Міністерство освіти і науки України
Ужгородський національний університет

**П.М. Гудивок,
Є.Я. Погоріляк, І.В. Шапочка**

ПРАКТИКУМ З АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕРШОГО КУРСУ

Ужгород 2002

УДК 512.8

Практикум з алгебри і теорії чисел для студентів першого курсу / Гудивок П.М., Погоріляк Є.Я., Шапочка І.В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 127 с.

Відповідальний за випуск:

кандидат фізико-математичних наук, доцент *В.П. Рудько*

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент *О.А. Кирилюк*

Зміст

Передмова

Цей практикум написаний на допомогу студентам математичного факультету, які повинні вивчити курс "Алгебра і теорія чисел", що читається у першому семестрі студентам денної форми навчання та відповідно у першому і другому семестрах студентам-заочникам. Даний курс охоплює наступні теми: множини, відображення множин, множина комплексних чисел, системи лінійних рівнянь, перестановки, підстановки, детермінанти, матриці та дії над ними, n-вимірний векторний простір, ранг матриці, многочлени від однієї та багатьох невідомих, корені многочленів, групи, кільця, поля. Всі згадувані вище поняття в тій чи іншій мірі зустрічаються в будь-якому розділі математики.

Кожен параграф цієї методичної розробки складається із трьох частин. Перша частина має довідковий характер, тут даються означення і формулюються основні твердження. Доведення тверджень читач зможе знайти у навчальних посібниках з алгебри, які включені у список рекомендованої літератури. У другій частині параграфу наводяться зразки розв'язування прикладів і задач з найбільш важливих питань програми курсу "Алгебра і теорія чисел". Третя частина параграфу складається з вправ, самостійне розв'язання яких дасть можливість читачу глибше зрозуміти теоретичний матеріал першої частини і виробити певні навики оперування вище згаданими поняттями алгебри.

Вважаємо, що систематичне опрацювання студентом кожного із параграфів практикуму сприятиме у вивченні курсу "Алгебра і теорія чисел", а також допоможе підготуватись до складання заліку і екзамену з цього предмету.

Автори

§1. Множини. Відображення множин

У математиці деякі поняття є первинними або неозначуваними. Зокрема, одним із таких понять є поняття *множина*. Його слід розуміти, як довільну сукупність об'єктів, які називають *елементами* множини. Розглядають також *порожню* множину, тобто множину, що не містить жодного елементу.

Множини найчастіше позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, $\ldots$, Z, а їхні елементи — малими буквами: a, b, $\ldots$, z. Для деяких важливих множин прийнято стандартні позначення. Так, буквами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ позначають відповідно множину натуральних чисел, множину цілих чисел, множину раціональних чисел і множину дійсних чисел. Порожню множину позначають символом $\emptyset$.

Множина, що складається із скінченного числа елементів, називається *скінченною*. Число елементів скінченної множини X позначається $|X|$. Скінченні множини можуть бути описані шляхом перерахування всіх її елементів; звичайно ці елементи записуються у фігурних дужках. Наприклад, множину A перших трьох латинських літер записують у вигляді $\{a, b, c\}$. У цьому випадку кажуть, що елемент a належить множині A і записують $a \in A$ або $A \ni a$. Запис $d \notin A$ означає, що d не є елементом множини A.

Множину B називають *підмножиною* множини A, якщо всі елементи множини B належать множині A, і пишуть $B \subset A$ або $A \supset B$. За означенням порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Дві множини A і B називаються *рівними* (позначають $A = B$), якщо множина A є підмножиною множини B і, навпаки, множина B є підмножиною множини A. Запис $A \neq B$ означає, що множини A і B — не рівні.

Підмножина A множини B називається *власною*, якщо $A \neq \emptyset$ і $A \neq B$.

Для виділення підмножини $A \subset B$ часто використовують деяку властивість, якій задовольняють тільки елементи із A. Наприклад, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n = 2m$ для деякого $m \in \mathbb{Z}\}$ — множина всіх парних цілих чисел.

Об'єднанням двох множин називається множина, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин. Об'єднання множин A і B позначається $A \cup B$.

Перерізом двох множин називається множина, яка складається з усіх елементів, що належать одночасно обом цим множинам. Перетин множин A і B позначається $A \cap B$.

Різницею двох множин A і B називається множина, яка складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B. Різницю множин A і B позначають $A \setminus B$.

Нехай X і Y — довільні множини. *Впорядкованою парою* елементів $x \in X$, $y \in Y$ називають символ (x, y). Вважають, що впорядковані пари (a, b) і (c, d) рівні, якщо $a = c$ і $b = d$. *Декартовим добутком* двох множин X і Y називається множина всіх впорядкованих пар (x, y) елементів $x \in X$, $y \in Y$. Декартів добуток множин X і Y позначають $X \times Y$.

Підмножина ρ множини $A \times B$ називається *відповідністю* або *бінарним відношенням* між множинами A і B. Якщо $(a, b) \in \rho$, то кажуть, що елементу a *відповідає* елемент b, або, що елемент a знаходиться у відношенні ρ з елементом b. Замість $(a, b) \in \rho$ часто пишуть $a\rho b$.

Відповідність, при якій кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B, називається *відображенням множини A в множину B*.

Відображення множин звичайно позначають буквами: f, g, h, ... І пишуть $f : A \to B$ або $A \xrightarrow{f} B$. При цьому кажуть, що A — *область визначення*, а B — *область значень* відображення f.

Якщо при відображенні f елементу $a \in A$ відповідає елемент $b \in B$, то елемент b називають *образом* елемента a, а елемент a називають *прообразом* елемента b і пишуть $b = f(a)$.

Множину $\operatorname{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$ називають *образом відображення* $f : A \to B$.

Повним прообразом елемента $b \in B$ при відображенні $f : A \to B$ називається множина $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

Відображення $f : A \to B$ називається *сур'єктивним*, якщо $\operatorname{Im} f = B$. Воно називається *ін'єктивним*, якщо для довільних різних елементів a_1, $a_2 \in A$ ($a_1 \neq a_2$) образи їх різні, тобто $f(a_1) \neq f(a_2)$. Нарешті, відображення $f : A \to B$ називається *бієктивним*, якщо воно одночасно є сур'єктивним і ін'єктивним.

Рівність $f = g$ двох відображень $f : A \to B$ і $g : A \to B$ означає, що для будь-якого $a \in A$ справедлива рівність $f(a) = g(a)$.

Одиничним або *тотожним* відображенням множини A в себе називається відображення $e_A : A \to A$ таке, що $e_A(a) = a$ для довільного $a \in A$.

Теорема 1. *Нехай $f : A \to B$ — бієктивне відображення. Тоді відповідність f^{-1}, визначена за правилом: кожному елементу $b \in B$ відповідає його прообраз $f^{-1}(b)$, є бієктивним відображенням множини B в множину A.*

В умовах вище вказаної теореми відображення $f^{-1} : B \to A$ називається *оберненим* до відображення f.

Добутком або *композицією* двох відображень $f : A \to B$ і $g : B \to C$ називається відображення $gf : A \to C$, яке визначається умовою $gf(a) = g(f(a))$ для будь-якого $a \in A$.

Очевидно, для довільного відображення $f : A \to B$

$$fe_A = f, \qquad e_B f = f.$$

Теорема 2. *Якщо $f : A \to B$, $g : B \to A$ — довільні відображення, для яких $gf = e_A$, то f — ін'єктивне, а g — сур'єктивне відображення.*

Теорема 3. *Відображення $f : A \to B$ є бієктивним тоді і тільки тоді, коли існує відображення $g : B \to A$ таке, що $gf = e_A$, $fg = e_B$.*

Теорема 4. *Добуток відображень задовольняє асоціативному закону. Тобто, для довільних трьох відображень $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ виконується рівність $h(gf) = (hg)f$.*

П р и к л а д и

1. Множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел — це множина, що задовольняє наступним умовам (аксіомам Пеано):

i) 1 — натуральне число, тобто $1 \in \mathbb{N}$;

ii) існує ін'єктивне відображення $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{Im} f = \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

iii) будь-яка підмножина $S \subset \mathbb{N}$, яка містить 1 (тобто $1 \in S$), а також разом з кожним із своїх елементів a містить його образ $f(a)$, рівна множині $\mathbb{N}$.

Останню аксіому називають *принципом індукції*. Елементи множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел позначають наступним чином: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $\ldots$.

2. Нехай $f : A \to B$ — відображення множини A в множину B. Для довільної підмножини $X \subset A$ позначимо $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$. Довести, що для довільних двох підмножин $X \subset A$, $Y \subset A$

$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y), \qquad f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y). \tag{1}$$

Розв'язання. Доведемо спочатку рівність (1). Для цього досить показати, що

$$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y), \qquad f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y). \tag{2}$$

Нехай $b \in f(X \cup Y)$. Тоді b є образом деякого елемента $z \in X \cup Y$. Оскільки $z \in X$ або $z \in Y$, то $b = f(z) \in f(X)$ або $b = f(z) \in f(Y)$. Отже, $b \in f(X) \cup f(Y)$. Таким чином, перше із включень (2) доведено. Припустимо тепер, що $b \in f(X) \cup f(Y)$. Тоді $b \in f(X)$ або $b \in f(Y)$. Звідси $b = f(z)$ для деякого елемента $z \in X$ або $b = f(z')$ для деякого елемента $z' \in Y$. Але елементи z і z' належать об'єднанню $X \cup Y$. Тому $b \in f(X \cup Y)$, що завершує доведення рівності (1).

Нехай тепер $b \in f(X \cap Y)$. Тоді $b = f(z)$ для деякого елемента $z \in X \cap Y$. Оскільки $z \in X$ і $z \in Y$, то $b \in f(X)$ і $b \in f(Y)$. Отже, $b \in f(X) \cap f(Y)$. Таким чином $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Зауважимо, що не завжди має місце рівність $f(X \cap Y) = f(X) \cap \cap f(Y)$. Наприклад, розглянемо відображення $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, визначене за правилом $f(z) = |z|$ $(z \in \mathbb{Z})$. Покладемо $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Тоді $f(X \cap Y) = \emptyset$, $f(X) \cap f(Y) = \mathbb{N}$.

3. Нехай X — множина, що складається із n елементів $(n \in \mathbb{N})$. Знайти число C_n^m всіх підмножин в X, які складаються із m елементів (це число називають *кількістю комбінацій із n елементів по m*).

Розв'язання. Доведемо методом математичної індукції, що

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{3}$$

де $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ $(k \in \mathbb{N})$. Індукцію проведемо по m.

Очевидно, число C_n^1 всіх підмножин в X, які складаються з одного елемента дорівнює n. А тому $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!}$.

Припустимо, що рівність (3) справедлива для довільних натуральних чисел m менших від деякого натурального числа k $(k \leq n)$. Нехай $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Розглянемо для довільного натурального числа $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ множину $M_i = \{Y \subset X \mid |Y| = k, a_i \in Y\}$

(вона складається із усіх підмножин в X із k елементів, які містять елемент a_i). Очевидно,

$$|M_i| = C_{n-1}^{k-1}, \qquad \left|\bigcup_{j=1}^{n} M_i\right| = C_n^k, \tag{4}$$

де

$$\bigcup_{j=1}^{n} M_i = \bigcup_{j=1}^{n-1} M_i \cup M_n \quad (n = 2,\ 3,\ 4\ \ldots).$$

Далі, якщо $Y = \{a_{j_1},\ a_{j_2},\ \ldots,\ a_{j_k}\} \subset X$, то $Y \in M_i$ тоді і тільки тоді, коли $i \in \{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_k\}$. Звідси, із рівностей (4) та із припущення індукції слідує, що

$$C_n^k = \frac{n \cdot C_{n-1}^{k-1}}{k} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

що й потрібно було довести.

4. Нехай $f = \{(a, [a]) \mid a \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ (де $[a]$ — ціла частина раціонального числа а). Показати, що відповідність f є сур'єктивним відображенням множини $\mathbb{Q}$ в множину $\mathbb{Z}$. Чи є відображення f бієктивним?

Розв'язання. Добре відомо, що ціла частина будь-якого раціонального числа визначається цим числом однозначно. Тому відповідність f є відображенням множини $\mathbb{Q}$ в множину $\mathbb{Z}$, оскільки кожному раціональному числу a відповідає цілком певний елемент $[a] \in \mathbb{Z}$.

Далі, будь-який елемент $a \in \mathbb{Z}$ є образом елемента $a \in \mathbb{Q}$, оскільки $f(a) = [a] = a$. Таким чином, $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$, тобто f — сур'єктивне відображення.

Але, оскільки $[\frac{1}{2}] = 0$, то $f(0) = 0 = f(\frac{1}{2})$. Тому відображення f не є ін'єктивним, а отже, воно не є бієктивним.

В п р а в и

1. Які з наступних включень вірні? Обгрунтуйте відповідь:

а)$2^{12} \in \{5037,\ 4095,\ 38\}$; б) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; в) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$;

г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; д) $\emptyset \in \emptyset$; е) $1 \in \{\{1, 2\}\}$.

2. Перерахуйте елементи наступних множин:

а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

б) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;

в) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2x}{x^2+1} < 30\}$;

г) множина всіх шестизначних телефонних номерів, в яких всі цифри різні і містять однакову кількість парних і непарних цифр;

д) множина всіх натуральних чисел менших за тридцять, які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел.

3. Яка з наступних множин скінченна:

а) $\{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N}, 2x{+}3y = 24\}$; б) $\{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{Z}, 2x{+}3y = 24\}$?

4. Чи рівні множини:

а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$ і $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$;

б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x} \in \mathbb{Z}\}$ і $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{12}{x^2} \in \mathbb{Z}\}$;

в) $\{1, 2, 3\}$ і $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

г) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x-2} < 1\}$ і $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$?

5. Виписати всі підмножини множини A:

а) $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$; б) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

6. Наведіть приклад множин A, B, C таких, щоб виконувались наступні умови:

а) $A \in B$, $B \notin C$, $A \subset C$; б) $A \in B$, $A \notin C$, $C \subset B$.

7. Нехай A, B, C — підмножини множини X. Довести, що:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

8. Нехай X — множина і $|X| = n$ ($n \in \mathbb{N}$). Знайти число всіх підмножин в X, що складаються із парного числа елементів.

9. Довести формулу бінома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \quad (a, b \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}).$$

10. Наведіть приклади відображень:

а) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; б) $\mathbb{R} \to \{0,1\}$; в) $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$; г) $\mathbb{N} \to \{0,1,2\}$.

11. Доведіть, що кожна із наступних відповідностей є відображенням із $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ і знайти його образ:

а) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$;

б) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sin x + 1\}$;

в) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2^x\}$;

г) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \log_2(x^2 + 3x + 3)\}$.

12. Знайдіть повний прообраз елемента $0 \in \mathbb{R}$ при наступних відображеннях $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $x \to \sin x$; б) $x \to \lg(x^2 + 1)$; в) $x \to x^2 + x + 2$.

13. Для кожного із наступних відображень дослідіть, чи є воно ін'єктивним, сюр'єктивним:

а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 5$;

б) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{x^2+3x+4}$;

в) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)^3$;

г) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f((a,b)) = a + b$;

д) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(a) = (a,a)$.

14. Вкажіть всі сур'єктивні відображення множини $A = \{1,2,3\}$ в множину $B = \{a,b\}$. Чи існують ін'єктивні відображення множини A в множину B?

15. Знайдіть всі відображення множини $A = \{1,2\}$ в себе, вкажіть які з них ін'єктивні, сур'єктивні.

16. Нехай f — відображення скінченної множини A в себе. Довести, що f — ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли f — сур'єктивне.

17. Нехай X, Y — скінченні множини і $|X| = m$, $|Y| = n$. Знайти число

а) відображень;

б) ін'єктивних відображень;

в) бієктивних відображень;

г) сур'єктивних відображень

множини X в множину Y.

§2. Комплексні числа. Алгебраїчна форма комплексного числа

Нехай $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — декартів добуток множини дійсних чисел на себе. Як і раніше (див. §1), будемо вважати, що дві пари (a, b) та (c, d) *рівні* між собою, якщо $a = c$ та $b = d$, і також писатимемо в цьому випадку

$$(a, b) = (c, d). \tag{1}$$

Сумою двох довільних пар (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ називається пара цієї множини вигляду

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \tag{2}$$

Добутком двох пар (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$ називається пара множини $\mathbb{C}$ вигляду

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{3}$$

Теорема 1. *Для довільних пар (a, b), (c, d), $(e, f) \in \mathbb{C}$ справедливі наступні рівності:*

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b),$$
$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)],$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b),$$
$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)],$$
$$(a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f).$$

Таким чином, на множині $\mathbb{C}$ нами визначено дві алгебраїчні операції додавання та множення, які мають ті ж самі основні властивості, що і операції додавання та множення елементів множин дійсних та раціональних чисел, тобто вони обидві комутативні, асоціативні і зв'язані законом дистрибутивності.

Нульовою парою множини $\mathbb{C}$ називається пара (x, y), яка задовольняє рівності $(a, b) + (x, y) = (a, b)$ для довільної пари $(a, b) \in \mathbb{C}$.

Одиничною парою множини $\mathbb{C}$ називається пара (x, y), яка задовольняє рівності $(a, b) \cdot (x, y) = (a, b)$ для довільної пари $(a, b) \in \mathbb{C}$.

З означень рівності, суми та добутку пар випливає, що пари $(0, 0)$ та $(1, 0)$ є єдиними відповідно нульовою та одиничною парами множини $\mathbb{C}$. Ці пари мають аналогічні ж властивості, які мають відповідно нуль та одиниця в множинах раціональних чисел та дійсних чисел.

Протилежною до пари $(a,b) \in \mathbb{C}$ називається пара $(x,y) \in \mathbb{C}$ така, що $(a,b)+(x,y)=(0,0)$. Протилежну пару до пари (a,b) позначатимемо $-(a,b)$.

Оберненою до пари $(a,b) \in \mathbb{C}$ називається пара $(x,y) \in \mathbb{C}$ така, що $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$. Обернену пару до пари (a,b) позначатимемо $(a,b)^{-1}$.

Теорема 2. *Для довільної пари (a,b) множини $\mathbb{C}$ існує єдина протилежна пара, причому $-(a,b)=(-a,-b)$. Для довільної ненульової пари (a,b) множини $\mathbb{C}$ існує єдина обернена пара, причому $(a,b)^{-1}=(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2})$.*

Множина $\mathbb{C}$ всіх впорядкованих пар дійсних чисел із визначеними на ній операціями додавання та множення пар, що задаються формулами (2), (3), називається *множиною комплексних чисел*, а самі елементи цієї множини називаються *комплексними числами.*

Із теореми 2 випливає існування обернених операцій до операцій додавання та множення комплексних чисел. Які відповідно будуть називатися *відніманням* та *діленням* і визначатимуться наступним чином

$$(a,b)-(c,d)=(a,b)+[-(c,d)],$$
$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)\cdot(c,d)^{-1} \quad ((c,d)\neq 0).$$

Розглянемо підмножину $R=\{(a,0) \mid a\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$. Поставимо у відповідність кожному комплексному числу $(a,0)$ цієї множини дійсне число a $((a,0)\to a)$. Очевидно, ця відповідність є бієктивним відображенням множини R в множину $\mathbb{R}$ і

$$(a,0)+(b,0)\to a+b, \quad (a,0)\cdot(b,0)\to a\cdot b$$

для довільних a, $b\in\mathbb{R}$. Тобто комплексні числа вигляду $(a,0)$ додаються та перемножуються одне з одним подібно відповідним дійсним числам. Отже, розглядувана множина R за своїми алгебраїчними властивостями нічим не відрізняється від множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Це дозволяє ототожнити комплексне число $(a,0)$ з дійсним числом a, тобто вважати, що множина комплексних чисел містить як підмножину множину дійсних чисел.

Розглянемо тепер комплексне число $(0,1)$ і знайдемо квадрат цього числа: $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$. В результаті одержали комплексне число $(-1,0)$, яке відповідає дійсному числу -1. Таким чином, на відміну від множини дійсних чисел в множині комплексних чисел існує розв'язок рівняння $x^2+1=0$.

Оскільки $(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)$, то довільне комплексне число (a,b) можна представити у вигляді

$$(a,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1). \tag{4}$$

Позначивши комплексне число $(0,1)$ через i, яке надалі називатимемо *уявною одиницею*, рівність (4) можна переписати у вигляді $(a,b)=a+b\cdot i$ або $(a,b)=a+bi$.

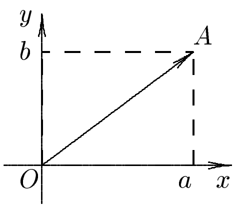
Запис $a+bi$ називається *алгебраїчною формою* комплексного числа $z=(a,b)$. Число a в цьому записі називається *дійсною частиною*, а bi — *уявною частиною* комплексного числа z.

Комплексне число $a-bi$ називається *комплексно спряженим* до числа $a+bi$. Комплексно спряжене до комплексного числа z позначається $\overline{z}$.

Теорема 3. *Додавання, віднімання, множення і ділення комплексних чисел записаних в алгебраїчній формі проводяться наступним чином*

$$\begin{aligned}
(a+bi)+(c+di)&=(a+c)+(b+d)i,\\
(a+bi)-(c+di)&=(a-c)+(b-d)i,\\
(a+bi)\cdot(c+di)&=(ac-bd)+(ad+bc)i,\\
\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \quad (c+di\neq 0).
\end{aligned}$$

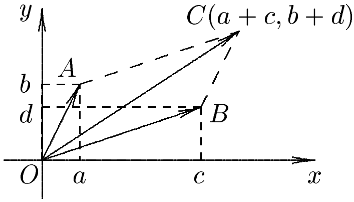
Подібно до того, як дійсні числа можна зображати точками числової прямої, комплексні числа можна зображати точками площини. Дійсно, якщо розглянути площину на якій задано систему координат Oxy, то кожному комплексному числу $a+bi$ можна поставити у відповідність точку цієї площини з координатами (a,b). Ця відповідність є бієктивним відображенням множини $\mathbb{C}$ в площину Oxy.



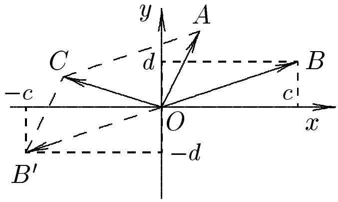
Мал. 1

Далі, з кожною точкою A координатної площини Oxy можна пов'язати вектор $\overrightarrow{OA}$, який виходить з початку координат і закінчується в точці A. Тому комплексні числа допускають ще одну геометричну інтерпретацію: кожне комплексне число $a+bi$ можна геометрично інтепретувати як вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a,b) (мал. 1).

Геометрична інтерпретація комплексних чисел дає можливість наочно трактувати суму і різницю двох комплексних чисел. Нехай дано два комплексних числа $\alpha = a + bi$ і $\beta = c + di$. Їх сумою є комплексне число $\alpha+\beta = (a+c)+(b+d)i$. З іншого боку відомо, що при додаванні векторів їхні відповідні координати додаються. Тому, якщо вектор $\overrightarrow{OA}$ має координати (a, b) (мал. 2), а вектор $\overrightarrow{OB}$ — координати (c, d), то їхня сума (вектор $\overrightarrow{OC}$) матиме координати $(a+c, b+d)$. Вектор $\overrightarrow{OC}$ і є геометричне зображення суми комплексних чисел α і β.



