УДК 512.547+512.58

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України)
І. В. Литвинчук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОПИС КАТЕГОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ПОСТІЙНОГО ЖОРДАНОВОГО ТИПУ НАЙМЕНШОЇ НЕЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ

We describe the category of matrix representations of the fourth Klein group over an algebraically closed field of characteristic 2 that have constant Jordan type.

Описується категорія матричних зображень четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2, які мають постійний жордановий тип.

Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. Якщо говорити про зображувальний тип, то в класичному випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи, група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень (більш того, відповідна групова алгебра напівпроста); у протилежному ж випадку, який називається модулярним, скінченне число нерозкладних зображень мають тільки групи з циклічною силовською p -підгрупою, де p - характеристика поля. У модулярному випадку більшість груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень містить в собі класичну нерозв'язну задачу лінійної алгебри про класифікацію пари матриць з точністю до подібності; групи, що допускають опис зображень, називаються ручними. Ручні і дикі скінченні групи в модулярному випадку повністю описані в роботі [1][1].

У роботі [41] для скінченної групи (і навіть в більш загальній ситуації — для скінченної групової схеми) G і поля характеристики $p > 0$ вводиться поняття модулів постійного жорданового типу, а також вивчаються такі модулі. Дана тематика стала важливим напрямом сучасної теорії зображень (див., зокрема, [42–47]).

У роботі [48], яка була написана під впливом статті [41], розглядаються властивості різних матричних задач, пов'язані з рангами матриць; зокрема, описуються зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. У роботі [49] авторами доведено, що задача про опис зображень постійного жорданового типу нециклічної елементарної абелевої p-групи G порядку $|G| > 4$ є дикою (випадок циклічної групи тривіальний).

У даній роботі описується категорія зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна (найменшої нециклічної групи).

1. Зображення четверної групи Клейна постійного жорданового типу. У роботі [41] для скінченної групової схеми G і поля характеристики

[1]Формальні означення ручних і диких матричних задач, а також основні загальні теореми про такі задачі, розглянуті Ю. А. Дроздом в [2,3]. Дослідження, що проводяться впродовж багатьох десятиліть, про вивчення зображень ручних і диких об'єктів відносяться не тільки до зображень груп над полями (див., зокрема, посилання в [1] і роботи [4–7]), але і до зображень груп над кільцями (див. [8–17]), зображень сагайдаків і частково впорядкованих множин (див. [18–33]), а також до операторів в скінченновимірних векторних просторах (див. [34–37]), класифікації самих об'єктів (див. [38–40]) та інших ситуацій.

$p > 0$ вводиться поняття модулів постійного жорданового типу. В окремому випадку, для четверної групи Клейна $G_2 = (2, 2)$ із стандартними твірними g_1, g_2 і алгебраїчно замкнутого поля k характеристики 2, це означає (на мові матричних зображень), що самоанулюючі попарно комутуючі матриці A_1, A_2, які відповідають елементам $a_1 = 1 + g_1, a_2 = 1 + g_2$ групової алгебри kG, задовольняють наступній умові: жорданова форма матриці $\alpha A_1 + \beta A_2$, де $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не залежить від вибору елементів α і β.

Оскільки жорданова форма матриці, рівної в квадраті нулю, однозначно визначається її рангом, то надалі замість „зображення постійного жорданового типу“ будемо говорити „зображення постійного рангу“.

Покладемо $a = g_1$, $b = g_2$. Одиничну матрицю розмірності s позначаємо через E_s. $J_t(b)$, де $b \in k$, позначає клітку Жордана розміру $t \times t$ з власним числом b, а $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ — відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок матриці.

У роботі [48] доведена наступна теорема, яка описує нерозкладні зображення четверної групи Клейна, що мають постійний ранг.

Теорема 1. *Зображення групи G_2 (над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2) вигляду*

a) $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

b)
$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c)
$$a \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \overline{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & \overline{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right),$$

d)
$$a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

де $s \geq 1$, утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу.

Таким чином, з точністю до еквівалентності, в кожній розмірності число нерозкладних зображень постійного рангу скінченне (зокрема, може бути рівним нулю).

2. Формулювання основного результату. Наша мета — описати категорію матричних зображень постійного рангу четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2. Згідно загального означення (для зображень довільної групи над довільним полем) множина морфізмів

$Hom(S, S')$ матричних зображень

$$S : a \to A,\ b \to B, \quad S' : a \to A',\ b \to B'$$

групи G_2 над полем k складається з усіх матриць X (з елементами з k) таких, що $AX = XA'$ і $BX = XB'$. Множина морфізмів є, очевидно, векторним простором.

