

УДК 519.21

Н. С. Аюбова (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

## ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Consistent estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion by observations with errors is found.

Отримана конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

**1. Вступ.** Випадковий гауссовий процес  $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$  з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s, t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста  $H \in (0, 1)$ .

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла у сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [1]–[3] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві–Бакстера забезпечують конзистентність відповідних оцінок. Монографія Пракаса Рао [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [5] досліджені моделі регресії з похибками вимірювання. Робота [6] присвячена оцінці параметра в моделі з похибками.

У цій статті отримана конзистентна оцінка параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

**2. Постановка задачі оцінювання.** Нехай  $0 < a < 1$ ,  $a$  — фіксоване. Випадковий процес  $\xi_H(t), t \geq 0$  спостерігається у моменти часу  $k \cdot a$ ,  $k \geq 0$  похибками  $\delta_k$ ,  $k \geq 0$ . Далі припускаємо, що  $(\delta_k)$  — послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією  $\sigma^2$ . Послідовність випадкових величин  $(\delta_k)$  незалежна від дробового броунівського руху  $\xi_H(t), t \geq 0$ .

За спостереженнями випадкових величин  $\eta_{H,k} = \xi_H(ak) + \delta_k$ ,  $k \geq 0$  потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста  $H$ .

Покладемо  $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1,H} - \eta_{k,H}$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

### 3. Основний результат.

**Лема 1.**  $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$  — стаціонарна гауссова випадкова послідовність з нульовим математичним сподіванням.

*Доведення.* Для  $k, j \in \mathbb{Z}$  обчислимо

$$\begin{aligned} E\xi_k\xi_j &= E(\eta_{k+1} - \eta_k)(\eta_{j+1} - \eta_j) = \\ &= E(\xi_H(a(k+1)) + \delta_{k+1} - \xi_H(ak) - \delta_k)(\xi_H(a(j+1)) + \delta_{j+1} - \xi_H(aj) - \delta_j). \end{aligned}$$

Маємо

$$E(\delta_{k+1} - \delta_k)(\delta_{j+1} - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k=j; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &E(\xi_H(a(k+1)) - \xi_H(ak))(\xi_H(a(j+1)) - \xi_H(aj)) = \\ &= \frac{1}{2}(|a(k+1)|^{2H} + |a(j+1)|^{2H} - |a(k-j)|^{2H} - |a(k+1)|^{2H} - |aj|^{2H} + \\ &+ |a(k+1-j)|^{2H} - |ak|^{2H} - |a(j+1)|^{2H} + |a(k-1-j)|^{2H} + |ak|^{2H} + |aj|^{2H} - \\ &- |a(k-j)|^{2H}) = \frac{1}{2}(|a(k-j+1)|^{2H} - 2|a(k-j)|^{2H} + |a(k-j-1)|^{2H}). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} E\xi_k\xi_j &= \frac{|a|^{2H}}{2}(|k-j+1|^{2H} - 2|k-j|^{2H} + |k-j-1|^{2H}) + \\ &+ \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k=j. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Отже,  $E\xi_k\xi_j$  залежить лише від  $k-j$ . Лема доведена.

З формули (1) при  $k=j$  маємо

$$E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0, 1).$$

Позначимо  $\kappa(H) = E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0, 1)$ .

Функція  $\kappa(H), H \in (0, 1)$  неперервна і спадна на  $(0, 1)$  з множиною значень  $(a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$ .

Функція

$$H = \frac{1}{2} \log_a(y - 2\sigma^2), y \in (a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$$

— обернена до функції  $\kappa(H)$ .

Покладемо

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 1 + 2\sigma^2; \\ \frac{1}{2} \log_a(y - 2\sigma^2), & y \in (2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2); \\ 1, & y \leq a^2 + 2\sigma^2; \end{cases}$$

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{k,H}^2, n \geq 1.$$

**Теорема 1.** Для довільного  $H \in (0, 1)$

$$S_n = S_{n,H} \rightarrow \kappa(H)$$

за ймовірністю при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Доведемо, що для довільного  $H \in (0, 1)$  дисперсія  $Var S_{n,H} \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Тоді  $S_n - ES_n \rightarrow 0$  у середньому квадратичному при  $n \rightarrow \infty$ , отже, і за ймовірністю.

Внаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності  $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$ ,

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(\xi_{k,H}^2) = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини  $S_{n,H}$ :

$$Var S_{n,H} = E(S_{n,H} - ES_{n,H})^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k,j=1}^n (E(\xi_{k,H}^2 \xi_{j,H}^2) - E\xi_{k,H}^2 E\xi_{j,H}^2).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ , що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням, має місце формула Іссерліса [7]:

$$E(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) = E\eta_1 \eta_2 E\eta_3 \eta_4 + E\eta_1 \eta_3 E\eta_2 \eta_4 + E\eta_1 \eta_4 E\eta_2 \eta_3.$$

У цій формулі покладемо  $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}, \eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$  і отримаємо:

$$\begin{aligned} Var S_{n,H} &= \frac{2}{n^2} \sum_{k,j=1}^n (E(\xi_{k,H} \xi_{j,H}))^2 = \frac{2}{n^2} n \kappa^2(H) + \frac{4}{n^2} \sum_{k,j=1, k < j}^n E(\xi_{k,H} \xi_{j,H})^2 = \\ &= \frac{2\kappa^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \sum_{l=1}^{n-1} (n-l) (E\xi_{0,H} \xi_{l,H})^2, \end{aligned}$$

де  $l = j - k$ .