Мал. 2



Мал. 3

Оскільки різниця двох комплексних чисел $\alpha = a + bi$ і $\beta = c + di$ є сумою комплексного числа α і числа, протилежного комплексному числу β, то геометрично її можна зобразити як суму вектора $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) і вектора $\overrightarrow{OB'}$ з координатами $(-c, -d)$ (мал. 3), тобто як вектор $\overrightarrow{OC}$ з координатами $(a - c, b - d)$.

П р и к л а д и

1. Обчислити вираз $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$.

Розв'язання. За властивістю добутку комплексних чисел записаних в алгебраїчній формі

$$(2 + i)(3 - i) = (2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) + (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3)i = 7 + i,$$

$$(2 + 3i)(3 + 4i) = (2 \cdot 3 - 3 \cdot 4) + (2 \cdot 4 + 3 \cdot 3)i = -6 + 17i.$$

Далі, скориставшись аналогічною властивістю додавання комплексних чисел отримаємо, що

$$(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i) = (7 + i) + (-6 + 17i) = 1 + 18i.$$

Зауважимо, що множити комплексні числа записані в алгебраїчній формі можна також користуючись асоціативною, комутативною, дистрибутивною властивостями операцій додавання та множення комплексних чисел. Наприклад,

$$(2 + i)(3 - i) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-i) + i \cdot 3 + i \cdot (-i) = 6 - 2i + 3i + 1 = 7 + i.$$

2. Знайти дійсні числа x та y, що задовольняють рівності $(1+2i)x+$ $+(3-5i)y = 1-3i$.

Розв'язання. Очевидно, дійсні числа x та y задовольняють заданій в умові рівності тоді і тільки тоді, коли вони задовольняють рівність $(x+3y)+(2x-5y)i = 1-3i$. Оскільки x, y — дійсні числа, то $x+3y$, $2x-5y$ — також дійсні числа. А тому із умови рівності комплексних чисел звідси одержуємо, що $x+3y = 1$, $2x-5y = -3$. Виразивши з першого рівняння x через y ($x = 1-3y$) і підставивши отримане значення для x у друге рівняння, отримаємо $-11y = -5$. Звідси $y = \frac{5}{11}$, $x = -\frac{4}{11}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} (1+i)x \ + \ (1-i)y \ = 1+i, \\ (1-i)x \ + \ (1+i)y \ = 1+3i. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Із першого рівняння системи (5) випливає, що

$$x = \frac{1+i-(1-i)y}{1+i} = \frac{(1+i-(1-i)y)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2+2iy}{2} = 1+iy.$$

Підставимо отримане значення для невідомої x у друге рівняння системи (5)

$$(1-i)(1+iy)+(1+i)y = 1+3i.$$

Звідси $(1-i)+2(1+i)y = 1+3i$. Далі, $y = \frac{4i}{2(1+i)} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1+i$. Тепер $x = 1+i\cdot(1+i) = i$. Таким чином, $x = i$, $y = 1+i$.

4. Розв'язати рівняння $z^2-(2+i)z-1+7i = 0$.

Розв'язання. Ліва частина заданого в умові рівняння є квадратним тричленом від невідомої z з комплексними коефіцієнтами. А тому розв'язки цього рівняння буде шукати аналогічно, як у випадку квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами.

Обчислимо спочатку дискримінант квадратного тричлена

$$D = (2+i)^2-4\cdot 1\cdot(-1+7i) = 7-24i.$$

Далі, знайдемо квадратні корені дискримінанта D. Нехай $x+iy$ — будь-який із цих коренів, записаний в алгебраїчній формі. Тоді $(x+$ $+iy)^2 = D$. Звідси $(x^2-y^2)+2xyi = 7-24i$. Отже,

$$\begin{cases} x^2-y^2 \ = 7, \\ \quad 2xy \ = -24. \end{cases} \tag{6}$$

Із другого рівняння системи (6) слідує, що $y \neq 0$, а тому $x = -\frac{12}{y}$. Підставивши отримане значення для невідомої x у перше рівняння системи, отримаємо $\frac{144}{y^2} - y^2 = 7$. Звідси $y^4 + 7y^2 - 144 = 0$. За теоремою Вієта $y^2 = 9$ або $y^2 = -16$. Оскільки y — дійсне число, то $y^2 = 9$, а тому $y = 3$ або $y = -3$. У випадку $y = 3$, одержимо, що $x = -4$. Якщо ж $y = -3$, тоді $x = 4$. Таким чином $\sqrt{D} = \{4 - 3i, -4 + 3i\}$.

Тоді розв'язками заданого в умові квадратного рівняння є числа

$$z_1 = \frac{(2+i) + (4-3i)}{2} = 3 - i, \quad z_2 = \frac{(2+i) + (-4+3i)}{2} = -1 + 2i.$$

В п р а в и

1. Обчислити вирази:

а) $(4+2i)(1-i) + (5+2i)(3-5i)$; б) $\frac{(3+i)(4-3i)}{1+2i}$;

в) $(5-3i)(2+i) + (-1+i)(8+3i)$; г) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$;

д) $(7-2i)(3+4i) + (3+i)(1+2i)$; е) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$.

2. Обчислити i^{77}; i^{98}; i^n, де n — ціле число.

3. Довести рівності:

а) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$ $(n \in \mathbb{Z})$; б) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4. Знайти дійсні числа x і y, що задовольняють рівняння:

а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$;

б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4 - 9i$.

5. Розв'язати системи лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + iy - 2z = 10, \\ x - y + 2iz = 20, \\ ix + 3iy - (1+i)z = 30. \end{cases}$

6. Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$ і $\sqrt{\alpha}$ — комплексне число таке, що $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$. Обчислити:

а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt{-15+8i}$; в) $\sqrt{-3-4i}$; г) $\sqrt{-11+60i}$;

д) $\sqrt[4]{-1}$; е) $\sqrt{8+6i}$; є) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; ж) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

7. Розв'язати рівняння:

а) $x^2-(2+i)x-1+7i=0$;

б) $x^2-(3-2i)x+5-5i=0$;

в) $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$;

г) $(1-i)x^2-(2-16i)x-23-39i=0$.

8. Довести, що

а) комплексне число z є дійсним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z}=z$;

б) комплексне число z є чисто уявним тоді і тільки тоді, коли $\bar{z}=-z$.

9. Довести, що для довільних комплексних чисел x, y

а) $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$; б) $\overline{x\cdot y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$; в) $\overline{-x}=-\overline{x}$; г) $\overline{y^{-1}}=(\overline{y})^{-1}$ $(y\neq 0)$.

10. Знайти всі комплексні числа, що є спряженими до свого квадрату.

11. Зобразити на комплексній площині точки, що відповідають числам

$$5, \quad -2, \quad -3i, \quad \pm 1 \pm \sqrt{3}i.$$

12. Знайти комплексні числа, що відповідають

а) вершинам квадрату з центром в початку координат, зі сторонами довжиною 1, які паралельні осям координат;

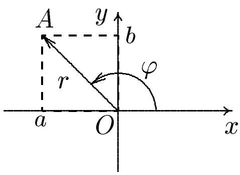
б) вершинам правильного трикутника з центром в початку координат, зі стороною, що паралельна осі ординат, вершиною на від'ємній дійсній півосі і радіусом описаного кола, що дорівнює 1.

13. Як розміщені на комплексній площині точки, що відповідають комплексним числам x, y, z, для яких

$$x+y+z=0, \quad x\bar{x}=y\bar{y}=z\bar{z}\neq 0.$$

§3. Тригонометрична форма комплексного числа. Корені з комплексних чисел

Нехай комплексне число $\gamma = a + bi \neq 0$ зображується вектором $\overrightarrow{OA}$ з координатами (a, b) (мал. 4). Позначимо довжину вектора $\overrightarrow{OA}$ через r, а кут, який він утворює з додатним напрямом осі Ox, — через φ.



Мал. 4

Тоді

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi \tag{1}$$

і комплексне число $\gamma = a + bi$ можна записати у вигляді

$$\gamma = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = \\ = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Із формул (1) випливає, що $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а величина кута φ визначається з умов

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Запис комплексного числа у вигляді (2) називається *тригонометричною формою* запису комплексного числа. Дійсне число r називається *модулем* комплексного числа γ і позначається $|\gamma|$, а кут φ — *аргументом* числа γ. Аргумент комплексного числа γ позначається $\arg\gamma$.

Якщо комплексне число не дорівнює нулю, то модуль його є додатним дійсним числом; якщо ж $\gamma = a + bi = 0$, то й модуль його дорівнює нулю. Модуль будь якого комплексного числа визначається однозначно.

Якщо комплексне число $\gamma = a + bi$ не дорівнює нулю, то його аргумент визначається формулами (3) з точністю до кута, кратного 2π. Якщо ж $\gamma = 0$, то аргумент його не визначено.

Теорема 1. *Для довільних ненульових комплексних чисел* $\alpha = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *записаних в тригонометричній формі,*

$$\alpha\beta = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{4}$$

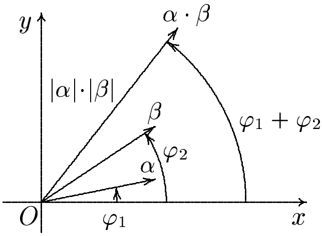
Тобто *модуль добутку комплексних чисел дорівнює добутку модулів співмножників; аргумент добутку комплексних чисел дорівнює сумі аргументів співмножників* (з точністю до доданку кратного 2π).

Теорема 2. *Для довільних ненульових комплексних чисел* $\alpha = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\beta = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, *записаних в тригонометричній формі,*

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{5}$$

Тобто *модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки двох комплексних чисел дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.*

Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел виясняється тепер без великих труднощів. Дійсно, вектор, що зображає добуток (частку) комплексних чисел α і β, одержимо в результаті повороту проти (за) годинникової стрілки вектора, що відповідає числу α, на кут φ_2 і розтягом (стиском) його в $|\beta|$ раз (див. мал. 5). Певно, що останню операцію потрібно проводити у випадку $|\beta| > 1$. Коли ж $|\beta| < 1$, тоді потрібно стискати (розтягати) вектор α в $|\beta|$ раз.



Мал. 5

Як наслідок із формули (5) одержимо, що для комплексного числа $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ оберненим буде число

$$\alpha^{-1} = r^{-1}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)], \tag{6}$$

тобто $|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}$, $\arg(\alpha^{-1}) = -\arg\alpha$.

Нехай n — довільне натуральне число. n-м *степенем* комплексного числа α називається комплексне число ω, яке одержується в результаті множення числа α самого на себе n раз, тобто

$$\omega = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ \cdots\ \cdot\alpha}_{n\text{ множників}}.$$

Позначають n-й степінь комплексного числа α через α^n. Поняття натурального степеня можна розширити до поняття *цілого степеня.* За означенням $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, де $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Для довільного ненульового комплексного числа* $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *записаного в тригонометричній формі, та довільного цілого числа* n *справедлива формула*

$$\alpha^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{7}$$

Формула (7) називається *формулою Муавра.*

Нехай n — довільне натуральне число, α — довільне комплексне число. *Коренем n-го степеня* з числа α називається таке комплексне число β, n-ий степінь якого дорівнює α, тобто $\alpha^n = \beta$. Корінь n-го степеня з комплексного числа α позначатимемо $\sqrt[n]{\alpha}$. Наприклад, комплексні числа 1, -1, i, $-i$ є коренями 4-го степеня з 1. Тобто $\sqrt[4]{1} = 1$ або $\sqrt[4]{1} = -1$, або $\sqrt[4]{1} = i$, або $\sqrt[4]{1} = -i$.

***Зауваження* 1.** Якщо a — довільне додатне дійсне число, то символом $\sqrt[n]{a}$ позначається також арифметичний корінь n-го степеня з числа a. Тому надалі у випадку можливого неоднозначного трактування в контексті символа $\sqrt[n]{a}$, ми будемо вказувати на його значення.

***Зауваження* 2.** Оскільки коренів n-го степеня з комплексного числа α може існувати декілька, то символом $\sqrt[n]{\alpha}$ інколи позначають множину всіх коренів n-го степеня з числа α.

Теорема 4. *Для довільного ненульового комплексного числа α та довільного натурального числа n існує точно n різних коренів n-го степеня з числа α. Причому, якщо $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма числа α, тоді*

$$(\sqrt[n]{\alpha})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{8}$$

де $\sqrt[n]{r}$ — арифметичний корінь n-го степеня з числа r.

Наслідок 1. *Корені n-го степеня з 1 обчислюються за формулою*

$$(\sqrt[n]{1})_k = \cos\tfrac{2\pi k}{n} + i\sin\tfrac{2\pi k}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Теорема 5. *Нехай ε_0, ε_1, ..., ε_{n-1} — всі корені n-го степеня з 1, β — деякий корінь n-го степеня з комплексного числа α. Тоді $\beta\varepsilon_0$, $\beta\varepsilon_1$, ..., $\beta\varepsilon_{n-1}$ — всі корені n-го степеня з числа α.*

Теорема 6. *Добуток двох коренів n-степеня з 1 є коренем n-го степеня з 1. Число обернене до кореня n-го степеня з 1 є коренем n-го степеня з 1. Довільний степінь кореня n-го степеня з одиниці є також коренем n-го степеня з 1.*

Корінь n-го степеня з 1 називається *первісним коренем n-го степеня з* 1, якщо він не є коренем m-го степеня з 1 для довільного натурального числа m меншого n. Існування таких коренів слідує із наслідку 1, наприклад, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ є первісним коренем n-го степеня з 1.

Теорема 7. *Нехай ε є коренем n-го степеня з 1. Корінь ε є первісним коренем n-го степеня з 1 тоді і тільки тоді, коли його степені ε^0, ε^1, $\dots \varepsilon^{n-1}$ — попарно різні, тобто ними вичерпуються всі корені n-го степеня з 1.*

Теорема 8. *Нехай ε є первісним коренем n-го степеня з 1. Число ε^k є первісним коренем n-го степеня з 1 тоді і тільки тоді, коли k і n взаємно прості числа.*

Як наслідок із останньої теореми отримаємо, що число первісних коренів n-го степеня з одиниці дорівнює числу натуральних чисел менших за n і взаємно простих з n.

П р и к л а д и

1. Знайти тригонометричну форму комплексного числа $-1+i$.

Розв'язання. Обчислимо спочатку модуль числа $-1+i$:

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Далі, якщо $\varphi = arg(-1+i)$, то $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Звідси $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ — тригонометрична форма числа $-1+i$.

2. Обчислити $(1-\sqrt{3}i)^{-8}$.

Розв'язання. Представимо комплексне число $z = 1-\sqrt{3}i$ в тригонометричній формі. Аналогічно як у попередньому прикладі можна показати, що

$$z = 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далі, за формулою Муавра

$$(1-\sqrt{3}i)^{-8} = \left(2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-8} =$$
$$= 2^{-8}\left(\cos\tfrac{8\pi}{3} + i\sin\tfrac{8\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{256}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = -\tfrac{1}{512} + \tfrac{\sqrt{3}}{512}i.$$

3. Представити у вигляді многочленів від $\sin x$ і $\cos x$ функцію $\cos 5x$.

Розв'язання. Розглянемо вираз $(\cos x + i\sin x)^5$. Згідно з формулою Муавра $(\cos x + i\sin x)^5 = \cos 5x + i\sin 5x$. З іншого боку, скориставшись формулою бінома Ньютона, маємо

$$(\cos x + i\sin x)^5 = \cos^5 x + 5\cos^4 x\cdot i\sin x + 10\cos^3 x\cdot i^2\sin^2 x +$$
$$+10\cos^2 x\cdot i^3\sin^3 x + 5\cos x\cdot i^4\sin^4 x + i^5\sin^5 x =$$
$$= (\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x) +$$
$$+(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x)i.$$

Із рівності лівих частин одержаних рівностей випливає рівність їх правих частин. Використовуючи умови рівності комплексних чисел, одержуємо

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x.$$

4. Обчислити $\sqrt[9]{\dfrac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}}$.

Розв'язання. Скориставшись результатами попередніх прикладів і теоремою 2, отримаємо, що

$$\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} =$$
$$= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}+\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}+\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\tfrac{13\pi}{12} + i\sin\tfrac{13\pi}{12}\right).$$

Тепер із теореми 4 випливає, що

$$\sqrt[9]{\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}} = \tfrac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9} + i\sin\frac{\frac{13\pi}{2}+2\pi k}{9}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt[18]{2}}\left(\cos\left(\tfrac{13+4k}{18}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{13+4k}{18}\pi\right)\right),$$

де $k \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

5. Виписати всі корені шостого степеня з 1. Вказати, які з них є первісними коренями шостого степеня з 1.

Розв'язання. За наслідком 1 всі шість коренів шостого степеня із 1 вичерпуються наступними числами:

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$\varepsilon_2 = \cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$\varepsilon_4 = \cos\tfrac{4\pi}{3} + i\sin\tfrac{4\pi}{3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \varepsilon_5 = \cos\tfrac{5\pi}{3} + i\sin\tfrac{5\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i.$$

З формули Муавра слідує, що $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$. Оскільки ε_1 — первісний корінь шостого степеня із 1, то із теореми 8 випливає, що ε_k $(k \in \{0, 1, \ldots, 5\})$ є первісним коренем шостого степеня із 1 тоді і тільки тоді, коли числа k і 6 взаємно прості. Серед чисел $0, 1, \ldots, 5$ такими є 1, 5. Таким чином, первісними коренями шостого степеня з 1 є числа $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ та $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В п р а в и

1. Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:

а) -2; б) $1 + i$; в) $\sqrt{3} - i$; д) $\sqrt{5} - \sqrt{5}i$; е) $2 + \sqrt{3} + i$;

є) $5i$; ж) $1 - i$; з) $1 + \sqrt{3}i$; и) $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$; і) $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $|z| + z = 8 + 4i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$.

3. Знайти геометричне місце точок комплексної площини, які відповідають числам z, що задовольняють умовам:

а) $1 \le |z| < 2$; б) $|z - 1 - i| < 1$; в) $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z \le \frac{\pi}{3}$;

г) $|z - 2| \le 1$; д) $0 < \operatorname{Re} iz < 1$; е) $|z - 1| + |z - 1| = 3$.

4. Обчислити вирази:

а) $(1 + i)^{100}$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; в) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; г) $(2 - \sqrt{2} + i)^{12}$.

5. Довести, що $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n\left(\cos\frac{\pi n}{6} - i\sin\frac{\pi n}{6}\right)$, де $n \in \mathbb{N}$.

6. Представити у вигляді многочленів від $\sin x$ і $\cos x$ функції:

а) $\sin 4x$; б) $\cos 6x$; в) $\sin 7x$.

7. Обчислити суми:

а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \cdots$.

8. Виписати в тригонометричній формі всі корені:

а) $\sqrt[10]{512(1 - \sqrt{3}i)}$; б) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

9. Виписати в алгебраїчній формі всі корені:

а) $\sqrt[3]{i}$; б) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$; в) $\sqrt[4]{-72(1 - i\sqrt{3})}$; г) $\sqrt{2 - 2i}$;

д) $\sqrt[4]{-4}$; е) $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$; є) $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; ж) $\sqrt[4]{-\frac{18}{1+i\sqrt{3}}}$.

10. Знайти двома способами корені п'ятого степеня з 1, виразити в радикалах:

а) $\cos\frac{2\pi}{5}$; б) $\sin\frac{2\pi}{5}$; в) $\cos\frac{4\pi}{5}$; г) $\sin\frac{4\pi}{5}$.

11. Розв'язати рівняння:

а) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; б) $(z+i)^n-(z-i)^n=0$ $(n\in\mathbb{N})$.

12. Виписати всі корені з 1 степеня:

а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

13. Виписати всі первісні корені з 1 степеня:

а) 3; б) 4; в) 8; г) 12.

14. Для кожного кореня а) 16-го; б) 24-го степеня з 1 вказати, первісним коренем якого степеня він є.

15. Знайти суму всіх коренів n-го степеня з 1.

16. Нехай ε — первісний корінь степеня $2n$ з 1. Обчислити суму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\varepsilon^{n-1}$.

17. Знайти суму k-х степенів всіх коренів n-го степеня з 1.

18. Обчислити суму всіх первісних коренів а) 16-го; б) 24-го степеня з 1.

19. Нехай k і l — взаємно прості натуральні числа, ε — первісний корінь k-го степеня з 1, а ξ — первісний корінь l-го степеня з 1. Довести, що $\varepsilon\xi$ — первісний корінь kl-го степеня з 1.

20. Позначимо через $\varphi(n)$ число всіх первісних коренів n-го степеня з 1. Довести, що $\varphi(kl)=\varphi(k)\varphi(l)$, якщо k і l взаємно прості числа.

21. Довести, що якщо $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — різні прості числа, то

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

§4. Системи лінійних рівнянь. Метод Гаусса

Нехай до кінця цього параграфу F — множина або раціональних, або дійсних, або комплексних чисел. Під *системою лінійних рівнянь* від *n невідомих* x_1, x_2, …, x_n над множиною F будемо розуміти деяку впорядковану сукупність лінійних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, n — деякі натуральні числа, a_{ij}, b_i $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ — деякі числа множини F. Число a_{ij}, яке стоїть в i-му рівнянні при j-му невідомому x_j називається *коефіцієнтом*, число b_i називається *вільним членом* i-го рівняння. Звертаємо увагу на позначення коефіцієнтів системи з подвійною індексацією.

Якщо всі вільні члени системи (1) дорівнюють нулю, то така система називається *системою лінійних однорідних рівнянь*.

Коефіцієнти при невідомих складають прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

яка називається *матрицею* із s рядків і n стовпців (матрицею розмірності $s \times n$ або $s \times n$-матрицею), а самі числа a_{ij} називаються *елементами матриці*. Якщо $s = n$, то матриця (2) називається *квадратною матрицею порядку* n. Діагональ цієї матриці, що йде з лівого верхнього до правого нижнього кута (тобто, що складається з елементів a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}) називається *головною діагоналлю*.

Матриця A називається *матрицею системи* (1). $s \times (n+1)$-матриця, перші n стовпці якої такі ж як у матриці A, а останній складається із вільних членів системи (1) називається *розширеною матрицею системи* (1).

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1) називається така система (впорядкований набір) n чисел γ_1, γ_2, …, γ_n множини F, що кожне рівняння цієї системи перетворюється в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідно числами γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Загальним розв'язком системи лінійних рівнянь (1) ми будемо називати систему n виразів, які залежать від деяких параметрів таких, що підставляючи замість цих параметрів довільні значення із множини F, ми отримаємо множину всіх розв'язків системи (1).

Система лінійних рівнянь називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку і *сумісною* в протилежному випадку, тобто якщо вона має хоча б один розв'язок. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок і *невизначеною*, якщо вона має більше як один розв'язок.

Нехай нам дано крім системи (1) ще одну систему t лінійних рівнянь від n невідомих

$$\left\{\begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{t1}x_1 + a'_{t2}x_2 + \cdots + a'_{tn}x_n = b_t. \end{array}\right. \tag{3}$$

Системи лінійних рівнянь (1) і (3) називаються *еквівалентними*, якщо вони або обидві несумісні, або сумісні і множини їх розв'язків співпадають. Еквівалентність двох систем (1) і (3) будемо позначати символом (1) $\sim$ (3).

Очевидно, що визначена вище еквівалентність систем задовольняє наступним властивостям. Довільна система еквівалентна сама собі. Якщо система (1) еквівалентна системі (3), то система (3) еквівалентна системі (1). Далі, якщо система (1) еквівалентна системі (3), а ця в свою чергу еквівалентна деякій системі $(*)$, то система (1) еквівалентна системі $(*)$.

