УДК 517.9

**М.В. Грисенко** (Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка),
**В. І. Кравець** ( Таврійський держ. агротехнол. ун-т, м. Мелітополь)

# МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

We grounded the application of averaging method to optimal control problems of functional-difference equations.

Обгрунтовано застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-різницевими рівняннями.

**Вступ.** Одним з найбільш поширених методів аналізу нелінійних динамічних систем є метод усереднення. Для систем звичайних диференціальних рівнянь він був обгрунтований Боголюбовим в [1].

В подальшому даний метод узагальнювався на різні класи диференціальних рівнянь, наприклад, імпульсні [4], функціонально-диференціальні ( [5–7]) та інші.

Метод усереднення виявився також ефективним і до розв'язування задач оптимального керування. Даним питанням присвячена низка робіт (див.напр. [1]), де є широка бібліографія.

В роботі [2] використано відмінний від раніше відомих підходів щодо застосування методу усереднення, а саме здійснювалось усереднення по часу, що явно входить в праві частини системи, вважаючи функцію керування $u$ параметром, далі при дослідженні усередненої системи розглядаються ті ж керування, що і для початкової задачі. Таким чином, множина керувань $U$ для початкової і усередненої задач співпадає, при цьому не вимагається, щоб $U$ була компактом.

У даній роботі вказаний результат перенесено на системи функціонально-диференціальних рівнянь. Важливо при цьому відзначити, що на відміну від вихідної системи, усереднена є вже автономною системою звичайних диференціальних рівнянь — об'єктом значно простішої природи, ніж система функціонально-диференціальних рівнянь.

Основним результатом роботи є встановлення зв'язку між оптимальним керуванням усередненої та точної систем, а саме доводиться, що оптимальне керування усередненою системою є $\varepsilon$—оптимальним для точної системи.

Робота складається зі вступу, постановки задачі, допоміжної леми та основного результату.

**1. Необхідні позначення та постановка задач.** Введемо необхідні для подальшого позначення та функціональні простори.

Нехай $h > 0$. Через $C_n([-h, 0])$ позначимо простір неперервних вектор-функцій визначених на $[-h, 0]$, що діють в простір $\mathbb{R}$. Введенням норми $\|x\| = max_{[-h,0]}|x(t)|$ він перетворюється в банахів простір $\hat{B}_n(X)$.

Через $\hat{B}_n(X)$ позначимо простір вимірних відображень вимірного топологічного простору $(X, \Sigma_X)$ в простір $\mathbf{R^n}$. Тут $\Sigma_X$— сігма-алгебра вимірних множин в $X$. Таким чином, елементами простору $\hat{B}_n(X)$ є $n$-мірні вимірні функціонали над простором $X$.

В подальшому ми будемо працювати з наступним функціональним простором, який у введених позначеннях має вигляд $\hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$. Тут $\mathbb{R}^+$— невід'ємні дійсні числа. Таким чином, якщо елемент $X(t,z) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$, то він є вимірною функцією по першому і третьому аргументах і $n$-мірним функціоналом за другим аргументом.

Нехай $x(t) \in C_n([0,\infty])$, $\varphi(t) \in C_n([-h,0])$ при деякому $h > 0$, $X(t,\varphi) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]))$. Якщо $x(0) = \varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-h,0] \\ x(t), & t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

неперервна. Введемо для кожного $t \geq 0$ елемент $x_t(\varphi) \in C_n([-h,0])$ наступною рівністю

$$x_t(\varphi) = x(t+\theta,\varphi), \quad \theta \in [-h,0]. \tag{2}$$

Будемо говорити, що функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі

$$x(t) = \varphi(t), \quad \text{при} \quad t \in [-h,0] \tag{3}$$

для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x_t) \tag{4}$$

на $[0,\infty)$, якщо для кожного $t \geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ з (1) задовольняє співвідношення

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_0^t X(s, x_s(\varphi))ds. \tag{5}$$

Перейдемо тепер безпосередньо до постановки задачі.

Нехай $U$—деяка підмножина з простору $\mathbb{R}^n$, $X(t,z,u) \in \hat{B_n}(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]) \times U)$.

Розглянемо задачу оптимального керування системою диференціально-функціональних рівнянь.

