УДК 519.87
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).86-93

Є. В. Івохін [1], Л. Т. Аджубей [2]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ,
професор кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень,
доктор фізико-математичних наук, професор
ivohin@univ.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5826-7408

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ,
доцент кафедри обчислюваної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
adzhubey@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8487-0884

ПРО ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ ОПИСУ ДИНАМІКИ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Дифузійний характер інформаційних процесів дозволяє з успіхом використовувати математичні моделі процесів проникнення для моделювання динаміки змін у рівнях розповсюдження та впливу інформації в цільових групах.

В даній роботі запропоновано підхід до формалізації гібридних математичних моделей динаміки розповсюдження інформаційних процесів в деякій цільовій (соціальній або регіональній) групі населення. Наведено математичне обґрунтування процесу формалізації розповсюдження інформації на основі однорідних моделей дифузії. Для підвищення адекватності та достовірності побудованих моделей застосовуються гібридні системи, що складаються з моделей дифузії та динамічних моделей, які описують процес зміни чисельності контингенту середовища поширення інформації. Запропонована методика дозволяє моделювати та імітувати у часі рівні інформаційного впливу та запам'ятовування на основі розв'язування дифузійного рівняння, зміна інтервалів поширення в яких визначається за допомогою додаткових співвідношень у вигляді системи диференціальних рівнянь. Розглянуто скалярний розв'язок для одновимірного подання контингенту цільової групи. Наведено приклади застосування даного підходу, проаналізовано результати чисельних експериментів.

Ключові слова: інформація, розповсюдження, метод аналогій, дифузійні моделі, гібридність.

1. Вступ. Сучасні інформаційні потоки представляють собою процеси, що генерують інформацію, яка розрахована на конкретного споживача, має, як правило, чітко задану предметну або цільову направленість, що визначається областю інтересів людини. При цьому ступінь сприйняття (впливу) інформації формується на основі рівнів запам'ятовування конкретно обраного варіанту з декількох можливих і рівноправних [1].

З іншого боку, кількість отриманої інформації суттєво перевищує споживчі можливості. Різні варіанти ідей та думок повинні конкурувати за обмежену увагу споживача, враховуючи складні зміни в соціальному середовищі. І, як наслідок, особливий інтерес отримують методи, що досліджують та використовують моделі динаміки для опису процесів розповсюдження інформації.

Для формалізації і дослідження процесів розвитку в часі інформаційного розповсюдження та впливу на соціум необхідно використовувати принципово новий інструментарій, який дозволить адекватно відображати стан динамічної складової процесу розповсюдження інформації [2]. При цьому, розробка нових підходів не скасовує методик використання класичних способів аналізу та обробки динамічних процесів, що формулюється у вигляді так званого механістичного підходу і грунтується на ідеї застосування методу аналогій [3-5].

Очевидно, що з урахуванням дифузійного характеру інформаційних процесів для моделювання змін у рівнях розповсюдження та впливу інформації в цільових групах з успіхом можна використовувати математичні моделі процесів проникнення (дифузії) скалярного та двовимірного вигляду [3-5].

Виходячи з того, що існує багато варіантів математичних моделей розповсюдження інформаційних потоків та їх впливу на цільові соціальні групи, в даній роботі детально розглянуто один з способів формалізації інформаційних процесів, в основу якого покладено застосування гібридних моделей дифузії.

2. Математичне обґрунтування процесу формалізації розповсюдження інформації на основі однорідних моделей дифузії. Для обґрунтування опису процесів інформаційного поширення за допомогою методу аналогій на основі рівнянь дифузійного типу скористаємось наступним підходом.

Будемо припускати, що розглядається динамічна система, стани якої описуються змінними $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, зміна яких у часі може бути описана системою стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx_i(t) = f(x(t),t)x_i(t)dt + \sigma_i(x(t),t)x_i(t)dw_i(t), \tag{1}$$

де $(w_1(t),\ldots,w_n(t))$ – стандартний вінеровський процес.

Під розв'язком рівняння (1) будемо розуміти сукупність функцій $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, що задовольняють інтегральним рівнянням

$$x_i(t) = x_i^0 + \int\limits_0^t f(x(\tau),\tau)x_i(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \sigma_i(x(\tau),\tau)x_i(\tau)d\tau, \tag{2}$$

де $x_i^0 = x_i(0)$, $i = \overline{1,n}$.