Нехай число t рівнянь системи (3) дорівнює числу s рівнянь системи (1). Будемо говорити, що система (3) отримана із системи (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рівняння, крім i-го та j-го, залишились попередніми, а i-ве та j-ве рівняння помінялися місцями. Якщо ж в системі (3) всі рівняння, крім i-го, ті ж самі, що і в (1), а i-ве рівняння системи (3) має вигляд

$$(a_{i1} + ca_{k1})x_1 + (a_{i2} + ca_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + ca_{kn})x_n = b_i + cb_k,$$

де $k \neq i$, c — деяке число з множини F, то будемо говорити, що система (3) отримана із системи (1) за допомогою *елементарного перетворення типу* (II).

Теорема 1. *Дві системи лінійних рівнянь еквівалентні, якщо одна із систем одержується із іншої шляхом застосування скінченної послідовності елементарних перетворень типу* (I) *та* (II).

Теорема 2 (Гаусс). *Будь-яка система лінійних рівнянь від n невідомих з коефіцієнтами з множини F є або несумісною, або за допомогою скінченного числа елементарних перетворень приводиться до системи лінійних рівнянь вигляду*

$$\begin{cases} a_{1k_1}x_{k_1} + \dots + a_{1k_2}x_{k_2} + \dots + a_{1k_r}x_{k_r} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\qquad a_{2k_2}x_{k_2} + \dots + a_{2k_r}x_{k_r} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{rk_r}x_{k_r} + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{4}$$

де $r \le n$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r$, $a_{jk_j} \ne 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$.

Система лінійних рівнянь вигляду (4) називається *системою лінійних рівнянь східчастого вигляду.*

Наслідок 1. *Система лінійних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна системі східчастого вигляду, у якої число рівнянь дорівнює числу невідомих.*

П р и к л а д и

1. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь з дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{5}$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо елементарні перетворення системи (5) такі, що у новій системі буде тільке одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_1. Для цього досить до другого рівняння системи (5) додати її перше рівняння, помножене на -1. Маємо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\quad - 3x_4 = 1, \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ \qquad x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \quad - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{6}$$

Далі, виконаємо елементарні перетворення системи (6) такі, що у новій системі, починаючи з другого рівняння, буде тільке одне рівняння, яке міститиме ненульовий коефіцієнт при невідомому x_2. Для цього поміняємо місцями друге та третє рівняння системи (6)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases} \tag{7}$$

А потім послідовно до третього та четвертого рівняння системи (7) додамо друге рівняння, відповідно помножене на 5 та 7. Одержимо

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ - 4x_3 + 8x_4 = -24. \end{cases} \tag{8}$$

Нарешті, до четвертого рівняння системи (8) додамо її третє рівняння, помножене -2

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ - 2x_3 + 4x_4 = -12, \\ 0 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, система (9) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \phantom{{}- x_3} - 3x_4 = 1, \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ \phantom{x_1 + x_2 - {}} x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases} \tag{10}$$

Оскільки система (10) має східчастий вигляд, то із наслідку 1 випливає, що система (5) — невизначена.

З останнього рівняння маємо $x_3 = 6 + 2x_4$. Підставляючи отримане значення для x_3 у друге рівняння системи (10), визначимо з нього x_2

$$x_2 = -3 - x_4 + x_3 = -3 - x_4 + 6 + 2x_4 = 3 + x_4.$$

Підставляючи, нарешті, знайдені значення x_2 та x_3 в перше рівняння, визначимо x_1

$$x_1 = 1 + 3x_4 - 3x_2 = 1 + 3x_4 - 9 - 3x_4 = -8.$$

Отже, $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$ і система -8, $3 + c$, $6 + 2c$, c ($c \in \mathbb{R}$) є загальним розв'язком даної в умові системи лінійних рівнянь.

Зауваження. На прикладі розв'язання попереднього завдання можна пересвідчитись, що при відшуканні розв'язків систем лінійних рівнянь методом Гаусса всі елементарні перетворення систем доцільно проводити над відповідними їм розширеними матрицями. І якщо A і B — матриці еквівалентних систем лінійних рівнянь, то писатимемо $A \sim B$. Проілюструємо це в наступному прикладі.

2. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь з раціональними коефіцієнтами

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases} \tag{11}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи (11), в якій для зручності стовпець вільних членів відділимо вертикальною рискою

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

На відміну від попереднього прикладу жоден елемент першого стовпця не є дільником всіх інших елементів цього стовпця. Тому, щоб уникнути дробових (нецілих) коефіцієнтів виконаємо спочатку наступне елементарне перетворення — до першого рядка матриці A додамо другий помножений на -1. Одержимо

$$A \sim B = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

Далі, послідовно до другого, третього, четвертого рядків матриці B додамо перший, помножений відповідно на 3, 5, 2. Одержимо

$$B \sim C = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 16 & -16 & 22 & -6 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array} \right).$$

Додамо до третього рядка матриці C четвертий, помножений на -3. А потім поміняємо місцями другий та третій рядки. Будемо мати, що

$$C \sim D = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 7 & -7 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Далі, послідовно додавши до третього та четвертого рядків матриці D її другий рядок, помножений відповідно на -7 і -5, одержимо

$$D \sim F = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & -30 & 62 \end{array}\right).$$

Нарешті, до четвертого рядка матриці D додамо третій, помножений на $-\frac{30}{40}$. Одержимо

$$F \sim G = \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 3 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -40 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Матриця G є розширеною матрицею системи

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1, \\ \qquad x_2 - x_3 + 7x_4 = -12, \\ \qquad\qquad -40x_4 = 83, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -\frac{1}{4}, \end{cases}$$

в якій ліва частина останнього рівняння дорівнює нулю, а права частина відмінна від нуля. Така система немає розв'язків, тобто є несумісною. Отже, дана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.

В п р а в и

Розв'язати системи лінійних рівнянь:

1. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4, \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7, \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5, \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0, \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0, \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3, \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-2=0, \\ x_1+3x_2+x_3-5=0, \\ x_1+x_2+5x_3+7=0, \\ 2x_1+3x_2-3x_3-14=0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3+1=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-1=0, \\ x_1+x_2+x_3-3=0, \\ x_1+2x_2-3x_3-1=0. \end{cases}$

Дослідити на сумісність системи лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

11. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4, \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=7, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=5, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ \lambda x_1-4x_2+9x_3-10x_4=11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2. \end{cases}$

15. Знайти систему лінійних однорідних рівнянь, розв'язками якої є наступні системи чисел:

$(1,1,0,-3,-1)$, $(1,-1,2,-1,0)$, $(4,-2,6,3,-4)$, $(2,4,-2,4,-7)$.

§5. Перестановки. Підстановки

Нехай M — скінченна множина, яка складається з n елементів. Перенумеруємо ці елементи, тобто поставимо у відповідність кожному елементу множини M одне із натуральних чисел 1, 2, ..., n. Оскільки природа елементів множини M не суттєва, то можна вважати, що $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Тоді, виписавши елементи множини M у порядку нумерації, ми одержимо деяке розміщення натуральних чисел 1, 2, ..., n. Наприклад, числа 1, 2, 3, 4 можна розмістити наступним чином: 3, 2, 4, 1 або 2, 4, 1, 3. *Перестановкою* із n елементів називається будь-яке розміщення чисел 1, 2, ..., n.

Позначимо $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (читається: "ен-факторіал").

Теорема 1. *Число всіх перестановок із n елементів дорівнює $n!$.*

Якщо у деякій перестановці поміняти місцями які-небудь два елементи, а всі інші залишити на місці, то ми одержимо, очевидно, нову перестановку. Таке перетворення перестановки називається *транспозицією.*

Теорема 2. *Усі $n!$ перестановок із n елементів можна розмістити в такому порядку, що кожна наступна буде одержуватися з попередньої однією транспозицією, причому починати можна з довільної перестановки.*

Наслідок 1. *Будь-яка перестановка з n елементів може бути одержана із довільної іншої перестановки з тих самих елементів за допомогою кількох транспозицій.*

Кажуть, що в даній перестановці числа i та j утворюють *інверсію*, якщо $i > j$, але i стоїть раніше j. Перестановка називається *парною*, якщо її елементи утворюють парне число інверсій, і *непарною* — в протилежному випадку. Очевидно, перестановка $1, 2, \dots, n$ є парною для довільного $n \in \mathbb{N}$ тому, що число інверсій в ній дорівнює нулю.

Теорема 3. *Усяка транспозиція змінює парність перестановки.*

Наслідок 2. *Для довільного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ число парних перестановок із n елементів дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Підстановкою степеня n називається бієктивне відображення множини $M = \{1, 2, \dots, n\}$ в себе. В розгорнутій і наочній формі підстановку $\sigma : M \to M$ зображають символом

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — довільна перестановка з n елементів. Очевидно, $(\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_n))$ також є перестановкою з n елементів. Підстановку σ можна зобразити різними способами вигляду (1), зокрема

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

де $j_k = \sigma(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4. *Число всіх підстановок степеня n дорівнює $n!$.*

Тотожньою (*одиничною*) *підстановкою* степеня n називається підстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

Теорема 5. *Нехай σ — довільна підстановка степеня n. У всіх записах підстановки σ у вигляді* (1) *або парності перестановок у першому та другому рядках співпадають, або вони різні.*

Підстановка степеня n називається *парною*, якщо у записі у вигляді (1) парності перестановок у першому та другому рядках співпадають, і *непарною* у протилежному випадку.

Теорема 6. *Для довільного $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ число парних підстановок степеня n дорівнює числу непарних, тобто дорівнює $\frac{n!}{2}$.*

Нехай σ, δ — довільні підстановки степеня n. Оскільки σ, δ — бієктивні відображення множини $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ в себе, то добуток відображень σ і δ є також бієктивним відображенням множини M в себе. А, отже, $\sigma\delta$ є підстановкою, яка називається *добутком підстановок σ і δ*. Якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix},$$

то

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_{j_1} & i_{j_2} & \ldots & i_{j_n} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через S_n множину всіх підстановок степеня n.

Теорема 7. *Для довільних підстановок σ, δ, $\mu \in S_n$ виконуються наступні властивості:*

1) $(\sigma\delta)\mu = \sigma(\delta\mu)$; 2) $e\sigma = \sigma e = \sigma$;

3) *існує підстановка σ^{-1} така, що $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$.*

Підстановка σ^{-1} називається *оберненою* до підстановки σ. Очевидно, якщо

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Підстановка, яка одержується із тотожньої підстановки шляхом однієї транспозиції в нижньому рядку, називається *транспозицією*.

Теорема 8. *Будь-яка підстановка δ є добутком кількох транспозицій, причому парність числа цих транспозицій співпадає з парністю підстановки δ.*

Наслідок 3. *Добуток двох підстановок з однаковою парністю є парною підстановкою, а добуток двох підстановок з різною парністю — непарною підстановкою.*

Нехай μ — підстановка степеня n і N_μ — підмножина множини $M = \{1, 2, \dots, n\}$, яка складається з усіх таких елементів $i \in M$, що $\mu(i) \neq i$. Підстановка μ називається *циклом*, якщо для довільних $i, j \in N_\mu$ існує таке натуральне число k, що $\mu^k(i) = j$. Число $t = |N_\mu|$ називається *довжиною* цикла μ. Цикл μ позначається символом $(i_1\ i_2\ \dots\ i_t)$, де i_1 — довільний елемент із N_μ, $i_q = \mu(i_{q-1})$ $(q = 2, 3, \dots, t)$.

Цикли μ, $\delta \in S_n$ називаються *незалежними*, якщо $N_\mu \cap N_\delta = \emptyset$.

Теорема 9. *Будь-яка підстановка однозначно з точністю до порядку множників представляється у вигляді добутку попарно незалежних циклів.*

Нехай k — число циклів у розкладі підстановки $\mu \in S_n$ у добуток незалежних циклів. *Декрементом* підстановки μ називається різниця $|N_\mu| - k$.

Теорема 10. *Парність підстановки співпадає з парністю декремента цієї підстановки.*

П р и к л а д и

1. Визначити число інверсій у перестановці

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n. \tag{2}$$

Розв'язання. Нехай

$$O = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ 2n-1\}, \quad E = \{2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n\}.$$

Очевидно, що жодні два елементи множини O у перестановці (2) не утворюють інверсії. Аналогічно не утворюють інверсії жодні два елементи множини E у цій перестановці. Тому для обчислення числа інверсій у перестановці (2) досить порахувати число інверсій, які утворюють кожен елемент множини O з кожним елементом множини E: 1 не утворює інверсію з жодним елементом множини E; 3 утворює інверсію тільки з елементом $2 \in E$; і так далі; $2n-1$ утворює інверсії з елементами $2,\ 4,\ 6,\ \ldots,\ 2n-2 \in E$. Отже, число інверсій у перестановці (2) дорівнює

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

2. Знайти добуток підстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розкласти в добуток незалежних циклів підстановку

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\begin{gathered} \delta(3) = 3, \quad \delta(5) = 5; \\ \delta(1) = 8, \quad \delta(8) = 2, \quad \delta(2) = 1; \\ \delta(4) = 6, \quad \delta(6) = 7, \quad \delta(7) = 4, \end{gathered}$$

то $\delta = (1\ 8\ 2)(4\ 6\ 7)$.

4. Знайти підстановку x, що задовольняє рівності

$$\alpha x \beta = \gamma, \tag{3}$$

де

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай x — підстановка, що задовольняє рівність (3). Із теореми 7 випливає, що існують обернені підстановки α^{-1} і β^{-1} відповідно до підстновок α і β. Тоді, помноживши рівність (3) зліва на α^{-1}, а потім отриману рівність справа на β^{-1}, одержимо, що $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$. Навпаки, очевидно, підстановка $x = \alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}$ задовольняє рівність (3). Тому

$$x = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вправи

1. Виписати транспозиції, за допомогою яких від перестановки 1, 2, 3, 4, 5 можна перейти до перестановки 2, 5, 3, 4, 1.

2. Довести, що будь-яку перестановку $i_1, i_2, \ldots, i_n$ можна отримати з довільної іншої перестановки $j_1, j_2, \ldots, j_n$ шляхом не більш як $n-1$ транспозицій.

3. Визначити парність перестановок:

а) 7, 5, 6, 4, 1, 3, 2; б) 1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8;

в) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$.

4. В якій перестановці чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ число інверсій найбільше і чому воно дорівнює?

5. Число інверсій у перестановці $i_1, i_2, \ldots, i_n$ дорівнює k. Чому дорівнює число інверсій у перестановці $i_n, i_{n-1}, \ldots, i_2, i_1$.

6. Довести, що для довільного цілого числа k $(0 \le k \le C_n^2)$ існує перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$, число інверсій в якій дорівнює k.

7. Знайти добутки підстановок:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

8. Розкласти в добуток незалежних циклів і визначити парність підстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$.

9. Виписати підстановки сьомого степеня, які розкладаються у добутки незалежних циклів:

а) $(1\ 5)(2\ 3\ 4)$; б) $(1\ 3)(2\ 5)(4\ 7)$; в) $(7\ 5\ 3\ 1)(2\ 4\ 6)$.

10. Виписати підстановку степеня $2n$, яка є циклом

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ \ldots\ \ 2n-1\ \ 2n).$$

11. Знайти добутки підстановок сьомого степеня:

а) $[(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6\ 7)] \cdot [(1\ 4\ 7)(2\ 3\ 5\ 6)]$;

б) $[(1\ 3)(5\ 7)(2\ 4\ 6)] \cdot [(1\ 3\ 5)(2\ 4)(6\ 7)]$.

12. Довести, що для довільного цикла $\delta \in S_n$ довжини k має місце рівність $\delta^k = e$ (e — тотожня підстановка із S_n).

13. Нехай $\delta \in S_n$ — цикл довжини k і l — натуральне число таке, що $\delta^l = e$. Довести, що l ділиться на k.

14. Нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати рівняння: а) $\alpha\beta x = \gamma$; б) $\beta = \gamma x \alpha$, де x — деяка невідома підстановка п'ятого степеня.

15. Довести, що будь-яка підстановка степеня n може бути представлена у вигляді добутку транспозицій вигляду:

а) $(1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n)$; б) $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n)$.

§6. Детермінанти n-го порядку. Властивості детермінантів

Аналогічно як у §4 позначимо через F одну із наступних множин: множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел, множину $\mathbb{R}$ дійсних чисел або множину $\mathbb{C}$ комплексних чисел. А елементи самої множини F будемо називати просто числами.

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини F

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях, тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \tag{2}$$

де індекси i_1, i_2, ..., i_n складають деяку перестановку із чисел 1, 2, 3, ..., n. Кількість таких добутків співпадає з кількістю всіх різних перестановок із n елементів, тобто $n!$.

Якщо тепер через σ позначити підстановку вигляду

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток (2) можна також записати у вигляді $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

Детермінантом n-го порядку матриці (1), називається алгебраїчна сума $n!$ *членів*, які є всілякими добутками елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця (тобто добутками вигляду (2)), причому кожен із цих членів береться із знаком плюс, якщо відповідна йому підстановка парна, і з знаком мінус — у протилежному випадку.

Якщо через A позначити матрицю (1), то детермінант матриці A будемо надалі позначати через

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Отже,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{4}$$

де, нагадаємо, S_n — множина всіх підстановок степеня n, $\mathrm{inv}(\sigma)$ — кількість інверсій у підстановці σ.

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

називається *транспонованою до матриці* (1). Позначатимемо матрицю транспоновану до матриці A через A^T. Інколи кажуть також, що матрицю A^T отримали із матриці A за допомогою *транспонування* матриці A.

Теорема 1. *Детермінант матриці A дорівнює детермінанту транспонованої до неї матриці A^T.*

Із теореми 1 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справедливе і для її стовпців і навпаки. Тому наступні теореми 2–9 будуть сформулювані тільки для рядків детермінанта. Зауважимо також, що під рядком або стовпцем детермінанта ми надалі розумітимемо відповідно рядок або стовпець матриці, детермінант якої обчислюємо.

Теорема 2. *Якщо один із рядків детермінанта складається з нулів, то детермінант дорівнює нулю.*

Теорема 3. *Якщо в детермінанті поміняти місцями два рядки, то він поміняє знак на протилежний.*

Теорема 4. *Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.*

Теорема 5. *Якщо всі елементи деякого рядка детермінанта помножити на число γ, то і сам детермінант помножиться на γ.*

Теорема 6. *Детермінант, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.*

Теорема 7. *Якщо всі елементи i-го рядка детермінанта n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

то детермінант дорівнює сумі детермінантів, у яких всі рядки, крім i-го, — ті ж самі, як і в даному детермінанті, а i-ий рядок в одному із цих детермінантів складається з елементів b_j, а в іншому — із елементів c_j.

Користуючись методом математичної індукції, можна узагальнити теорему 7 на випадок, коли кожний елемент i-го рядка представляється у вигляді суми k доданків, де $k \geq 2$.

Будемо говорити, що i-ий рядок детермінанта (3) є *лінійною комбінацією* рядків з номерами $k_1, \ldots, k_s$, якщо існують такі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, що

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{k_1 j} + \cdots + \alpha_s a_{k_s j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 8. *Якщо один із рядків детермінанта є лінійною комбінацією деяких інших рядків, то детермінант дорівнює нулю.*

Теорема 9. *Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.*

П р и к л а д и

1. Обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За означенням детермінанта

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5;$

б) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

2. Підібрати значення i та k так, щоб добуток $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{54}$ входив у детермінант п'ятого порядку з додатним знаком.

Розв'язання. Для того, що вказаний добуток входив в детермінант необхідно, щоб $(i,k) = (1,4)$ або $(i,k) = (4,1)$. Випишемо підстановку, складену з індексів співмножників у першому випадку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки загальна кількість інверсій в обох рядках підстановки дорівнює $2+2=4$, то ця підстановка парна, а, отже, за означенням детермінанта добуток $a_{11}a_{32}a_{44}a_{25}a_{54}$ входить у детермінант п'ятого порядку з додатним знаком.

3. Користуючись означенням детермінанта, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Розв'язання. Очевидно, якщо одним із співмножників добутку, що входить у детермінант Δ, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток $d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, що входить у детермінант Δ, де $a_{ij}=0$ при $i>j$. Якщо $i_n \neq n$, тоді $a_{n\,i_n}=0$, а, отже, $d=0$. Нехай $i_n=n$. Далі, якщо $i_{n-1}\neq n-1$, тоді $i_{n-1}<n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}}=0$. Отже, $d=0$. Нехай $i_{n-1}=n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки i_1, i_2, $\ldots i_n$ відмінної від перестановки 1, 2, $\ldots$, n справедлива рівність $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=0$. Оскільки перестановка 1, 2, $\ldots$, n — парна, то $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

4. Нехай A — *кососиметрична* матриця порядку n, тобто матриця, елементи a_{ij} якої задовольняють умовам $a_{ij}+a_{ji}=0$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$. Довести, якщо n — непарне число, то $|A|=0$.

Розв'язання. Матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо помножити кожен рядок матриці A на -1, тоді в результаті отримаємо матрицю A^T транспоновану до матриці A. Із теореми 5 випливає, що $|A^T|=(-1)^n|A|$. З іншого боку із теореми 1 слідує, що

$|A^T| = |A|$. Отже $|A| = (-1)^n|A|$. Тому, якщо n — непарне число, то $|A| = -|A|$. Звідси $|A| = 0$.

Вправи

1. Виявити, які з наведених нижче добутків входять у детермінанти відповідних порядків і з якими знаками:

а) $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$; б) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$;

в) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{kk}$ $(1 \le k \le n)$; г) $a_{12}a_{23}a_{34}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

2. Вибрати значення i, j, k так, щоб добуток $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$ входив у детермінант шостого порядку з від'ємним знаком.

3. Знайти всі члени детермінанта четвертого порядку, які містять елемент a_{32} і входять у детермінант із від'ємним знаком.

4. Знайти всі члени детермінанта

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

що містять а) x^4 і x^2; б) x^3 і x.

5. Користуючись означенням детермінанта, обчислити детермінанти:

а) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 & a \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & a_1 \\ 1 & -\lambda & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -\lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda + a_4 \end{vmatrix}$.

6. Як зміниться детермінант, якщо:

а) його перший стовпець поставити на останнє місце, а всі інші стовпці зсунути вліво, зберігаючи їхнє взаємне розташування;

б) його рядки записати в зворотньому порядку?

7. Як зміниться детермінант, якщо:

а) до кожного його стовпця, починаючи з другого, додати попередній;

б) до кожного його рядка, починаючи з другого, додати всі попередні рядки?

8. Нехай $\Delta = |a_{jk}|$ $(a_{jk} \in \mathbb{C})$ — детермінант порядку n з елементами, що задовольняють умовам: 1) $a_{jk} \in \mathbb{R}$ при $j > k$; 2) $a_{kj} = ia_{jk}$ при $j \geq k$ (i — уявна одиниця). При яких значеннях n детермінант Δ є дійсним числом?

9. Як зміниться детермінант, якщо кожний його елемент a_{jk} помножити на c^{j-k}, де $c \neq 0$?

10. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 і 289 діляться на 17. Довести, що детермінант

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

ділиться на 17.

11. Чому дорівнює детермінант, у якого сума рядків з парними номерами дорівнює сумі рядків з непарними номерами?

12. Довести, що

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

13. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} a_1+x & x & \dots & x \\ x & a_2+x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & a_n+x \end{vmatrix}.$$

§7. Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Обчислення детермінантів

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай i_1, i_2, $\ldots$, i_k та j_1, j_2, $\ldots$, j_k — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1), впорядковані по зростанню, тобто

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

називається *мінором k-го порядку* розміщеним в рядках з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, $\ldots$, j_k або мінором, що знаходиться на перетині вказаних рядків та стовпців. Інколи кажуть, що мінор (2) отримали з детермінанта (1) шляхом закреслювання рядків з номерами відмінними від i_1, i_2,$\ldots$, i_k та стовпців з номерами відмінними від j_1, j_2, $\ldots$, j_k. Далі, нехай M' — мінор детермінанта Δ, отриманий за допомогою закреслювання рядків з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та стовпців з номерами j_1, j_2, $\ldots$, j_k. Мінор M' називається *доповнюючим мінором* до мінора M. Очевидно, мінор M є доповнюючим до мінора M'.

