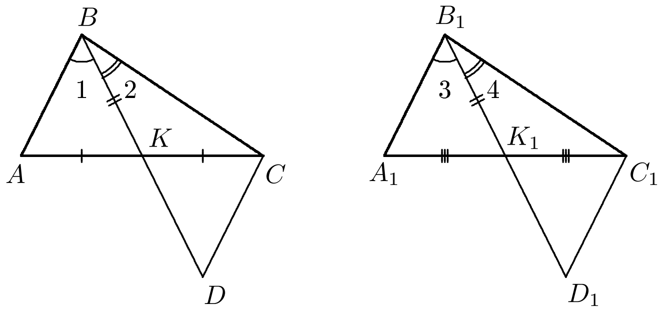

Рис. 7.

Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Відкладемо на продовженнях медіан трикутників відрізки KD і K_1D_1 рівні даним медіанам. Оскільки $AK = KC$, $BK = KD$, $\angle AKB = \angle CKB$ (як вертикальні кути), то за першою ознакою рівності трикутників $\triangle KCD = \triangle KAB$. Аналогічно $\triangle K_1C_1D_1 = \triangle K_1A_1B_1$. Отже, $\angle 1 = \angle CDK$, $\angle 3 = \angle C_1D_1K_1$. За умови $\angle 1 = \angle 3$ одержуємо, що $\angle CDK = \angle C_1D_1K_1$.

За другою ознакою рівності трикутників ($BD = B_1D_1$, $\angle 2 = \angle 4$, $\angle CDK = \angle C_1D_1K_1$) маємо $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$, а тому $BC = B_1C_1$.

Аналогічно доводиться, що $AB = A_1B_1$.

Насамкінець, враховуючи доведене і те, що

$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4 = \angle A_1B_1C_1,$$

за першою ознакою рівності трикутників робимо висновок, що трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ є рівними.

Цю задачу, яку можна розв'язати вже в 7-му класі, можна віднести до нестандартних. Для її розв'язання потрібно робити додаткові побудови, які не є очевидними. На можливість додаткових побудов при розв'язуванні геометричних задач на доведення слід націлювати учнів уже з молодших класів.

Для активізації розумової діяльності учнів, творчого підходу до розв'язування задач доцільно практикувати розв'язування однієї і тієї ж задачі різними способами.

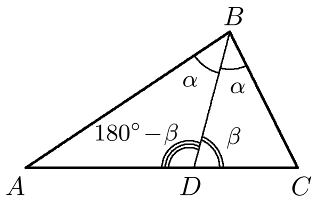

Рис. 8.

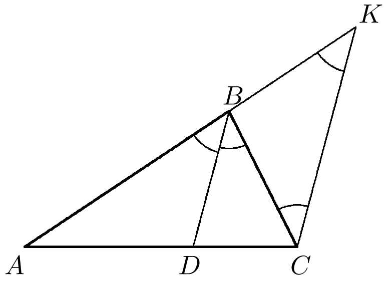

Рис. 9.

Приклад 2. Довести, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

Розв'язування. Дано: $\triangle ABC$ — трикутник з бісектрисою BD (рис. 8). Довести: $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Доведення. Нехай $\angle ABD = \alpha$, $\angle BDC = \beta$. Тоді $\angle DBC = \alpha$, $\angle ADB = 180^\circ - \beta$. За теоремою синусів

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - \beta)}, \qquad \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\beta}.$$

Звідси

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{DC}{BC}.$$

Розв'яжемо цю задачу іншим способом.

Через точку C проведемо пряму паралельну BD (рис. 9). Нехай K — точка перетину цієї прямої з прямою AB. Очевидно, що $\angle BCK = \angle CBD = \angle ABD = \angle BKC$ (перша і остання рівності слідують із властивостей кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих третьою січною прямою), а тому $\triangle CBK$ — рівнобедрений і $BK = BC$.

Далі, трикутник $\triangle AKC$ подібний трикутнику $\triangle ABD$. Тому

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AK}{AB}.$$

Звідси

$$\frac{AD + DC}{AD} = \frac{AB + BK}{AB}.$$

Це означає, що

$$\frac{DC}{AD} = \frac{BK}{AB} = \frac{BC}{AB}.$$

Отже,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}.$$

Проілюструємо метод доведення від супротивного.

Приклад 3. Довести, що не існує опуклого многокутника, який має більше трьох гострих кутів.

Доведення. Припустимо, що існує опуклий многокутник, який має більше трьох гострих кутів. Кожний зовнішній кут многокутника до відповідного гострого кута є тупим. Із припущення випливає, що сума зовнішніх кутів такого многокутника більша $360°$, що є неможливим.

При розв'язуванні стереометричних задач корисно наводити учням аналогічні планіметричні задачі. Це не тільки полегшує процес розв'язування багатьох стереометричних задач, а й сприяє загальному розвитку учнів.

Приклад 4. Довести, що об'єм тетраедра дорівнює третій частині добутку площі його поверхні на радіус вписаної сфери.

Аналогічною планіметричною задачею є така: довести, що площа трикутника дорівнює півдобутку його периметра на радіус вписаного кола.

Розв'язування. Сполучивши відрізками центр O кола з вершинами трикутника ABC, одержимо, що його площа s дорівнює

$$s = \tfrac{1}{2}ra + \tfrac{1}{2}rb + \tfrac{1}{2}rc = \\ = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = \tfrac{1}{2}rp,$$

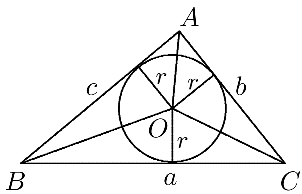

Рис. 10.

де p — периметр $\triangle ABC$.

Тепер за аналогією стає зрозумілим, як розв'язати відповідну стереометричну задачу.

Задачі на доведення потрібно розв'язувати не тільки в геометрії, а також при вивченні алгебри і початків аналізу.

В цих курсах найчастіше зустрічаємося з задачами на доведення тотожностей та нерівностей, з задачами на доведення з використанням теорії подільності.

Цікавим є задачі, в яких синтезуються алгебраїчні та геометричні підходи до їх розв'язування. Наведемо приклад такої задачі.

Приклад 5. Довести, що із співвідношення $\frac{a+b}{2} > c$ між сторонами трикутника, випливає, що $\frac{\alpha+\beta}{2} > \gamma$, де α, β, γ — величини кутів цього трикутника, що лежать відповідно навпроти сторін з довжинами a, b і c.

Розв'язування. За теоремою синусів $a = \lambda \sin \alpha$, $b = \lambda \sin \beta$, $c = \lambda \sin \gamma$ для деякого дійсного додатного числа λ. Маємо

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} > \sin \gamma.$$

Звідси $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} > \sin \gamma$. Підсиливши останню нерівність, одержимо нерівність $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} > \sin \gamma$, з якої випливає, що $\frac{\alpha+\beta}{2} > \gamma$ (очевидно, що $\frac{\alpha+\beta}{2}$ і γ — гострі кути).

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Довести, що сума віддалей від довільної точки основи рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою.

2. Довести, що сума віддалей від довільної точки, яка лежить всередині паралелограма, до його сторін є величина стала.

3. Кожна діагональ чотирикутника ділить його на трикутники однакової площі. Довести, що цей чотирикутник паралелограм.

4. Довести, що у довільному чотирикутнику середини сторін є вершинами паралелограма. Знайти площу цього паралелограма, якщо площа даного чотирикутника дорівнює S.

5. Всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ лежить точка M. Відобразимо симетрично її відносно середин сторін чотирикутника і з'єднаємо одержані точки так, щоб вони утворили опуклий чотирикутник. Довести, що площа цього чотирикутника не залежить від вибору точки M.

6. Пряма, яка проходить через точку перетину діагоналей трапеції і точки перетину її бічних сторін ділить основи трапеції на рівні частини. Довести це.

7. Довести, що в довільній трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін та подвоєного добутку основ.

8. Коло дотикається до гіпотенузи прямокутного трикутника і продовження його катетів. Довести, що діаметр кола дорівнює периметру даного трикутника.

9. Довести, що з будь-якої точки поза колом його діаметр видно під гострим кутом.

10. Довести, що якщо в трикутнику центри вписаного і описаного кіл співпадають, то цей трикутник рівносторонній.

11. Довести, що в прямокутному трикутнику сума діаметрів описаного і вписаного кіл дорівнює сумі катетів.

12. Висота і медіана трикутника, що проведені з однієї вершини, ділять кут трикутника на три рівні частини. Довести, що трикутник прямокутний.

13. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведені висота, бісектриса і медіана. Довести, що бісектриса ділить пополам кут, утворений висотою та медіаною.

14. Довести, що точки дотику вписаного в ромб кола є вершинами прямокутника.

15. Коло відтинає на сторонах чотирикутника рівні хорди. Довести, що в цей чотирикутник можна вписати коло.

16. Довести, що коли m_a, m_b, m_c — довжини медіан трикутника, проведених відповідно до сторін з довжинами a, b, c, то

$$\text{а)}\ \frac{a+b-c}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}; \quad \text{б)}\ p < m_a + m_b + m_c < 2p,$$

де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

17. Довести, що коли сторони трикутника a, b, c задовольняють співвідношення $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, то величина одного із кутів трикутника дорівнює 60°.

18. Довести, що площу S трикутника можна обчислювати за формулою $S = \frac{1}{4}\left(a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha\right)$, де a, b — довжини двох сторін цього трикутника, а α, β — відповідно величини протилежних до цих сторін кутів.

19. Довести, що якщо кути α, β, γ гострокутного трикутника пов'язані співвідношенням $\sin\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, то трикутник — рівнобедрений.

20. Довести нерівність $a\cos\alpha + b\sin\beta \le c$, де a, b, c — сторони трикутника, α, β — кути трикутника, що лежать відповідно проти a, b.

21. Через центр основи тетраедра проведено площину, паралельно мимобіжним ребрам цього тетраедра. Довести, що в перерізі одержимо прямокутник. Обчислити його площу, якщо ребро тетраедра дорівнює a.

22. Довести, що якщо всі грані паралелепіпеда є рівними паралелограми, то всі ці грані є ромбами.

23. Довести, що кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба є вершинами тетраедра.

24. Якщо дві грані тригранного кута взаємно перпендикулярні, то добуток косинусів двох плоских кутів цих граней дорівнює косинусу третього плоского кута. Довести це.

25. Кути, які утворює діагональ прямокутного паралелепіпеда з ребрами, що виходять з однієї вершини, дорівнюють α, β, γ. Довести, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

26. Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, то висота цієї піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу. Навпаки, якщо висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в її основу, то всі двогранні кути при основі цієї піраміди рівні. Довести це.

З а н я т т я 12

Розв'язування планіметричних задач на обчислення

План

1. Опорні (базисні) планіметричні задачі.
2. Окремі методичні зауваження щодо розв'язування планіметричних задач на обчислення.
3. Розв'язування задач з геометрії з використанням тригонометрії.

Методичні зауваження

Планіметричним задачам на обчислення відводиться помітне місце в математичній підготовці учнів. При їх розв'язуванні практично використовуються всі поняття та теореми, що вивчаються за програмою з геометрії, а також багато фактів з алгебри.

В курсі планіметрії ряд теорем подається у формі задач на доведення, окремі з яких доцільно віднести до опорних (базисних). Сильнішим учням слід рекомендувати їх запам'ятати і використовувати при розв'язуванні задач поряд з іншими теоремами.

Наведемо окремі приклади опорних задач, які найчастіше використовуються при розв'язуванні інших геометричних задач.

1. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута $30°$ дорівнює половині гіпотенузи.

2. Якщо з однієї точки до кола проведені дві дотичні, то відрізки дотичних рівні між собою.

3. Якщо у чотирикутника дві сторони паралельні і рівні, то цей чотирикутник паралелограм.

4. Якщо у чотирикутника протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник паралелограм.

5. Середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.

6. Всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка кожну медіану ділить у відношенні $2 : 1$, рахуючи від вершини.

7. Якщо в прямокутному трикутнику з катетами a, b і гіпотенузою c з вершини прямого кута до гіпотенузи провести висоту h, то

$h^2 = a_1b_1$, $a^2 = a_1c$, $b^2 = b_1c$, де a_1, b_1 — відповідно проекції катетів a, b на гіпотенузу.

8. Центром кола описаного навколо прямокутного трикутника є середина гіпотенузи.

9. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

10. У подібних трикутниках периметри відносяться як відповідні сторони.

11. Для трикутника із сторонами a, b, c справедливі такі формули для обчислення його площі S: а) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (формула Герона); б) $S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола в трикутник.

12. Центр кола, вписаного в ромб, співпадає з перетином його діагоналей.

13. Кут між хордою і дотичною вимірюється половиною дуги, яка міститься всередині цього кута.

14. Точка перетину продовжень бічних сторін трапеції і точка перетину діагоналей лежать на одній прямій з серединами основ трапеції.

15. У рівнобічній трапеції кути при основі рівні і діагоналі рівні.

16. У чотирикутника вписаного в коло, сума протилежних кутів дорівнює $180°$.

17. У чотирикутнику, описаному навколо кола, суми довжин протилежних сторін однакові.

Коло опорних задач вчитель відбирає в залежності від класу та складу учнів, підручника, яким він користується. Звичайно, опорні задачі використовують після їх розв'язання (доведення).

При повторенні та систематизації методів розв'язування планіметричних задач варто акцентувати увагу учнів на тому, що значна їх кількість може бути розв'язана за допомогою рівнянь або їх систем. Це здійснюється через введення в розгляд одного невідомого (допоміжного) відрізка або кількох таких відрізків та інших величин.

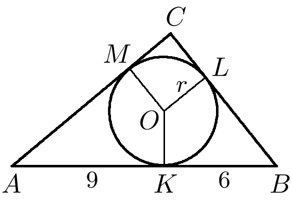

Рис. 11.

Приклад 1. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику ділить гіпотенузу на відрізки, довжини яких дорівнюють 6 см і 9 см. Обчислити площу трикутника.

Розв'язування. Нехай r — радіус кола вписаного в прямокутний трикутник $\triangle ABC$ (рис. 11), K, L, M — точки дотику цього кола до сторін прямокутного трикутника $\triangle ABC$. Припустимо $AK > KB$ (це не зменшує загальності). Тоді за властивістю дотичних до кола

$$AM = AK = 9, \quad BL = BK = 6, \quad CM = CL = OM = OL = r.$$

Тому

$$AC = 9 + r, \quad BC = 6 + r, \quad AB = 15.$$

За теоремою Піфагора

$$(9 + r)^2 + (6 + r)^2 = 225.$$

Звідси $r^2 + 15r - 54 = 0$. Розв'язуючи це рівняння відносно r, отримаємо, що $r = 3$ або $r = -18$. Очевидно, останнє значення r не задовольняє умові задачі. Таким чином $AC = 12$ см, $BC = 9$ см і площа S прямокутного трикутника дорівнює $S = 54$ см^2.

Приклад 2. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 13 : 5, починаючи від вершини гострих кутів. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 32 см.

Розв'язування. Нехай $AD = x$, $BC = y$ і $x > y$. Оскільки діагональ AC є бісектрисою кута $\angle BAD$ трапеції, то трикутник $\triangle ABC$ є рівнобедреним. Тому $AB = y$. Через те, що $ABCD$ є рівнобічною трапецією, то проекція AK бічної сторони AB на основу AD дорівнює $\frac{x-y}{2}$. Із подібності трикутників $\triangle OAD$ і $\triangle OCB$ слідує, що $AD : BC = 13 : 5$. Для знаходження сторін трапеції складаємо таку систему рівнянь

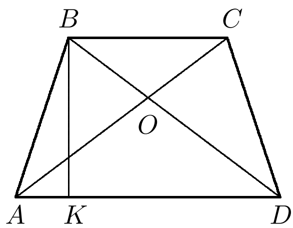

Рис. 12.

$$\begin{cases} x : y = 13 : 5, \\ y^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 32^2. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо $x = \frac{416}{3}$, $y = \frac{160}{3}$. Отже, периметр даної в умові трапеції дорівнює $x + 3y = \frac{896}{3}$.

Відповідь. $\frac{896}{3}$ см.

Ефективність розв'язання планіметричних задач методом рівнянь у деякій мірі залежить від вибору основної невідомої величини, який в принципі не є однозначним.

Приклад 3. Знайти площу ромба, периметр якого дорівнює 52см, а діагоналі відносяться як $5:12$.

Розв'язування. Нехай $5x$ — половина меншої діагоналі ромба. Тоді $12x$ — половина більшої діагоналі. Оскільки сторона ромба дорівнює $\frac{52}{4} = 13$ см, то $(5x)^2 + (12x)^2 = 13^2$. Звідси $x = 1$. Отже, діагоналі ромба відповідно рівні $d_1 = 10$ см і $d_2 = 24$ см, а його площа дорівнює $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 120\text{ см}^2$.

Наведемо інше розв'язання даної задачі. Нехай x та y — відповідно менша та більша діагоналі ромба. Для їх знаходження складаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x : y = 5 : 12, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 169. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь звичайно одержимо, що $x = 10$, а $y = 24$. Для цього потрібно зробити більше обчислень ніж в першому варіанті розв'язання.

Зрозуміло, що велика кількість планіметричних задач — це елементарні задачі, які розв'язуються з використанням певних теорем чи формул без складання рівнянь чи їх систем. Це, по суті, алгоритмічні задачі і алгоритм їх розв'язування випливає з відомих теоретичних положень.

Наприклад, теорема косинусів дає можливість розв'язувати такі елементарні задачі: 1) дано дві сторони трикутника і кут між ними, знайти третю сторону трикутника; 2) дано три сторони трикутника, знайти кути цього трикутника (косинуси кутів). На розв'язування елементарних задач вчителі, як правило, звертають велику увагу. При цьому відбувається закріплення і усвідомлення навчального теоретичного матеріалу і готується основа для розв'язування більш складних задач.

При розв'язуванні планіметричних задач часто здійснюють додаткові побудови, які диктуються логікою самого розв'язування. Це може бути паралельне перенесення елементів даної фігури з метою їх зближення, центрально-симетричне відображення елементів даної фігури відносно певної точки та симетричне відображення відносно певної прямої, побудова вписаного кола в даний трикутник (многокутник) чи описаного навколо трикутника (многокутника) кола, розбиття многокутника різними прямими на нові многокутники (трикутники) та інше.

Приклад 4. У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $BD : DC = 2 : 1$. У якому відношенні медіана CK ділить цю бісектрису.

Розв'язування. Нехай O — точка перетину бісектриси AD і медіани CK трикутника $\triangle ABC$. Для розв'язання задачі через точку K проведемо пряму паралельну бісектрисі AD (рис. 13). Нехай M — точка перетину цієї прямої з стороною BC даного трикутника. Тоді за теоремою Фалеса $BM = MD$, а тому KM — середня лінія трикутника $\triangle ADB$ і $KM = \frac{1}{2}AD$.

Оскільки $BD = 2DC$ і $BM = MD$, то $MD = DC$. Отже, OD — середня лінія трикутника $\triangle CKM$ і $OD = \frac{1}{2}KM$. Таким чином, $OD = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AD = \frac{1}{4}AD$. Звідси, як наслідок, одержуємо співвідношення $AO : OD = 3 : 1$.

Відповідь: $AO : OD = 3 : 1$.

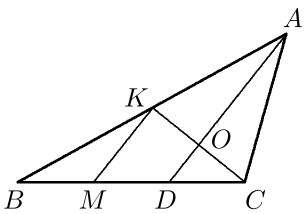

Рис. 13.

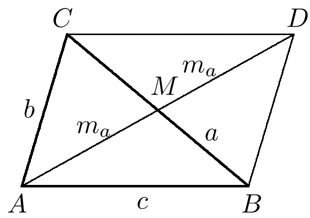

Рис. 14.

Приклад 5. За даними сторонами a, b, c трикутника знайти його медіани m_a, m_b, m_c, відповідно проведені до цих сторін.

Розв'язування. Нехай задано деякий трикутник $\triangle ABC$ (рис. 14) з сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Щоб знайти довжину, наприклад, медіани m_a, відобразимо вершину A даного трикутника симетрично відносно точки M, — середини сторони AB. Через те, що точка M ділить ділить діагоналі AD і BC чотирикутника $ABDC$ пополам, то цей чотирикутник — паралелограм. Відомо, що сума квадратів всіх сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей. Тому

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2.$$

Звідси $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Аналогічно знаходимо дві інші медіани.

Відповідь. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Приклад 6. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що основи трапеції дорівнюють a і b, а діагоналі c і d.

Розв'язування. Для розв'язування задачі на продовженні основи AB довжиною a відкладемо відрізок BK довжиною b. Очевидно, чотирикутник $BKCD$ — паралелограм, трикутники $\triangle ADC$, $\triangle BCK$ мають однакові площі, $CK = DB = d$, $AK = a+b$. Із цих зауважень випливає, що знаходження площі заданої трапеції звелося до знаходження площі трикутника ACK за відомими трьома сторонами c, d і $a + b$. Використавши формулу Герона, одержимо таку відповідь:

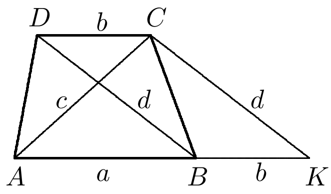

Рис. 15.

$$S_{ABCD} = \sqrt{p(p-c)(p-d)(p-(a+b))},$$

де $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$.

Цікавими є планіметричні задачі, умовам яких відповідають дві або більше геометричних фігур. При розв'язуванні таких задач потрібно розглянути всі можливі випадки. В іншому разі розв'язування задачі буде неповним, а отже не можна вважати його правильним.

Приклад 7. Бісектриса одного із кутів паралелограма ділить сторону, яку вона перетинає, на відрізки 4 см і 5 см. Обчислити периметр цього паралелограма.

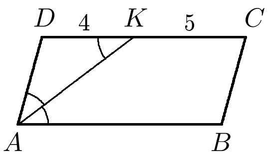

Рис. 16.

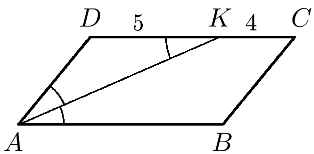

Рис. 17.

Розв'язування. Розглянемо деякий паралелограм $ABCD$. Нехай бісектриса кута при вершині A цього паралелограма перетинає сторону DC в точці K і ділить цю сторону на відрізки 4 см і 5 см. Можливі випадки, як це показано на рис. 16, 17: $DK = 4$ см, $KC = 5$ см або $DK = 5$ см, $KC = 4$ см. У обох випадках трикутник $\triangle ADK$ є рівнобедреним. Тому $AD = 4$ см або $AD = 5$ см. Отже, периметр паралелограма дорівнює або $2(4 + 9) = 26$ см або $2(5 + 9) = 28$ см.

Випадки, коли бісектриса, проведена з вершини A, ділить сторону BC, або взагалі проведена з іншої вершини паралелограма аналогічні розглянутим і не призводять до іншого результату.

Відповідь: 26 см або 28см.

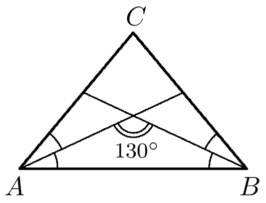

Рис. 18.

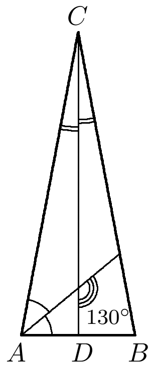

Рис. 19.

Приклад 8. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис рівнобедреного трикутника, дорівнює 130°. Знайти кути цього трикутника.

Розв'язування. Якщо один з кутів, утворених при перетині бісектрис рівнобедреного трикутника $\triangle ABC$ з вершиною C (див. рис. 18), проведених до рівних сторін трикутника, дорівнює 130°, то $\frac{1}{2}\angle CAB = 25^\circ$. Тому два з шуканих кутів трикутника дорівнюють по 50°, а третій — 80°. Якщо ж один з кутів, утворених при перетині бісектрис, проведених відповідно до основи і бічної сторони, дорівнює 130°, то результат є іншим (див. рис. 19). Нехай D — середина основи AB і $\angle CAD = \alpha$, а $\angle ACD = \beta$. Тоді

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta = 50^\circ; \\ \alpha + \beta = 90^\circ. \end{cases}$$

Звідси $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 10^\circ$. Отже, у цьому випадку два з кутів трикутника дорівнюють по 80°, а третій — 20°.

Відповідь. 50°, 50°, 80° або 80°, 80°, 20°.