Вважаємо, що існує розв'язок рівняння (1) на довільному скінченому відрізку $(0,T)$. Введемо функцію

$$V(s,y) = E\left[\int\limits_s^T \varphi(x_{s,y}(\tau),\tau)d\tau + \Phi(x_{s,y}(T))\,\Big|_{x_{s,y}(s)=y}\right],$$

де $x_{s,y}(\tau)$ – розв'язок рівняння (1) з початковою умовою $x_{s,y}(s) = y$, $\varphi(x,\tau)$ та $\Phi(x)$ – деякі функції, для яких відповідні середні існують та інтегровані на $(0,T)$.

Припустимо далі, що функція $V(s,y)$ один раз неперервно диференційована по s та два рази неперервно диференційована по змінній y. Тоді функція $V(s,y)$ є розв'язком дифузійного рівняння [3]

$$\frac{\partial V(s,y)}{\partial s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V(s,y)}{\partial y_k} f_k(y,t)y_k +$$

$$+1/2\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(y,t)y_k \frac{\partial^2 V(s,y)}{\partial y_k^2} + \varphi(y,t) = 0,$$

$$V(T, y) = \Phi(y). \tag{3}$$

У випадку, коли функції $f_k(\cdot)$, $\sigma_k(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ незалежні від t, функція $V(s, y)$ має вигляд $V(s, y) = E\int\limits_s^\infty \varphi(x_{s,y}(\tau))d\tau|_{x_{s,y}(s)=y} = E\int\limits_0^\infty \varphi(x(\tau))d\tau|_{x(0)=y}$ і не залежить від змінної s.

Рівняння (3) перепишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} f_k(y)y_k + 1/2\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(y)y_k \frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2} + \varphi(y) = 0. \tag{4}$$

Будемо апроксимувати розв'язок системи рівнянь (1) розв'язком системи різницевих рівнянь вигляду

$$x_i(k+1) = x_i(k) + (f(x(k))\Delta t_k + \sigma_i(x(k))\eta_i(k))x_i(k),\ i = \overline{1, n}, \tag{5}$$

де $x_i(k) = x_i(t_k)$, $x_i(0) = x_i^0$, $\eta_i(k) = w_i(t_{k+1}) - w_i(t_k)$, $i = \overline{1, n}$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Послідовність випадкових векторів $\xi_k = (x_1(k), \ldots, x_n(k))^T$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ утворює ланцюг Маркова, щільність переходу в якому $p(x(k+1)|x(k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, є гаусовою та має вигляд

$$p(x|x(k)) = (2\pi)^{-n/2}(det\Sigma_k)^{-1/2}exp\left\{-1/2({\Sigma_k}^{-1}((x - a_k), (x - a_k)))\right\}, \tag{6}$$

де $a_k = Ex(k+1)|x(k)$ – умовне середнє, а $\Sigma_k = E(x(k+1)-a_k)(x(k+1)-a_k)^T|x(k)$ є умовною кореляційною матрицею.

Позначимо через $f(y)$ – вектор з компонентами $f_i(y)y_i$, $i = \overline{1, n}$. Тоді $a_k = f(y)\Delta t_k + y$, $\Sigma_k = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\Delta t_k$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\delta_{ii} = \sigma_i^2(y)y_i^2$, $i = \overline{1, n}$.

Для функціоналу $I(x(\cdot)) = E\int\limits_0^T \varphi(x(t))dt$, введемо апроксимацію у вигляді $I_N(x(0), \ldots, x(t_N)) = E\sum\limits_{k=0}^{N} \varphi(x(t_k))\Delta t_k$.

Позначимо через $V_s^{(N)}(y) = E\sum\limits_{k=s}^{N} \varphi(x(t_k))\Delta t_k|x(t_s) = y$. Тоді для функції $V_s(y)$ одержимо рекурентне рівняння

$$V_s^{(N)}(y) = EV_{s+1}^{(N)}(y + f(y))\Delta t_s + \eta_s) + \varphi(y)\Delta t_s, \tag{7}$$

$$V_N^{(N)}(y) = \varphi(y)\Delta t_N,$$

де $\eta_s = (\eta_s(1), \ldots, \eta_s(n))^T$, $\eta_s(i) = \sigma_i(y)y_i(w_i(t_{s+1}) - w_i(t_s))$.