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x_t,u), \tag{6}$$

$x(\theta) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h,0]$, $h \geq 0$, $\varphi \in C_n([-h,0])$. Тут $\varepsilon > 0$— малий параметр, $x \in \mathbb{R}^n$—фазовий вектор, $u = u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$—вектор керування, $t \geq 0$ $T > 0$—деяка константа.

Керування $u(t)$ вважаються допустимими, якщо виконуються умови:

а1) $u(t) \in U$, при $t \geq 0$;

а2) $u(t)$—вимірні, локально інтегровні при $t \geq 0$ функції;

а3) для кожного $u(t)$ існує стала $u_0 \in U$, що $|u(t) - u_0| \leq \varphi(t)$, де $\varphi(t)$—незалежна від $u(t)$ функція, для якої $\int_0^\infty \varphi(t)dt < \infty$.

Множину допустимих керувань позначимо $F$. Для кожного допустимого керування $u(t)$ через $x(t,u)$ позначимо розв'язок початкової задачі (6) при $u = u(t)$.

Задача оптимального керування системою (6) полягає в знаходженні такого допустимого керування $u(t \in F)$, що забезпечує мінімальне значення функціонала якості

$$J_\varepsilon(u) = \Phi\left(X\left(\frac{T}{\varepsilon}\right), u\right) \to inf, \tag{7}$$

де $\Phi(x)$—деяка функція визначена в $\mathbb{R}^n$. Позначимо $J_\varepsilon = \inf\limits_{u\in F} J_\varepsilon(u)$.

Поставимо у відповідність системі диференціально-функціональних рівнянь (6) усереднену систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{y} = \varepsilon X_0(y,u), y(0) = \varphi(0), \tag{8}$$

де

$$X_0(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^t X(t,x,u)dt, \tag{9}$$

та критерій якості

$$\bar{J}_\varepsilon(u) = \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}\right), u\right) \to inf. \tag{10}$$

Нехай $\bar{u}^*(t,\varepsilon)$— оптисальне керування для задачі (8),(10), тобто $\bar{J}_\varepsilon(u) = \inf\limits_{u\in F} \bar{J}_\varepsilon(u) = \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon))$.

В роботі доводиться, що керування $\bar{u}^*(t,\varepsilon)$ є $\eta$-оптимальним для задачі (6), (7), а саме, що для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$, що при всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| < \eta.$$

Для доведення вище згаданого твердження нам потрібна наступна лема, що є узагальненням принципу усереднення для диференціально-функціональних рівнянь на випадок залежності правих частин від функціональних параметрів.

**Лема 1.** *Нехай для відображення $X(t,z,u) \in \hat{B}_n(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h,0]), U)$ виконані умови:*

*1) $X(t,z,u)$ задовольняє умову Ліпшиця в формі : існує $M > 0$, що при всіх $\varphi$ і $\psi \in C_n([-h,0])$, $u_1, u_2 \in U$ $t \geq 0$ виконана нерівність*

$$|X(t,\varphi,u_1) - X(t,\psi,u_2)| \leq M(\| \varphi - \psi \| + |u_1 - u_2|);$$

*2) існує стала $A \geq 0$, що при $t \geq 0$, $u \in U$ справедлива нерівність*

$$|X(t,0,u)| \leq A;$$

*3) рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}^n$ та $u \in U$ справедлива рівність (9).*

*Тоді для довільних $\eta > 0$ і $T > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta,T) > 0$, що для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ та $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ справедлива нерівність*

$$|x(t,u) - y(t,u)| \leq \eta \tag{11}$$

*для кожного допустимого керування $u \in F$.*

***Доведення.*** По-перше, зауважимо, що з умов 1) і 2) леми випливає існування, єдиність і необмежувана продовжуваність вправо розв'язку $x(t,u)$ початкової задачі (6) ( [7],с.56).

По-друге, з існування рівномірної границі (9) та умов на функцію $X$ випливає, що функція $X_0(y,u)$ є глобально ліпшицевою за змінними $y$ і $u$ та задовольняє за змінною $y$ умову лінійного росту рівномірно по $u \in U$. А тому розв'язок задачі Коші (8) існує, єдиний і необмежено продовжуваний вправо.