Для задання категорії достатньо в кожному класі еквівалентних нерозкладних зображень вказати по одному представнику і обчислити для них всі множини морфізмів. В якості таких представників будемо брати вказані в теоремі 1 нерозкладні зображення. При цьому зображення, вказані в пунктах a), b), c), d), будемо позначати відповідно через T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Введемо деякі поняття.

Нехай $X = (x_{ij})$ — матриця розміру $n \times m$ над деяким полем. Її s^+-ю діагоналлю, де s — ціле число, назвемо сукупність елементів вигляду $x_{i,i+s}$, а s^--ю діагоналлю — сукупність елементів вигляду $x_{i,m+1-s-i}$ (з формальних міркувань ми не виписуємо допустимі значення для індексів, вважаючи, що символ x з неприпустимими індексами відсутній і, як наслідок, допускаючи пусті діагоналі). Такі діагоналі називаємо відповідно $(+)$-діагоналями і $(-)$-діагоналями. Будемо називати $(\pm)$-діагональ скалярною, якщо всі її елементи рівні між собою (зокрема, нульовою, якщо всі елементи нульові).

Матрицю X будемо називати d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), якщо кожна її $(+)$-діагональ (відповідно $(-)$-діагональ) скалярна. Очевидно, що якщо матриця X є d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), то вона однозначно задається елементами першого рядка і першого стовпця (відповідно першого рядка і останнього стовпця). В цьому випадку вводимо відповідно позначення

$$X = S^+_{nm}(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{21}, \ldots, x_{n1}),$$

$$X = S^-_{nm}(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{2m}, \ldots, x_{nm}).$$

Матрицю X, яка є d^+-скалярною, назвемо d_0-скалярною, якщо у випадку $n \le m$ (відповідно $n \ge m$) s^+-а діагональ є нульовою при $s < 0$ і при $s > m - n$ (відповідно при $s > 0$ і при $s < m - n$); в цьому випадку вводимо позначення $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{1,m-n+1})$, якщо $n \le m$ і $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{n-m+1,1})$, якщо $n \ge m$.

Наступна теорема описує множини морфізмів між зображеннями вигляду T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Теорема 2. *Множина морфізмів наступна:*

$Hom\,(T_1, T_1) = \{(\boldsymbol{x_{11}})\}$;

$Hom\,(T_1, T_2) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \end{pmatrix}\right\}$;

$$Hom\,(T_2, T_1) = \left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_2)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \boldsymbol{x_{14}}\\ 0 & x_{11} & 0 & x_{13}\\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12}\\ 0 & 0 & 0 & x_{11}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_1,T_3^s)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0\,| & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_1)=\left\{\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x_{11}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x_{s1}}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_1,T_4^s)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0\,| & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s,T_1)=\left\{\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x_{11}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x_{s+1,1}}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_3^s)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccccc} x_{11} & \dots & x_{1s} & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s}} & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & \dots & x_{1,s-1} & x_{1s}\\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_2)=\left\{\left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & x_{22} & \boldsymbol{x_{14}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_{s-1,2} & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s-1,4}}\\ 0 & x_{s2} & x_{s3} & \boldsymbol{x_{s4}}\\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & x_{s2}\\ 0 & 0 & 0 & x_{s3}\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_4^s)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \dots & x_{1,s+1} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\\ 0 & \dots & 0 & x_{12} & \dots & x_{1,s+1}\\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & \dots & x_{1s}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_2) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{22} & x_{12} & \boldsymbol{x_{24}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s2} & x_{s-1,2} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ 0 & 0 & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s+1,4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_3^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{st}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{s+1,t+1}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1})} \end{array} \right) \right\}$$

при $s \le t$,

$$Hom\,(T_3^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s > t$;

$$Hom\,(T_3^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} S^-_{s,t+1}(x_{11}, \dots, x_{1,t+1}; & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ {}_{2,t+1}, \dots, x_{s,t+1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S^-_{s+1,t}(x_{11}, \dots, x_{1,t};} \\ & \multicolumn{3}{c}{{}_{1,t+1}, \dots, x_{s,t+1})} \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s < t$,

$$Hom\,(T_4^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{s+1,t+1}(x_{11},\dots,x_{s-t+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & & S_{st}(x_{11},\dots,x_{s-t+1,1}) & \end{array} \right) \right\}$$

при $s \geq t$.