З врахуванням виразу (6) рівняння (7) може бути переписане у вигляді

$$V_s^{(N)}(y) = \int\limits_{R^n} V_{s+1}^{(N)}(x)p(x|x(s))dx + \varphi(y)\Delta t_s.$$

Виходячи з цього, будемо мати

$$E\sum_{k=0}^{N} \varphi(x(t_k))\Delta t_k = \int\limits_{R^n} V_0^{(N)}(x_0)p(x_0)dx_0,$$

де $x_0 = x(t_0)$, $p(x_0)$ – щільність розподілу x_0.

Якщо x_0 детермінована, то $E\sum\limits_{k=0}^{N}\varphi(x(t_k))\Delta t_k = V_0^{(N)}(x_0)$.

Враховуючи рівняння (4) й те, що $V(x_0) = E\int\limits_0^\infty \varphi(x(t))dt|x(0) = x_0$, будемо мати апроксимацію $\int\limits_{R^n} V(x_0)p(x_0)dx_0 \approx \int\limits_{R^n} V_0^N(x_0)p(x_0)dx_0$.

Розглянемо далі одновимірний випадок. Нехай скалярна функція є розв'язком рівняння

$$dx(t) = (a(t) + b(t)x(t))x(t)dt + \sigma(t)x(t)dw(t),\ x(0) = x_0, \tag{8}$$

де $w(t)$ – стандартний процес Вінера.

Будемо вважати, що x_0 додатна величина. Розглянемо величину

$$E\left(\frac{x_0(T)}{x(T)} - x_3\right)^2 = g(T),$$

де $x_0(T) = L - x(T)$, L – деяка константа.

Введемо функцію $y(t) = x^{-1}(t)$. Згідно формули диференціювання складної функції будемо мати

$$dy(t) = \frac{(a(t) + b(t)x(t))}{x(t)} - \frac{\sigma(t)dw(t)}{x(t)} + \frac{\sigma^2(t)}{x(t)}dt =$$

$$= -\frac{(a(t) + \sigma^2(t))}{x(t)}dt + b(t)dt - \frac{\sigma(t)dw(t)}{x(t)} =$$

$$= -(a(t) + \sigma^2(t))y(t)dt + b(t)dt - \sigma(t)y(t)dw(t).$$

Таким чином, для функції $y(t)$ одержимо рівняння

$$dy(t) = (-a(t) + \sigma^2(t))y(t)dt + b(t)dt - \sigma(t)y(t)dw(t),\ y(0) = 1/x_0.$$

Запишемо функцію $g(T)$ у вигляді $g(T) = E(Ly(t) - (x_0 + 1))^2$. Позначимо $x_0 + 1 = \widetilde{x}$, $Ly(t) - \widetilde{x} = z(t)$ і запишемо рівняння для функції $z(t)$:

$$dz(t) = Ldy(t) = (-a(t) + \sigma^2(t))z(t)dt + (-(a + \sigma^2)\widetilde{x}_0 + bL)dt - \sigma(t)z(t)dw(t) -$$

$$-\sigma(t)\widetilde{x}_0 dw(t).$$

Далі знаходимо

$$dz^2(t) = 2z(t)dz(t) - 1/2(\sigma(t)z(t) + \sigma(t)\widetilde{x}_0)^2 =$$

$$= 2z^2(t)(-a(t) + \sigma^2(t))dt + 2\widetilde{a}z(t)dz(t) - (\sigma(t)z(t) + \sigma(t)\widetilde{x}_0)dw(t) -$$

$$-1/2\sigma^2(t)(z(t) + \widetilde{x}_0)^2 dt,$$

де $\widetilde{a} = -(a + \sigma^2)\widetilde{x}_0 + bL$.

Після чого остаточно отримуємо

$$dEz^2(t) = 2m_2(t)(-a(t) + \sigma^2(t)/2)dt + 2m_1(t)(\widetilde{a} - \sigma^2(t)\widetilde{x}_0)dt - \sigma^2(t)\widetilde{x}_0 dt,$$

де функція $m_1(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = (-a+\sigma^2)m_1(t) + \widetilde{a},\ m_1(0) = m_1^0, \tag{9}$$

а функція $m_2(t)$ – розв'язком рівняння

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = 2(-a+\sigma^2/2)m_2(t) + 2m_1(t)(\widetilde{a} - \sigma^2\widetilde{x}_0) - \sigma^2\widetilde{x}_0, \tag{10}$$

$$m_2(0) = (L/x_0 - \widetilde{x}_0)^2.$$

3. Формалізація процесу розповсюдження інформації на основі гібридних моделей дифузії. Наведене вище обґрунтування дозволяє перейти до опису моделей динаміки процесу інформаційного поширення, доповнюючи результат моделювання врахуванням гібридності в підсумкових моделях. Гібридність структури моделей доцільно розглядати, зважаючи на динаміку кількісного складу цільових груп, в рамках яких проводяться спостереження за рівнем розповсюдженням інформації.