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та j_1, j_2, $\ldots$, j_k, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Число $(-1)^{s_M} M'$ називається *алгебраїчним доповненням* до мінора M.

Теорема 1. *Добуток довільного мінора M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою, доданки якої, що одержуються в результаті множення членів мінора M на взяті із знаком $(-1)^{s_M}$ члени доповнюючого мінора M', є членами детермінанта Δ і з тими ж знаками з якими ці члени входять у детермінант Δ.*

Теорема 2 (Лаплас). *Нехай в детермінанті порядку n довільно вибрані k рядків (або k стовпців), $1 \le k \le n-1$. Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів k-го порядку, що розміщені в цих рядках (стовпцях), на їх алгебраїчні доповнення.*

Наслідок 1. *Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Тобто, якщо Δ — деякий детермінант n-го порядку (див. (1)), а M_{ij} — доповнюючий мінор до елемента a_{ij} цього детермінанта, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in}. \qquad (3)$$

Формула (3) називається *розкладом детермінанта Δ по i-му рядку.*

Наслідок 2. *Сума добутків всіх елементів довільного рядка детермінанта на відповідні алгебраїчні доповнення до іншого рядка дорівнює нулю, тобто*

$$a_{i1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{i2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{in}(-1)^{k+n}M_{kn} = 0 \quad (i \ne k).$$

П р и к л а д и

1. Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант по третьому стовпцю. Так як два елементи цього стовпця дорівнюють нулю матимемо

$$\Delta = (-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Обчислюючи вказані вище детермінанти третього порядку, отримаємо

$$\Delta = 2 \cdot 49 + 7 \cdot 10 = 168.$$

2. Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках. Всі інші мінори другого порядку в цих рядках дорівнюють нулю, оскільки містять нульовий стовпець.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$\Delta = \sum_{k=1}^{3} M_k \cdot (-1)^{s_{M_k}} M_k' = 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$

3. Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання Додамо до другого, третього і четвертого рядків детермінанта Δ перший рядок помножений відповідно на 3, -1, 2. Тоді, згідно з теоремою 9 §6, детермінант Δ не зміниться. Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix}.$$

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3. А потім поміняємо місцями другий та четвертий рядки. Тоді із теореми 3 §6 випливає, що

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}.$$

Далі, легко видно (див. приклад 3 на стор. 42), що

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{301}{83} \end{vmatrix} = 301.$$

В п р а в и

Обчислити детермінанти:

1. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **6.** $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$ **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$ **9.** $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$ **11.** $\begin{vmatrix} 2 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$ **12.** $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$ **14.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$ **15.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \sin\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}.$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$ **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$ **19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}.$

20. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$ **21.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}.$

22. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$ **23.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & \dots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$

§8. Правило Крамера

Нехай $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Розглянемо довільну систему лінійних рівнянь з коефіцієнтами з множини F, в якій число рівнянь n дорівнює числу невідомих, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Детермінант матриці цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

будемо називати *детермінантом системи* (1).

Далі, розглянемо детермінанти порядку n вигляду

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

які одержуються із детермінанта Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи (1).

Теорема 1. *Нехай γ_1, γ_2, ..., γ_n — розв'язок системи* (1). *Тоді* $\Delta\gamma_j = \Delta_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$.

Теорема 2 (Крамер). *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих відмінний від нуля, тоді ця система є визначеною. Причому, якщо Δ_j — детермінант, одержаний із Δ шляхом заміни j-го стовпця $(j = 1, 2, \dots, n)$ стовпцем вільних членів системи рівнянь, то система чисел*

$$\gamma_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \dots, \quad \gamma_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

є розв'язком цієї системи лінійних рівнянь.

Наслідок 1. *Якщо система n лінійних рівнянь від n невідомих є несумісною або невизначеною, тоді детермінант цієї системи дорівнює нулю.*

Наслідок 2. *Якщо детермінант Δ системи n лінійних рівнянь від n невідомих дорівнює нулю і хоча б один із детермінантів, одержаних із Δ шляхом заміни його j-го стовпця стовпцем вільних членів системи, не дорівнює нулю, тоді ця система лінійних рівнянь є несумісною.*

П р и к л а д и

1. Розв'язати наступну систему лінійних рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то за теоремою Крамера дана в умові система рівнянь є визначеною і ми можемо обчислити її розв'язок за правилом Крамера. Для цього обчислимо наступні детермінанти

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & -1 \\ 11 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -94, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & -1 \\ 6 & 11 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -47,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 11 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 141.$$

Таким чином,

$$x_1 = \tfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \tfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \tfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \tfrac{\Delta_1}{\Delta} = -3$$

є розв'язком даної системи.

2. Визначити, при яких значеннях параметра λ вказана нище система рівнянь є несумісною:

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \qquad\quad 3x_3 = \ \ 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + (\lambda - 10)x_3 = -2, \\ 4x_1 + \lambda x_2 + \qquad\quad\ \ x_3 = \ \ 1. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & \lambda - 10 \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 25\lambda + 93.$$

Із наслідку 1 випливає, що для того, щоб система рівнянь (4) була несумісною, необхідно, щоб $\Delta = 0$. Розв'язавши квадратне рівняння $-2\lambda^2 + 25\lambda + 93$, одержимо, що $\Delta = 0$ при значеннях параметра $\lambda = -3$ або $\lambda = \frac{31}{2}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda = \frac{31}{2}$. Обчислимо детермінант

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & \frac{31}{2} - 10 \\ 1 & \frac{31}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{703}{4}.$$

Оскільки він відмінний від нуля, то із наслідку 2 випливає, що при $\lambda = \frac{31}{2}$ система рівнянь (4) є несумісною.

Якщо ж $\lambda = -3$, тоді можна показати, що всі три детермінанти, які одержуються з детермінанта системи рівнянь (4) заміною відповідно першого, другого, третього стовпців стовпцем вільних членів системи рівнянь, дорівнюють нулю. Тому у цьому випадку для визначення чи є система рівнянь (4) сумісною, розв'яжемо її методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -13 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{35}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси та з теореми 2 §4 випливає, що при $\lambda = -3$ система рівнянь (4) є сумісною.

Таким чином система рівнянь (4) є несумісною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = -\frac{31}{2}$.

В п р а в и

Наступні системи рівнянь розв'язати за правилом Крамера:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 5y + 3z + t - 5 = 0, \\ 3x - 7y + 6z - t + 1 = 0, \\ 5x - 9y + 3z + 4t - 7 = 0, \\ 4x - 6y + 3z + t - 8 = 0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0, \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0, \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$

9. Перевірити, що система чисел 1, 1, 1, 1 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0, \end{cases}$$

і обчислити детермінант цієї системи.

10. Розв'язати систему рівнянь від невідомих x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_1^2 x_3 = \beta_1, \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_2^2 x_3 = \beta_2, \\ x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_3^2 x_3 = \beta_3, \end{cases}$$

де α_1, α_2, α_3 — попарно різні дійсні числа; $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$.

§9. Дії над матрицями. Обернена матриця

Нехай $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$; $F_{m\times n}$ — множина всіх $m \times n$-матриць з елементами з множини F, де m і n — довільні натуральні числа. Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in F_{m\times n}$$

надалі позначатимемо символом $\|a_{ij}\|_{m\times n}$ або коротко $\|a_{ij}\|$, якщо зрозуміло із контексту, про матрицю яких розмірів йде мова.

Матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із $F_{m\times n}$ називаються *рівними*, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Сумою матриць $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ із $F_{m\times n}$ називається така матриця $C = \|c_{ij}\| \in F_{m\times n}$, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n).$$

Суму C матриць A і B позначають через $A + B$.

Добутком числа $\gamma \in F$ *на матрицю* $A = \|a_{ij}\| \in F_{m\times n}$ називається така матриця $D = \|d_{ij}\| \in F_{m\times n}$, що

$$d_{ij} = \gamma a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n).$$

Добуток D числа γ на матрицю A позначають γA.

Теорема 1. *Для довільних елементів α, $\beta \in F$ та матриць A, B, $C \in F_{m\times n}$ справедливі наступні рівності:*

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2) $A + B = B + A$;
3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
6) $1 \cdot A = A$.

Матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$ називається *нульовою* матрицею, якщо для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ справедлива рівність $\mathbf{0} + A = A$.

Теорема 2. *Існує єдина нульова матриця $\mathbf{0} \in F_{m\times n}$, причому, всі елементи матриці $\mathbf{0}$ є нулями.*

Матриця $-A$ називається *протилежною* до матриці A, якщо $-A + A = \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Для довільної матриці $A \in F_{m\times n}$ існує єдина протилежна матриця $-A$, причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$, то $-A = \|-a_{ij}\|$.*

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — довільна $m \times n$-матриця, $B = \|b_{ij}\|$ — довільна $n \times r$-матриця (m, n, $r \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_{ij} \in F$). *Добутком матриці A на матрицю B* називається така $m \times r$-матриця $C = \|c_{ij}\|$, що

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, r).$$

Добуток C матриці A на матрицю B позначають через AB.

***Зауваження* 1.** Звертаємо увагу читача, що добуток матриці A на матрицю B визначений лише у випадку, коли число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Тому, навіть якщо добуток матриці A на матрицю B визначений, добуток матриці B на матрицю A може бути не визначеним.

Теорема 4. *Для довільних матриць $A, A' \in F_{m\times n}$, $B, B' \in F_{n\times r}$, $C \in F_{r\times s}$ та довільного числа $\gamma \in F$ справедливі наступні рівності:*

1) $(AB)C = A(BC)$;
2) $A(B + B') = AB + AB'$;
3) $(A + A')B = AB + A'B$;
4) $(\gamma A)B = A(\gamma B) = \gamma(AB)$.

***Зауваження* 2.** Якщо $n \geq 2$, то існують матриці A, $B \in F_{n\times n}$ такі, що $AB \neq BA$. Наприклад, у випадку $n = 2$ можна покласти

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця $E \in F_{n\times n}$ називається *одиничною матрицею порядку* n, якщо для довільної матриці $A \in F_{n\times n}$ справедливі рівності $EA = AE = A$.

Теорема 5. *Існує єдина одинична матриця E порядку n, причому,*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. *Детермінант добутку матриць порядку n дорівнює добутку детермінантів цих матриць.*

Матриця порядку n називається *невиродженою*, якщо детермінант її не дорівнює нулю.

Теорема 7. *Добуток матриць порядку n є невиродженою матрицею тоді і тільки тоді, коли кожна із перемножуваних матриць є невиродженою.*

Матриця $B \in F_{n\times n}$ називається *лівою оберненою* (*правою оберненою*) до матриці $A \in F_{n\times n}$, якщо $BA = E$ ($AB = E$) (E — одинична матриця порядку n).

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці $A \in F_{n\times n}$, якщо вона одночасно є лівою і правою оберненою до матриці A. Якщо для матриці $A \in F_{n\times n}$ існує обернена, то кажуть, що A — *оборотна* матриця.

Теорема 8. *Матриця порядку n є оборотною тоді і тільки тоді, коли вона є невиродженою. Причому, якщо $A = \|a_{ij}\|$ — оборотна матриця порядку n, то існує лише одна обернена до неї матриця, що дорівнює матриці*

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A.

Наслідок 1. *Якщо для матриці A порядку n існує права (ліва) обернена матриця, тоді існує і ліва (права) обернена матриця до матриці A, а отже, матриця A є оборотною матрицею.*

Теорема 9. *Для довільних оборотних матриць A і B порядку n справедливі наступні рівності:*

1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;
2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) $(A^{-1})^{-1} = A$;
4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

П р и к л а д и

1. Знайти добуток матриці A на матрицю B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити $AB - BA$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -7 \\ 6 & 14 & 4 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти всі матриці, які комутують з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Потрібно знайти всі такі матриці X, що $AX = XA$. Із означення добутку матриць випливає, що X має бути квадратною матрицею другого порядку. Нехай

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді умова $AX = XA$ набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x_3 & x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 + x_2 \\ x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Із означення рівності матриць та із (1) випливає, що

$$\begin{cases} x_3 = x_2, \\ x_4 = x_1 + x_2, \\ x_1 + x_3 = x_4, \\ x_2 + x_4 = x_3 + x_4. \end{cases}$$

Таким чином елементи x_1, x_2, x_3, x_4 матриці X утворюють систему чисел, яка є розв'язком системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

І навпаки, кожен розв'язок цієї системи визначає матрицю другого порядку, що комутує з матрицею A.

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь методом Гаусса, одержимо, що $(b - a,\, a,\, a,\, b)$ є її загальним розв'язком $(a, b \in \mathbb{R})$.

Отже, кожна матриця наступного вигляду і тільки такого вигляду

$$X = \begin{pmatrix} b - a & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

при довільних дійсних значення a та b, буде комутувати з матрицею A.

4. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку детермінант матриці A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким чином матриця A є невиродженою і за теоремою 8 існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її. Для цього обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} до елементів матриці A, що знаходяться на перетині i-го рядка та j-го стовпця $(i, j = 1, 2, 3)$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді

$$A^{-1} = |A|^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу на цей раз для відшукання оберненої матриці скористаємось її означенням. Нехай матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}$$

є оберненою матрицею до матриці A, тобто $AX = E$ та $XA = E$, де E — одинична матриця четвертого порядку. Із першої рівності одержимо

$$\begin{cases} 2x_{1i} + x_{2i} = \delta_{1i}, \\ 3x_{1i} + 2x_{2i} = \delta_{2i}, \\ x_{1i} + x_{2i} + 3x_{3i} + 4x_{4i} = \delta_{3i}, \\ 2x_{1i} - x_{2i} + 2x_{3i} + 3x_{4i} = \delta_{4i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

де δ_{kl} — символ Кронекера, тобто

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = l; \\ 0, & \text{якщо } k \neq l. \end{cases}$$

Таким чином i-й стовпець матриці X є розв'язком системи лінійних рівнянь, матриця якої співпадає з матрицею A, а стовпець вільних членів — з i-им стовпцем одиничної матриці E $(i = 1, 2, 3, 4)$. Розв'яжемо ці системи методом Гаусса. Оскільки матриці у цих систем співпадають, то розв'язуватимемо їх одночасно:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -8 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -12 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 19 & -3 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -8 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -23 & 14 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&3&0&92&-56&9&-12\\ 0&1&6&0&183&-112&18&-24\\ 0&0&1&0&31&-19&3&-4\\ 0&0&0&1&-23&14&-2&3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-3&2&0&0\\ 0&0&1&0&31&-19&3&-4\\ 0&0&0&1&-23&14&-2&3 \end{array}\right).$$

Таким чином, звідси та із наслідку 1 одержуємо, що

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 2&-1&0&0\\ -3&2&0&0\\ 31&-19&3&-4\\ -23&14&-2&3 \end{pmatrix}.$$

В п р а в и

Обчислити добутки матриць:

1. $\begin{pmatrix} 3&-2\\ 5&-4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3&4\\ 2&5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} a&b\\ c&d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha&\beta\\ \gamma&\delta \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2&-3\\ 4&-6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 9&-6\\ 6&-4 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 4&3\\ 7&5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -8&13\\ 3&-16 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7&3\\ 2&1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1&-3&2\\ 3&-4&1\\ 2&-5&3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2&5&6\\ 1&2&5\\ 1&3&2 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 5&8&-4\\ 6&9&-5\\ 4&7&-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3&2&5\\ 4&-1&3\\ 9&6&5 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 4&-1\\ 5&-2 \end{pmatrix}^5$. **8.** $\begin{pmatrix} 2&-1\\ 3&-2 \end{pmatrix}^n$. $\begin{pmatrix} \cos\alpha&-\sin\alpha\\ \sin\alpha&\cos\alpha \end{pmatrix}^n$.

9. $\begin{pmatrix} 1&1\\ 0&1 \end{pmatrix}^n$. **10.** $\begin{pmatrix} \lambda&1\\ 0&\lambda \end{pmatrix}^n$. **11.** $\begin{pmatrix} 1&1&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}^n$.

12. Як зміниться добуток AB матриць A і B, якщо:

а) поміняти місцями i-ий та j-ий рядки матриці A;

б) до i-го рядка матриці A додати її j-ий рядок, помножений на число α;

а) поміняти місцями i-ий та j-ий стовпці матриці B;

б) до i-го стовпця матриці B додати її j-ий стовпець, помножений на число α.

13. *Слідом* квадратної матриці називається сума її елементів, що знаходяться на головній діагоналі. Довести, що слід добутку AB дорівнює сліду добутку BA.

14. Довести, що для будь-яких квадратних матриць A і B порядку n, $AB - BA \neq E$, де E — одинична матриця порядку n.

15. Нехай A і B — матриці одного й того ж порядку. Довести, що $AB = BA$ тоді і тільки тоді, коли справедлива одна із наступних рівностей:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

16. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Довести, що

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = \mathbf{0},$$

де E, $\mathbf{0}$ — відповідно одинична та нульова матриці другого порядку.

17. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці.

18. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці.

19. Знайти всі матриці, що комутують з матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Знайти обернені матриці до наступних матриць:

20. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

25. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

§10. n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність векторів

Будь-яка система, тобто впорядкована сукупність, n дійсних чисел називається *n-вимірним вектором над множиною* $\mathbb{R}$. n-вимірний вектор над $\mathbb{R}$, утворений числами α_1, α_2, ..., α_n із $\mathbb{R}$, будемо позначати через $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і називати α_1 — *першою компонентою*, α_2 — *другою компонентою* і т.д., α_n — *n-ою компонентою* цього вектора. Два n-вимірні вектори над $\mathbb{R}$ називаються *рівними*, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів. Позначимо через $\mathbb{R}^n$ — множину всіх n-вимірних векторів над $\mathbb{R}$.

Сумою векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ із $\mathbb{R}^n$ називається вектор

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \dots, \gamma\alpha_n).$$

Теорема 1. *Для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справедливі наступні рівності:*

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
6) $1 \cdot a = a$.

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається *нульовим* вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справедлива рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2. *Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.*

Вектор $-a$ називається *протилежним* до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3. *Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$.*

Теорема 4. *Нехай α — довільне дійсне число, a — довільний n-вимірний вектор. Рівність $\alpha a = \bar{0}$ має місце тоді і тільки тоді, коли або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$.*

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх n-вимірних векторів над $\mathbb{R}$, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор, називається *дійсним n-вимірним векторним простором.*

Аналогічно визначається *раціональний n-вимірний векторний простір $\mathbb{Q}^n$* та *комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$.*

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається *пропорційним* вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійною комбінацією* векторів $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається *лінійно незалежною*, якщо вона не є лінійно залежною.

Теорема 5. *Система n-вимірних векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших векторів системи.*

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, де $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$ називається *підсистемою* системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Теорема 6. *Якщо деяка підсистема системи n-вимірних векторів є лінійно залежною, тоді і вся система є лінійно залежною. Якщо система n-вимірних векторів є лінійно незалежною, тоді будь-яка її підсистема є лінійно незалежною.*

Система n-вимірних векторів називається *базисом* n-вимірного векторного простору, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Теорема 7. *Система n-вимірних векторів*

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1) \quad (1)$$

є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Базис (1) n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається *канонічним базисом.*

Теорема 8. *Для довільної системи n-вимірних векторів $a_1, \dots,$ a_s справедливе лише одне із наступних тверджень:*

1) *система векторів $a_1, \dots, a_s$ є лінійно залежною;*
2) *система векторів $a_1, \dots, a_s$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$;*
3) *існує вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такий, що система векторів $a_1, \dots, a_s, b$ є лінійно незалежною.*

Теорема 9. *Будь-яка система із s n-вимірних векторів при $s > n$ є лінійно залежною.*

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Дві системи векторів n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називаються *еквівалентними*, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

Теорема 10. *Якщо система векторів $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \dots, b_s \in \mathbb{R}^n$, яка в свою чергу лінійно виражається через систему векторів $c_1, c_2, \dots$ $\dots, c_t \in \mathbb{R}^n$, тоді система векторів $a_1, a_2, \dots, a_r$ лінійно виражається через систему векторів $c_1, c_2, \dots, c_t$.*

Теорема 11. *Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ — дві системи n-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто $r \leq s$.*

Наслідок 1. *Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні системи векторів складаються із однакового числа векторів.*

Наслідок 2. *Будь-який базис n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ складається з n векторів.*

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1,$ $a_2, \dots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Теорема 12. *Будь-які два базиси системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.*

Число векторів базиса системи векторів називається *рангом* цієї системи.

Теорема 13. *Нехай a_1, $a_2, \ldots$, a_r та b_1, b_2, $\ldots$, b_s — дві системи n-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу k, а другої — числу l. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, тоді $k \le l$. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді $k = l$.*

П р и к л а д и

1. Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2, -3, 1),\ a_2 = (3, -1, 5),\ a_3 = (1, -4, 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — довільні дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3, -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3, \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли справедливі рівності

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0, \\ -3\gamma_1 & - & \gamma_2 & - & 4\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & + & 5\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0, \end{array}$$

тобто система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система лінійних однорідних рівнянь з матрицею, стовпці якої співпадають відповідно з векторами a_1, a_2, a_3, має ненульовий розв'язок. Розв'яжемо цю систему:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, система має лише нульовий розв'язок, а тому задана в умові система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною.

2. Довести, що система векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки для ненульових чисел 1, -1

лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору, тобто $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$.

Тоді із теореми 6 випливає, що і вся, вказана в умові система векторів, є лінійно залежною.

3. Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Легко бачити, що вектор a_3 пропорційний вектору a_1 ($a_3 = 3a_1$). Аналогічно попередньому прикладу можна показати, що у цьому випадку система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.

Розглянемо підсистему векторів a_1, a_2. Очевидно, лінійна комбінація цих векторів

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Отже, підсистема векторів a_1, a_2 є лінійно незалежною. Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$
$$a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$
$$a_3 = 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3.$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.

Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3 та a_2, a_3. Перша, очевидно, є лінійно залежною. А друга, як неважко показати, є базисом.

В п р а в и

1. Знайти лінійну комбінацію $3a_1 + 5a_2 - a_3$ векторів

$$a_1 = (4, 1, 3, -2), a_2 = (1, 2, -3, 2), a_3 = (16, 9, 1, -3).$$

2. Знайти вектори x та y із рівнянь:

а) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = \bar{0}$, б) $3(a_1 - y) + 2(a_2 + y) = 4(a_3 - y)$,
де $a_1 = (5, -8, -1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 4, -3)$, $a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

Визначити, чи є лінійно залежними наступні системи векторів:

3. $a_1 = (5, 4, 3)$, $a_2 = (3, 3, 2)$, $a_3 = (8, 1, 3)$.

4. $b_1 = (2, -4, 1)$, $b_2 = (0, 5, -6)$, $b_3 = (1, -2, 4)$.

5. $c_1 = (4, -5, 2, 6)$,
$c_2 = (2, -2, 1, 3)$,
$c_3 = (6, -3, 3, 9)$,
$c_4 = (4, -1, 5, 6)$.

6. $d_1 = (1, \ \ 0, 0, \ \ 2, \ \ 5)$,
$d_2 = (0, \ \ 1, 0, \ \ 3, \ \ 4)$,
$d_3 = (0, \ \ 0, 1, \ \ 4, \ \ 7)$,
$d_4 = (2, -3, 4, 11, 12)$.