Маємо

$$E\xi_{0,H} \xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a - \delta_l).$$

При  $l = 1$  одержимо

$$\begin{aligned} E\xi_{0,H} \xi_{1,H} &= E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H(2a) - \xi_H(a) + \delta_2 - \delta_1) = \\ &= E\xi_H(a)(\xi_H(2a) - \xi_H(a)) + E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_2 - \delta_1) = \\ &= \frac{1}{2}(a^{2H} + (2a)^{2H} - a^{2H} - a^{2H}) - \sigma^2 = \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2. \end{aligned}$$

При  $l > 1$

$$E\xi_{0,H} \xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a + \delta_l).$$

Оскільки  $E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_{l+1} - \delta_l) = 0$  при  $l > 1$ , то

$$\begin{aligned} E\xi_{0,H}\xi_{l,H} &= E\xi_H(a)(\xi_H((l+1)a) - \xi_H(la)) = \\ &= \frac{a^{2H}}{2}(1 + (l+1)^{2H} - l^{2H} - 1 - l^{2H} + (l-1)^{2H}) = \\ &= \frac{a^{2H}}{2}((l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} VarS_{n,H} &= \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \left( (n-1) \left( \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{l=2}^n \left( \frac{a^{2H}}{2} \right)^2 (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_n = \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2} \left( (n-1) \left( \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2 \right)$$

і оцінимо цей вираз:

$$A_n \leq \frac{2k^2(H)}{n} + \frac{4}{n} \left( \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2 \right)^2.$$

Очевидно, для довільного  $H \in (0, 1)$   $A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Позначимо

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4}{n^2} \left( \sum_{l=2}^{n-1} \left( \frac{a^{2H}}{2} \right)^2 (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \right) = \\ &= \frac{a^{4H}}{n^2} \sum_{l=2}^{n-1} (n-l)((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 = \\ &= \frac{a^{4H}}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left( 1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left( 1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2, \end{aligned}$$

так як  $a^{4H} \leq 1$ .

Розглянемо функцію  $f(x) = x^{2H}$ . Вираз  $(l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H}$  є приростом другого порядку функції  $f$  на відрізку  $[l-1, l+1]$ .

Тому  $(l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H} = f''(\theta_{l+1}) \cdot 1^2$ , де  $\theta_l \in (l-1, l+1)$ . Тоді

$$B_n \leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left( 1 - \frac{l}{n} \right) ((l-1)^{2H} - 2l^{2H} + (l+1)^{2H})^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right) \left(\frac{2H(2H-1)}{\theta_l^{2-2H}}\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}} \leq \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n-1} \frac{4}{(l-1)^{4-4H}} \leq \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^{4-4H}} \leq \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{4-4H}}, & H \in [\frac{3}{4}, 1); \end{cases} \\
&\leq \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \ln n, & H = \frac{3}{4}; \\ 1 + \frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

де  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  — дзета-функція Рімана.

Остаточно

$$\text{Var} S_{n,H} \leq A_n + \frac{4}{n} \begin{cases} \zeta(4-4H), & H \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + \ln n, & H = \frac{3}{4}; \\ 1 + \frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H \in (\frac{3}{4}, 1). \end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного  $H \in (0, 1)$  :  $\text{Var} S_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Теорема доведена.

**Зауваження 1.** Незавжди бачити, що для будь-якого  $H \in (0, 1)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Var} S_{2^n, H}$  збіжний, звідки слідує, що  $S_{2^n, H} \rightarrow \kappa(H)$  з ймовірністю 1 при  $n \rightarrow \infty$  [8].

Із теореми 1 випливає наступна теорема.

**Теорема 2.** Статистика

$$\Theta_n = \beta(S_n), n \geq 1$$

— консистентна оцінка параметра Хюрста  $H$  дробового броунівського руху. При цьому статистика  $\Theta_n = \beta(S_{2^n}), n \geq 1$  — строго консистентна оцінка цього параметра.

### Список використаної літератури

1. *Kurchenko O. O.* Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM // *Theory Stoch. Process.* – 2002. – Vol. 8(24). – P. 242–248.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // *Теорія ймовірностей та математична статистика.* – 2002. Вип. 67. – С. 88–96.
3. *Breton J. C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // *Electronic Journal of Statistics.* – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
4. *Prakasa Rao B. L. S.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. – Chichester: John Wiley and Sons, 2010. – 280 p.
5. *Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА., 2015. – 288 с.
6. *Сунявська О. О.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // *Theory Stoch. Process.* – 2016. – Vol. 21(37). – P. 84–90.
7. *Isserlis L.* On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // *Biometrika.* – 1918. – Vol. 12. – P. 134–139.
8. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. – К.: Вища школа, 1983. – 227 с.

Одержано 06.10.2017