Позначимо через $u(x,t)$, $0 \le u(x,t) \le 1$, $t \ge 0$, функцію рівня розповсюдження інформації в межах частини x, $0 \le x \le 1$, групи населення, величина якої не перевищує наперед заданого значення A.

Будемо моделювати зміни рівня (концентрації) інформації в групі населення за допомогою рівняння дифузії [6], припускаючи, що цей процес аналогічний розповсюдженню деякої речовини (інфекції) протягом конкретного часового періоду $t \in [0,T]$ і може бути описаний скалярним рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{11}$$

з початковою умовою $u(x,0) = 0$, $0 \le x \le 1$, та крайовими умовами $u(0,t) = u_0 \ge 0$, $u(1,t) = 0$, $t \in [0,T]$, де $k(t)$ – коефіцієнт, що характеризує швидкість проникнення інформації (аналог коефіцієнта дифузії).

Вважаємо, що контингент цільової групи населення формується з 3-х підгруп по відношенню до сприйняття інформації. Виділяємо частину населення, сприйнятливого до впливу інформації $y_1(t)$, частину тих, що вже знаходяться під впливом інформації $y_2(t)$, і частину байдужих до інформаційного впливу $y_3(t)$. Тоді за допомогою моделі Бейлі поширення інформації вигляду

$$\begin{gathered} \dot{y}_1(t) = -y_1(t)y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t)y_2(t) - y_2(t), \\ \dot{y}_3(t) = y_2(t), \end{gathered} \tag{12}$$

з початковими умовами $y_1(0) = y_1^0$; $y_2(0) = y_2^0$; $y_3(0) = y_3^0$, де $y_1(t)$ – частка населення, яка є сприйнятливою до інформаційного впливу, $y_2(t)$ – частка вже охоплених інформацією, $y_3(t)$ – частка несприйнятливих до впливу, $t \ge 0$, а величини швидкостей виліковування та захворювання вважаються рівними 1, $y_1(t)+y_2(t)+y_3(t) = 1$, $t \ge 0$, можна записати систему диференціальних рівнянь, які описують процес інформаційного поширення в цільовій групі населення. Її розв'язки, відповідно, визначають динаміку величин окремих підгруп.

При таких припущеннях максимальне граничне значення частини населення, що відчуває вплив інформації, x_Γ, $0 \le x_\Gamma(t) \le 1$, буде залежати від часу, тобто маємо $0 \le x \le x_\Gamma(t)$, $x_\Gamma(t) = y_1(t) + y_2(t)$, де $y_1(t)$, $y_2(t)$ – компоненти розв'язку системи (12). При цьому, коефіцієнт проникнення інформації $k(t)$ буде пропорційним швидкості зміни частини населення, яке вважається сприйнятливим до впливу зовнішньої інформації, тобто

$$k(t) = \mu \dot{x}_\Gamma(t), \ \mu > 0. \tag{13}$$

Враховуючи акумулятивний характер процесу розповсюдження інформації у соціумі, будемо шукати частинний розв'язок дифузійного рівняння (11) у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^x X(\xi)d\xi + at, \tag{14}$$

де параметр a впливу за часом для кожного моменту часу t вважатимемо пропорційним швидкості зміни величини $x_\Gamma(t)$, тобто $a = \alpha \dot{x}_\Gamma(t)$, $\alpha > 0$.

З урахуванням зроблених припущень перепишемо крайові умови моделі (2.11) у вигляді $u_x^{'}(0,t) = \alpha/\mu x_\Gamma(t)$, $u_x^{'}(x,t) = 0$, $x_\Gamma(t) \le x \le 1$, $t \in [0,T]$.