Починаючи з 8-го класу, в якому розпочинається вивчення тригонометричних функцій, коло планіметричних задач дещо розширюється. Поряд з традиційними „чисто геометричними“ задачами вчителі підбирають і розв'язують з учнями планіметричні задачі із застосуванням тригонометрії. Перелік опорних задач, наведених вище, можна доповнити такими:

18. В теоремі синусів кожне з трьох відношень сторони трикутника до синуса протилежного до цієї сторони кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника , тобто

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin\angle C} = 2R,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника $\triangle ABC$.

19. Площа паралелограма виражається такими формулами:

а) $S = ab\sin\alpha$, де a, b — сторони паралелограма, α — кут між ними;

б) $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, де d_1, d_2 — діагоналі паралелограма, α — кут між ними.

20. Трикутник із сторонами a, b, c є прямокутним, якщо $c^2 = a^2 + b^2$; є гострокутним, якщо $c^2 < a^2 + b^2$ і є тупокутним, якщо $c^2 > a^2 + b^2$.

При розв'язуванні планіметричних задач із застосуванням тригонометрії відповіді на поставлені запитання, як правило, залежать від даних в умові параметрів (лінійних та кутових величин). Можна активізувати розумову діяльність учнів, якщо при цьому розглядувати окремі значення параметрів, здійснювати дослідження меж їх зміни.

Приклад 9. Знайти площу трикутника за стороною a і двома прилеглими до неї кутами β і γ.

Розв'язування. Нехай b і c — довжини двох інших сторін, заданого в умові трикутника, що знаходяться відповідно навпроти кутів трикутника мірою β і γ. Тоді за теоремою синусів

$$\frac{a}{\sin(180^\circ - (\beta + \gamma))} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Звідси

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Тепер, площу S, заданого в умові трикутника, можна обчислити будь-яким з трьох наступних способів:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)},$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - (\beta+\gamma)) = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}.$$

Як бачимо результат однаковий.

У випадку $\beta = \gamma = 45^\circ$ заданий трикутник є рівнобедреним прямокутним трикутником і його площа дорівнює $\frac{1}{4}a^2$. Якщо ж, наприклад, $\beta = \gamma = 60^\circ$, то заданий трикутник є рівностороннім і його площа дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Зауважимо, що у обох цих часткових випадках, площу трикутника можна обчислити й іншим простішим способом без застосування тригонометрії.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 80 см, а бісектриса, проведена до основи дорівнює 32 см. Обчислити радіуси вписаного і описаного кіл.

2. У рівнобедреному трикутнику радіуси вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють 24 см і 50 см. Обчислити периметр трикутника.

3. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 120 см, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 24 см. Обчислити площу трикутника.

4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 112 см, а медіана, що проведена до гіпотенузи, дорівнює 25 см. Обчислити площу трикутника.

5. Обчислити довжину вписаного кола в трикутник, сторони якого дорівнюють 15 см, 26 см і 37 см.

6. Обчислити довжину кола описаного навколо трикутника, довжини сторін якого дорівнюють 32 см, 126 см, 130 см.

7. Обчислити кути трикутника, якщо центри вписаного в нього кола і описаного навколо цього трикутника кола є симетричними відносно однієї з його сторін.

8. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Обчислити відстань від центра вписаного в трикутник кола до центра описаного навколо нього кола.

9. Сторони трикутника відповідно дорівнюють 75 см, 51 см та 78 см. Обчислити площі частин трикутника: а) на які ділить його висота, проведена до найменшої сторони; б) на які ділить його бісектриса найменшого кута.

10. З однієї точки поза колом проведено до нього дотичну і січну. Обчислити дотичну, якщо вона на 5 см більша від зовнішнього відрізка січної і на стільки ж менша від її внутрішнього відрізка.

11. З однієї точки поза колом проведено до нього дотичну й січну. Обчислити їх довжину, якщо дотична на 20 см менша від внутрішнього відрізка січної і на 8 см більша від її зовнішнього відрізка.

12. Периметр ромба дорівнює 200 см, а діагоналі відносяться як $7 : 24$. Обчислити площу ромба.

13. Діагональ ромба ділить його висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки, відношення довжин яких дорівнює 2,6. Обчислити площу ромба, якщо довжина вписаного кола дорівнює 18π см.

14. Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ на відрізки 15 см і 20 см, починаючи від найближчого до цього кута вершини. Обчислити довжину відрізків, на які ділить ця бісектриса сторону прямокутника.

15. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки 21 см і 7 см, починаючи від найближчого до цього кута вершини. Обчислити довжину відрізків, на які ділить ця бісектриса діагональ прямокутника.

16. Перпендикуляр, проведений з вершини гострого кута паралелограма до його діагоналі, ділить її на відрізки 18 см і 6 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо сума сторін паралелограма дорівнює 48 см.

17. Перпендикуляр, проведений з вершини тупого кута паралелограма до його діагоналі, ділить її на відрізки 41 см і 57 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо різниця сторін паралелограма дорівнює 14 см.

18. Кут між діагоналями рівнобічної трапеції, основи якої a, b, дорівнює $120°$. Знайти площу трапеції.

19. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайти довжину відрізка прямої, паралельної основам, яка ділить площу трапеції навпіл.

20. Основи трапеції дорівнюють a і b $(a < b)$. Діагоналі розбивають трапецію на чотири трикутники, найменший їз яких (за площею) має площу S. Знайти площу інших трикутників.

21. Більша основа трапеції 21 см. Точка дотику вписаного в трапецію кола ділить одну із бічних сторін на відрізки 4 см і 9 см. Обчислити площу цієї трапеції.

22. Виразити діагональ рівнобічної трапеції через сторони основ a і b та бічну сторону c.

23. За двома кутами $\angle A$ і $\angle B$ та висотою h_c трикутника знайти його площу.

24. Знайти площу правильного n-кутника, якщо його сторона дорівнює a.

25. Знайти площу рівнобічної трапеції за її діагоналлю d і кутом α між діагоналями.

26. Обчислити радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з бічною стороною c і гострим кутом α, якщо діагональ трапеції є бісектрисою цього гострого кута.

27. Медіана і висота, проведені з однієї вершини кута трикутника, ділять цей кут на три рівні частини. Знайти цей кут.

28. Висоти паралелограма h_1 і h_2 утворюють кут α. Знайти площу паралелограма.

29. Ромб, гострий кут якого α, а сторона a, поділено прямими, що виходять з вершини цього кута, на три рівновеликі частини. Знайти довжини відрізків цих прямих, що обмежені сторонами ромба.

З а н я т т я 13

Задачі на побудову в шкільному курсі геометрії

План

1. Геометричні побудови в курсі планіметрії.
2. Основні побудови.
3. Система постулатів побудови циркулем і лінійкою.
4. Загальний план розв'язування задачі на побудову.
5. Про основні методи розв'язування задач на побудову.

Методичні зауваження

Перші навички геометричних побудов учні одержують уже в молодших класах. При цьому використовуються різні інструменти побудови: лінійка (одностороння і двостороння, маштабована або ні), циркуль, косинець, транспортир. Математична теорія геометричних побудов виділилася в окремий розділ геометрії — конструктивну геометрію. Розв'язуючи конструктивну задачу, доводиться відрізняти теоретичну можливість або неможливість виконання побудови за допомогою даних інструментів від практичного, графічного, креслярського здійснення даної побудови.

Даними і шуканими в планіметрії задачі на побудову можуть бути: точки, прямі, відрізки, кути, трикутники, кола та їх дуги або певні сукупності цих елементів. Термін *знайти*, або *визначити* у задачі на побудову рівнозначний терміну *побудувати*, бо розв'язком її є побудована шукана фігура. Кожен етап побудови вимагає відповідного теоретичного обґрунтування.

В елементарній геометрії традиційно вважається, що конструктивна задача є розв'язною, якщо побудову можна виконати за допомогою циркуля (тобто проведення кіл довільного радіуса із будьяким центром) і односторонньої лінійки без поділок (тобто проведення прямих).

В різних підручниках і навчальних посібниках пропонується різне число основних (базових) геометричних побудов. Серед них, як правило, є такі:

- побудова трикутника за даними сторонами;
- побудова кута, рівного даному;

- побудова бісектриси кута;
- поділ відрізка пополам;
- побудова перпендикуляра до прямої.

Слід зауважити, що має місце така теорема.

Теорема. *Якщо задача розв'язується за допомогою циркуля і лінійки, то вона може бути розв'язана за допомогою самого лише циркуля.*

Правильним є також висновок, що всі побудови, здійснені циркулем і лінійкою, здійснені також при користуванні самою двосторонньою лінійкою.

При аналізі питання про розв'язність задачі на побудову за допомогою циркуля і лінійки, коли шукана фігура вважається знайденою виникає система умов, які зручно сформулювати у вигляді постулатів побудови.

I. Пряма і відрізок вважаються побудованими, тоді і тільки тоді, коли дані або побудовані дві точки прямої або кінці відрізка.

II. Коло побудоване тоді і тільки тоді, коли дано або побудовано його центр і дві точки, якими визначається його радіус. Дуга кола побудована тоді і тільки тоді, коли дано або побудовано її центр та кінці.

III. Точка вважається побудованою, якщо вона є спільною точкою двох даних або побудованих прямих.

IV. Точка вважається побудованою, якщо вона є спільною точкою даної або побудованої прямої і даного або побудованого кола.

V. Точка вважається побудованою, якщо вона є спільною точкою двох даних або побудованих кіл.

VI. Будь-який інший геометричний образ вважається побудованим, якщо дані або побудовані образи, з яких він складається або які його обмежують.

Задача на побудову в площині вважається розв'язаною за допомогою циркуля і лінійки, якщо вона може бути зведена до скінченного числа таких найпростіших задач:

1) через дві дані точки провести пряму або відрізок, що їх сполучає;

2) з даної точки описати коло даного радіуса або дугу кола за її кінцями і центром;
3) знайти спільну точку двох даних прямих;
4) знайти спільні точки даних прямої і кола;
5) знайти спільні точки двох даних кіл.

Ці п'ять побудов називають елементарними побудовами. Для здійснення реальної побудови треба вимагати, щоб всі дані були виражені за допомогою точок. Тому вказані постулати необхідно доповнити двома вимогами.

В и м о г а 1. Вважаємо побудованою довільну точку площини поза даною прямою.

В и м о г а 2. На даній прямій вважаємо побудованою довільну точку, яка відмінна від уже побудованих на прямій точок.

Постулати I–VI та вимоги 1, 2 разом називають логічними засобами розв'язування задач на побудову.

Повне розв'язання всякої конструктивної задачі проходить за таким планом: 1) аналіз задачі; 2) побудова шуканої фігури; 3) доведення правильності побудови; 4) дослідження можливості і неможливості розв'язання задачі.

Історична практика, починаючи з грецького періоду (IV–III ст. до н. е.), стверджує, що такий план характерний для всіх задач на побудову, а тому його вважають загальним.

При розв'язуванні задач на побудову може трапитись, що для визначення шуканих елементів не вистачає даних, або, навпаки, що вимог так багато, що їх не можна всі задовольнити. В першому випадку ми маємо *неозначені*, а в другому — *переозначені* задачі. Переозначені задачі можна розв'язати, якщо зайві дані, які не суперечать решті даних, відкинути, і не можна розв'язати, якщо зайві дані несумісні з рештою даних.

Як правило, задачі на побудову бувають *означеними* — тобто такими, що дають один, два або скінченне число розв'язків; це буває тоді, коли в умові є необхідні і достатні дані для побудови шуканої фігури. Звичайно, може виявитись, що й цілком визначена задача може виявитись нерозв'язною як, наприклад, класичні задачі про трисекцію кута і квадратуру круга.

Можна показати, що для побудови плоскої геометричної фігури, розміщення якої на площині визначають n точок, необхідно і достатньо мати $2n-3$ даних.

Перейдемо тепер до плану розв'язування задач на побудову.

1. Аналіз задачі є першим і основним етапом її розв'язування. Тут встановлюється шлях переходу від шуканої фігури до тієї, яку можна безпосередньо побудувати за даними задачі. Метою аналізу є встановлення зв'язків шуканих елементів з даними, щоб виконати побудову і встановити правильність її виконання.

2. Побудова шуканої фігури розуміється як послідовний перелік всіх операцій, які потрібно виконати даними інструментами для розв'язування задачі.