7. Довести, що система векторів, яка містить два пропорційні вектори, є лінійно залежною.

8. Довести, що система векторів, яка містить нульовий вектор, лінійно залежна.

9. Довести, якщо система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною і вектор a_3 не є лінійною комбінацією векторів a_1, a_2, то або вектор a_1 пропорційний вектору a_2, або, навпаки, вектор a_2 пропорційний вектору a_1.

10. Нехай a_1, a_2, $\ldots a_s$ — система n-вимірних векторів рангу k. Довести, що будь-яка її лінійно незалежна підсистема, яка складається із k векторів є її базисом.

11. Довести, що будь-яку лінійно незалежну підсистему, заданої системи векторів, можна доповнити до базиса цієї системи.

12. В якому випадку система векторів має єдиний базис?

13. Чи будуть еквівалентними дві системи векторів, якщо вони мають однаковий ранг?

14. Нехай $a_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$, $a_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$, $a_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$, $a_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$, $a_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$. Чи можна підібрати числа γ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$ так, щоб система векторів

$$b_1 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{1k} a_k, \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{2k} a_k, \qquad \ldots, \qquad b_5 = \sum_{k=1}^{5} \gamma_{5k} a_k$$

була б лінійно незалежною?

Знайти всі значення параметра λ, при яких вектор b лінійно виражається через вектори a_1, a_2, a_3, якщо:

15.
$$\begin{aligned} a_1 &= (2,\ \ 3,\ \ 5), \\ a_2 &= (3,\ \ 7,\ \ 8), \\ a_3 &= (1,\ -6,\ \ 1), \\ b &= (7,\ -2,\ \ \lambda). \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} a_1 &= (4,\ 4,\ 3), \\ a_2 &= (7,\ 2,\ 1), \\ a_3 &= (4,\ 1,\ 6), \\ b &= (5,\ 9,\ \lambda). \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} a_1 &= (3,\ 2,\ 5), \\ a_2 &= (2,\ 4,\ 7), \\ a_3 &= (5,\ 6,\ \lambda), \\ b &= (1,\ 3,\ 5). \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} a_1 &= (3,\ 2,\ 6), \\ a_2 &= (7,\ 3,\ 9), \\ a_3 &= (5,\ 1,\ 3), \\ b &= (\lambda,\ 2,\ 5). \end{aligned}$$

Знайти всі базиси наступних систем векторів:

19.
$$\begin{aligned} a_1 &= (1,\ 2,\ 3,\ 4), \\ a_2 &= (2,\ 3,\ 4,\ 5), \\ a_3 &= (3,\ 4,\ 5,\ 6), \\ a_4 &= (4,\ 5,\ 6,\ 7). \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} a_1 &= (1,\ 2,\ 3), \\ a_2 &= (2,\ 3,\ 4), \\ a_3 &= (3,\ 2,\ 3), \\ a_4 &= (4,\ 3,\ 4), \\ a_5 &= (1,\ 1,\ 1). \end{aligned}$$

21. Скільки базисів має система із $k+1$ векторів рангу k, що містить пропорційні вектори, відмінні від нульового вектора?

§11. Ранг матриці

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1t} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{s1} & \alpha_{s2} & \cdots & \alpha_{st} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

— довільна $s \times t$-матриця з елементами із множини $\mathbb{R}$ дійсних чисел, де s і t — довільні натуральні числа. Тоді на стовпці цієї матриці можна дивитися як на s-вимірні вектори, а на її рядки — як на t-вимірні вектори. Розглянемо систему векторів-стовпців матриці A:

$$c_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots, \alpha_{s1}), \quad \ldots, \quad c_t = (\alpha_{1t}, \alpha_{2t} \ldots, \alpha_{st}).$$

Рангом матриці A називається ранг системи її векторів-стовпців. Ранг матриці A будемо позначати через $\operatorname{rank} A$.

Теорема 1. *Якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулю, тоді рівні нулю і всі мінори порядків більших ніж k.*

Нехай M — довільний мінор матриці A, що знаходиться в рядках з номерами $i_1, \ldots, i_k$ та стовпцях з номерами $j_1, \ldots, j_k$. Кажуть, що мінор M' матриці A, який знаходиться в рядках з номерами $i'_1, \ldots$ $\ldots, i'_l$ та стовпцях з номерами $j'_1, \ldots, j'_l$, є *обвідним мінором* для мінора M, якщо

$$\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{i'_1, \ldots, i'_l\}, \qquad \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{j'_1, \ldots, j'_l\}.$$

Теорема 2. *Нехай M — ненульовий мінор k-го порядку матриці A, причому всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку мінора M дорівнюють нулю. Тоді* $\operatorname{rank} A = k$.

Теорема 3. *Ранг ненульової матриці A дорівнює натуральному числу найбільшому серед порядків відмінних від нуля мінорів матриці A.*

Наслідок 1. *Детермінант n-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його стовпці утворюють лінійно залежну систему векторів.*

Теорема 4. *Ранг системи векторів-рядків матриці A дорівнює рангу системи її векторів-стовпців, тобто дорівнює рангу матриці A.*

Будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (I), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го та j-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий та j-ий рядки (стовпці) помінялися місцями. Якщо в матриці B всі рядки (стовпці), крім i-го, ті ж самі, що і в матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є сумою i-го рядка (стовпця) матриці A та деякого її іншого рядка (стовпця) помноженого на довільне дійсне число, то будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (II). Нарешті, будемо говорити, що матриця B отримана із матриці A за допомогою *елементарного перетворення типу* (III), якщо всі рядки (стовпці) матриці B, крім i-го, такі ж як відповідні рядки (стовпці) матриці A, а i-ий рядок (стовпець) матриці B є добутком довільного ненульового дійсного числа на i-ий рядок (стовпець) матриці A.

Матриця B називається *еквівалентною* матриці A, якщо її можна одержати із матриці A шляхом скінченного числа елементарних перетворень над рядками або стовпцями матриці A. Якщо матриці A і B еквівалентні, то писатимемо $A \sim B$.

Теорема 5. *Будь-яка $s\times t$-матриця A рангу r еквівалентна матриці східчастого вигляду, що містить точно r ненульових рядків, тобто матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1j_1} & \dots & b_{1j_2-1} & b_{1j_2} & \dots & b_{1j_r-1} & b_{1j_r} & \dots & b_{1t} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2j_2} & \dots & b_{2j_r-1} & b_{2j_r} & \dots & b_{2t} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{rj_r} & \dots & b_{rt} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де $1 \le j_1 < j_2 \ldots < j_r \le t$, b_{kj_k} *— ненульове число* $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

***Зауваження* 1.** Будь-яку $s \times t$-матрицю можна привести до матриці східчастого вигляду (2) за допомогою скінченного числа елементарних перетворень типу (I) або (II) тільки над рядками матриць.

Кажуть, що $s \times t$-матриця A (див. (1)) має *діагональну форму*, якщо для довільних $i \in \{1, \ldots, s\}$ та $j \in \{1, \ldots, t\}$ елемент a_{ij} дорівнює нулю при $i \neq j$. Позначатимемо матрицю A діагональної форми через $\mathrm{diag}[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{qq}]_{s\times t}$ (q — мінімальне із чисел s і t).

Теорема 6. *Довільна $s \times t$-матриця рангу r еквівалентна матриці діагональної форми вигляду*

$$\mathrm{diag}[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0]_{s\times t}.$$

Теорема 7. *Ранг добутку матриць A і B не перевищує рангу кожної із матриць A і B, тобто*

$$\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} B.$$

Теорема 8. *Нехай A — довільна $s\times t$-матриця; B, C — довільні оборотні матриці відповідно порядків s і t. Тоді*

$$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank} AC = \operatorname{rank} A.$$

П р и к л а д и

1. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку цієї матриці, дорівнює нулю. Однак в матриці A містяться мінори другого порядку відмінні від нуля, наприклад

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Мінор третього порядку

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

що є обвідним мінором для мінора δ_2, також не дорівнює нулю (переконайтесь, що $\delta_3 = 1$). Але обидва мінора четвертого порядку, що є обвідними мінорами для мінора δ_3, дорівнюють нулю:

$$\delta_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_4'' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює трьом.

2. Користуючись елементарними перетвореннями, знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & 8 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & -2 & 7 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконаємо наступні елементарні перетворення над рядками матриці A: додамо до третього, четвертого, п'ятого рядків перший, відповідно помножений на -4, 2, -1. В результаті одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & -4 & 0 & -7 & -7 \\ 8 & 4 & 5 & 0 & 9 & 9 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далі, додамо до першого, другого, третього, п'ятого, шостого стовпців четвертий, відповідно помножений на -1, -2, -3, -1, -2. А потім поміняємо місцями перший та четвертий стовпці. Наступним кроком, помноживши третій і п'ятий рядки на -1, ми прийдемо до такої матриці

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 \\ 0 & 4 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Продовжуючи виконувати аналогічні елементарні перетворення над рядками та стовпцями матриці A_2, ми одержимо, що

$$A_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює 3.

3. Довести, що ранг суми двох матриць не перевищує суми їх рангів.

Розв'язання. Нехай A і B — довільні $s\times t$-матриці над $\mathbb{R}$. Позначимо через $a_1, a_2, \ldots, a_t$ та $b_1, b_2, \ldots, b_t$ вектори-стовпці відповідно матриць A та B. Тоді система векторів

$$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_t+b_t, \tag{3}$$

очевидно, є системою векторів-стовпців суми матриць $A+B$.

Припустимо, що $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис системи векторів-стовпців матриці A, а $d_1, d_2, \ldots, d_l$ — базис системи векторів-стовпців матриці B $(k=\operatorname{rank} A,\ l=\operatorname{rank} B)$. Тоді

$$a_i=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}c_j, \quad b_i=\sum_{m=1}^{l}\delta_{im}d_m$$

для деяких дійсних чисел γ_{ij}, δ_{im}, де $i=1,\ldots,t$; $j=1,\ldots,k$; $m=1,\ldots,l$. Звідси

$$a_i+b_i=\sum_{j=1}^{k}\gamma_{ij}c_j+\sum_{m=1}^{l}\delta_{im}d_m \quad (i=1,\ldots,t).$$

Отже, система векторів (3) лінійно виражається через систему векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots, c_k,\ d_1,\ d_2,\ \ldots, d_l.$$

Із теореми 13 §10 слідує, що ранг системи векторів (3) не перевищує $k+l$. Тобто $\operatorname{rank} A+B\le\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$, що й потрібно було довести.

В п р а в и

1. Обчислити ранг наступних матриць методом обвідних мінорів:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 11\\ 3 & 3 & 0 & 9\\ 2 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12\\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{pmatrix}$.

2. Знайти значення параметра λ, при яких матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

має найменший ранг.

3. Чому дорівнює ранг наступних матриць при різних значеннях параметра λ:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити ранг наступних матриць за допомогою елементарних перетворень:

а) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

5. Довести, що приєднання до матриці одного рядка (або одного стовпця) або не змінює ранг, або збільшує його на одиницю.

6. Довести, що довільну матрицю ранга r можна представити у вигляді суми r матриць ранга один, але не можна представити у вигляді суми менш ніж r таких матриць.

7. Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — матриця порядку $n > 1$ і r — її ранг. Знайти ранг приєднаної матриці $A^* = \|A_{ij}\|$, де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ji} матриці A.

8. Довести, що за допомогою елементарних перетворень типу (II) над рядками невироджену матрицю $\mathrm{diag}[d_1, d_2]$ можна привести до матриці $\mathrm{diag}[1, d_1 d_2]$.

§12. Системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задано систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, n)$. Позначимо через A матрицю цієї системи, а через $\bar{A}$ — її розширену матрицю. Тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Ранг матриці $\bar{A}$ або дорівнює рангу матриці A, або на одиницю більше останнього.*

Теорема 2 (Кронекер,Капеллі). *Система лінійних рівнянь* (1) *тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг розширеної матриці $\bar{A}$ дорівнює рангу матриці A.*

Правило розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Нехай задано сумісну систему лінійних рівнянь (1) і нехай матриця A цієї системи має ранг r. Вибираємо в A r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі (1) тільки ті рівняння, коефіцієнти яких ввійшли у вибрані рядки. В цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що детермінант із коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі оголошуємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення і обчислюючи значення інших невідомих за правилом Крамера, ми одержимо всі розв'язки системи (1).

Наслідок 1. *Сумісна система* (1) *тоді і тільки тоді є визначеною, якщо ранг матриці A дорівнює числу невідомих.*

П р и к л а д и

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 5x_1 - \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 7, \\ 2x_1 + \ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ \ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 \end{matrix} & \begin{matrix} -6 & 5 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

заданої в умові системи рівнянь і знаходимо її ранг. Мінор M другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A (він обведений рамкою) відмінний від нуля. Далі виписуємо та обчислюємо всі обвідні мінори мінора M:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином $\operatorname{rank} A = 2$. Тепер знайдемо ранг розширеної матриці $\bar{A}$ системи лінійних рівнянь. Для цього досить обчислити лише так звані *характеристичні мінори* матриці $\bar{A}$, тобто обвідні мінори мінора M третього порядку, які не містяться в матриці A. У нашому випадку такий лише один —

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} \bar{A} = 3$. А тому за теоремою Кронекера-Капеллі задана в умові система лінійних рівнянь є несумісною.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \ x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ x_4 + \ x_5 = 1, \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ \ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + \ x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Можна показати, що система лінійних рівнянь сумісна, оскільки ранг матриці A системи і ранг її розширеної матриці дорівнюють двом. Мінор другого порядку, що знаходиться в лівому верхньому кутку матриці A,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

відмінний від нуля. Тому розв'язуємо систему, яка складається із перших двох рівнянь заданої в умові системи, від невідомих x_1, x_2. Інші невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними і переносимо їх у праві частини цих рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ 3x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок цієї системи за правилом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 & 1 \\ 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 & -1 \end{vmatrix} = -5 - x_3 + 3x_4 + 4x_5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ 3 & 4 - x_3 - 4x_4 - 3x_5 \end{vmatrix} = 1 - 7x_3 - 7x_4;$$

$$x_1 = \tfrac{\Delta_1}{M} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{4}x_3 - \tfrac{3}{4}x_4 - x_5,$$
$$x_2 = \tfrac{\Delta_2}{M} = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{4}x_3 + \tfrac{7}{4}x_4.$$

Таким чином, загальний розв'язок заданої в умові системи лінійних рівнянь має вигляд $(\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\alpha - \frac{3}{4}\beta - \delta, -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta, \alpha, \beta, \delta)$, де α, β, δ — довільні дійсні числа.

В п р а в и

1. Дослідити на сумісність і знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок наступних систем лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$

є) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$

і) $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

2. Дослідити систему і знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 20x_4 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9, \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7, \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

3. Дослідити систему лінійних рівнянь і знайти загальний розв'язок в залежності від значень параметрів a, b, c, d:

а) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ ax + by + cz = d, \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + by + z = 1, \\ x + y + cz = 1. \end{cases}$

§13. Системи лінійних однорідних рівнянь

Системою лінійних однорідних рівнянь називається система рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де s, $n \in \mathbb{N}$; $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, система (1) є сумісною, оскільки має *нульовий розв'язок* $(0, 0, \dots, 0)$.

Теорема 1. *Нехай матриця системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *від n невідомих має ранг r. Якщо $r = n$, тоді система* (1) *є визначеною, тобто нульовий розв'язок є єдиним розв'язком цієї системи рівнянь. У випадку $r < n$ система рівнянь* (1) *є невизначеною.*

Наслідок 1. *Система n лінійних однорідних рівнянь від n невідомих має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці цієї системи дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Якщо в системі лінійних однорідних рівнянь число рівнянь менше числа невідомих, тоді ця система має розв'язки, що відмінні від нульового.*

Теорема 3. *Нехай n-вимірні вектори $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ і $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ є розв'язками системи лінійних однорідних рівнянь* (1)*. Тоді для довільного дійсного числа α вектори*

$$\alpha b = (\alpha\beta_1, \dots, \alpha\beta_n), \qquad b + c = (\beta_1 + \gamma_1, \dots, \beta_n + \gamma_n)$$

є розв'язками системи рівнянь (1)*.*

Наслідок 2. *Довільна лінійна комбінація розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь також є розв'язком цієї системи рівнянь.*

Множина всіх розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь (1) називається *простором розв'язків* цієї системи. Нехай S — простір розв'язків невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь (1). Із §10 слідує, що існує лінійно незалежна система векторів $a_1, \dots, a_q \in S$ така, що будь-який вектор із S є лінійною комбінацією векторів цієї системи. У цьому випадку систему векторів a_1, …, a_q називають *фундаментальною системою розв'язків* системи лінійних однорідних рівнянь (1). У невизначеної системи лінійних однорідних рівнянь існує безліч фундаментальних систем розв'язків. Будь-які дві фундаментальні системи розв'язків еквівалентні. А, отже, складаються із одного й того ж числа розв'язків.

Теорема 4. *Якщо ранг r матриці системи лінійних однорідних рівнянь* (1) *менше ніж число невідомих n, тоді будь-яка фундаментальна система розв'язків системи* (1) *складаєтьса із $n-r$ розв'язків.*

Нехай дано систему лінійних неоднорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \tag{2}$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0, \end{cases} \tag{3}$$

одержана із системи (2) заміною всіх вільних членів нулями, називається *зведеною системою* для системи (2). Між розв'язками систем (2) і (3) існує тісний зв'язок, на який вказують наступні теореми.

Теорема 5. *Сума будь-якого розв'язку системи* (2) *з будь-яким розв'язком системи* (3) *знову є розв'язком системи* (2).

Теорема 6. *Різниця будь-яких двох розв'язків системи* (2) *є розв'язком зведеної системи* (3).

Наслідок 3. *Нехай a — довільний (частинний) розв'язок системи* (2), *S — простір розв'язків зведеної системи* (3). *Тоді множина $\{a+b \mid b \in S\}$ є множиною розв'язків системи* (2).

П р и к л а д и

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язання. Обчислимо спочатку ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

системи (4). Мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

розташований в лівому верхньому кутку матриці A, не дорівнює нулю. Обчислюємо всі обвідні мінори третього порядку мінора M матриці A. При цьому звернемо увагу на те, що третій і четвертий стовпці матриці A пропорційні відповідно першому та другому її стовпцям. Тому мінори, утворені облямуванням за допомогою як третього, так і четвертого стовпців, дорівнюють нулю. Залишилось обчислити наступні два мінори:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, $\operatorname{rank} A = 2$. Враховуючи, що базовий мінор M розташований у лівому верхньому кутку матриці A, залишаємо в системі (4) перші два рівняння, а в їх лівих частинах — лише перші дві невідомі. Інші три невідомі x_3, x_4, x_5 оголошуємо вільними

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 + 2x_5, \\ \qquad\; x_2 = x_4 + x_5. \end{cases} \tag{5}$$

Складаємо таблицю для значень невідомих x_1, ..., x_5, відокремивши в ній вільні та головні невідомі, і надаємо вільним невідомим вказані в таблиці значення.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		1	0	0
		0	1	0
		0	0	1

Таблиця 1

Для кожного з цих трьох наборів значень вільних невідомих розв'язуємо систему (5) і знаходимо відповідні значення головних невідомих x_1, x_2:

1) для першого набору $x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = 0$ із (5) одержуємо, що $x_2 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 = 1$;

2) для другого набору $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ із (5) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 1 - x_2 = 0$;

3) для третього набору $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 1$ із (5) одержуємо, що $x_2 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$.

Таким чином, заповнивши вільні місця в таблиці 1, одержимо нову таблицю.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	1	0	0	1

Таблиця 2

Таблиця 2 задає три розв'язки $a_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 0, 0, 1)$ системи (5), а, отже, і системи (4) лінійних однорідних рівнянь. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (4). Це випливає із теореми 4 і того, що вектори $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ утворюють лінійно незалежну систему векторів.

Загальним розв'язком системи (4) є довільна лінійна комбінація розв'язків фундаментальної системи

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \delta_3 a_3 = (\delta_1 + \delta_3, \delta_2 + \delta_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

де δ_1, δ_2, δ_3 — довільні дійсні числа.

2. Чи утворюють рядки матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0? \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язання. Неважко переконатися, що кожен рядок матриці A є розв'язком системи (6). Далі, $\operatorname{rank} A = 3$, оскільки мінор

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

третього порядку, який знаходиться в останніх трьох стовпцях матриці A не дорівнює нулю. Таким чином рядки матриці утворюють лінійно незалежну систему векторів.

Нарешті, знаходимо ранг матриці

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

системи рівнянь (6). Мінор

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

розташований у лівому верхньому кутку матриці B не дорівнює нулю. Обчислюємо всі обвідні мінори мінора M_1:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\operatorname{rank} B = 2$. Звідси і з теореми 4 слідує, що фундаментальна система розв'язків системи (6) складається із трьох розв'язків. А тому з лінійної незалежності системи рядків матриці A випливає, що будь-який розв'язок системи (6) лінійно виражається через рядки матриці A. Тобто рядки матриці утворюють фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь (6).

В п р а в и

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок для систем рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0,\\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0,\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0,\\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0,\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0,\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0,\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+7x_2+5x_3=0,\\ x_1+x_2-4x_3=0,\\ 2x_1+9x_2+6x_3=0;\end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1-x_3=0,\\ x_2-x_4=0,\\ -x_1+x_3-x_5=0,\\ -x_2+x_4-x_6=0,\\ -x_3+x_5=0,\\ -x_4+x_6=0;\end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0,\\ x_2-x_4+x_6=0,\\ x_1-x_2+x_5-x_6=0,\\ x_2-x_3+x_6=0,\\ x_1-x_4+x_5=0.\end{cases}$

2. Чи утворюють рядки кожної із матриць

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0?\end{cases}$$

3. Які із рядків матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7\\ 5 & 3 & 7 & -6 & -14\\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13\\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7\end{pmatrix}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 \phantom{{}+3x_5} = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0? \end{cases}$$

4. Знайти системи лінійних однорідних рівнянь, для яких наступні системи векторів були б фундаментальними системами розв'язків:
а) $(3, 4, 2, 1, 6)$, $(5, 9, 7, 4, 7)$; б) $(4, 3, -1, -1, 11)$, $(1, 6, 8, 5, -4)$.

5. Довести, що якщо ранг системи лінійних однорідних рівнянь на одиницю менше числа невідомих, то довільні два розв'язки цієї системи пропорційні.

6. Нехай A — матриця системи $n - 1$ лінійних однорідних рівнянь від n невідомих, M_i — мінор матриці A, що одержується викреслюванням i-го стовпця матриці A. Довести, що одним із розв'язків системи лінійних рівнянь є система чисел

$$M_1, \quad -M_2, \quad M_3, \quad -M_4, \ldots, (-1)^{n-1} M_n,$$

причому, якщо цей розв'язок — ненульовий, тоді будь-який інший розв'язок йому пропорційний.

7. Користуючись результатом попередньої задачі знайти загальний розв'язок систем рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

8. Довести, що k-ва компонента довільного розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ранг матриці цієї системи зменшується на одиницю при викреслюванні k стовпця.

9. При яких умовах задана лінійна комбінація довільних розв'язків заданої неоднорідної системи лінійних рівнянь знову буде розв'язком цієї системи.