Зрозуміло, що у такій постановці дифузійне рівняння (11) має особливий розв'язок, який може бути отриманий за умови $x_\Gamma(t) = c$, c – деяка константа, $c \in [0,1]$. Іншими словами, за наявності стаціонарного процесу в динаміці величини контингенту, що підпадає під інформаційний вплив, рівень розповсюдження інформації в групі залишається постійним. Даний розв'язок є тривіальним.

Припустимо, що $\dot{x}_\Gamma(t) \neq 0$. Тоді у кожний момент часу $t \in [0,T]$ дифузійне рівняння має частинний розв'язок вигляду (14), для знаходження якого необхідно розв'язати звичайне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{dX(x)}{dx} = -\frac{\alpha}{\mu}, \tag{15}$$

з початковою умовою на кінці інтервалу $X(x_\Gamma(t)) = 0$, розв'язком якого буде функція $X(x) = \alpha(x_\Gamma(t) - x)/\mu$, $0 \le x \le x_\Gamma(t)$ [7]. При цьому, отримуємо величину $X(0) = \alpha/\mu x_\Gamma(t)$, що відповідає першій граничній умові дифузійного рівняння.

Таким чином, остаточно, для довільних $\alpha > 0$ та $\mu > 0$ рівняння (11) має розв'язок вигляду

$$u(x,t) = \alpha \left(x/\mu(x_\Gamma(t) - x/2) + \dot{x}_\Gamma(t)t \right), \tag{16}$$

який в будь-який моменту часу $t \in [0,T]$ визначає рівень розподілу інформації в межах підгрупи $0 \le x \le x_\Gamma(t)$, розмір якої становить частку $x_\Gamma(t)$ від загальної кількості A учасників групи, що розраховується за допомогою розв'язків системи (12) (під значеннями $x_\Gamma(t)$, $\dot{x}_\Gamma(t)$ розуміємо миттєві значення величини $x_\Gamma(t) = y_1(t) + y_2(t)$ та її швидкості, які отримуються з (12) у момент часу t).

Цей розв'язок може бути узагальнений. З початкових умов системи (12) випливає, що $x_\Gamma(0) = 1$. Це дозволяє переписати вигляд розв'язку $u(x,t)$ з урахуванням початкової умови $u(x,0)$, $0 \le x \le 1$ дифузійного рівняння (11). Дійсно, якщо розглядати функцію

$$u(x,t) = \alpha \left(x/\mu(x_\Gamma(t) - x/2) + \dot{x}_\Gamma(t)t \right) (1 - x_\Gamma(t)), \tag{17}$$

то вона задовольняє рівнянню (11) та початковим і крайовим умовам, що дозволяє розглядати її як загальний розв'язок дифузійного рівняння.

На рис.1 наведений приклад просторово-часового розподілу рівнів сприйняття інформації в групі населення, котрий розрахований на основі гібридної моделі (11), (12), отриманої за допомогою рівняння дифузії та використання системи диференціальних рівнянь моделі Бейлі (12).

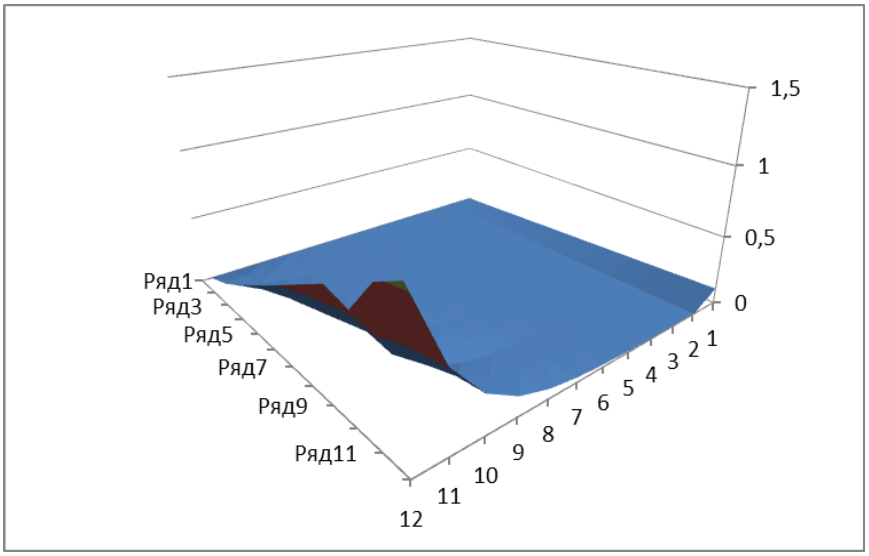

Рис. 1. Розподіл рівнів сприйняття інформації в групі з плином часу (коефіцієнти пропорційності $\alpha = 0.001$, $\mu = 0.5$).