У всіх випадках множини морфізмів зображені як сукупність матриць, елементи x_{ij} яких пробігають все поле k. Жирним шрифтом позначені елементи матриць, які зустрічаються один раз.

3. Доведення теореми 2. Покладемо $M^{\varnothing} = M$ для довільної матриці M. Тоді кожне канонічне нерозкладне зображення четверної групи Клейна (вказане в теоремі 1) має вигляд T_i^x, де $i \in \{1,2,3,4\}$, $x = \varnothing$, якщо $i = 1,2$ і x — натуральне число, якщо $i = 3,4$.

Якщо $T_i^x : a \to A_1, b \to B_1$ і $T_j^y : a \to A_2, b \to B_2$ — канонічні нерозкладні зображення, то (згідно сказаному вище) множина морфізмів $Hom(T_i^x, T_j^y)$ у категорії зображень постійного рангу четверної групи Клейна складається зі всіх матриць X таких, що $A_1X = XA_2$ і $B_1X = XB_2$. В цьому випадку скалярна рівність $(A_1X)_{pq} = (XA_2)_{pq}$ і $(B_1X)_{pq} = (XB_2)_{pq}$ позначається відповідно через $[a;i,j;p,q]$ і $[b;i,j;p,q]$; у вказаному означенні через M_{pq} позначається елемент матриці M, що стоїть на перетині p-го рядки і q-го стовпця (де M приймає значення $(A_1X),(XA_2),(B_1X),(XB_2)$).

При доведенні теореми елементи матриці X позначаються (як і в умові теореми) традиційно — через x_{pq}. При цьому, для простоти, замість x_{pq} пишемо просто pq, використовуючи, якщо потрібно, круглі дужки (наприклад, замість $x_{s+1,1}$ пишемо $(s+1)1$). Випадок, коли обчислюється $Hom(T_i^x, T_j^y)$ позначається через (i,j).

Переходимо до розгляду всіх можливих випадків. У кожному з них вказуються всі наслідки з рівностей вигляду $[a;i,j;p,q]$ і $[b;i,j;p,q]$, які разом забезпечують вигляд матриці X, вказаний в умові теореми.

$\mathbf{(1,1)}$ — очевидний випадок.

$\mathbf{(1,2)}$ $[a;1,2;1,3] : 0 = 11$, $[a;1,2;1,4] : 0 = 12$, $[b;1,2;1,4] : 0 = 13$ $\Rightarrow 11 = 0, 12 = 0, 13 = 0$.

$\mathbf{(2,1)}$ $[a;2,1;1,1] : 31 = 0$, $[a;2,1;2,1] : 41 = 0$, $[b;2,1;1,1] : 21 = 0$ $\Rightarrow 31 = 0, 41 = 0, 21 = 0$.

$\mathbf{(2,2)}$ $[a;2,2;1,1]$, $[a;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,1]$, $[a;2,2;2,2]$, $[b;2,2;1,1]$, $[b;2,2;1,3]$, $[b;2,2;4,4] \Rightarrow 31 = 0, 32 = 0, 41 = 0, 42 = 0, 21 = 0, 23 = 0, 43 = 0$;

$[a;2,2;1,3]$, $[b;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,4] \Rightarrow 33 = 11 = 22 = 44$;

$[a;2,2;1,4]$, $[a;2,2;2,3]$, $[b;2,2;1,4] \Rightarrow 12 = 34, 21 = 43, 24 = 13$.

$\mathbf{(1,3)}$ $[a;1,3;1,s+l] \Rightarrow 1l = 0$ $(l = 1,\dots,s)$.

$\mathbf{(3,1)}$ $[a;3,1;k,1] \Rightarrow (s+k)1 = 0$ $(k = 1,\dots,s)$;

$[b;3,1;s,1] \Rightarrow (2s+1)1 = 0$.

$\mathbf{(1,4)}$ $[a;1,4;1,s+1+l] \Rightarrow 1l = 0$ $(l = 1,\dots,s)$;

$[b;1,4;1,2s+1] \Rightarrow 1(s+1) = 0$.

$\mathbf{(4,1)}$ $[a;4,1;k,1] \Rightarrow (s+1+k)1 = 0$ $(k = 1,\dots,s)$.