§14. Групи. Кільця. Поля

Нехай M — довільна множина. *Бінарною алгебраїчною операцією* на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом: $*$, $\circ$, $\cdot$ або $+$. У останніх двох випадках образи $a \cdot b$ (або просто ab) та $a + b$ пари (a, b) будемо називати відповідно *добутком* та *сумою* елементів $a, b \in M$, а самі операції $\cdot$ та $+$ — відповідно множенням та додаванням.

***Зауваження* 1.** Названі вище операції — умовні. На множині M може бути задано декілька алгебраїчних операцій.

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення, називається *групою*, якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$;
2) існує *одиничний елемент*, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справедливі рівності $ae = ea = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує *обернений елемент* a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

***Зауваження* 2.** Якщо множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, є групою, тоді одиничний елемент групи G будемо називати *нульовим*, а обернений елемент до елемента $a \in G$ — *протилежним до* a і позначатимемо його через $-a$.

Якщо для довільних елементів a, b групи G виконується рівність $ab = ba$, то група G називається *абелевою*.

Якщо множина G скінченна, то група G називається *скінченною*, а число елементів множини G називається *порядком групи* G і позначається $|G|$.

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення. Групи G_1 та G_2 називаються *ізоморфними*, якщо існує бієктивне відображення $f : G_1 \to G_2$ таке, що $f(ab) = f(a)f(b)$ для довільних елементів a, $b \in G_1$. Ізоморфізм груп G_1 і G_2 будемо символічно позначати $G_1 \cong G_2$.

Підмножина H групи G називається *підгрупою* групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, H є групою.

Теорема 1. *Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови:* 1) $ab \in H$; 2) $a^{-1} \in H$.

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається *кільцем*, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо *адитивною групою кільця*);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in K$ справедлива рівність $(ab)c = a(bc)$;
3) бінарні алгебраїчні операції додавання і множення пов'язані дистрибутивними законами, тобто для довільних елементів a, b, $c \in K$ справедливі рівності $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$.

Кільце K називається *комутативним*, якщо $ab = ba$ для довільних елементів a, $b \in K$.

Кільце K називається *кільцем з одиницею*, якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається *оборотним*, якщо існує елемент $a^{-1} \in K$ такий, що $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Теорема 2. *Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.*

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають *мультиплікативною групою кільця K* і позначають K^*.

Кільця K_1 та K_2 називаються *ізоморфними*, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

для довільних елементів a, $b \in K_1$. Ізоморфізм кілець K_1 і K_2 також будемо символічно позначати $K_1 \cong K_2$.

Підмножина R кільця K називається *підкільцем* кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3. *Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови:* 1) $a + b \in R$; 2) $-a \in R$; 3) $ab \in R$.

Комутативне кільце P з одиницею називається *полем*, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним, тобто $P^* = P \setminus \{0\}$.

Якщо поле P є підкільцем поля F, то кажуть, що P — *підполе* поля F.

Поля P_1 і P_2 називаються *ізоморфними*, якщо кільця P_1 і P_2 — ізоморфні.

П р и к л а д и

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a + b) + c = a + (b + c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a + 0 = 0 + a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$. Нарешті для довільного цілого числа a існує протилежне ціле число $-a$ з властивістю $a+(-a) = (-a)+a = 0$. Зауважимо, що додавання цілих чисел задовольняє також комутативній властивості і, отже, множина $\mathbb{Z}$ є абелевою групою відносно операції додавання.

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що: 1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$; 2) $(ab)c = a(bc)$ для довільних цілих чисел a, b, c; 3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a. Однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Справді, наприклад для цілого числа 2 не існує такого цілого числа x, щоб $2x = 1$. Таким чином, множина $\mathbb{Z}$ не є групою відносно операції множення цілих чисел.

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію на $\mathbb{Z}$:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ — звичайна операція додавання цілих чисел, а $-a$ — протилежне число до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$). Тоді

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = -(-1 + (-2)) + (-3) = 0 \neq 4 = 1 \circ (2 \circ 3).$$

Останнє означає, що бінарна алгебраїчна операція $\circ$ не задовольняє асоціативній властивості.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх невироджених $n\times n$-матриць з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.

Розв'язання. Згідно леми 7 §9 добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За лемою 4 §9 ця операція задовольняє асоціативній властивості. З леми 5 §9 випливає, що в множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. І, нарешті, з теореми 8 §9 слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n,\mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n,\mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою. Ця група називається *повною лінійною групою степеня n над* $\mathbb{R}$. Зауважимо (див. §9), що група $GL(1,\mathbb{R})$ — абелева, а група $GL(n,\mathbb{R})$ $(n>1)$ — не є абелевою.

Розглянемо в групі $GL(n,\mathbb{R})$ підмножину $SL(n,\mathbb{R})$ всіх матриць, детермінант яких дорівнює одиниці: $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$. Для довільних матриць A, $B \in SL(n,\mathbb{R})$

$$AB \in SL(n,\mathbb{R}) \qquad A^{-1} \in SL(n,\mathbb{R}),$$

оскільки $|AB| = |A|\cdot|B| = 1$, $|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$. Отже, за теоремою 1 множина $SL(n,\mathbb{R})$ є підгрупою групи $GL(n,\mathbb{R})$. Група $SL(n,\mathbb{R})$ називається *спеціальною лінійною групою степеня n над* $\mathbb{R}$.

Розглянемо в групі $GL(n,\mathbb{R})$ підмножину $GL(n,\mathbb{Q})$ всіх матриць, елементами якої є раціональні числа (тобто множину всіх невироджених $n\times n$-матриць над $\mathbb{Q}$). З означення добутку двох матриць та правила знаходження оберненої матриці (див. §9) випливає, що добуток двох довільних матриць із $GL(n,\mathbb{Q})$ є матрицею з $GL(n,\mathbb{Q})$ і обернена матриця для довільної матриці з $GL(n,\mathbb{Q})$ є матрицею з $GL(n,\mathbb{Q})$. Аналогічно попередньому випадку звідси одержуємо, що $GL(n,\mathbb{Q})$ — підгрупа групи $GL(n,\mathbb{R})$.

3. Довести, що множина S_M всіх бієктивних відображень множини M в себе відносно операції множення відображень є групою.

Розв'язання. Нехай f, g — довільні бієктивні відображення множини M в себе. Покажемо спочатку, що fg — також бієктивне відображення множини M в себе, тобто, що множення відображень із S_M є бінарною алгебраїчною операцією на S_M.

Нехай m_1, m_2 — довільні різні елементи із M. Тоді $g(m_1) \neq g(m_2)$ (оскільки g — бієктивне). Звідси $f(g(m_1)) \neq f(g(m_2))$ (оскільки f — бієктивне). Тому $fg(m_1) \neq fg(m_2)$. Це в свою чергу означає, що добуток fg є ін'єктивним відображенням множини M в себе. Далі, нехай m — довільний елемент із M. Тоді в M існує елемент n такий, що $f(n) = m$ (через бієктивність відображення f). Аналогічно в M існуватиме елемент r такий, що $g(r) = n$. Отже, $fg(r) = f(g(r)) = = f(n) = m$. Нами показано, що для довільного елемента $m \in M$ існує елемент $r \in M$, що $fg(r) = m$. Тобто, що добуток fg є сур'єктивним відображенням, а тому і бієктивним відображенням множини M в себе.

Із теореми 2 §1 випливає, що операція множення відображень із S_M задовольняє асоціативній властивості. Роль одиничного елемента в S_M відіграє тотожне відображення e_M множини M в себе (див. §1; нагадаємо $e_M(m) = m$ $(m \in M)$; e_M — очевидно бієктивне відображення). Залишається довести, що для довільного відображення $f \in S_M$ існує обернене відображення $f^{-1} \in S_M$.

Нехай f — довільне бієктивне відображення множини M в себе. Тоді для довільного елемента $m \in M$ існує єдиний прообраз $n \in M$ елемента m, тобто такий елемент, що $f(n) = m$. Позначимо прообраз n елемента m через $f^{-1}(m)$. Розглянемо відображення $g : M \to M$, визначене за правилом $g : m \to f^{-1}(m)$ $(m \in M)$. Відображення g є бієктивним. Дійсно, довільний елемент $m \in M$ є образом елемента $f(m)$ при відображенні g, оскільки $g(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m$. Далі, $g(m_1) \neq g(m_2)$ для довільних різних елементів $m_1, m_2 \in M$. Оскільки в протилежному випадку $m_1 = f(g(m_1)) = f(g(m_2)) = m_2$, що неможливо. Нарешті покажемо, що відображення g є оберненим для відображення f. Для довільного елемента $m \in M$

$$fg(m) = f(g(m)) = f(f^{-1}(m)) = m,$$

$$gf(m) = g(f(m)) = f^{-1}(f(m)) = m.$$

Тобто $fg = gf = e_M$.

Таким чином, S_M є групою відносно операції множення відображень.

Зауваження 3. Якщо $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, тоді елементами групи S_M є підстановки n-го степеня. Отже, множина S_n всіх підстановок n-го степеня відносно операції множення підстановок є групою, яку називають *симетричною групою n-го степеня.*

4. Довести, що група

$$UT(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

відносно операції множення матриць ізоморфна групі $\mathbb{Z}^+$ цілих чисел відносно операції додавання.

Розв'язання. Розглянемо відображення $f : UT(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}^+$, визначене за правилом

$$f : \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Очевидно, f — бієктивне відображення. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— довільні матриці із $UT(2,\mathbb{Z})$. Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А тому $f(AB) = m + n = f(A) + f(B)$. Отже, $UT(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^+$ за означенням ізоморфізму груп.

5. Чи є множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайних операцій додавання і множення кільцем, полем?

Розв'язання. Із розв'язання прикладу 1 слідує, що операції додавання і множення цілих чисел є бінарними операціями на $\mathbb{Z}$, причому відносно операції додавання множина $\mathbb{Z}$ є абелевою групою, а операція множення цілих чисел задовольняє асоціативній та комутативній властивостям. Крім того в $\mathbb{Z}$ існує одиничний елемент відносно операції множення. Далі, добре відомо, що операції додавання і множення цілих чисел пов'язані законом дистрибутивності, тобто $a(b+c) = ab + ac$ для довільних a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Все вище наведене означає, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно операцій додавання і множення є комутативним кільцем з одиницею. Однак кільце $\mathbb{Z}$ не є полем, оскільки, наприклад, ненульовий елемент 2 не є оборотним в $\mathbb{Z}$.

6. Чи є множина всіх непарних цілих чисел кільцем відносно звичайних операцій додавання і множення цілих чисел?

Розв'язання. Очевидно, сума довільних непарних цілих чисел є парним числом. А тому операція додавання непарних цілих чисел не є бінарною алгебраїчною операцією на множині всіх непарних цілих чисел. Отже, ця множина не є кільцем відносно вказаних в умові операцій.

7. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності.

Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і 1 ($0 = 0 + 0\sqrt{3}$, $1 = 1 + 0\sqrt{3}$). Ці числа відіграють роль нульового і одиничного елемента відповідно для операцій додавання і множення.

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку б $a = \pm b\sqrt{3}$, що неможливо для жодних раціональних чисел a і b. Розглянемо число $\frac{a}{a^2-3b^2} + \frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Обчисливши добуток

$$(a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} = 1,$$

переконуємось, що це число є оберненим до числа $a + b\sqrt{3}$.

З усього вище сказаного випливає, що множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є полем відносно операцій додавання і множення дійсних чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

8. Нехай K — кільце з нульовим елементом 0. Довести, що $a \cdot 0 = 0$ для довільного елемента $a \in K$.

Розв'язання. Нехай a — довільний елемент кільця K. Тоді

$$a \cdot (0+0) = a \cdot 0,$$

оскільки 0 — нульовий елемент в K. З іншого боку із дистрибутивної властивості операцій додавання і множення звідси одержимо, що

$$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0.$$

Додавши до цієї рівності елемент протилежний до елемента $a \cdot 0$ (такий існує, бо K — кільце), одержимо

$$-(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0.$$

Звідси, з асоціативної властивості додавання та означення протилежного елемента випливає, що $a \cdot 0 = 0$.

9. Нехай K — кільце з нульовим елементом 0. Ненульові елементи a і b кільця K називаються *дільниками нуля*, якщо $ab = 0$. Довести, що жодне поле не містить дільників нуля.

Розв'язання. Доведемо це методом від супротивного. Нехай P — поле, яке містить дільники нуля a і b. Тоді за означенням $ab = 0$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Оскільки $a \neq 0$, то в полі P існує обернений елемент a^{-1} до елемента a. Помноживши рівність $ab = 0$ зліва на a^{-1}, одержимо $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$. Звідси $1 \cdot b = 0$, тобто $b = 0$. Одержана суперечність доводить, що жодне поле не містить дільників нуля.

Зауваження 4. Існують кільця, які містять дільники нуля. Наприклад в кільці $\mathbb{R}_2$ всіх 2×2-матриць з дійсними елементами відносно операцій додавання і множення матриць матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

є дільниками нуля (переконатися самостійно).

В п р а в и

1. Вияснити, чи утворюють групу кожна з наступних множин при вказаній операції над елементами:

а) множина всіх раціональних чисел відносно операції додавання;

б) множина всіх раціональних чисел відносно операції множення;

в) множина всіх додатних раціональних чисел відносно операції множення;

г) множина степенів даного дійсного числа $a \neq 0$ з цілими показниками відносно операції множення;

д) множина дійсних чисел, якщо операція визначена так: $a * b = a^b$;

е) множина дійсних чисел, якщо операція визначена так: $a * b = a^2 b^2$;

є) множина комплексних чисел з заданим аргументом φ відносно операції множення;

ж) множина всіх комплексних коренів з одиниці фіксованого степеня n відносно операції множення;

з) множина всіх комплексних коренів всіх натуральних степенів з одиниці відносно операції множення;

і) множина ненульових комплексних чисел з модулем, що не перевищує фіксоване число r, відносно операції множення;

й) множина всіх парних підстановок степеня n відносно операції множення;

к) множина всіх непарних підстановок степеня n відносно операції множення;

л) множина $\mathbb{R}^n$ всіх n-вимірних векторів над $\mathbb{R}$ відносно операції додавання;

м) множина всіх поворотів площини навколо фіксованої точки відносно операції послідовного виконання поворотів;

о) множина всіх паралельних переносів площини відносно операції послідовного виконання паралельних переносів.

2. Довести, що в довільній групі G існує єдиний одиничний елемент та єдиний обернений елемент для довільного елемента групи G.

3. Нехай G — довільна група з одиничним елементом e відносно операції множення. Довести, якщо $a^2 = e$ для довільного елемента $a \in G$, то група G — абелева.

4. Нехай G_1, G_2 — ізоморфні групи відповідно з одиницями e_1, e_2 і $f : G_1 \to G_2$ — бієктивне відображення таке, що $f(ab) = f(a)f(b)$ для довільних a, $b \in G_1$. Довести, що $f(e_1) = e_2$ і $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ для довільного елемента $a \in G_1$.

5. Довести, що група $\mathbb{Z}$ цілих чисел відносно операції додавання ізоморфна групі $n\mathbb{Z}$ цілих чисел кратних даному натуральному числу n відносно операції додавання.

6. Довести, що група дійсних чисел відносно операції додавання ізоморфна групі додатних дійсних чисел відносно операції множення.

7. Довести, що довільна група порядку n ізоморфна деякій підгрупі групи S_n підстановок степеня n.

8. Знайти всі групи (з точністю до ізоморфізму) порядку 3.

9. Знайти всі підгрупи групи $\mathbb{Z}^+$ цілих чисел відносно операції додавання.

10. Виписати всі підгрупи групи S_3 підстановок степеня 3.

11. Вияснити, чи утворюють кільце (поле) кожна із наступних множин при вказаних операціях над елементами:

а) множина всіх парних цілих чисел відносно операцій додавання і множення;

б) множина всіх цілих чисел кратних даному натуральному числу n відносно операцій додавання і множення;

в) множина всіх раціональних чисел відносно операцій додавання і множення;

г) множина всіх дійсних чисел відносно операцій додавання і множення;

д) множина всіх комплексних чисел відносно операцій додавання і множення;

е) множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt{2}$, де a, b — цілі числа, відносно операцій додавання і множення;

є) множина дійсних чисел вигляду $a + b\sqrt[3]{3}$, де a, b — раціональні числа, відносно операцій додавання і множення;

ж) множина комплексних чисел вигляду $a+bi$, де a, b — цілі числа, відносно операцій додавання і множення;

з) множина комплексних чисел вигляду $a + bi$, де a, b — раціональні числа, відносно операцій додавання і множення;

і) множина всіх $n \times n$-матриць з цілими елементами відносно операцій додавання і множення матриць;

й) множина всіх $n \times n$-матриць з дійсними елементами відносно операцій додавання і множення матриць;

к) множина всіх матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з раціональними a, b відносно операцій додавання і множення матриць.

12. Нехай K — кільце з одиницею 1. Довести, що для довільних елементів a, $b \in K$ справедливі рівності: $-(-a) = a$, $(-1) \cdot a = -a$, $(-a)(-b) = ab$.

13. Довести, що в кільці $n \times n$-матриць з дійсними елементами вироджені матриці, і тільки вони, є дільниками нуля.

14. Довести, що множина всіх матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, де a, b — дійсні числа, відносно операції додавання і множення матриць є полем, яке ізоморфне полю комплексних чисел.

15. Довести, що поле матриць вигляду $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ з раціональними a, b (вправа 11к)) ізоморфне полю чисел вигляду $a + b\sqrt{2}$ також з раціональними a і b.

§15. Кільце многочленів

Нехай P — довільне поле, n — невід'ємне ціле число і a_0, a_1, … …, a_{n-1}, a_n — довільні елементи поля P, причому a_n — ненульовий елемент поля P. Алгебраїчний вираз (символ)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

називається *многочленом n-го степеня від невідомої (змінної) x над полем P*. Елемент a_i називають *коефіцієнтом многочлена* (1) *при i-му степеню невідомої x* (тобто x^i) ($i = 0, 1, \ldots, n$). При цьому коефіцієнт a_n називають *старшим коефіцієнтом* цього многочлена.

Зауваження 1. Многочленами нульового степеня над полем P є ненульові елементи поля P і тільки вони.

Розглядають також *нульовий многочлен*, який співпадає з нульовим елементом поля P. Степінь нульового многочлена за означенням вважається невизначеною. Многочлени

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \tag{2}$$

відповідно степенів n і m від невідомої x над полем P називаються *рівними* (позначатимемо $f(x) = g(x)$), якщо $n = m$ і $a_k = b_k$ для довільного $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Сумою многочленів $f(x)$ і $g(x)$ (див. (2)) називається многочлен

$$f(x) + g(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

де s — максимальне серед чисел n і m, а $c_k = a_k + b_k$ ($k = 0, 1, \ldots, s$), де в свою чергу $a_{n+1}, \ldots, a_s$ ($b_{m+1}, \ldots, b_s$) всі рівні нулю, якщо $n < s$ ($m < s$).

Добутком многочленів $f(x)$ і $g(x)$ (див. (2)) називається многочлен

$$f(x)g(x) = d_{n+m} x^{n+m} + d_{n+m-1} x^{n+m-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

де $d_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$ ($k = 0, 1, \ldots, n + m$), вважаючи, що $a_i = 0$ при $i > n$ і $b_j = 0$ при $j > m$.

Зауваження 2. Коефіцієнт d_k добутку многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює сумі всіляких добутків коефіцієнтів a_i і b_j відповідно многочленів $f(x)$ і $g(x)$ таких, що $i + j = k$.

Зауваження 3. Означення суми і добутку многочленів природньо переноситься на випадок, коли один із доданків або множників є нульовим многочленом.

Очевидно, вище наведені означення суми і добутку многочленів визначають бінарні алгебраїчні операції відповідно додавання і множення на множині $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P (включно з нульовим многочленом).

Теорема 1. *Множина $P[x]$ всіх многочленів від невідомої x над полем P відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею. Одиницею кільця $P[x]$ є одиниця поля P. Добуток довільних ненульових многочленів кільця $P[x]$ є ненульовим многочленом.*

Теорема 2. *Многочлен $f(x)$ над полем P є оборотним елементом кільця $P[x]$ тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ є многочленом нульового степеня.*

Теорема 3. *Нехай $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен над полем P. Тоді для довільного многочлена $f(x) \in P[x]$ існує єдина пара многочленів $q(x)$, $r(x) \in P[x]$ таких, що*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \tag{3}$$

причому степінь многочлена $r(x)$ менша за степінь многочлена $g(x)$ або $r(x) = 0$.

Многочлени $q(x)$ і $r(x)$ у рівності (3) називаються відповідно *часткою* і *остачею* при *діленні* многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

Якщо остача при діленні многочлена $f(x)$ над полем P на ненульовий многочлен $g(x) \in P[x]$ дорівнює нулю, тоді кажуть що многочлен $f(x)$ *ділиться* на многочлен $g(x)$, а многочлен $g(x)$ називають *дільником* многочлена $f(x)$.

Теорема 4. *Многочлен $g(x)$ над полем P є дільником многочлена $f(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $h(x) \in P[x]$ такий, що $f(x) = g(x)h(x)$.*

Теорема 5. *Нехай P — довільне поле. Справедливі наступні твердження для многочленів над полем P.*

I. *Якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, тоді $f(x)$ ділиться на $h(x)$.*

II. *Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $h(x)$, тоді сума $f(x) + g(x)$ і різниця $f(x) - g(x)$ діляться на $h(x)$.*

III. *Якщо* $f(x)$ *ділиться на* $g(x)$, *тоді добуток* $f(x)h(x)$ *ділиться на* $g(x)$ *для довільного многочлена* $h(x)$.

IV. *Якщо кожний із многочленів* $f_1(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_k(x)$ *ділиться на* $g(x)$, *тоді на* $g(x)$ *буде ділитися многочлен*

$$f_1(x)h_1(x) + f_2(x)h_2(x) + \cdots + f_k(x)h_k(x),$$

де $h_1(x)$, $h_2(x)$, $\ldots$, $h_k(x)$ — *довільні многочлени.*

V. *Довільний многочлен* $f(x)$ *ділиться на будь-який многочлен нульового степеня.*

VI. *Многочлени* $f(x)$ *і* $g(x)$ *тоді і тільки діляться один на одного, коли* $g(x) = cf(x)$ *для деякого ненульового елемента* c *поля* P.

Спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P називається многочлен $h(x) \in P[x]$, який є дільником для кожного із многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільними дільниками многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є тільки многочлени нульового степеня, тоді многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називаються *взаємно простими.*

Найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ називається многочлен $d(x) \in P[x]$, який є їх спільним дільником і, разом з тим, сам ділиться на будь-який спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Позначатимемо найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

***Зауваження* 4.** З теореми 5 випливає, що найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, якщо він існує, визначається цими многочленами неоднозначно.

Теорема 6. *Для довільних ненульових многочленів* $f(x)$ *і* $g(x)$ *над будь-яким полем* P *існує найбільший спільний дільник цих многочленів. Нехай* $d(x) = (f(x), g(x))$ — *деякий найбільший спільний дільник* $f(x)$ *і* $g(x)$. *Тоді многочленами множини* $\{cd(x) \mid c \in P, c \neq 0\}$ *вичерпуються всі найбільші спільні дільники многочленів* $f(x)$ *і* $g(x)$.

***Зауваження* 5.** Зважаючи на попередню теорему, можна завжди вважати, що старший коефіцієнт найбільшого спільного дільника многочленів дорівнює одиниці.