3. Доведення правильності побудови становить частину розв'язування задачі, яка за логічним змістом обернена аналізу. Доведення має показати, що побудована фігура задовольняє вимогам задачі.

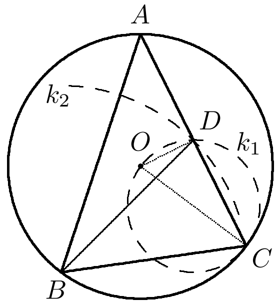

Рис. 20.

4. Дослідження умов можливості побудови шуканої фігури є заключним етапом розв'язування задачі на побудову. Воно має дати відповіді на такі запитання: а) Які умови повинні задовольняти дані задачі, щоб задача мала або не мала розв'язків? б) За яких умов задача має один або кілька розв'язків?

Проілюструємо цей план на конкретній задачі.

Приклад 1. Вписати у дане коло трикутник з даними стороною і медіаною, проведеною до однієї з інших його сторін.

Розв'язування. Дано: коло k з центром у точці O, сторона a та медіана m, проведена до деякої з інших сторін трикутника.

1. Аналіз. Нехай ABC — шуканий трикутник (рис. 20), BC — дана сторона довжиною a, BD — медіана цього трикутника довжиною m, поведена до середини D сторони AC.

Відомо, що пряма, проведена через центр кола і середину хорди цього ж кола перпендикулярна хорді. Тому $OD \perp AC$, а отже, кут $\angle ODC$ — прямий. Це означає, що точка D лежить на колі k_1, побудованому на OC як на діаметрі. Вона також лежить на колі k_2 з центром у точці B і радіуса m (на рисунку показано тільки частину цього кола).

2. Побудова. 1-й крок. У даному колі будуємо хорду BC довжиною a (рис. 21).

2-й крок. Проводимо OC — радіус даного кола. На OC, як на діаметрі, будуємо коло k_1 з центром в точці O_1. Знаходження точки O_1 відносимо до вже відомої базової задачі (рис. 22).

3-й крок. З точки B, як з центра, проводимо коло k_2 радіуса m. У разі перетину кіл k_1 і k_2 точку їх перетину позначимо через D. Якщо таких точок дві, то вибираємо будь-яку з них. (рис. 23).

4-й крок. Нарешті, через C і D проводимо хорду AC, що є другою стороною шуканого трикутника. Третьою ж його стороною є відрізок AB (рис. 24).

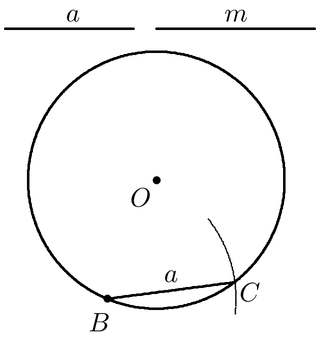

Рис. 21. 1-й крок.

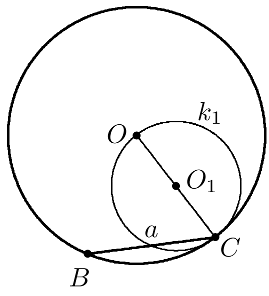

Рис. 22. 2-й крок.

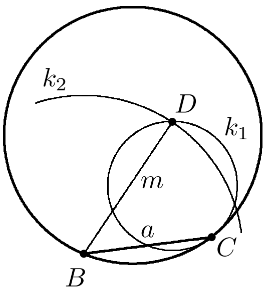

Рис. 23. 3-й крок.

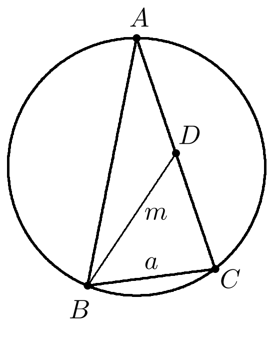

Рис. 24. 4-й крок.

3. **Доведення**. Оскільки дані умови задачі прямо використані при побудові $\triangle ABC$, то він задовольняє усі задані в умові задачі вимоги і доведення правильності побудови у цій ситуації не є потрібним.

4. **Дослідження**. Необхідно, щоб основа a була не більшою діаме-

тра d даного кола. Далі, необхідно, щоб кола k_1 і k_2 перетиналися, тобто, щоб були правильною подвійна нерівність $l \leq m \leq l + \frac{d}{2}$, де l — відстань від точки B до кола k_1.

Підсумувавши сказане, робимо висновок:

- якщо $a > d$, то побудувати необхідний трикутник неможливо;
- якщо $a = d$, то цей випадок розбивається на наступні підвипадки:
  - якщо $\frac{d}{2} < m < d$, то розв'язками є два прямокутні трикутники симетричні відносно даної сторони;
  - якщо $m \leq \frac{d}{2}$ або $m \geq d$, то побудувати необхідний трикутник неможливо;
- якщо $a < d$, то цей випадок розбивається на підвипадки:
  - якщо $m = l$ або $m = l + \frac{d}{2}$, то існуватиме один трикутник, що задовольняє умові задачі;
  - якщо $l < m < l + \frac{d}{2}$, то існують два трикутники, що задовольняють умову задачі;
  - якщо $m < l$ або $m > l + \frac{d}{2}$, то побудувати необхідний трикутник неможливо.

У випадку нескладних задач, якщо учні зуміють розв'язати їх без усякого аналізу, вимагати від них робити аналіз не слід.

Розробка й описання методів геометричних побудов є найважливішими завданнями конструктивної геометрії. Перелічимо основні з цих методів.

1. Метод геометричних місць. Цей метод застосовується, коли шуканою є точка. Її положення визначається рядом незалежних умов. Якщо одну з них тимчасово викинути — то останні умови будуть задовольняти не одна, а декілька точок — геометричне місце точок. Так у розглянутій задачі точка D лежить на колі з центром O_1 і на колі з центром B і радіусом M і є їх перетином.

2. Метод геометричних перетворень. Цей метод використовує паралельне перенесення, симетрію, обертання, гомотетії та інверсії. Знаходячи інваріанти даних перетворень, шукану фігуру перетворюють так, щоб одержана фігура була найпростішою для побудови.

3. Алгебраїчний метод є найбільш загальним. Для його застосування необхідно знайти такі відрізки, до яких зводиться геометрична задача. Потім, користуючись геометричними залежностями між ними, складаємо рівняння, що виражають залежності між цими відрізками. Розв'язавши ці рівняння, знаходимо величини, які необхідно побудувати циркулем та лінійкою. Виконавши ці побудови, одержуємо шукану фігуру.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Побудувати трикутник за вершинами A, B та точкою перетину медіан M.

2. Побудувати коло з центром в точці O, рівновіддалене від точок A, B.

3. Побудувати квадрат за серединами двох суміжних сторін.

4. Побудувати трикутник за серединами двох сторін і центром описаного кола.

5. Побудувати паралелограм за двома вершинами і точкою перетину діагоналей.

6. Побудувати ромб, діагональ якого дорівнює стороні, за двома його вершинами A і C, що є кінцями більшої діагоналі.

7. Дано точки H, K, M, що лежать на одній прямій. Побудувати прямокутний трикутник, для якого вони були б точками перетину з гіпотенузою відповідно висоти, бісектриси і медіани, проведених з вершини прямого кута.

8. Побудувати трикутник за точками дотику вписаного кола.

9. Побудувати прямокутник $ABCD$ за серединами сторін BC і CD та точкою M, яка лежить на прямій AC.

10. Дано точки A, B, C однієї прямої. Через точку A провести пряму так, щоб сума відстаней до неї від точок B і C дорівнювала довжині відрізка BC.

11. Дано точки A, B, C. Знайти множину всіх точок M, для яких $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

12. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його сторонами, знаючи що діагональ AC є бісектрисою кута A.

13. Побудувати ромб за його висотою та діагоналлю.

14. Побудувати прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною: а) на даний катет; б) на другий катет; в) на гіпотенузу.

15. Побудувати трикутник за даною його основою, висотою і медіаною, проведеними до даної основи.

16. Побудувати трикутник, середини сторін якого знаходились би в даних точках.

17. Побудувати рівнобедрений трикутник за даними його периметром і висотою, опущеною на основу.

18. На площині дано три паралельні прямі. Побудувати рівносторонній трикутник, вершини якого знаходились би на даних прямих.

19. Побудувати трикутник: а) за двома сторонами і медіаною проведеною до третьої сторони; б) за основою та медіанами, проведеними до бічних сторін; в) за трьома медіанами.

20. Дано гострий кут і точку всередині цього кута. Побудувати трикутник найменшого периметру, одна з вершин якого б знаходилась в даній точці, а дві інші на сторонах кута.

21. По двох сторонах річки розміщені села A і B. Де побудувати міст, щоб шлях від A до B був найкоротшим.

22. Через дану точку основи трикутника провести пряму, що поділяє трикутник на рівновеликі частини.

23. Побудувати паралелограм за даними його висотами і гострим кутом.

24. Побудувати трапецію: а) за її сторонами; б) за основами та діагоналями.

25. Побудувати прямокутний трикутник: а) за його гіпотенузою та відношенням катетів $2:1$; б) за катетом і різницею двох інших сторін.

26. Прямими, паралельними діагоналі паралелограма поділити його площу на три рівновеликі частини.

27. З точки поза колом провести січну так, щоб її зовнішня частина дорівнювала внутрішній.

28. Побудувати чотирикутник $ABCD$ за його сторонами, знаючи, що діагональ AC є бісектрисою кута $\angle A$.

Заняття 14

Координатний і векторний методи розв'язування задач

План

1. Координатний метод в геометрії.
2. Вектори в шкільній програмі з геометрії.
3. Застосування векторів в планіметрії і стереометрії.
4. Векторний метод в алгебрі і тригонометрії.

Методичні зауваження

Декартові координати в шкільній математиці вводяться ще на початку 6-го класу. Отже, коли на уроках учні приступають до вивчення декартових координат на площині, з більшістю понять цієї теми вони вже знайомі. Важливу роль в цій темі відіграють формула відстані між двома точками, координати середини відрізка, рівняння прямої і кола, а пізніше — рівняння площини та прямої в просторі і рівняння сфери.

Суть методу координат полягає в наступному. По-перше, задаючи фігури рівняннями (нерівностями) і виражаючи в координатах різні геометричні співвідношення, ми застосовуємо алгебру і аналіз до розв'язування задач і доведення теорем. По-друге, за допомогою координат можна трактувати алгебраїчні і аналітичні співвідношення геометрично і так застосовувати геометрію в алгебрі і аналізі.

Приклад 1. Знайти суму квадратів відстаней від довільної точки кола радіуса r до вершин описаного навколо кола квадрата.

Розв'язування. Нехай квадрат $ABCD$ описано навколо кола радіуса r і M — довільна точка кола. Розглянемо декартову систему координат Oxy таку, щоб вісь Ox була паралельна стороні AB квадрата, вісь Oy паралельна стороні AD і обидві вони проходили б через центр O кола (див. рис. 25). У цій системі координат вершини квадрата мають координати $A(-r;-r)$, $B(r;-r)$, $C(r;r)$ і $D(-r;r)$. Якщо точка M має координати $M(x,y)$, то

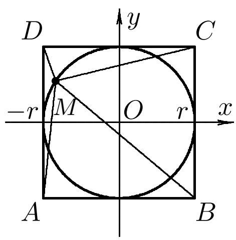

Рис. 25.

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = (x+r)^2 + (y+r)^2 +$$
$$+ (x-r)^2 + (y+r)^2 + (x-r)^2 + (y-r)^2 +$$
$$+ (x+r)^2 + (y-r)^2 = 4(x^2 + y^2 + 2r^2) = 12r^2.$$

Остання рівність слідує з того, що $M(x, y)$ — точка кола, що задається рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$ у розглядуваній системі координат.

Відповідь. $12r^2$.

Науці відомі різні поняття вектора. Найчастіше вектором називають напрямлений відрізок, або клас напрямлених відрізків, або паралельне перенесення. Залежно від задач, для розв'язування яких використовують вектори, розрізняють вектори прикладені (зв'язані), ковзні і вільні. В шкільній геометрії розглядають тільки вільні вектори, а у фізиці здебільшого мають справу з прикладеними векторами. Найзручніше вектори викладати в координатній формі, оскільки при цьому вдається досягти строгості і стислості викладу. Слід розглядати поряд з алгебраїчними властивостями операцій над векторами і їх геометричний смисл.