$\mathbf{(2,3)}$ $[b;2,3;1,l] \Rightarrow 2l=0$ $(l=1,\dots,s+1)$;
$[b;2,3;1,s+l] \Rightarrow 2(s+l)=1(l-1)$ $(l=2,\dots,s+1)$;
$[a;2,3;1,l] \Rightarrow 3l=0$ $(l=1,\dots,s)$;
$[a;2,3;1,s+l] \Rightarrow 3(s+l)=1l$ $(l=1,\dots,s)$;
$[a;2,3;1,2s+1] \Rightarrow 3(2s+1)=0$;
$[b;2,3;3,l] \Rightarrow 4l=0$ $(l=1,\dots,s+1)$;
$[b;2,3;3,l]$ (враховуючи, що $3k=0$ при $k=1,\dots,s$) $\Rightarrow 4l=0$ $(l=s+2,\dots,2s+1)$.

$\mathbf{(3,2)}$ $[a;3,2;k,3] \Rightarrow k1=0$ $(k=s+1,\dots,2s+1)$;
$[a;3,2;k,4] \Rightarrow k2=0$ $(k=s+1,\dots,2s+1)$;
$[b;3,2;k,4] \Rightarrow k3=0$ $(k=s+1,\dots,2s+1)$;
враховуючи рівності $[a;3,2;k,3]$, маємо: $k1=(s+k)3=0$ $(k=1,\dots,s)$;
$[a;3,2;k,4] \Rightarrow (s+k)4=k2$ $(k=1,\dots,s)$;
порівнюючи рівності $[a;3,2;k,4]$ і $[b;3,2;k-1,4]$, маємо: $(s+k)4=k2=(k-1)3$ $(k=2,\dots,s)$;
$[b;3,2;s,4] \Rightarrow (2s+1)4=s3$.

$\mathbf{(2,4)}$ $[b;2,4;1,l] \Rightarrow 2l=0$ $(l=1,\dots,s+1)$;
$[b;2,4;1,s+l] \Rightarrow 2(s+l)=1l$ $(l=2,\dots,s+1)$;
$[a;2,4;1,l] \Rightarrow 3l=0$ $(l=1,\dots,s+1)$;
$[a;2,4;1,s+l] \Rightarrow 3(s+l)=1(l-1)$ $(l=2,\dots,s+1)$;
$[a;2,4;1,l] \Rightarrow 4l=0$ $(l=1,\dots,s+1)$;
$[a;2,4;1,s+l] \Rightarrow 4(s+l)=2(l-1)=0$ $(l=2,\dots,s+1)$.

$\mathbf{(4,2)}$ $[a;4,2;k,1] \Rightarrow (s+1+k)1=0$ $(k=1,\dots,s)$;
$[a;4,2;k,2] \Rightarrow (s+1+k)2=0$ $(k=1,\dots,s)$;
$[b;4,2;k+1,3] \Rightarrow (s+1+k)3=0$ $(k=1,\dots,s)$;
$[a;4,2;k,3] \Rightarrow (s+1+k)3=k1$ і оскільки $(s+1+k)3=0$, то $k1=0$ $(k=1,\dots,s)$;
$[b;4,2;s+1,2] \Rightarrow (s+1)1=(2s+1)2=0$;
$[a;4,2;k,4],[b;4,2;k+1,4] \Rightarrow (s+1+k)4=k2=(k+1)3$ $(k=1,\dots,s)$;
$[b;4,2;1,4] \Rightarrow 13=0$;
$[a;4,2;s+1,3] \Rightarrow (s+1)1=0$;
$[a;4,2;s+1,4] \Rightarrow (s+1)2=0$.

$\mathbf{(3,3)}$ Покладемо
$$X=\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right),$$
де A — матриця розміру $s\times t$, B — матриця розміру $(s+1)\times t$, C — матриця розміру $s\times(t+1)$, D — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$.

У свою чергу, матрицю D зобразимо у вигляді блочної матриці з блоками D_0,Q,S,T:
$$D=\left(\begin{array}{c|c} D_0 & Q \\ \hline S & T \end{array}\right),$$
де D_0 — матриця розміру $s\times t$, Q — вектор-стовпчик розміру $s\times 1$, S — вектор-рядок розміру $1\times t$, T — матриця розміру 1×1.