4. Висновки за результатами досліджень. У даній роботі запропоновано підхід до побудови гібридних математичних моделей динаміки розповсюдження інформаційних процесів у цільовій групі населення. В основу формалізації покладено ідею застосування гібридних моделей, які складаються з рівняння дифузії (проникнення) і динамічних моделей, що описують процеси зміни чисельності контингенту середовища поширення інформації.

Запропонована методика дозволяє обчислювати рівні впливу та запам'ятовування інформації на основі розв'язків дифузійного рівняння, зміна інтервалів розповсюдження в яких моделюється за допомогою додаткових співвідношень у вигляді диференціальних рівнянь. Розглянуто скалярний розв'язок для одновимірного подання контингенту групи.

Наведено приклади чисельних експериментів по оцінці рівня впливу на основі застосування даного підходу, проаналізовано їх результати. Порівняльний аналіз з модельними даними дозволяє стверджувати про адекватності отриманих моделей реальним процесам зміни сприйняття інформації в межах конкретно заданих груп населення.

Список використаної літератури

1. Кастлер Г. Возникновение биологической организации. Москва: Мир, 1967. 88 с.
2. Брайчевский С. М., Ландэ Д. В. Современные информационные потоки: актуальная проблематика. *Научно-техническая информация.* 2005. Сер. 1, Вып. 11. С. 21–33.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.

4. Ивохин Е. В., Науменко Ю. А. О формализации процессов распространения информации на основе гибридных моделей диффузии. *Проблемы управления и информатики.* 2018. № 4. С. 121–128.
5. Івохін Є. В., Аджубей Л. Т., Гавриленко О. В. Про деякі математичні моделі формалізації соціо-інформаційних потоків. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка.* 2017. Серія ФМН, № 2. С. 70–73.
6. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1969. 288 с.
7. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Москва: Физматлит, 2003. Т. 3. 728 с.

Ivohin E. V., Adzhubey L. T. About the use of diffusion process models for description of information extension dynamics.

The diffusion nature of information processes allows us to successfully use the mathematical models of penetration processes to model the dynamics of changes in distribution levels and the impact of information in target groups.

In this paper an approach is proposed to formalize hybrid mathematical models of the dynamics of the dissemination of information processes in a target (social or regional) population group. The mathematical substantiation of the process of formalization of information dissemination on the basis of homogeneous diffusion models is given. Hybrid systems consisting of diffusion models and dynamic models that describe the process of changing the environment size of the information dissemination are used to increase the adequacy and reliability of the constructed models. The proposed technique allows to formalize and to simulate in time levels of information influence and memory on the basis of solution of a diffusion equation, the change of distribution intervals in which is determined by additional correlations in the form of a system of differential equations. The scalar solution for one-dimensional representation of the contingent of the target group is considered. Examples of application of this approach is given, results of numerical experiments are analyzed.

Keywords: information, distribution, analogue method, diffusion model, hybridity.

References

1. Quastler, H. (1967). The emergence of biological organization. Moscow: Mir [in Russian].
2. Braichevskiy, S. M., & Lande, D. V. (2005). Sovremennyye informatsionnyye potoki: aktual'naya problematika. *Scientific and technical information, 1, 11*, 21–33 [in Russian].
3. Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1982). Stokhasticheskiye differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya. Kiev: Naukova dumka [in Russian].
4. Ivohin, E. V., & Naumenko, Yu. A. (2018). O formalizatsii protsessov rasprostraneniya informatsii na osnove gibridnykh modeley diffuzii. *Problemy upravleniya i informatiki, 4*, 121–128 [in Russian].
5. Ivohin, E. V., Adzhubey, L. T., & Gavrylenko, O. V. (2017). Pro deyaki matematychni modeli formalizatsiyi sotsio-informatsiynykh potokiv. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, ser. Physics & Mathematics, 2*, 70–73 [in Ukranian].
6. Aramanovych, I. G., & Levin, V. I. (1969). Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka [in Russian].
7. Fichtenholz, G. M. (2003). Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Vol. 3. Moscow: Fizmatlit [in Russian].

Одержано 24.04.2019