Теорема 7. *Два многочлени тоді і тільки тоді взаємно прості, коли їх найбільший спільний дільник дорівнює одиниці.*

Алгоритм Евкліда знаходження найбільшого спільного дільника ненульових многочленів $f(x)$, $g(x)$ полягає в наступному: ділимо многочлен $f(x)$ на $g(x)$, тобто представляємо $f(x)$ у вигляді (3); нехай $r_1(x)$ — остача при діленні $f(x)$ на $g(x)$; якщо $r_1(x) \neq 0$, то ділимо далі $g(x)$ на $r_1(x)$, одержимо остачу $r_2(x)$; знову, якщо $r_2(x) \neq 0$, то ділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$ і т. д.; оскільки у послідовності остач степені постійно зменшуються, то на деякому кроці цей процес припиниться, тобто $r_{k+1} = 0$ для деякого k; *остача $r_k(x)$ і є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.*

Теорема 8. *Якщо $d(x)$ є найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P, тоді існують такі многочлени $u(x)$, $v(x) \in P[x]$, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.*

Наслідок 1. *Многочлени $f(x)$, $g(x) \in P[x]$ тоді і тільки тоді взаємно прості, коли існують многочлени $u(x)$, $v(x) \in P[x]$ такі, що $f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1$.*

Наслідок 2. *Якщо многочлен $f(x)$ взаємно простий з кожним із многочленів $g(x)$ і $h(x)$, тоді він взаємно простий і з їх добутком $g(x)h(x)$.*

Наслідок 3. *Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на $h(x)$, але $f(x)$ і $h(x)$ — взаємно прості, тоді $g(x)$ ділиться на $h(x)$.*

Наслідок 4. *Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на кожен із многочленів $g(x)$ і $h(x)$, які між собою взаємно прості, тоді $f(x)$ ділиться на добуток $g(x)h(x)$.*

П р и к л а д и

1. Знайти добуток многочленів $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ над полем дійсних чисел.

Розв'язання. Довільний многочлен $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ представляється у вигляді суми $n + 1$ многочленів (їх ще називають *одночленами*) $a_n x^n$, $\ldots$, $a_1 x$, a_0. Зважаючи на це і використовуючи асоціативну, комутативну, дистрибутивну властивості операцій додавання і множення многочленів, одержуємо

$$(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1) =$$
$$= x^5 - 2x^4 - x^3 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x^3 + 2x^2 + x - x^2 + 2x + 1 =$$
$$= x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1.$$

2. Поділити многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ над полем раціональних чисел.

Розв'язання. Для того, щоб представити многочлен $f(x)$ у вигляді (3), підберемо одночлен $a_{k_1}x^{k_1}$ таким чином, щоб степінь многочлена $f_1(x) = f(x) - a_{k_1}x^{k_1}g(x)$ була меншою за степінь $g(x)$. Далі виберемо одночлен $a_{k_2}x^{k_2}$ так, щоб степінь $f_2(x) = f_1(x) - a_{k_2}x^{k_2}g(x)$ була меншою за степінь $g(x)$ і т. д. На деякому кроці степінь многочлена $f_n(x)$ буде меншою за степінь $g(x)$ або $f_n(x) = 0$. Тоді рівність

$$f(x) = (a_{k_1}x^{k_1} + a_{k_2}x^{k_2} + \cdots + a_{k_{n-1}}x^{k_{n-1}})g(x) + f_n(x)$$

і буде необхідним для нас розкладом многочлена $f(x)$ у вигляді (3).

Для даних в умові многочленів вище вказаний процес продемонструємо на діаграмі:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\ \cline{1-1}
-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\ \cline{1-1}
-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}$$

Отже, часткою і остачею при ділення заданих в умові многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ будуть відповідно многочлени $\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}$ та $-\frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$.

3. При якій умові многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$ $(p, q, m \in \mathbb{R})$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $x^3 + px + q$ ділиться на многочлен $x^2 + mx + 1$, тобто

$$x^3 + px + q = (x^2 + mx + 1)h(x) \tag{4}$$

для деякого многочлена $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Із означення добутку многочленів випливає, що $h(x)$ є многочленом першого степеня і тому має вигляд $h(x) = ax + b$ $(a,\ b \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$. Тоді з рівності (4) одержимо рівність

$$x^3 + px + q = ax^3 + (am + b)x^2 + (bm - a)x - b.$$

Звідси $a = 1$, $am + b = 0$, $bm - a = p$, $-b = q$. Із цих рівностей в свою чергу випливає, що необхідною умовою подільності многочлена $x^3 + px + q$ на многочлен $x^2 + mx + 1$ є система рівностей: $m = q$,

$p = -q^2 - 1$. Неважко переконатися, що з цих рівностей слідує подільність вказаних в умові многочленів.

4. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ та $g(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$.

Розв'язання. Найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ будемо шукати за допомогою алгоритма Евкліда. Оскільки найбільший спільний дільник многочленів визначається з точністю до множника, що є ненульовим числом, то для того, щоб запобігти виникнення дробових коефіцієнтів (для зручності), дозволяється множити ділене та дільник на будь-яке відмінне від нуля число. Причому це дозволяється робити не тільки на початку якого-небудь з послідовних ділень, але і в процесі самого цього ділення.

1-й крок. Ділимо многочлен $3f(x)$ на $g(x)$

$$3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 21x^2 - 36x + 30 =$$
$$= x(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2) + (-2x^3 + 19x^2 - 34x + 30).$$

Одержимо остачу $r_1(x) = -2x^3 + 19x^2 - 34x + 30$.

2-й крок. Ділимо многочлен $2g(x)$ на $-r_1(x)$. Зробимо це, користуючись діаграмою

$$
\begin{array}{l r|l}
 & 6x^4-12x^3+10x^2+4x-4 & 2x^3-19x^2+34x-30 \\ \cline{3-3}
 & 6x^4-57x^3+102x^2-90x & 3x+45 \\ \cline{2-2}
\text{(множимо на 2)} & 45x^3-92x^2+94x-4 & \\ \cline{2-2}
 & 90x^3-184x^2+188x-8 & \\
 & 90x^3-855x^2+1530x-1350 & \\ \cline{2-2}
\text{(множимо на } \frac{1}{671}\text{)} & 671x^2-1342x+1342 & \\ \cline{2-2}
 & x^2-2x+2 &
\end{array}
$$

Зауваження 6. Многочлен $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$ не є остачею при діленні $2g(x)$ на $-r_1(x)$, але $(f(x), g(x)) = (-r_1(x), r_2(x))$.

3-й крок. Ділимо многочлен $-r_1(x)$ на $r_2(x)$

$$2x^3 - 19x^2 + 34x - 30 = (2x - 15)(x^2 - 2x + 2).$$

Оскільки остача при останньому діленні дорівнює нулю, то найбільшим спільним дільником заданих в умові многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є многочлен $r_2(x) = x^2 - 2x + 2$.

В п р а в и

1. Обчислити добутки многочленів над полем комплексних чисел:

а) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$;

б) $(3x^5 + 2x^2 - 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4)$;

в) $((1 - i)x^3 + (2 + 3i)x^2 - ix + 1 + i)((1 + i)x - 3)$;

г) $(ix^3 - 4)(-x^4 + (3 - i)x^2 + 7 - i)$.

2. Поділити многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ над полем комплексних чисел, якщо:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad g(x) = x^2 - 3x + 1$;

б) $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = 2x^3 - 3x - 2$;

в) $f(x) = (-1 + 5i)x^3 - (6 + 11i)x^2 + (3 + 5i)x + 2 - 5i$,
$g(x) = (1 + i)x - 3$;

г) $f(x) = (-1 + 3i)x^4 + 9x^3 + (-9 + 3i)x^2 + (7 + 6i)x - (2 + 2i)$,
$g(x) = ix^2 + (2 - i)x - 2 + 3i$.

3. При якій умові многочлен $f(x)$ ділиться на многочлен $g(x)$ над полем дійсних чисел, якщо:

а) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1, \quad g(x) = (x - 1)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$;

б) $f(x) = x^4 + px^2 + q, \quad g(x) = x^2 + mx + 1 \quad (p, q, m \in \mathbb{R})$?

4. Визначити найбільший спільний дільник многочленів:

а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ і $x^3 + x^2 - x - 1$;

б) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ і $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

в) $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ і $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

г) $x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ і $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$;

д) $x^4 - 10x^2 + 1$ і $x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1$;

е) $x^4 - 4x^3 + 1$ і $x^3 - 3x^2 + 1$.

5. Користуючись алгоритмом Евкліда, підібрати многочлени $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, де $d(x) = (f(x), g(x))$, якщо:

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, \quad g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;

б) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;

в) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad g(x) = x^2 - x + 1;$

г) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1, \quad g(x) = x^2 - x - 1.$

6. Способом невизначених коефіцієнтів підібрати многочлени $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$, якщо:

а) $f(x) = x^3, \quad g(x) = (x-1)^2;$

б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1, \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$

7. Визначити многочлен найменшого степеня, який при діленні на $(x-1)^2$ дає остачу $2x$, а при діленні на $(x-2)^3$ — остачу $3x$.

8. Нехай $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$, де $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Чому дорівнює найбільший спільний дільник многочленів $u(x)$ і $v(x)$?

§16. Корені многочленів

Нехай P — довільне числове поле, $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ — довільний многочлен степеня n над полем P і c — будь-який елемент поля P. Елемент $f(c) = a_n c^n + \dots + a_1 c + a_0$ поля P називається *значенням многочлена $f(x)$ при $x = c$.*

Теорема 1. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — довільні многочлени над полем P і $u(x) = f(x) + g(x)$, $v(x) = f(x)g(x)$ — відповідно сума і добуток цих многочленів. Тоді $u(c) = f(c) + g(c)$ і $v(c) = f(c)g(c)$ для будь-якого елемента c поля P.*

Елемент c поля P називається *коренем* многочлена $f(x) \in P[x]$, якщо $f(c) = 0$.

***Зауваження* 1.** Існують многочлени, які над полем дійсних чисел не мають коренів, а над полем комплексних чисел мають. Наприклад, таким многочленом є $x^2 + 1$ ($\forall a \in \mathbb{R}\ a^2 + 1 \neq 0$; $i^2 + 1 = 0$).

Многочлени першого степеня ми далі називатимемо *лінійними многочленами.*

Теорема 2. *Остача при діленні многочлена $f(x) \in P[x]$ на лінійний многочлен $x - c$ ($c \in P$) дорівнює значенню $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$.*

Наслідок 1 (теорема Безу). *Елемент c поля P тоді і тільки тоді є коренем многочлена $f(x) \in P[x]$, коли $f(x)$ ділиться на $x - c$.*

Таким чином, розшукання коренів многочлена $f(x)$ рівносильне розшуканню його лінійних дільників.

Нехай $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ — деякий многочлен над полем P і нехай

$$f(x) = (x - c)q(x) + r, \tag{1}$$

де $q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$ — частка, а r — остача при діленні $f(x)$ на лінійний многочлен $x - c \in P[x]$. Тоді із рівності (1) одержимо, що

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - cb_0,\ \dots, a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2},\ a_n = r - cb_{n-1}.$$

Звідси

$$b_0 = a_0, \quad b_k = cb_{k-1} + a_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad r = cb_{n-1} + a_n,$$

тобто коефіцієнт b_k частки $q(x)$ одержується в результаті множення попереднього коефіцієнта b_{k-1} на c і додавання відповідного коефіцієнта a_k. Аналогічно обчислюється остача r, яка рівна $f(c)$ (див.

теорему 2). Цей спосіб знаходження частки і остачі при діленні многочлена на лінійний многочлен $x - c$ називається *методом Горнера.*

Корінь c многочлена $f(x)$ називається *k-кратним коренем* цього многочлена, якщо $f(x) = (x - c)^k g(x)$, де k — деяке натуральне число, а многочлен $g(x)$ вже не ділиться на $x - c$. Число k називають *кратністю* кореня c многочлена $f(x)$. Якщо $k = 1$, то кажуть, що корінь c — *простий.*

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ — деякий многочлен над полем P. Многочлен

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1$$

називається *похідною* (або *першою похідною*) многочлена $f(x)$. Похідна від многочлена нульового степеня і від нульового многочлена вважається рівною нульовому многочлену. Індукцією визначається *k-ва похідна* $f^{(k)}(x)$ многочлена $f(x)$, тобто $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)})'(x)$ $(k = 2, 3, \ldots)$.

Теорема 3. *$(n+1)$-ша похідна від будь-якого многочлена степеня n дорівнює нульовому многочлену.*

Теорема 4. *Для довільних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ над полем P*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Теорема 5. *Нехай елемент c поля P є k-кратним коренем многочлена $f(x) \in P[x]$ $(k \in \mathbb{N})$. Для довільного натурального числа s меншого k елемент c є $(k-s)$-кратним коренем s-ї похідної многочлена $f(x)$. Елемент c не є коренем k-ї похідної многочлена $f(x)$.*

Теорема 6 (основна теорема алгебри). *Будь-який многочлен натурального степеня над полем комплексних чисел має хоча б один корінь.*

Наслідок 2. *Будь-який многочлен $f(x)$ степеня n $(n \in \mathbb{N})$ над полем комплексних чисел має n коренів, якщо кожний із коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.*

Наслідок 3. *Будь-який многочлен $f(x)$ степеня n $(n \in \mathbb{N})$ над полем комплексних чисел представляється у вигляді добутку n лінійних множників*

$$f(x) = \alpha(x - \xi_1)(x - \xi_2)\cdots(x - \xi_n), \quad (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C})$$

де α — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$. Цей розклад є однозначним з точністю до порядку слідування множників.

Теорема 7. *Якщо многочлени $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, степені яких не перевищують натуральне число n, мають рівні значення більш ніж при n різних значеннях невідомої, тоді $f(x) = g(x)$.*

Нехай $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_n$ — многочлен степеня n над полем комплексних чисел зі старшим коефіцієнтом 1 і нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — всі його корені (кожен кратний корінь тут береться відповідне число разів). Тоді мають місце наступні рівності, які називаються *формулами Вієта*:

$$\begin{aligned}
&a_1 = -(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n),\\
&a_2 = \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \xi_2\xi_3 + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n,\\
&a_3 = -(\xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \cdots + \xi_{n-2}\xi_{n-1}\xi_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1} + \xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-2}\xi_n + \cdots + \xi_2\xi_3\cdots\xi_n),\\
&a_n = (-1)^n\xi_1\xi_2\cdots\xi_{n-1}\xi_n.
\end{aligned}$$

Теорема 8. *Нехай $f(x)$ — многочлен з дійсними коефіцієнтами. Якщо комплексне (але не дійсне) число α є коренем многочлена $f(x)$, тоді комплексно спряжене до нього число $\bar{\alpha}$ є також коренем цього многочлена, причому корені α і $\bar{\alpha}$ мають однакову кратність.*

Наслідок 4. *Нехай $f(x)$ — многочлен над полем комплексних чисел з дійсними коефіцієнтами і α — k-кратний корінь многочлена $f(x)$, який є комплексним (але не дійсним) числом. Тоді $f(x) = g(x)^k h(x)$, де*

$$g(x) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} \quad (\bar{\alpha} \text{ — комплексно спряжене до } \alpha), \tag{2}$$

$h(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами.

Теорема 9. *Будь-який многочлен над полем дійсних чисел однозначно (з точністю до порядку слідування множників) представляється у вигляді добутку свого старшого коефіцієнта, деякого числа лінійних многочленів вигляду $x - \alpha$, що відповідають дійсним кореням $f(x)$ та деякого числа многочленів другого степеня вигляду (2), що відповідають парам спряжених комплексних коренів.*

Многочлен $f(x)$ натурального степеня n над полем P називається *незвідним*, якщо $f(x)$ не представляється у вигляді добутку многочленів над полем P, степені яких менші за n.

Теорема 10. *Незвідними многочленами над полем комплексних чисел є лінійні многочлени і тільки вони.*

Теорема 11. *Незвідними многочленами над полем дійсних чисел є лінійні многочлени та многочлени другого степеня, що не мають дійсних коренів, і тільки вони.*

П р и к л а д и

1. Поділити многочлен $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на многочлен $g(x) = x - 1$.

Розв'язання. Оскільки $g(x)$ — лінійний многочлен зі старшим коефіцієнтом 1, то поділимо $f(x)$ на $g(x)$ за допомогою методу Горнера. Складемо таблицю (її називають *схемою Горнера*), в якій у першому рядку будуть розміщуватися коефіцієнти многочлена $f(x)$, починаючи зі старшого. А у другому — відповідні коефіцієнти частки і остачу, які будемо послідовно обчислювати, а також поруч зліва розмістимо корінь $g(x)$, тобто у нашому випадку 1.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1 \cdot 1 - 2 = -1$	$1 \cdot (-1) + 4 = 3$	$1 \cdot 3 - 6 = -3$	$1 \cdot (-3) + 8 = 5$

Таким чином, $x^3 - x^2 + 3x - 3$ — частка, а 5 — остача при діленні многочлена $f(x)$ на $g(x)$.

2. Розкласти многочлен $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ за степенями лінійного многочлена $x+1$ (тобто представити його у вигляді $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ для деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і a_0, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$).

Розв'язання. Нехай $f(x) = a_n(x+1)^n + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ для деяких $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Тоді очевидно, що $n = 4$ і a_0 — остача, а $f_1(x) = a_4(x+1)^3 + a_3(x+1)^2 + a_2(x+1) + a_1$ — частка при діленні многочлена $f(x)$ на $x+1$. Далі, аналогічно одержуємо, що a_1 — остача, а $f_2(x) = a_4(x+1)^2 + a_3(x+1) + a_2$ — частка при діленні $f_1(x)$ на $x+1$; a_2 — остача, а $f_3(x) = a_4(x+1) + a_3$ — частка при діленні $f_2(x)$ на $x+1$; нарешті, a_3 — остача, а $f_4(x) = a_4$ — частка при діленні $f_3(x)$ на $x+1$. Отже, для знаходження коефіцієнтів $a_0, \ldots, a_4$ потрібно послідовно ділити спочатку $f(x)$, а потім відповідні частки на $x+1$. Зробимо це за допомогою методу Горнера, використовуючи "розширену" схему Горнера.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	**1**
-1	1	0	-4	**4**	
-1	1	-1	$-\mathbf{3}$		
-1	1	$-\mathbf{2}$			
-1	**1**				

Виділені у таблиці числа є шуканими коефіцієнтами $a_0, \ldots, a_4$. Отже, $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

3. Визначити кратність кореня -2 многочлена $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$.

Розв'язання. Оскільки кратність кореня -2 многочлена $f(x)$ дорівнює максимальному серед натуральних чисел k таких, що $f(x)$ ділиться на $(x+2)^k$, то, як і в попередніх прикладах, використаємо метод Горнера для визначення цього числа.

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	**0**
-2	1	3	0	-4	**0**	
-2	1	1	-2	**0**		
-2	1	-1	**0**			
-2	1	$-\mathbf{3}$				

Отже, $f(x) = (x+2)^4(x-1)$. Звідси одержуємо, що кратність кореня -2 многочлена $f(x)$ дорівнює 4.

4. Довести, що для довільного натурального числа n більшого трьох, 1 є трикратним коренем многочлен $f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$.

Розв'язання. Переконаємось спочатку, що 1 є коренем многочлена $f(x)$: $f(1) = 1^{2n} - n \cdot 1^{n+1} + n \cdot 1^{n-1} - 1 = 0$.

Далі обчислимо перші три похідні многочлена $f(x)$, а потім відповідно значення цих похідних при значенні невідомої $x = 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + (n-1)nx^{n-2}, \\ f''(x) &= (2n-1)2nx^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + (n-2)(n-1)nx^{n-3}, \\ f'''(x) &= (2n-2)(2n-1)2nx^{2n-3} - (n-1)n^2(n+1)x^{n-2} + \\ &\quad + (n-3)(n-2)(n-1)nx^{n-4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 2n - n(n+1) + (n-1)n = 0,\\
f''(1) &= (2n-1)2n - n^2(n+1) + (n-2)(n-1)n = 0,\\
f'''(1) &= (2n-2)(2n-1)2n - (n-1)n^2(n+1) +\\
&\qquad +(n-3)(n-2)(n-1)n = 2n^3 - n^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Звідси і з теореми 5 випливає, що -1 є трикратним коренем многочлена $f(x)$.

5. Знайти суму квадратів коренів многочлена $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ над полем комплексних чисел.

Розв'язання. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — всі корені, вказаного в умові многочлена. Тоді

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 = (\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)^2 -$$
$$-2(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \cdots + \xi_1\xi_n + \cdots + \xi_{n-1}\xi_n) = (-a_1)^2 - 2a_2 = a_1^2 - 2a_2.$$

6. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x) = x^4 + 4$ над полем дійсних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $f(x)$ на лінійні множники над полем комплексних чисел. Для цього знайдемо корені цього многочлена. Ними, очевидно, є корені четвертого степеня з -4:

$$\xi_1 = 1 + i, \quad \xi_2 = -1 + i, \quad \xi_3 = 1 - i, \quad \xi_4 = -1 - i.$$

Тоді

$$x^4 + 4 = \Big((x-1-i)(x-1+i)\Big)\Big((x+1-i)(x+1+i)\Big) =$$
$$= \left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Многочлени $x^2 - 2x + 2$, $x^2 + 2x + 2$ є незвідними над полем дійсних чисел, оскільки не мають дійсних коренів, а тому не розкладаються у добуток дійсних лінійних множників.

В п р а в и

1. За допомогою методу Горнера обчислити значення $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x = c$, якщо:

а) $f(x) = 5x^5 - 19x^3 - 7x^2 + 9x + 3, \quad c = 2;$

б) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + x + 33, \quad c = -2;$

в) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7, \quad c = -2 - i.$

2. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями $x - c$ і знайти значення його похідних при $x = c$, якщо:

а) $f(x) = x^5, \quad c = 1;$

б) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad c = 2;$

в) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1 + i)x^2 - 3x + 7 + i, \quad c = -i;$

г) $f(x) = x^4 + (3 - 8i)x^3 - (21 + 18i)x^2 - (33 - 20i)x + 7 + 18i,$ $c = -1 + 2i.$

3. Визначити кратність кореня c многочлена $f(x)$:

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, \quad c = 2;$

б) $f(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, \quad c = 3.$

4. При якому значенню a корінь -1 многочлена $x^5 - ax^2 - ax + 1$ має кратність не менше двох?

5. При яких значення a і b многочлен а) $ax^4 + bx^3 + 1$; б) $ax^n + bx^{n-1} + 1$ ділиться на $(x - 1)^2$?

6. Знайти умову, при якій многочлен $x^5 + ax^3 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ має ненульовий корінь кратності два.

7. Довести, що многочлен $1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$ не має кратних коренів.

8. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x)$ над полем комплексних чисел, якщо:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$ б) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1;$

в) $f(x) = x^8 + 27x^2;$ г) $f(x) = x^4 + 10x^2 + 1.$

9. Розкласти на незвідні множники многочлен $f(x)$ над полем дійсних чисел, якщо:

а) $f(x) = x^6 + 27$; б) $f(x) = x^{2n} - 2x^n + 2$;

в) $f(x) = x^{2n} + x + 1$; г) $f(x) = x^4 - ax^2 + 1$ $(-2 < a < 2)$;

д) $f(x) = x^6 - x^3 + 1$; г) $f(x) = x^{12} + x^8 + x^4 + 1$.

10. Побудувати многочлен над полем комплексних чисел найменшого степеня по заданим кореням:

а) 1 — двократний корінь, $2, 3, 1 + i$ — прості корені;

б) i — трикратний корінь, $-1, -i$ — прості корені.

11. Побудувати многочлен над полем дійсних чисел найменшого степеня по заданим (комплексним) кореням:

а) 1 — двократний корінь, $2, 3, 1 + i$ — прості корені;

б) $(2 - 3i)$ — трикратний корінь, $-i$ — простий корінь.