$[a;3,3;k,t+l] \Rightarrow B=0$ $(k=s+1,\dots,2s+1, l=1,\dots,t)$;
$[a;3,3;k,l] \Rightarrow D_0=A$ $(k=1,\dots,s, l=t+1,\dots,2t)$;

$[a;3,3;k,2t+1] \Rightarrow Q=0$ $(k=1,\ldots,s)$;

$[b;3,3;s,l] \Rightarrow S=(0,s1,s2,...,s(t-1)), T=(st)$ $(l=t+1\ldots,2t+1)$.

Залишилося визначити вид матриці A.

$[a;3,3;k,t+1]$ і $[b;3,3;k-1,t+1] \Rightarrow (s+k)(t+1)=k1=0$ $(k=2,\ldots,s)$ і, отже, для елементів матриці A маємо: $k1=0$ при $k=2,\ldots,s$ $(*)$;

$[a;3,3;k,2t+1]$ і $[b;3,3;k-1,2t+1] \Rightarrow (s+k)(2t+1)=0=(k-1)t$ $(k=2,\ldots,s)$ і, отже, для елементів A маємо: $(k-1)t=0$ при $k=2,\ldots,s$ $(**)$;

$[a;3,3;k,t+l]$ і $[b;3,3;k-1,t+l] \Rightarrow (s+k)(t+l)=kl=(k-1)(l-1)$ $(k=2,\ldots,s, l=2,\ldots,t)$; тоді $(*) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, що лежать під діагоналлю $11=22=33=\ldots$, є нульовими. А якщо (додатково) $t<s$, то з $(**)$ випливає, що і сама ця діагональ нульова.

(3, 4) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $s\times(t+1)$, B — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, C — матриця розміру $s\times t$, D — матриця розміру $(s+1)\times t$.

$[a;3,4;k,l] \Rightarrow (s+k)l=0$ $(k=1,\ldots,s, l=1,\ldots,t+1)$;

$[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l=0$ $(l=1,\ldots,t+1)$. Отже, $B=0$.

З рівностей $[a;3,4;k,l]$ при $k=1,\ldots,s, l=t+2,\ldots,2t+1$ випливає, що матриця D без останнього рядка дорівнює матриці A без останнього стовпця.

$[a;3,4;p,q]$ і $[a;3,4;p-1,q]$ при $p=2,\ldots,s, q=t+2,\ldots,2t+1 \Rightarrow$ $kl=(k+1)(l-1)$ при $k=1,\ldots,s-1, l=1,\ldots,t+1$;

$[a;3,4;s,l+1]$ і $[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l=(2s)(l+1), .(2s+1)(2t+1)=s(t+1)$ $(l=t+2,\ldots,2t)$.

(4, 3) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(t+1)\times s$, B — матриця розміру $t\times s$, C — матриця розміру $(t+1)\times(s+1)$, D — матриця розміру $t\times(s+1)$.

$[b;4,3;k,l] \Rightarrow (t+k)l=0$ $(k=2,\ldots,t+1, l=1,\ldots,s+1)$, тобто $B=0$ і нульовим є перший стовпець матриці D;

$[a;4,3;k,2s+1] \Rightarrow (t+1+k)(2s+1)=0$ $(k=1,\ldots,t)$, тобто останній стовпець матриці D — нульовий;

$[a;4,3;t+1,s+l] \Rightarrow (t+1)l=0$ $(l=1,\ldots,s)$, тобто останній рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;1,l]$ при $l=s+2,\ldots,2s+1 \Rightarrow 1k=0$ при $k=1,\ldots,s$, тобто перший рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;k,l]$ при $k=1,\ldots,t, l=s+1,\ldots,2s \Rightarrow$ матриця D без останнього стовпця дорівнює матриці A.

Далі, ліві частини рівностей $[a;4,3;k,s+l]$ і $[b;4,3;k+1,s+l]$ при $k=2,\ldots,t, l=1,\ldots,s+1$ рівні між собою, а саме дорівнюють $(k+t+1)(s+l)$. Прирівнюючи їх праві частини, одержуємо наступні рівності: $k1=0$, $kp=(k+1)(p-1)$ при $p=2,\ldots,s$, $(k+1)s=0$. Враховуючи, що перший і останній рядки матриці A нульові, з цієї рівності маємо, що $A=0$.

(4, 4) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, B — матриця розміру $s\times(t+1)$, C — матриця розміру $(s+1)\times t$, D — матриця розміру $s\times t$.