Наприклад колінеарність $\bar{a} \parallel \bar{b}$ векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ рівносильна алгебраїчній рівності $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ для деякого дійсного числа λ. У свою чергу перпендикулярність $\bar{a} \perp \bar{b}$ ненульових векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ рівносильна рівності $\bar{a}\bar{b} = 0$. Вивчення теми „Вектори“ у 9-му класі супроводжується тренувальними вправами, які ілюструють основні властивості векторів. Однак область застосування векторів при доведенні теорем і розв'язуванні задач є значно ширшою, що можна використати як на заняттях у масовій школі, так і на уроках математики у класах і школах з поглибленим вивченням математики, наприклад при доведенні теореми косинусів, виведенні рівняння площини, виведенні деяких тригонометричних формул, тощо. Використовуючи властивості скалярного добутку векторів, можна доводити багато теорем про перпендикулярність прямих і площин у просторі (так як це робиться в аналітичній геометрії), але за діючою програмою ці теореми тепер розглядаються раніше ніж відповідні властивості векторів у просторі. Наприклад, теорема про середню лінію трикутника можна сформулювати таким чином: $\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ (рис. 26), а її доведення можна

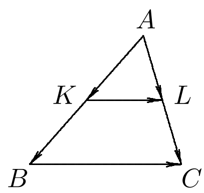

Рис. 26.

записати в один рядок

$$\overline{KL}=\overline{AL}-\overline{AK}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}-\tfrac{1}{2}\overline{AB}=\tfrac{1}{2}\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=\tfrac{1}{2}\overline{BC}.$$

Легко векторним методом довести і наступну теорему.

Теорема. *Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів всіх його сторін.*

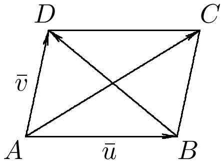

Рис. 27.

Доведення. Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм. Розглянемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ (рис. 27). Виберемо в якості базису перші два з цих векторів (позначимо їх для зручності відповідно через $\bar u$ і $\bar v$) і виразимо через них інші:

$$\overline{AC}=\bar u+\bar v,\quad \overline{BD}=\bar v-\bar u.$$

Обчислимо суму скалярних квадратів векторів $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$

$$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=(\bar u+\bar v)^2+(\bar v-\bar u)^2=2\bar u^2+2\bar v^2.$$

Оскільки $\overline{AC}^2=AC^2$, $\overline{BD}^2=BD^2$, а $\bar u^2=AB^2=CD^2$, $\bar v^2=AD^2=$ $=BC^2$, то

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2.$$

Теорема доведена.

Використовуючи векторний метод, можна довести аналог цієї теореми для паралелепіпеда.

Розглянемо паралелепіпед $ABC\ DA_1B_1C_1D_1$ (рис. 28) і за базис виберемо його ребра з вершиною в точці A, тобто вектори: $\overline{AB}=\bar u$, $\overline{AD}=\bar v$, $\overline{AA_1}=\bar w$. Виразимо вектори $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$, $\overline{BD_1}$, $\overline{B_1D}$, що відповідають діагоналям паралелепіпеда, через вибрані нами базисні вектори:

$$\overline{AC_1}=\bar u+\bar v+\bar w,\ \overline{A_1C}=\bar u+\bar v-\bar w,$$
$$\overline{BD_1}=-\bar u+\bar v+\bar w,\ \overline{B_1D}=-\bar u+\bar v-\bar w.$$

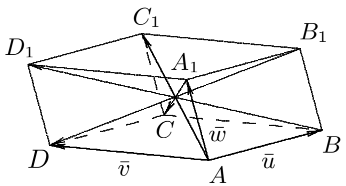

Рис. 28.

Аналогічно, як у випадку з паралелограмом, обчислимо суму скалярних квадратів цих векторів. Одержимо

$$\overline{AC_1}^2+\overline{A_1C}^2+\overline{BD_1}^2+\overline{B_1D}^2=4\bar u^2+4\bar v^2+4\bar w^2.$$

Як наслідок, звідси слідує, що сума квадратів діагоналей паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів всіх його ребер.

Зауважимо, що якщо теорему про суму квадратів діагоналей паралелограма можна довести і без векторів, то її просторовий аналог без використання векторів одержати важко.

При розв'язуванні задач векторним методом, як правило, присутні такі елементи:

1) вибір зручного базису;
2) вибір вектора, який розкладається двома способами;
3) одержання двох розкладів вибраного вектора через базис;
4) складання і розв'язування системи рівнянь, що зв'язують невідомі коефіцієнти двох розкладів цього вектора;
5) перевірка того, що одержані значення для коефіцієнтів задовольняють умовам задачі;
6) одержання результатів у безвекторній формі.

Приклад 2. Довести, що діагоналі паралелепіпеда в точці перетину діляться нею пополам.

Розв'язування. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний паралелепіпед (див. рис. 28). Розглянемо діагоналі AC_1 і B_1D. За основний вектор виберемо $\overline{AX}$, де X — точка перетину діагоналей AC_1 і B_1D. Виберемо в якості базисних вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$. Вектор $\overline{AX}$ колінеарний вектору $\overline{AC_1}$. Через це існує дійсне число λ таке, що

$$\overline{AX} = \lambda\overline{AC_1} = \lambda\overline{AB} + \lambda\overline{AD} + \lambda\overline{AA_1}. \tag{1}$$

Аналогічно існує дійсне число τ, для якого є правильною рівність

$$\overline{B_1X} = \tau\overline{B_1D} = -\tau\overline{AB} + \tau\overline{AD} - \tau\overline{AA_1}. \tag{2}$$

Далі, виразимо вектор $\overline{AX}$ іншим способом через вибрані нами базисні вектори:

$$\begin{gathered}\overline{AX} = \overline{AD} + \overline{DX} = \overline{AD} - \overline{B_1D} + \overline{B_1X} = \\ = \overline{AD} + (\tau - 1)\overline{B_1D} = (1-\tau)\overline{AB} + \tau\overline{AD} + (1-\tau)\overline{AA_1}.\end{gathered} \tag{3}$$

Із рівностей (1), (3) і однозначності представлення вектора у вигляді лінійної комбінації базисних векторів слідує, що

$$\lambda = 1 - \tau, \qquad \lambda = \tau.$$

Звідки $\lambda = \tau = \frac{1}{2}$. Таким чином із (1), (2) випливає, що точка X одночасно є серединою як відрізка AC_1, так і відрізка B_1D.

Аналогічними є доведення і для будь-якої іншої пари діагоналей паралелепіпеда.

Приклад 3. В тетраедрі $ABCD$ ребра AB і AD відповідно рівні ребрам BC і DC. Довести, що кут між прямими AC і BD дорівнює $90°$.

Розв'язування. Виберемо три некомпланарні вектори $\overline{BA} = \bar{u}$, $\overline{BC} = \bar{v}$, $\overline{BD} = \bar{w}$ в якості базису. Тоді

$$\overline{DA} = \bar{u} - \bar{w}, \quad \overline{DC} = \bar{v} - \bar{w}.$$

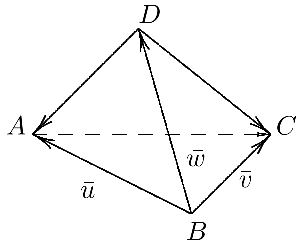

Рис. 29.

Із умови задачі слідує, що

$$|\bar{u}| = |\bar{v}|, \quad |\bar{u} - \bar{w}| = |\bar{v} - \bar{w}|.$$

Звідси одержуємо, що

$$(\bar{u} - \bar{w})^2 = (\bar{v} - \bar{w})^2$$

або

$$\bar{u}^2 - 2\bar{u}\bar{w} + \bar{w}^2 = \bar{v}^2 - 2\bar{v}\bar{w} + \bar{w}^2. \tag{4}$$

Беручи до увагу те, що $\bar{u}^2 = \bar{v}^2$, із (4) одержимо рівність $\bar{u}\bar{w} = \bar{v}\bar{w}$, тобто $(\bar{v} - \bar{u})\bar{w} = 0$. Оскільки $\bar{v} - \bar{u} = \overline{AC}$, $\bar{w} = \overline{BD}$, то $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$, що в свою чергу означає, що $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

Поряд з традиційним застосуванням векторів до геометричних задач вдалий вибір векторів дозволяє застосувати їх і до деяких алгебраїчних та тригонометричних задач.

Приклад 4. Дійсні числа a, b, c, d задовольняють умовам $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. Довести, що $|ac - bd| \leq 1$.

Розв'язування. Розглянемо вектори $\bar{m} = (a; b)$, $\bar{n} = (c; -d)$. Із умови задачі випливає, що модуль кожного з цих векторів дорівнює одиниці, оскільки $|\bar{m}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, $|\bar{n}| = \sqrt{c^2 + (-d)^2} = 1$. Очевидно, $\bar{m} \cdot \bar{n} = ac - bd$. Тоді із добре відомої нерівності Коші-Буняковського $|\bar{m} \cdot \bar{n}| \leq |\bar{m}| \cdot |\bar{n}|$, як наслідок, випливає нерівність, яку потрібно було довести.

Приклад 5. Для довільних дійсних додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c)^2.$$

Розв'язування. Розглянемо вектори

$$\bar{m} = (a\sqrt{a}, b\sqrt{b}, c\sqrt{c}), \qquad \bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{c}}\right).$$

Тоді $|\bar{m}| = \sqrt{a^3 + b^3 + c^3}$, $|\bar{n}| = \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ і

$$a + b + c = \bar{m} \cdot \bar{n} \leq |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| = \sqrt{a^3 + b^3 + c^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Звідки випливає нерівність, яку потрібно було довести.

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Розв'язування. Введемо в розгляд вектори $\bar{m} = (2; x)$, $\bar{n} = (\sqrt{x-1}; 5)$ і оцінимо ліву частину рівняння.

$$2\sqrt{x-1} + 5x = \bar{m} \cdot \bar{n} \leq |\bar{m}| \cdot |\bar{n}| = \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Оскільки рівність можлива тільки при умові колінеарності векторів $\bar{m}$ і $\bar{n}$, то розв'язки рівняння (якщо вони існують) слід шукати серед розв'язків рівняння

$$\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{5}{x},$$

яке має єдиний корінь $x = 5$. Перевірка показує, що значення $x = 5$ задовольняє початкове рівняння.

Приклад 7. Довести нерівність $\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leq \frac{3}{2}$, де $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника $\triangle ABC$.

Розв'язування. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — трійка одиничних векторів, кожен з яких колінеарний і однаково напрямлений відповідно одному з векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{CA}$ (див. рис. 30). Тоді

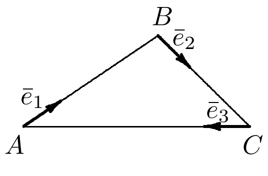

Рис. 30.

$$\angle A = (\widehat{\bar{e}_1, -\bar{e}_3}), \quad \angle B = (\widehat{-\bar{e}_1, \bar{e}_2}),$$
$$\angle C = (\widehat{-\bar{e}_2, \bar{e}_3}).$$

Розглянемо очевидну нерівність $(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3)^2 \geq 0$. Звідси

$$\bar{e}_1^2 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^2 + 2(\bar{e}_1\bar{e}_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 + \bar{e}_2\bar{e}_3) \geq 0$$

або

$$3-2(\cos\angle A+\cos\angle B+\cos\angle C)\geq 0.$$

З останньої ж нерівності легко бачити правильність нерівності, яку потрібно було довести.

Приклад 8. Довести, що для довільних дійсних чисел x, y, z є правильною нерівність $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq 1$.

Розв'язування. Рівність $|\bar{m}|=1$ для вектора $\bar{m}=(\sin x;\cos x)$ підказує вибір вектора $\bar{n}=(\sin y\sin z;\cos y\cos z)$. Аналогічно попереднім випадкам користуючись нерівністю $\bar{m}\cdot\bar{n}\leq|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|$, отримаємо

$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq$$
$$\leq\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\sqrt{\sin^2 y\sin^2 z+\cos^2 y\cos^2 z}.$$

Підсиливши останню нерівність за допомогою нерівностей

$$\sin^2 y\sin^2 z\leq\sin^2 y,\quad \cos^2 y\cos^2 z\leq\cos^2 y,$$

одержимо

$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq\sqrt{\sin^2 y+\cos^2 y}=1.$$

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Довести, що трикутник з вершинами $A(1;0;1)$, $B(1;1;0)$ і $C(1;1;1)$ — прямокутний.