Візьмемо тепер довільне $\eta > 0$ і зафіксуємо його. Для $\varepsilon > 0$ і довільного допустимого керування оцінимо норму різниці між розв'язками системи (6) та наступної системи:

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon X(t, \bar{x}_t, u_0), \bar{x}(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0], \tag{12}$$

де $u_0$ вибрано з умови а3) для $u_t$.

Переходячи в (6) і (12) до інтегральних зображень, отримаємо

$$x(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int\limits_0^t X(s, x_s(\varphi), u(s))ds \tag{13}$$

та

$$\bar{x}(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int\limits_0^t X(s, \bar{x_s}(\varphi), u_0)ds. \tag{14}$$

Віднімаючи від (13) (14) та додаючи і віднімаючи $X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s))$ отримаємо

$$|x(t) - \bar{x}(t)| = \varepsilon \int\limits_0^t [X(s, x_s(\varphi), u(s)) - X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s))]ds+$$

$$+\varepsilon \int\limits_0^t [X(s, \bar{x_s}(\varphi), u(s)) - X(s, \bar{x_s}(\varphi), u_0)]ds.$$

Використовуючи тепер умову 1) леми отримаємо

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| \le \varepsilon M \int\limits_0^t \max_{-h \le \theta \le 0} |x(s+\theta, \varphi) - \bar{x}(s+\theta, \varphi)|ds + \varepsilon M \int\limits_0^t \varphi(s)ds \le \\ \le \varepsilon M \int\limits_0^{\frac{L}{\varepsilon}} \max_{-h \le \theta \le 0} |x(s+\theta, \varphi) - \bar{x}(s+\theta, \varphi)|ds + \varepsilon MC, \end{aligned} \tag{15}$$

де $C = \int\limits_0^\infty \varphi(s)ds$.

Позначимо $m(t) = \sup\limits_{s \in [-h,t]} |x(s) - \bar{x}(s)|$.

Тоді з (15) отримуємо

$$m\left(\frac{L}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon M \int\limits_0^{\frac{T}{\varepsilon}} m(s)ds + \varepsilon MC.$$

Звідки, з використанням леми Гронуолла-Беллмана маємо, що

$$m\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon MCe^{TM}.$$

Останнє означає, що для будь-якого $t \in [-h, \frac{T}{\varepsilon}]$ справедлива нерівність

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \le \varepsilon MCe^{TM} \tag{16}$$

рівномірно по всіх $u \in F$.

Аналогічними міркуваннями на $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ отримується така ж оцінка для розв'язків системи

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}} &= \varepsilon X_0(\bar{y}, u_0), \\ \bar{y}(0) &= \varphi(0) \end{aligned} \tag{17}$$

та розв'язків системи (8), тобто

$$|y(t) - \bar{y}(t)| \le \varepsilon MCe^{TM}. \tag{18}$$

виконана рівномірно по $u \in F$.

Але для систем (12) та (17) в силу теореми усереднення ( [7],с.256) для достатньо малих $\varepsilon$ справедлива нерівність

$$|\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| \le \frac{\eta}{2} \tag{19}$$

при всіх $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$. В силу рівномірної по $u \in U$ збіжності в (9) дана оцінка рівномірна по всім $u_0 \in U$.

Тоді з (16), (18) та (19) для $t \in [0, \frac{T}{\varepsilon}]$ отримуємо оцінку

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - \bar{x}(t)| + |\bar{x}(t) - \bar{y}(t)| + |y(t) - \bar{y}(t)| \le 2\varepsilon MCe^{TM} + \frac{\eta}{2} \equiv \eta,$$

рівномірну по $u(t) \in F$. Останнє і доводить лему.

**2. Основний результат.** Перейдемо тепер до викладення основного результату роботи. Справедлива наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай для відображення $X(t, z, u) \in \hat{B}_n(\mathbb{R}^+ \times C_n([-h, 0]), U)$ виконані умови попередньої леми та наступні умови:*

*1) функція $\Phi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $L > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$;*

*2) існує оптимальне керування $\bar{u}^*(t, \varepsilon)$ усередненої задачі (8), (10).*

*Тоді для довільного $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$, що:*

*а) для довільного $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $J_\varepsilon > -\infty$;*

*б) виконується нерівність $|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t, \varepsilon)) - J_\varepsilon| \le \eta$, тобто оптимальне керування усередненої задачі є $\eta$-оптимальним для точної.*