12. Довести, що многочлен $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ для довільних натуральних чисел m, n і p ділиться на многочлен $x^2 + x + 1$.

13. При якій умові многочлен $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ділиться на многочлен $x^2 - x + 1$?

14. Многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ має корені ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., ξ_n. Які корені мають многочлени:

а) $a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} - \cdots + (-1)^na_0$;

б) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$;

в) $a_nx^n + a_{n-1}bx^{n-1} + a_{n-1}b^2x^{n-2} + \cdots + a_0b^n$.

15. Знайти співвідношення між коефіцієнтами многочлена $x^3 + px^2 + qx + r$, у якого один із коренів дорівнює сумі двох інших.

16. Визначити λ таким чином, щоб один із коренів многочлена $x^3 - 7x + \lambda$ був би у два рази більший за інший його корінь

17. Сума двох коренів многочлена $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$ дорівнює 1. Визначити λ.

18. Визначити a, b, c таким чином, щоб вони були розв'язками рівняння $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

§17. Незвідні многочлени. Многочлени над полем раціональних чисел

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P. Многочлен $f(x) \in P[x]$ степеня n ($n \in \mathbb{N}$) називається *звідним над полем* P, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається *незвідним над полем* P.

***Зауваження* 1.** Наведене вище означення незвідного многочлена еквівалентне означенню незвідного многочлена, даного в попередньому параграфі (довести це самостійно).

Властивості незвідних многочленів над полем P:

I. *Довільний многочлен першого степеня є незвідним.*

II. *Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, тоді для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.*

III. *Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.*

IV. *Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих множників ділиться на $p(x)$.*

Теорема 1. *Довільний многочлен $f(x)$ степеня n ($n \in \mathbb{N}$) із кільця $P[x]$ розкладається в добуток незвідних множників (тобто представляється у вигляді добутку незвідних многочленів над полем P).*

Теорема 2. *Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:*

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

тоді $s = t$ і існує підстановка δ степеня s така, що $p_i(x) = c_i q_{\delta(i)}(x)$ $(i = 1, \dots, s)$, де $c_1, \dots, c_s$ — деякі ненульові елементи поля P.

Наслідок 1. *Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ однозначно з точністю до порядку слідування множників розкладається у добуток незвідних многочленів, старші коефіцієнти яких дорівнюють одиниці:*

$$f(x) = a_0 p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x), \tag{1}$$

де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$. Тоді існує натуральне число k таке, що многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ і не ділиться на многочлен $p(x)^{k+1}$. У цьому випадку многочлен $p(x)$ називають *k-кратним множником для $f(x)$*. Якщо незвідний многочлен $p(x)$ є однократним множником для многочлена $f(x)$, то його ще називають *простим* множником.

Нехай у розкладі (1) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\dots$, $p_l(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним множником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \dots, l)$, то розклад (1) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_l^{k_l}(x). \tag{2}$$

Теорема 3. *Якщо дано розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$.*

Теорема 4. *Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним множником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$, тоді він є $(k-1)$-кратним множником похідної цього многочлена. Якщо ж $p(x)$ — простий множник многочлена $f(x)$, тоді многочлени $f'(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості.*

Нехай $f(x)$ — многочлен над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Якщо всі коефіцієнти цього многочлена $f(x)$ є цілими числами, то $f(x)$ надалі називатимемо *цілочисловим* многочленом.

Теорема 5 (Ейзенштейн). *Нехай задано цілочисловий многочлен*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{Q}[x].$$

Якщо існує ціле просте число p таке, що:

1) *старший коефіцієнт a_0 не ділиться на p,*
2) *всі інші коефіцієнти діляться на p,*
3) *вільний член a_n не ділиться на p^2,*

тоді многочлен $f(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

Наслідок 2. *Для будь-якого натурального числа n існує незвідний многочлен степеня n над полем раціональних чисел.*

Теорема 6. *Якщо ціле число α є коренем цілочислового многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, тоді α є дільником вільного члена цього многочлена. Причому, якщо $\alpha \neq \pm 1$, тоді раціональні числа $\frac{f(1)}{\alpha-1}$ і $\frac{f(-1)}{\alpha+1}$ є цілими числами.*

Теорема 7. *Якщо цілочисловий многочлен, старший коефіцієнт якого дорівнює одиниці, має раціональний корінь, то цей корінь є цілим числом.*

Теорема 8. *Нехай*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Q}[x]$$

— цілочисловий многочлен степеня n і $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — всі цілі корені многочлена

$$g(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_0a_2x^{n-2} + \cdots + a_0^{n-2}a_{n-1}x + a_0^{n-1}a_n.$$

Тоді $\frac{\xi_1}{a_0}, \ldots, \frac{\xi_k}{a_0}$ — всі раціональні корені многочлена $f(x)$.

П р и к л а д и

1. Нехай p — довільне натуральне просте число. Довести, що многочлен $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Розв'язання. Нехай $g(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ — довільний многочлен над полем $\mathbb{Q}$. Для будь-якого елемента $c \in \mathbb{Q}$ позначимо через $g(x+c)$ многочлен

$$a_n \cdot (x+c)^n + a_{n-1} \cdot (x+c)^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot (x+c) + a_0.$$

Якщо $g(x) = u(x)v(x)$ для деяких многочленів $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$, тоді

$$g(x+c) = u(x+c) \cdot v(x+c) \tag{3}$$

для будь-якого $c \in \mathbb{Q}$. Дійсно, $g(\gamma) = u(\gamma)v(\gamma)$ для довільного $\gamma \in \mathbb{Q}$ (див. теорему 1 §16), а тому

$$g(\gamma+c) = u(\gamma+c) \cdot v(\gamma+c)$$

для довільного $\gamma \in \mathbb{Q}$. Звідси і теореми 7 §16 випливає (3).

Очевидно, $(x-1)\cdot f_p(x) = x^p - 1$. Звідси

$$x\cdot f_p(x+1) = (x+1)^p - 1 =$$
$$= x^p + C_p^{p-1}x^{p-1} + C_p^{p-2}x^{p-2} + \cdots + C_p^1 x + 1 - 1 =$$
$$= x(x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-3}x^{p-2} + \cdots + C_p^1).$$

Звідси за теоремою 2 одержимо рівність

$$f_p(x+1) = x^{p-1} + C_p^{p-1}x^{p-2} + C_p^{p-3}x^{p-2} + \cdots + C_p^1. \qquad (4)$$

За теоремою Ейзенштейна многочлен, що стоїть у правій частині рівності (4), є незвідним над полем $\mathbb{Q}$, оскільки для довільного $j \in \{1,\dots,p-1\}$ коефіцієнт C_p^j ділиться на p, а вільний член $C_p^1 = p$ не ділиться на p^2. А отже, многочлен $f_p(x+1)$ є незвідним над $\mathbb{Q}$. Це в свою чергу означає, що і многочлен $f_p(x)$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$.

2. Знайти раціональні корені многочлена $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Розв'язання. Оскільки многочлен $f(x)$ є цілочисловим многочленом зі старшим коефіцієнтом 1, то за теоремою 8 всі раціональні корені цього многочлена є цілими числами. А тому за теоремою 6 їх треба шукати серед дільників його вільного члена. Цих дільників небагато: ± 1, ± 2, ± 7, ± 14. За допомогою схеми Горнера обчислимо спочатку значення многочлена $f(x)$ при $x = \pm 1$.

	1	-6	15	-14
1	1	-5	10	$-\mathbf{4}$
-1	1	-7	22	$-\mathbf{36}$

Далі серед дільників ± 2, ± 7, ± 14 виберемо такі дільники d, щоб числа $\frac{f(1)}{d-1}$, $\frac{f(-1)}{d+1}$ були цілими. Цій умові задовольняє лише один із цих дільників, а саме 2. Обчислимо значення многочлена $f(x)$ при $x = 2$.

	1	-6	15	-14
2	1	-4	7	**0**

Отже, 2 — єдиний раціональний корінь многочлена $f(x)$.

В п р а в и

1. Нехай P — підполе поля F і $g(x) \in P[x]$. Які з наступних тверджень істинні:

а) якщо $g(x)$ — незвідний многочлен над полем P, тоді він є незвідним над F;

б) якщо $g(x)$ — незвідний многочлен над полем F, тоді він є незвідним над P;

в) якщо $g(x)$ — звідний многочлен над полем P, тоді він є звідним над F;

г) якщо $g(x)$ — звідний многочлен над полем P, тоді він є звідним над F?

2. Нехай F — поле. Довести, що многочлен степеня 2 або 3 є незвідним над F тоді і тільки тоді, коли він має корінь в F. Чи істинне дане твердження для многочлена степеня 4?

3. Нехай $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ — незвідний многочлен над $\mathbb{Q}$. Довести, що $f(x)$ не має кратних комплексних коренів.

4. Користуючись теоремою Ейзенштейна, довести незвідність многочленів над $\mathbb{Q}$:

а) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; б) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$;

в) $x^4 - x^3 + 2x + 1$; г) $x^{(p-1)p^k} + x^{(p-2)p^k} + \cdots + x^{p^k} + 1$,

де p — просте натуральне число, $k \in \mathbb{N}$.

5. Методом розкладу на множники значень многочлена при цілих значеннях невідомої розкласти на множники многочлени або довести їх незвідність: а) $x^4 - 3x^2 + 1$; б) $x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$.

6. Довести, що цілочисловий многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ є незвідним над полем $\mathbb{Q}$, якщо він не має цілих коренів і не ділиться на жоден многочлен вигляду $x^2 + \frac{cm-am^2}{d-m^2}x + m$, де m — дільник числа d.

7. За допомогою попередньої задачі розкласти на множники многочлени або довести їх незвідність:

а) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$; б) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 6$.

8. Довести, якщо нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем цілочислового многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, тоді:

а) q є дільником числа a_n;

б) p є дільником числа a_0;

в) $p - mq$ є дільником числа $f(m)$ для довільного цілого числа m.

9. Знайти раціональні корені многочленів:

а) $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

б) $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

в) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$;

г) $24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$;

д) $10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$;

е) $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8$.

10. Довести, що цілочисловий многочлен $f(x)$ не має цілих коренів, якщо $f(0)$ і $f(1)$ — непарні числа.

11. Знайти найбільший спільний дільник многочленів:

а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x+4)$ і $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

б) $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ і $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

в) $x^n - 1$ і $x^m - 1$ $(n, m \in \mathbb{N})$.

§18. Кільце многочленів від декількох невідомих. Симетричні многочлени

Нехай P — довільне поле. *Одночленом від невідомих* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P називається алгебраїчний вираз вигляду $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$, де a із P, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — деякі невід'ємні цілі числа. Показники $k_1, k_2, \ldots, k_n$ називаються *степенями одночлена відносно відповідних невідомих*, а число $k_1+k_2+\cdots+k_n$ — називається *степенем одночлена*. Позначимо через X n-вимірний вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, через K — вектор $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, а через X^K — одночлен вигляду $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$.

Многочленом від невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P називається алгебраїчний вираз, що є формальною сумою одночленів від цих невідомих, тобто вираз вигляду

$$a_1X^{K_1} + a_2X^{K_2} + \cdots + a_tX^{K_t}, \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_t \in P$, а $K_1, K_2, \ldots, K_t$ — деякі попарно різні n-вимірні вектори з невід'ємними цілими компонентами. *Степенем многочлена* (1) називається максимальний із степенів одночленів, що його складають.

Многочлени

$$f(X) = a_1X^{K_1} + a_2X^{K_2} + \cdots + a_tX^{K_t}, \tag{2}$$

$$g(X) = b_1X^{L_1} + b_2X^{L_2} + \cdots + a_sX^{L_s}, \tag{3}$$

називаються *рівними*, якщо $s = t$ і знайдеться підстановка δ степеня t така, що

$$a_i = b_{\delta(i)}, \quad K_i = L_{\delta(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Зауваження 1. Тобто многочлени $f(X)$ і $g(X)$ рівні тоді і тільки тоді, коли вони складені із однакових одночленів, розміщених можливо в різному порядку.

Далі, якщо перепозначити коефіцієнти многочленів (2) і (3) наступним чином:

$$a_{K_i} = a_i, \quad (i = 1, \ldots, t); \quad b_{L_j} = b_j, \quad (j = 1, \ldots, s),$$

то ці многочлени можна записати у вигляді

$$f(X) = \sum_{K \in \mathcal{K}} a_K X^K, \quad g(X) = \sum_{L \in \mathcal{L}} b_L X^L,$$

де $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \ldots, K_t\}$, $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_s\}$.

Сумою многочленів $f(X)$ і $g(X)$ називається многочлен

$$f(X)+g(X)=\sum_{M\in\mathcal{M}} c_M X^M, \tag{4}$$

де $\mathcal{M}=\mathcal{K}\cup\mathcal{L}$, $c_M=a_M+b_M$ $(M\in\mathcal{M})$, вважаючи $a_M=0$ $(b_M=0)$, якщо $M\notin\mathcal{K}$ $(M\notin\mathcal{L})$.

Добутком многочленів $f(X)$ і $g(X)$ називається многочлен

$$f(X)\cdot g(X)=\sum_{M\in\mathcal{N}} d_M X^M, \tag{5}$$

де $\mathcal{N}=\{K+L\mid K\in\mathcal{K},\ L\in\mathcal{L}\}$,

$$d_M=\sum_{K+L=M} a_K b_L \quad (M\in\mathcal{M}).$$

Теорема 1. *Множина $P[x_1,x_2,\dots,x_n]$ всіх многочленів від невідомих x_1, x_2, ..., x_n над полем P із введеними на ній відношенням рівності та бінарними алгебраїчними операціями додавання і множення многочленів є комутативним кільцем з одиницею.*

Теорема 2. *Степінь добутку двох ненульових многочленів із кільця $P[x_1,\dots,x_n]$ дорівнює сумі степенів перемножуваних многочленів.*

Многочлен $g(X)\in P[x_1,\dots,x_n]$ називається *дільником* многочлена $f(X)\in P[x_1,\dots,x_n]$, якщо існує многочлен $h(X)\in P[x_1,\dots,x_n]$ такий, що $f(X)=g(X)\cdot h(X)$.

Многочлен $f(X)\in P[x_1,\dots,x_n]$ степеня k $(k\in\mathbb{N})$ називається *незвідним*, якщо він не представляється у вигляді добутку двох многочленів, степені яких менші за k.

Теорема 3. *Будь-який многочлен із кільця $P[x_1,\dots,x_n]$ натурального степеня розкладається у добуток незвідних многочленів. Цей розклад є однозначним з точністю до множників нульового степеня і порядку слідування незвідних множників.*

Нехай

$$f(X)=\sum_{K\in\mathcal{K}} a_K X^K \quad (a_K\in P,\ K\in\mathcal{K}) \tag{6}$$

— многочлен від невідомих x_1, ..., x_n $(X=(x_1,\dots,x_n))$ над полем P, де $\mathcal{K}$ — деяка скінченна множина n-вимірних векторів із цілими невід'ємними компонентами. Припустимо, що

$$a_{(k_1,k_2,\dots,k_n)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}, \tag{7}$$

$$a_{(l_1,l_2,\ldots,l_n)}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} \tag{8}$$

— два різні одночлени, які входять у многочлен $f(X)$, з ненульовими коефіцієнтами. Кажуть, що одночлен (7) *вище* одночлена (8), якщо існує таке число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, що

$$k_1 = l_1,\ k_2 = l_2,\ \ldots,\ k_{i-1} = l_{i-1},\ k_i > l_i.$$

Запис многочлена $f(X)$, у якому кожен одночлен вище наступного, називається *лексикографічним* записом многочлена $f(X)$. Перший одночлен у лексикографічному записі $f(X)$ називається *вищим одночленом* многочлена $f(X)$.

Теорема 4. *Вищий одночлен добутку двох многочленів від n невідомих дорівнює добутку вищих одночленів співмножників.*

Многочлен $f(X)$ (див. (6)) називається *симетричним*, якщо для будь-якого вектора $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathcal{K}$ і для будь-якої підстановки δ степеня n виконуються умови:

$$L = (k_{\delta(1)}, k_{\delta(2)}, \ldots, k_{\delta(n)}) \in \mathcal{K}, \qquad a_L = a_K.$$

Зауваження 2. Тобто многочлен $f(X)$ є симетричним, якщо він не змінюється при всіх перестановках невідомих x_1, x_2, …, x_n.

Теорема 5. *Многочлени*

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
&\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sigma_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + \cdots + x_2x_3\cdots x_n,\\
&\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

є симетричними многочленами із кільця $P[x_1, \ldots, x_n]$.

Многочлени, приведені у теоремі 5, називаються *елементарними симетричними многочленами* від невідомих x_1, x_2, …, x_n.

Якщо $g_1(X)$, $g_2(X)$, …, $g_n(X)$ — деякі многочлени із кільця $P[x_1, \ldots, x_n]$, то для многочлена

$$f(X) = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathcal{K}} a_{(k_1,\ldots,k_n)}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n} \quad (a_{(k_1,\ldots,k_n)} \in P)$$

через $f(g_1, g_2, \dots g_n)$ будемо позначати многочлен

$$\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in\mathcal{K}} a_{(k_1,\dots,k_n)} \cdot g_1(X)^{k_1} \cdot g_2(X)^{k_2} \cdots g_n(X)^{k_n}. \tag{9}$$

Якщо ж для многочлена $h(X) \in P[x_1, \dots, x_n]$ і деяких многочленів $g_1(X)$, $g_2(X)$, $\dots$, $g_n(X) \in P[x_1, \dots, x_n]$ існує представлення $h(x)$ у вигляді (9), то кажуть, що многочлен $h(X)$ є многочленом від $g_1(X)$, $g_2(X)$, $\dots$, $g_n(X)$.

Теорема 6. *Будь-який многочлен від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, $\dots$, σ_n із коефіцієнтами із поля P, розглядуваний як многочлен від невідомих x_1, x_2, $\dots$, x_n є симетричним.*

Теорема 7. *Будь-який симетричний многочлен із кільця $P[x_1, x_2, \dots, x_n]$ є многочленом від елементарних симетричних многочленів σ_1, σ_2, $\dots$, σ_n цього кільця.*

Наслідок 1.*Будь-який симетричний многочлен від коренів многочлена $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ є многочленом від коефіцієнтів a_0, a_1, $\dots$, a_{n-1}.*

П р и к л а д и

1. Чи є незвідним многочлен $f(x, y) = 3x^2 + y$ із кільця $\mathbb{Q}[x, y]$?

Розв'язання. Припустимо, що многочлен $f(x, y)$ є звідним. Оскільки $f(x, y)$ — многочлен другого степеня, тоді він розкладається у добуток многочленів першого степеня:

$$3x^2 + y = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2)$$

де $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ $(i = 1, 2)$. Звідси

$$\begin{aligned} 3x^2 + y \;=\; & a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)xy + b_1b_2y^2 + \\ & +(a_1c_2 + a_2c_1)x + (b_1c_2 + b_2c_1)y + c_1c_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Із рівності (10) многочленів випливає система рівностей

$$a_1a_2 = 3, \tag{11}$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = 0, \tag{12}$$

$$b_1b_2 = 0, \tag{13}$$

$$b_1c_2 + b_2c_1 = 1. \tag{14}$$

Із рівностей (11–13) слідує, що $b_1 = b_2 = 0$, що в свою чергу суперечить рівності (14). Одержане протиріччя доводить незвідність многочлена $3x^2 + y$.

2. Виразити через елементарні симетричні многочлени симетричний многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$ із кільця $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$.

Розв'язання. Вищим одночленом многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ є одночлен $x_1^2x_2$ із степенями 2, 1, 0 відповідно відносно невідомих x_1, x_2, x_3. Тоді цей одночлен співпадає з вищим одночленом симетричного многочлена

$$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2 =$$
$$= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + 3x_1x_2x_3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.$$

Покладемо $f_1(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - \sigma_1\sigma_2 = -3x_1x_2x_3$. Очевидно, $f_1(x_1, x_2, x_3) = -3\sigma_3$. Тому $f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ є шуканим представлення $f(x_1, x_2, x_3)$ у вигляді многочлена від елементарних симетричних многочленів.

В п р а в и

1. Знайдіть всі оборотні елементи в кільці $\mathbb{Q}[x, y]$.

2. Чи незвідні в $\mathbb{Q}[x, y]$ наступні многочлени:

а) $x^2 + y^2 - 1$; б) $x^2 + y^2 - 2xy$?

3. Розкласти наступні многочлени на незвідні множники в кільці $\mathbb{C}[x, y, z]$:

а) $x^2 + y^2$; б) $x^2 + y^2 + 2x + 1$;

в) $x^4 + y^4$; д) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

4. Чи має місце аналог теореми 3 §15 для многочленів кільця $\mathbb{Q}[x, y]$?

5. Які із наступних многочленів є симетричними в кільці $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$:

а) $3x_1^2 + x_2 + 3x_3^2$; б) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$;

в) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$; д) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$?

6. Записати в лексикографічному порядку многочлен $x_2^8x_3^6 + 5x_1^3x_2^2x_3 - 8x_1^2x_2^5x_3 - x_1^3$.

7. Знайти вищі одночлени многочленів:

а) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^4)$;

б) $2\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_3^2$, де $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

8. Виразити через елементарні симетричні многочлени наступні многочлени від невідомих x_1, x_2, x_3:

а) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

б) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_2^2x_3^2 - 2x_1^2x_3^2$;

в) $x_1^5x_2^2 + x_1^2x_2^5 + x_1^5x_3^2 + x_1^2x_3^5 + x_2^5x_3^2 + x_2^2x_3^5$;

г) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)$;

д) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;

е) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

9. Виразити через елементарні симетричні многочлени наступні многочлени від невідомих x_1, x_2, x_3, x_4:

а) $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;

б) $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$.

10. Виразити через елементарні симетричні многочлени многочлен $\sum\limits_{i>j}(x_i - x_j)^2$ від невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

11. Знайти суму кубів комплексних коренів многочлена $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 1$.

12. Знайти значення елементарних симетричних многочленів від комплексних коренів n-го степеня з одиниці.

13. Обчислити суму кубів коренів n-го степеня з одиниці.

14. Довести, що якщо $a + b + c = 0$, тоді $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

15. *Дискримінантом* многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ називається вираз

$$a_0^{2n-2}\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2,$$

де x_1, x_2, $\ldots$, x_n — корені цього многочлена. Обчислити дискримінанти многочленів

а) $ax^2 + bx + c$; б) $x^3 + px + q$; в) $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Література

1. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981.
3. *Дрозд Ю.А., Кириченко В.В.* Конечномерные алгебры. – К.: Вища школа, 1980.
4. *Завало С.Т.* Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985.
5. *Калужнин Л.А.* Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
6. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982.
7. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971.
9. *Скорняков Л.А.* Элементы общей алгебры. – М.: Наука, 1983.
10. *Фаддеев Д.К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
11. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1974.
12. *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Наука, 1977.
13. Сборник задач по алгебре / Под редакцией Кострикина А.И. – М.: Наука, 1987.
14. Сборник задач по алгебре и теории чисел / *Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А.* – М.: Просвещение, 1993.

ГУДИВОК Петро Михайлович

ПОГОРІЛЯК Євгенія Яківна

ШАПОЧКА Ігор Валерійович

ПРАКТИКУМ З АЛГЕБРИ І ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ПЕРШОГО КУРСУ

Підписано до друку 12.12.2001 Формат $60 \times 84/16$. Офсетний друк.
Умов. друк. арк. Облік.-вип. арк. Замовлення №
Тираж 100 екз.

Видавництво Ужгородського національного університету
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18