2. Точки $A(3;1;8)$, $B(4;7;1)$ і $C(1;1;1)$ є вершинами паралелограма. Знайти координати четвертої вершини.

3. Дано чотири точки: $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(0;4)$, $D(-1;2)$. Довести, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

4. Дано чотири точки:

а) $A(4;5;6)$, $B(6;0;4)$, $C(2;1;0)$, $D(0;6;2)$;

б) $A(0;2;0)$, $B(1;0;0)$, $C(2;0;2)$, $D(1;1;2)$.

Довести, що чотирикутник $ABCD$ — ромб.

5. Дано паралелограм $ABCD$. Довести, що $\overline{AC} + \overline{BD} = 2\overline{BC}$.

6. Нехай AE, BD — медіани трикутника ABC і $\overline{AE} = \bar{m}$, $\overline{BD} = \bar{n}$. Виразити через $\bar{m}$ і $\bar{n}$ сторони трикутника.

7. Обчислити $\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a}$, якщо $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$, де $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — одиничні вектори.

8. В трапеції $ABCD$ кути A і B — прямі, а сторони AB, BC і AD відповідно дорівнюють 2 см, 1 см і 4 см. Довести, що діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні.

9. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти градусну міру кута між ребром DD_1 і відрізком DK, де K — середина ребра BB_1.

10. Вектор $\bar{a}$ утворює з координатними осями відповідно кути α, β і γ. Довести, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

11. Навколо правильного трикутника зі стороною 1 см описали коло. Довести, що суми квадратів віддалей від довільної точки кола до вершин цього трикутника є сталою величиною. Знайти її.

12. Знайти найменше значення виразу

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}.$$

13. Нехай X — довільна точка простору. Точки A, B, C ($A \neq B$) тоді і тільки тоді лежать на одній прямій, коли для деякого дійсно числа k є правильною рівність

$$\overline{XC} = k\overline{XA} + (1-k)\overline{XB},$$

при цьому $\overline{BC} = k\overline{BA}$.

14. Нехай X — довільна точка простору. Точки A, B, C, D належать одній площині тоді і тільки тоді, коли для деяких дійсних чисел k, l є правильною рівність

$$\overline{XD} = k\overline{XA} + l\overline{XB} + (1-k-l)\overline{XC}.$$

15. Довести, що коли M — точка перетину медіан трикутника ABC (центроїд), X — довільна точка простору, то

$$3\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}.$$

16. Довести, що коли H — точка перетину висот трикутника ABC (ортоцентр), O — центр описаного навколо трикутника ABC кола, то

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}.$$

17. Довести, що для будь-якого непрямокутного трикутника ABC з ортоцетром H є правильними рівності:

а) $\operatorname{tg}\angle A\cdot\overline{AH}+\operatorname{tg}\angle B\cdot\overline{BH}+\operatorname{tg}\angle C\cdot\overline{CH}=0$;

б) $\operatorname{ctg}\angle A\cdot\overline{AH}=\operatorname{ctg}\angle C\cdot\overline{AB}+\operatorname{ctg}\angle B\cdot\overline{AC}$.

18. Довести, що в $\triangle ABC$

$$\overline{OA}\sin\angle 2A+\overline{OB}\sin\angle 2B+\overline{OC}\sin\angle 2C=0,$$

де O — центр описаного навколо трикутника ABC кола.

19. Нехай I — центр вписаного в трикутник ABC кола (інцентр), K_1, K_2, K_3 — точки дотику кола до сторін трикутника. Тоді

$$BC\cdot\overline{IK_1}+AC\cdot\overline{IK_2}+AB\cdot\overline{IK_3}=\overline{0}.$$

20. Нехай ABC — деякий трикутник з ортоцентр H і O — центр описаного навколо цього трикутника кола. Довести, що

$$\overline{OH}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}.$$

21. Точки M і N — середини ребер тетраедра $ABCD$, точка P ребра AD ділить його у співвідношенні $AP:AD=2:3$. В якому співвідношенні площина MNP ділить ребро BC?

22. У правильному тетраедрі M і N — середини ребер AB і CD, $AB=a$. Знайти 1) довжину відрізка MN; 2) кут між відрізками MN та BC; 3) довести, що $MN\perp AB$, $MN\perp BC$.

23. Довести, що при довільних $a>0$, $b>0$, $c>0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

24. Нехай дійсні числа x, y, z задовольняють умову $x^2+3y^2+z^2=$ $=22$. Знайти найменше і найбільше значення виразу $2x+y-z$.

25. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+1$.

26. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_8 — деякі дійсні числа. Довести, що хоча б одне з чисел $a_1a_3+a_2a_4$, $a_1a_3+a_2a_6$, $a_1a_7+a_2a_8$, $a_1a_7+a_2a_8$, $a_3a_5+a_4a_8$, $a_5a_7+a_6a_8$ не є від'ємним.

27. Нехай α, β, γ — плоскі кути тригранного кута. Довести, що $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>-\frac{3}{2}$.

28. Довести нерівність $\cos 2\angle A+\cos 2\angle B+\cos 2\angle C\geq-\frac{3}{2}$, де $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника ABC.

Заняття 15
Перші уроки стереометрії. Прямі і площини в просторі

План

1. Аксіоми стереометрії. Наслідки.
2. Паралельність прямих і площин.
3. Перпендикулярність прямих і площин.
4. Зображення просторових фігур.

Методичні зауваження

Вивчення стереометрії в загально освітніх школах згідно діючої програми починається в 10-му класі. Деякі просторові фігури (куб, прямокутний паралелепіпед, куля) учням знайомі ще з 5–6 класів, з іншими (призма, піраміда, циліндр, конус) — пізніше. Але там вони вивчались на наочно-інтуїтивному рівні, без строгих означень і доведень теорем.

Основним завданням курсу стереометрії є систематичне вивчення основних властивостей прямих і площин у просторі, а також просторових фігур, потрібних для розв'язування задач, які зустрічаються на практиці, а також для розвитку і закріплення під час вивчення курсу провідних ліній, що розпочались у 8–9 класах. При цьому продовжується робота по розвитку логічного мислення та просторової уяви учнів.

Існують різні підходи до викладу системи аксіом геометрії. В основному на сьогодні посібнику з геометрії О. В. Погорєлова прийнятий такий принцип побудови системи аксіом: спочатку викладені аксіоми планіметрії, які доповнені трьома просторовими аксіомами. Слід зауважити, що після цього формулювання деяких аксіом планіметрії потребують уточнення. Наприклад аксіому I_2 треба сформулювати так: „Через будь-які дві точки *простору* можна провести пряму і тільки одну". Аналогічне положення і з поняттям паралельності та аксіомою паралельних.

Першими наслідками просторових аксіом є такі твердження:

1. *Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину і тільки одну.*
2. *Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма лежить в цій площині.*

3. *Через три точки, які не лежать на прямій, можна провести площину і тільки одну.*

Основний зміст геометрії 10-го класу — в темах „Паралельність прямих і площин“ і „Перпендикулярність прямих і площин“. У них багато теорем і наслідків, тому бажано допомогти учням розібратися в їхньому розмаїтті, виділити найважливіші, розрізнити властивості і ознаки взаємного їх розміщення в просторі. Поняття паралельності прямих добре відоме учням з планіметрії. Тут слід підкреслити відмінність цього поняття від звичайного — планіметричного, адже, якщо на площині терміни „паралельні прямі“ і „прямі, що не перетинаються“ рівнозначні, то в просторі існує ще поняття „мимобіжні прямі“. Тому слід підкреслити, що вже перша теорема: „*Через точку поза даною прямою можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну*“ є новою за змістом, хоча її формулювання збігається з відомим наслідком аксіоми паралельних на площині. Основну увагу при вивченні паралельності прямих і площин необхідно приділити ознакам паралельності, достатнім умовам паралельності. Як правило, це такі твердження:

1. *Дві площини паралельні, якщо одна з них паралельна двом прямим, які лежать в другій площині і перетинаються.*
2. *Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим, що перетинаються, другої площини, то ці площини паралельні.*

В розглянутій темі багато тверджень, аналогічних відомим планіметричним твердженням. Наприклад, для прямих a, b, c і площин α, β, γ завжди:

1) якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$;
2) якщо $\alpha \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $\alpha \parallel \gamma$;
3) якщо $a \parallel \beta$ і $\beta \parallel \gamma$, то $a \parallel \gamma$.

Нерідко учні за аналогією твердять, що:

4) якщо $a \parallel \beta$ і $\beta \parallel c$, то $a \parallel c$;
5) якщо $a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \beta$.

А це — не правильно. Бажано переконати в цьому учнів на прикладах.

Відомо два трактування поняття перпендикулярності прямих у просторі. „Дві прямі називаються перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом“і „Дві прямі називаються взаємно перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°“. Згідно з другим означенням, перпендикулярними бувають і мимобіжні прямі, згідно з першим — тільки ті, що перетинаються. Відповідно до цього в різних посібниках і теореми формулюються, і доводяться по різному. Основними теоремами теми „Перпендикурність прямої і площини“ є ознака перпендикулярності прямої і площини, ознака перпендикулярності площин і теорема про три перпендикуляри.

Уже з перших уроків стереометрії учні зустрічаються з певними труднощями при зображенні як взаємного розміщення прямих і площин, так і взаємного розміщення площин. Учням треба пояснити основні правила паралельного проектування: прямолінійні відрізки при проектуванні зображуються прямолінійними відрізками; паралельні відрізки — паралельними; відношення довжин паралельних відрізків зберігаються. Ці твердження доцільно доповнити такими двома: при паралельному проектуванні трикутник довільної форми можна вважати зображенням трикутника наперед заданої форми; паралелограмом довільної форми можна вважати зображенням паралелограма наперед заданої форми.

Щоб ефективно розвивати просторову уяву учнів, не досить ознайомити їх з загальними правилами паралельного проектування, а й показати, як практично в зошиті зображати основи правильних призм, пірамід і т. д. Найкраще робити це у фронтальній диметричній (кабінетній) проекції, яка знайома учням з уроків креслення.

Для глибокого і міцного засвоєння теоретичних положень, пов'язаних з властивостями взаємного розміщення прямих і площин у просторі, корисним є розв'язування задач на обчислення і доведення, в основі розв'язування яких лежать відомості з курсу планіметрії. Такі відомості застосовуються, як правило, після попереднього використання певних теорем стереометрії.

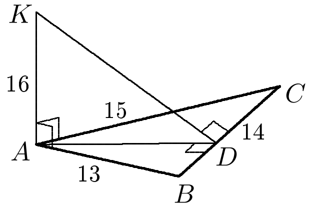

Рис. 31.

Приклад 1. З точки до площини трикутника, сторони якого дорівнюють 13, 14 і 15 см проведено перпендикуляр довжиною 16 см. Основою цього перпендикуляра є вершина кута, що лежить проти сторони завдовжки 14 см. Обчислити відстань від даної точки до цієї сторони.

Розв'язування. Нехай $\triangle ABC$ і KA — відповідно задані трикутник і перпендикуляр до площини цього трикутника (рис. 31). Проведемо перпендикуляр KD з точки K до прямої BC (слід звернути увагу учнів, що не обов'язково основа D перпендикуляра належить відрізку BC). Тоді за теоремою про три перпендикуляри проекція AD перпендикуляра KD на площину трикутника $\triangle ABC$ є перпендикулярною до прямої BC. Далі розв'язування задачі зводиться до розв'язування двох (вже відомих учням) планіметричних задач: знаходження висоти трикутника за трьома сторонами та гіпотенузи прямокутного трикутника за двома катетами.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Дано n попарно мимобіжних прямих. Доведіть, що існує пряма, що перетинає а) рівно дві з них; б) рівно одну з них.

2. Дано n точок. Чи існує площина, що не проходить ні через одну з них?

3. Через кожну точку деякої прямої проведено прямі, перпендикулярні даній площині. Доведіть, що всі вони лежать в одній площині.

4. З яких двох із наступних тверджень випливає третє: $a \perp b$, $b \perp \alpha$, $a \parallel \alpha$, де a, b — деякі прямі, α — деяка площина?

5. З яких трьох із наступних тверджень випливає четверте: $a \parallel \alpha$, $b \parallel \beta$, $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, де a, b — деякі прямі, α, β — деякі площини?

6. З яких трьох із наступних тверджень випливає четверте: $a \perp \alpha$, $b \perp \beta$, $a \perp b$, $\alpha \perp \beta$, де a, b — деякі прямі, α, β — деякі площини?