***Доведення.*** Твердження а) теореми доведемо від супротивного. Нехай а) не виконується. Тоді існує послідовність $\varepsilon_n$ така, що $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, а

$$J_{\varepsilon_n} = -\infty. \tag{20}$$

За означенням інфінума, для кожного $\varepsilon_n$ існує послідовність керувань $u_m^n \in F$, що

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{21}$$

Оскільки ці керування допустимі, то при них системи (6) і (8) мають відповідно розв'язки $x_m^n(t)$ і $y_m^n(t)$ визначені при $t \geq 0$. Оскільки для системи (8) для кожного $\varepsilon$ існує оптимальне керування, то

$$J_{\varepsilon_n}(y_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n} > -\infty.$$

Зафіксуємо тепер деяке $\eta_0 > 0$. Для нього існує натуральне $n_0$, що при $\varepsilon_n < \varepsilon_{n_0}$ справедливі оцінки

$$|J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n)| = \left|\Phi\left(x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right) - \Phi\left(y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left|x_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right) - y_m^n\left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)\right| \leq L\eta_0.$$

Звідси отримуємо

$$J_{\varepsilon_n}(u_m^n) > J_{\varepsilon_n}(u_m^n) - \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) + \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) > \bar{J}_{\varepsilon_n}(u_m^n) - L\eta_0,$$

що приводить до протиріччя з (21).

Доведемо тепер твердження б).

Має місце нерівність

$$J_\varepsilon \leq J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) = \bar{J}_\varepsilon + LJ_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)).$$

Але

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon))| =$$

$$= \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq L\left|x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right) - y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right|.$$

Звідки, застосовуючи вище доведену теорему, для довільного $\eta_1 > 0$ при достатньо малих $\varepsilon$ отримаємо оцінку

$$J_\varepsilon \leq \bar{J}_\varepsilon + L\eta_1. \tag{22}$$

З означення інфінуму також маємо, що для вибраного $\eta_1$ існує керування $u_{\eta_1}(t,\varepsilon)$ з виконанням нерівності

$$J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) < J_\varepsilon + \eta_1.$$

З останньої отримується оцінка

$$\bar{J}_\varepsilon = \bar{J}_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) \leq \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) \leq \bar{J}_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)) + J_\varepsilon + \eta_1 - J_\varepsilon(u_{\eta_1}(t,\varepsilon)).$$

Використовуючи умову 1) теореми та доведену лему, з (22) будемо мати

$$\bar{J}_\varepsilon \leq J_{\varepsilon+(L+1)\eta_1}.$$

Врахувавши при цьому (10) з останньої нерівності отримуємо оцінку між критеріями якості точної та усередненої систем

$$|J_\varepsilon - \bar{J}_\varepsilon| \leq (L+1)\eta_1. \tag{23}$$

Далі розглянемо різницю

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| \leq |J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon| + |\bar{J}_\varepsilon - J_\varepsilon|. \tag{24}$$

Але

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - \bar{J}_\varepsilon| = \left|\Phi\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right) - \Phi\left(y\left(\frac{T}{\varepsilon}, \bar{u}^*(t,\varepsilon)\right)\right)\right| \leq L\eta_1.$$

Звідси, з урахуванням (23) і (24) остаточно отримуємо

$$|J_\varepsilon(\bar{u}^*(t,\varepsilon)) - J_\varepsilon| \leq \eta,$$

де $\eta = \eta_1(2L+1)$, що й доводить теорему.

1. *Боголюбов Н.Н.*О некоторвх статистических методах в математической физике: К.:Изд.АН УССР, 1945.—150с.
2. *Носенко Т.В., Станжицький О.М.* Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування: Нелінійні коливання — .— .
3. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. —К.: Одесса:Лыбидь, 1992.— 188с.
4. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Вторая теорема Боголюбова Н.Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием: Диф.уравнения —1974.—10, №11.— С.2001—2010.
5. *Фодчук В.И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра: Укр.мат.журнал —1964.—16,№2 -С.273-279.
6. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. –Rev.math.pures et appl. Acad. RPR.—4.3—1959. С.467-483.
7. *Хейл Джс.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.—М.Мир,—1984.—421с.

Одержано 14.09.2012