7. Дані три прямі. Чи завжди існує площина, що не має з ними спільних точок?

8. Через середини сторін трикутника проведені площини, перпендикулярні цим сторонам. Доведіть, що спільна пряма цих площин перпендикулярна площині трикутника. Узагальніть це твердження.

9. Маємо n площин. Через дану точку проведено прямі, перпендикулярні всім цим площинам. Доведіть, що всі ці прямі лежать в одній площині при таких умовах: а) всі площини перетинаються по одній і тій же прямій; б) кожні дві площини перетинаються, причому прямі перетину паралельні між собою.

10. Дано прямокутник $ABCD$ і точка P поза площиною цього прямокутника. Нехай пряма PD перпендикулярна площині ABC.

Доведіть, що пряма перетину площин ABP і CDP перпендикулярна площині APD.

11. Нехай a, b, p — деякі прямі, α, β, γ — деякі площини простору такі, що $\alpha \cap \beta = p$, $\alpha \perp a$, $\beta \perp b$, $\gamma \parallel \alpha$, $\gamma \parallel b$. Довести, що $\gamma \perp p$.

12. З точки A до площини α проводяться всі можливі похилі: а) рівної довжини; б) довільної довжини. Яку фігуру утворюють середини цих похилих?

13. Точка рівновіддалена від вершин трикутника. Довести, що основа перпендикуляра проведеного з цієї точки до площини трикутника, є центром кола, описаного навколо нього. Узагальнити твердження на довільний многокутник.

14. Точка рівновіддалена від сторін трикутника. Довести, що основа перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини трикутника, є центром кола, вписаного в цей трикутник. Узагальнити твердження на довільний многокутник.

15. Три площини попарно перпендикулярні. Довести, що лінії їх перетину теж попарно перпендикулярні.

16. Лінія перетину двох площин, перпендикулярних до третьої площини, перпендикулярна до цієї площини. Довести це.

17. Якщо пряма, проведена в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину, то вона перпендикулярна до другої площини.

18. Довести, що суми віддалей від протилежних вершин паралелограма до площини, що не перетинає його, рівні.

19. Вершини трикутника розміщені по один бік від площини і рівновіддалені від неї. Довести, що ця площина паралельна площині трикутника.

20. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Обчислити відстань від площини трикутника до точки, що віддалена від кожної з його вершин на 10 см.

21. Периметр правильного трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см. Точка знаходиться на відстані 4 см від площини трикутника і однаково віддалена від його вершин. Обчислити відстань від цієї точки до вершин трикутника.

22. Відрізок, що сполучає середини суміжних сторін квадрата, дорівнює 5 см. Відстані від точки простору до вершин квадрата дорівнює 13 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини квадрата.

23. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 50 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Точка лежить на відстані 60 см від площини трапеції і рівновіддалена від її вершин. Обчислити відстань від цієї точки до вершини трапеції.

24. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки 6 і 2 см, починаючи від найближчої до вершини цього кута вершини прямокутника. Обчислити відстань від площини прямокутника до точки, віддаленої від кожної з його вершин на 13 см.

25. У прямокутному трикутнику перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута, дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні 9 : 16. Відстані від точки простору до вершин трикутника дорівнює по 65 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини трикутника.

26. З точки до площини ромба зі стороною 5 см і меншою діагоналлю 6 см, проведено перпендикуляр з основою у вершині гострого кута ромба. Відстань від даної точки до протилежної вершини ромба дорівнює 17 см. Обчислити відстань від цієї точки до площини ромба.

27. На одній грані гострого двогранного кута взято дві точки, що віддалені від ребра кута на 54 і 36 см. Перша з цих точок віддалена від другої грані на 24 см. Обчислити відстань від другої точки до цієї грані.

28. Ортогональною проекцією трикутника, площа якого дорівнює 48 см^2, є трикутник зі сторонами 14, 16 і 6 см. Обчислити кут між площиною даного трикутника і площиною його проекції.

29. Ортогональною проекцією ромба на площину, що містить одну із його вершин, є квадрат. Обчислити кут між площинами ромба і квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 9 і 18 см.

30. Площі двох рівнобедрених трикутників дорівнюють 48 і 90см^2, а їх спільна основа має довжину 12 см. Відстань між вершинами трикутників 13 см. Обчислити кут між площинами трикутників.

З а н я т т я 16

Многогранники в шкільному курсі геометрії

План

1. Двогранні і многогранні кути.
2. Основні види многогранників в шкільній геометрії.
3. Площі поверхонь і об'єми многогранників.
4. Задачі на комбінації геометричних тіл.

Методичні зауваження

Вивчення многогранників в 11-му класі загально освітньої школи починається темою „Двогранні кути“. У різних теоретичних курсах двогранним кутом називають фігуру, утворену двома півплощинами із спільною їх межею, або ж — об'єднання такої фігури і однією з частин простору, обмеженою нею. У шкільних підручниках звичайно дотримуються якогось одного трактування. Доцільно все ж учням пояснити це поняття так, як це прийнято в науці. Як і в планіметрії, по аналогії зі звичайним кутом, так і в стереометрії, двогранним кутом називають частину простору, обмежену двома півплощинами зі спільною межею разом з цими півплощини.

Тригранним кутом (abc) називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів (ab), (bc) і (ac). В школах і класах з поглибленим вивченням математики розглядаються теореми косинусів для тригранних кутів.

Многогранники — центральний предмет стереометрії. Вони відіграють важливу роль як в теорії, так і на практиці, де багато спеціалістів мають справу з матеріальними моделями многогранників. Поняття многогранника в різних посібниках визначається по-різному. Одним із шляхів є введення поняття многогранника за допомогою поняття геометричного тіла: „Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості многокутників“. Тоді означення призми можна дати так: „Призмою називається многогранник, дві грані якого — n-кутники, що лежать в паралельних площинах, а інші грані — паралелограми“. У посібнику О. В. Погорєлова, що є основним у масових школах, це означення дається так: „Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників“.

Особливу увагу при вивченні призм слід звернути на паралелепіпеди. Серед теорем цієї теми насамперед слід розглянути теорему про властивості діагоналей про властивості діагоналей і граней паралелепіпеда та співвідношення між вимірами і діагоналлю прямокутного паралелепіпеда. Серед задач на призми слід починати з прямих призм, а в класах з поглибленим вивченням математики і на похилі призми.

Приклад 1. Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є правильний трикутник із стороною a і бічним ребром, нахиленим до площини основи під кутом α (рис. 32). Знайти площу бічної поверхні призми, якщо відомо, що вершина A_1 верхньої основи проектується в центр O нижньої основи.

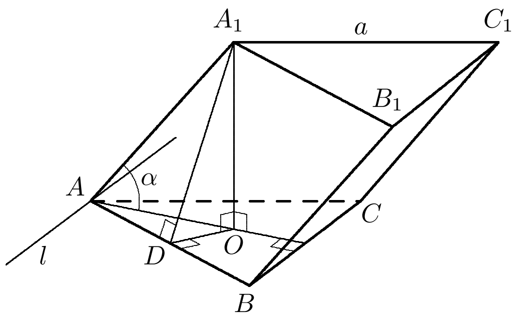

Рис. 32.

Розв'язування. Через вершину A призми проведемо пряму l паралельну до ребра BC. Ця пряма лежить у площині основи ABC і перпендикулярна до ребра AA_1. Дійсно, оскільки O — центр описаного навколо основи ABC кола, пряма AO перпендикулярна стороні BC трикутника $\triangle ABC$, а отже, перпендикулярна і до прямої l. За теоремою про три про перпендикуляри $AA_1 \perp l$.

Далі, $BB_1 \parallel AA_1$, $BC \parallel l$ і $AA_1 \perp l$, тому $BB_1 \perp BC$. Таким чином, грань BCC_1B_1 є прямокутником. Для знаходження площі $S_{BB_1C_1C}$ цієї грані попередньо знаходимо довжину ребра BB_1 призми:

$$BB_1 = AA_1 = \frac{AO}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha},$$

оскільки AO — радіус описаного навколо $\triangle ABC$ кола Далі,

$$S_{BB_1C_1C} = BC \cdot BB_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}.$$

Нехай D — середина сторони AB трикутника $\triangle ABC$. Тому що трикутник $\triangle ABC$ є рівностороннім, OD є радіусом вписаного у нього кола, $OD = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ і $OD \perp AB$. Знову ж таки за теоремою про три перпендикуляри $A_1D \perp AB$ і тому A_1D — висота грані ABB_1A_1, яка є паралелограмом. З прямокутного трикутника $\triangle AOA_1$ слідує, що

$$A_1O = AO \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} a \operatorname{tg}\alpha.$$

А з прямокутного трикутника $\triangle A_1DO$ випливає, що

$$A_1D = \sqrt{A_1O^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{3}}.$$

Тому площа $S_{ABB_1A_1}$ грані ABB_1A_1 дорівнює

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{3}}.$$

Аналогічно, площа $S_{ACC_1A_1}$ грані ACC_1A_1 дорівнює

$$\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{3}}.$$

Таким чином площа $S_б$ бічної поверхні призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює

$$S_б = S_{ABB_1A_1} + S_{ACC_1A_1} + S_{BB_1C_1C} = \\ = a^2\sqrt{\frac{4\operatorname{tg}^2\alpha + 1}{3}} + \frac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha} = \\ = a^2\frac{\sqrt{4 - 3\cos^2\alpha} + 1}{\sqrt{3}\cos\alpha}.$$

Відповідь. $a^2\frac{\sqrt{4-3\cos^2\alpha}+1}{\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Пірамідою називають многогранник, утворений усіма відрізками, що сполучають дану точку — вершину піраміди з точками плоского многокутника — основи піраміди. Іноді учні в цьому означенні слово „многогранник“ замінюють на „фігуру“. Цього робити не можна, бо фігура з описаними властивостями може бути і плоскою, а піраміда — геометричне тіло. Не рідко піраміди, як і призми, називають тригранними, чотиригранними і т. д. Ці терміни невдалі, адже трикутна піраміда має чотири грані. Найпростіша піраміда — трикутна. В стереометрії вона відіграє таку саму роль, як трикутник в планіметрії. Її називають також тетраедром. Найважливіша теорема розглядуваної теми — про те, що січна площина, паралельна основі піраміди, відтинає від неї подібну піраміду. Після її доведення вводять поняття зрізаної піраміди. Серед пірамід виділяють клас правильних пірамід. Піраміда називається правильною, якщо її основа — правильний многокутник, а вершина піраміди проектується в центр цього многокутника. Правильні піраміди мають такі властивості: 1) бічні ребра їх рівні; 2) бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

У задачах на піраміди часто використовуються наступні результати.

Теорема 1. *Наступні умови еквівалентні:*

1) *бічні ребра піраміди рівні;*
2) *бічні ребра однаково нахилені до площини основи;*
3) *бічні ребра утворюють однакові кути з висотою;*
4) *основи піраміди можна описати коло і основа висоти піраміди співпадає з його центром.*

Теорема 2. *Наступні умови еквівалентні:*

1) *висоти бічних граней піраміди рівні;*
2) *висота піраміди утворює однакові кути з бічними гранями;*
3) *бічні грані піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом.*

Теорема 3. *Двогранні кути при основі піраміди рівні тоді і тільки тоді, коли в основу піраміди можна вписати коло і основа висоти піраміди співпадає з його центром.*

Питання про площі поверхонь многогранників порівняно нескладне, визначення площі поверхні будь-якого многогранника зводиться до обчислення суми площ кількох многокутників.

Поняття об'єму геометричних тіл і, зокрема, многогранників є набагато складнішим. Існує декілька підходів до визначення цього поняття в курсі геометрії. Учням загально освітніх шкіл зміст поняття об'єму краще розкривати так, як це зроблено в посібнику О. В. Погорєлова. У класах з поглибленим вивченням математики і на факультативних заняттях можна зробити узагальнення. Об'ємом геометричного тіла називається додатне число, що ставиться у відповідність кожному тілу і має такі властивості:

1) одиницею об'єму є об'єм куба, довжина ребра якого взято за одиницю довжини;
2) рівні тіла мають рівні об'єми;
3) об'єм тіла, яке складається з кількох частин, дорівнює сумі об'ємів цих частин.

Традиційно об'єми многогранників вивчаються у такій послідовності: об'єм прямого паралелепіпеда, похилої призми, об'єм піраміди і зрізаної піраміди. Серед задач на многогранники виділяється клас задач, пов'язаних з побудовою перерізів. Як правило, в загально освітній школі розглядають лише найпростіші випадки, коли переріз задається точками на ребрах або точками і самими ребрами. В той же час для побудови січної площини досить вказати або три точки загального положення, або точку і пряму. В цих випадках побудова перерізів не завжди є тривіальною. Існує декілька методів побудови перерізів многогранників. Це метод слідів, метод внутрішнього проектування і комбінований метод. В першому з них шукають пряму, з якою січна площина перетинає площину грані многогранника — слід січної площини. Метод внутрішнього проектування застосовують тоді, коли слід січної площини знаходити незручно, а комбінований метод поєднує обидва попередні методи.

Традиційно, найбільш важкими для учнів є задачі на комбінації многогранників, а серед них на вписані і описані навколо піраміди кулі. В цих задачах головним є знаходження центра вписаної або описаної кулі. Так центр кулі, вписаної в многогранник рівновіддалений від всіх його граней, а центр описаної навколо многогранника кулі рівновіддалений від його вершин.

Приклад 2. Задано правильну чотирикутну піраміду таку, що центр вписаної у неї кулі співпадає з центром описаної навколо цієї піраміди кулі. Двогранний кут при основі піраміди дорівнює α. Довести, що $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.

Розв'язування. Нехай O — центр, як вписаної, так і описаної навколо піраміди $SABCD$ куль (рис. 33), H — основа висоти SH заданої піраміди, OE — перпендикуляр до грані SBC, $OH = OE = r$, де r —радіус вписаної в піраміду $SABCD$ кулі. Перерізи описаної кулі площинами, що рівновіддалені від її центра, рівні між собою. Тому квадрат $ABCD$ і трикутник SBC вписані в рівні кола. Отже $\angle BEC = \angle BHC = \frac{\pi}{2}$ і $\angle BSC = \frac{\pi}{4}$. Проведемо апофему SF грані SBC. Оскільки $CF = HF$, то $\frac{HF}{SF} = \frac{CF}{SF}$, або $\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, що й потрібно було довести.

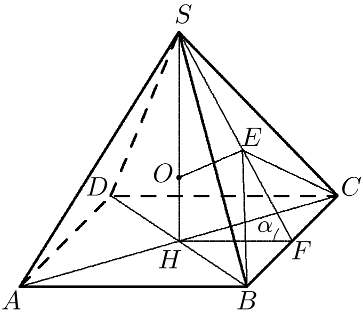

Рис. 33.

Завдання для аудиторних занять та самостійної роботи

1. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із стороною a і гострим кутом α. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут γ. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

2. Відстані між прямими, що проходять через бічні ребра похилої призми, дорівнюють 13, 14 і 15 см. Знайти відстань між площиною середньої по величині площі бічної грані і протилежним бічним ребром.

3. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник ABC зі сторонами a, b. Кожна бічна грань нахилена до площини основи під кутом γ і висота проходить всередині піраміди. Знайти висоту і площу повної поверхні піраміди.

4. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює β, а сторона основи — a. Через ребро основи проведено площину під кутом γ до основи $(0 < \gamma < \beta)$. Знайти площу перерізу.

5. Визначити об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої a і двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β.

6. В правильній трикутній піраміді радіус вписаного в основу кола дорівнює r, а двогранний кут при бічному ребрі φ. Визначити довжину ребра куба, об'єм якого в $\sqrt{3}$ разів більше об'єму піраміди.

7. Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ зі стороною a і гострим кутом $60°$. Ребро AA_1 дорівнює a і утворює з ребрами

AB і AD кути $45°$. Знайти об'єм паралелепіпеда.

8. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з гострим кутом α при вершині. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β. Знайти об'єм конуса, описаного навколо піраміди, якщо площа основи піраміди дорівнює S.

9. В кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду. Знайти об'єм піраміди, якщо бічне ребро її рівне c і утворює з висотою піраміди кут α.

10. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром, що дорівнює 1. Через вершини A, D_1 і середину ребра CC_1 проведено переріз куба. Знайти відношення об'ємів частин, на які січна площина розбиває куб.

11. На ребрах BC і A_1B_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяті точки P і Q відповідно. Побудувати переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через пряму CQ паралельно прямій AP.

12. Центр верхньої основи куба сполучено з вершинами нижньої основи. Знайти площу бічної поверхні утвореної піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

13. У правильну чотирикутну піраміду вписано правильну чотирикутну призму, так, що одна основа призми лежить у площині основи піраміди, а вершини другої лежать на бічних ребрах піраміди. Бічна грань призми — квадрат із стороною b, а ребро основи піраміди дорівнює a. Знайти об'єм піраміди.

14. Висота правильної трикутної (чотирикутної, шестикутної) піраміди дорівнює H, а плоский кут при вершині — α. Знайти об'єм та повну поверхню відповідної піраміди.

15. Довжина бічного ребра правильної трикутної (чотирикутної, шестикутної) піраміди дорівнює c, а її бічні грані нахилені до площини основи під кутом α. Знайти об'єм та повну поверхню відповідної піраміди.

16. Основа піраміди — квадрат із стороною a. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Знайти бічну поверхню піраміди.

17. В основі піраміди лежить ромб. Дві суміжні бічні грані перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою тупий кут β, а дві інші бічні грані нахилені до основи під кутом β. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо висота піраміди дорівнює H.

18. В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною c і гострим кутом α. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайти об'єм піраміди.

19. В основі піраміди лежить прямокутна трапеція з більшою бічною стороною b і гострим кутом α. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Знайти об'єм піраміди.

20. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з гострим кутом α. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайти об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

21. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з кутом α. Через протилежний катет нижньої основи і вершину кута α проведено переріз, який утворює з площиною основи кут φ. Перпендикуляр, проведений з вершини кута α нижньої основи до перерізу, дорівнює a. Знайти об'єм циліндра, описаного навколо цієї призми.

22. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Через основу трикутника нижньої грані і протилежну вершину верхньої грані проведено переріз, який утворює з площиною основи призми кут φ. Перпендикуляр, проведений з вершини нижньої основи, що не належить даному перерізу, до цього перерізу, дорівнює b. Знайти бічну поверхню циліндра, описаного навколо даної призми.

23. Кожне з ребер правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Через середини двох суміжних сторін основи піраміди і середину висоти цієї піраміди проведено площину. Знайти площу одержаного перерізу.

24. Через центр грані правильного тетраедра з ребром a проведено площину, паралельно мимобіжним ребрам цього тетраедра. Знайти площу одержаного перерізу.

25. Через діагональ правильної чотирикутної призми, основа якої дорівнює a, а висота — $4a$, проведено площину, паралельну діагоналі призми. Знайти площу перерізу.

26. Кожна з ребер правильної шестикутної призми дорівнює a. Знайти площу перерізу, проведеного через дві протилежні сторони верхньої і нижньої основ l призми.

27. Центри граней правильного тетраедра є вершинами нового тетраедра. Знайти відношення їх повних поверхонь та об'ємів.

28. Вершини правильного тетраедра співпадають з чотирма вершинами куба. Знайти відношення об'ємів тетраедра і куба.

29. Центри граней куба є вершинами двох рівних правильних чотирикутних пірамід. Знайти відношення об'єму такої піраміди до об'єму куба.

Література

1. Актуальні проблеми вивчення природничо-математичних дисциплін у загальноосвітніх начальних закладах України (Матеріали всеукраїнської конференції). – К.: 1999.
2. *Бевз Г. П.* Методика викладання математики. – К.: Вища школа, 1977.
3. *Бевз Г. П.* Методика розв'язування алгебраїчних задач у 6–8 класах. – К.: Рад. школа, 1975.
4. *Бевз Г. П.* Методика розв'язування стереометричних задач. – К.: Рад. школа, 1988.
5. *Белл Э. Г.* Творцы математики. – М.: Просвещение, 1979.
6. *Болтянский В. Г.* Элементарная геометрия: Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1985.
7. *Бурда М. I.* Розв'язування задач на побудову в 6–8 класах. – К.: Рад. школа, 1986.
8. *Виленкин Н. Я.* Функция в природе и технике. – М.: Просвещение, 1985.
9. *Возняк Г. М., Маланюк К. П.* Прикладна спрямованість шкільного курсу математики. – К.: Рад. школа, 1984.
10. Геометрия для 9–10 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением курса математики / *А. Д. Александров и др.* – М.: Просвещение, 1984.
11. *Глейзер Г. И.* История математики в школе, IV–VI классы: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.
12. *Глейзер Г. И.* История математики в школе, VII–VIII классы: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.
13. *Глейзер Г. И.* История математики в школе, IX–X классы: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983.
14. *Гнеденко Б. В.* Формирование мировозрения учащихся в процесе обучения математике. – М.: Просвещение, 1982.

15. *Грицаєнко М. П.* Усні вправи з математики для 4–8 класів. – К.: Рад. школа, 1984.

16. *Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л.* Внеклассная работа по математике в 6–8 классах / Под. ред. С. И. Шварцбурда. – М.: Просвещение, 1984.

17. Задачи по алгебре для 6–8 классов / *Д. К. Фаддеев и др.* – М.: Просвещение, 1987.

18. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / *За редак. В. І. Михайловського.* – К.: Вища школа, 1979.

19. *Коваленко В. Г., Тесленко І. Ф.* Проблемний підхід до навчання математики. – К.: Рад. школа, 1985.

20. *Колягин Ю. М.* Задачи в обучении математике. В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1977.

21. *Конфорович А. Г.* Математичні софізми і парадокси. – К.: Рад. школа, 1983.

22. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / *Под ред. Е. И. Лященко.* – М.: Просвещение, 1988.

23. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике / *В. Н. Березин и др.* – М.: Просвещение, 1985.

24. *Литвиненко Г. М., Мордкович А. Г.* Практикум по решению математических задач. – М.: Просвещение, 1984.

25. Математика: Посібник для фукультативних занять у 7 класі / *За ред. Бевза Г. П.* – К.: Рад. школа, 1982.

26. Математика: Посібник для фукультативних занять у 8 класі / *Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М., Шефтель З. Г. та ін.* – К.: Рад. школа, 1983.

27. Математика: Посібник для фукультативних занять у 9 класі / *Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М., Шефтель З. Г. та ін.* – К.: Рад. школа, 1984.

28. Математика: Посібник для фукультативних занять у 10 класі / *Боровик В. Н., Вивальнюк Л. М., Шефтель З. Г. та ін.* – К.: Рад. школа, 1985.

29. *Маланюк М. П., Лукавецький В. І.* Олімпіади юних математиків. – К.: Рад. школа, 1985.

30. *Метельский Н. В.* Дидактика математики: Лекции по общим вопросам. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982.

31. Методика викладання математики: Практикум / *За ред. Бевза Г. П.* – К.: Вища школа, 1981.
32. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / *Сост. Черкасов Р. С., Столяр А. А.* – М.: Просвещение, 1985.
33. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / *Сост. Мишин В. И.* – М.: Просвещение, 1987.
34. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / *Оганесян В. А., Колягин Ю. М. и др.* – М.: Просвещение, 1980.
35. Методика викладання математики / *Упоряд. Черкасов Р. С., Столяр А. А.* – Харків: Основа, 1992.
36. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
37. *Тесленко І. Ф., Чашечников С. М., Чашечникова Л. Г.* Методика викладання стереометрії і планіметрії. – К.: Рад. школа, 1986.
38. У світі математики (Зб. наук.-популяр. статей). – К.: ТВІМС, (починаючи з 1995 р.).
39. *Фаддеев Д. К. и др.* Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, 1987.
40. *Фішман І. М.* Методологічні питання шкільного курсу математики. – К.: Рад. школа, 1985.
41. *Хабіб Р. А.* Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики. – К.: Рад. школа, 1985.
42. *Хмара Т. М.* Навчання учнів математичної мови. – К.: Педагогіка, 1987.

КИРИЛЮК Олександр Антонович
ШАПОЧКА Ігор Валерійович
ШУЛЛА Іван Йосипович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ З КУРСУ „МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ“

Підписано до друку 20.06.2000. Формат $60 \times 84/16$. Офсетний друк.
Умов. друк. арк. 7,03. Замовлення №100.
Наклад 150 прим.

Видавництво Ужгородського державного університету
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18