$[a;4,4;s+1,t+1+l] \Rightarrow (s+1)l=0$ $(l=1,\ldots,t)$;

$[a; 4, 4; k, l] \Rightarrow (s + k + 1)l = 0$ $(k = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, t + 1)$, тобто $B = 0$;

$[a; 4, 4; k, l]$ при $k = 1, \ldots, s, l = t + 2, \ldots, 2t + 1 \Rightarrow$ матриця D дорівнює матриці A без останнього рядка і останнього стовпця.

Отже, залишилося визначити елементи матриці A.

$[b; 4, 4; 1, t + l] \Rightarrow 1l = 0(l = 2, \ldots, t + 1)$;

$[a; 4, 4; s + 1, t + 1 + l] \Rightarrow (s + 1)l = 0$ $(l = 1, \ldots, t)$ $(* * *)$;

$[a; 4, 4; k, t + l + 1]$ і $[b; 4, 4; k + 1, t + l + 1]$ (з однаковими лівими частинами) $\Rightarrow kl = (k + 1)(l + 1)$ $(k = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, t)$; тоді $(* * *) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, які лежать над діагоналлю $11 = 22 = 33 = \ldots$, є нульовими. А якщо (додатково) $s < t$, то і сама ця діагональ нульова.

Для того щоб завершити доведення теореми, потрібно переконатися у тому, що в кожному з випадків були використані всі наслідки з рівностей $[a; i, j; p, q]$ і $[b; i, j; p, q]$. Для цього достатньо (у кожному з випадків) перевірити, що вказана в умові теореми матриця X завжди задовольняє дві матричні рівності, які задають (згідно визначення) множину морфізмов. Перевіряється це безпосередньо множенням відповідних матриць.

Список використаної літератури

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. –1977. – **71**. – С. 24–41.
2. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 39–74.
3. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 104–114.
4. *Higman D.G.* Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 377–381.
5. *Erdman K.* Blocks of tame representation type and related algebras // Lecture Notes in Math., **1428**, Springer, 1990.
6. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38–61.
7. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3–9.
8. *Ройтер А. В.* О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун–та. – 1960. – № 19. – С. 65–74.
9. *Troy A.* Integral representation of cyclic groups of order p: Ph. P thesis. – Univ. of Illinois, 1961.
10. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.
11. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.
12. *Jones A.* Groups with a finite number of indecomposable integral representations // Mich. Math. J. – 1963. – no. 10. – P. 257–261.
13. *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – **31**, С. 1361–1379.
14. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Матем. сб, „Наукова думка“, Киев. – 1976. – С. 275–277.
15. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин–та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
16. *Gudivok P. M.* On representations of finite groups over some factorial rings // Cont. Math. – 1992 – **131**. – С. 173–181.
17. *Гудивок П. М., Желізняк М. П.* Про нерозкладні матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород.

ун-ту. Серия матем. і інформ. –2008. – Вип. 17. – С. 92–95.
18. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, no. 1. – P. 71–103.
19. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
20. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
21. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – no. 5. – P. 3–86.
22. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.
23. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – **8**, вып. 3. – С. 34–42.
24. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, № 5. – С. 963–991.
25. *Loupias M.* These presentee pour obtenir le grade de Docteur es sciences. - Universite Francois Rabelais de Tours. - 1975. - 168 p.
26. *Овсиенко С. А.* Представления колчанов с соотношениями // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 88–103.
27. *Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны ручного типа // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1978. – 78.42. – 32 с.
28. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств с инволюцией // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1986. – 86.80. – 26 с.
29. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1990. – **183**. –С. 149–159.
30. *Bondarenko V. M, Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67–88.
31. *Bondarenko V. M.* On dispersing representations of quivers and their connection with representations of bundles of semichains // Algebra Discrete Math. – 2002. – **1**, no. 1. – P. 19–31.
32. *Bondarenko V. M., Futorny V., Klimchuk T., Sergeichuk V. V., Yusenko K.* Systems of subspaces of a unitary space // Linear Algebra Appl. – 2013. – **438**, no. 5. – P. 2561–2573.
33. *Drozd Yu., Golovashchuk N., Zembyk V.* Representations of nodal algebras of type E // Algebra Discrete Math. – 2017. – **23**, no. 1. – P. 16–34.
34. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
35. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
36. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear Algebra Appl. – 2003. – **365**, no. 5. – P. 45–90.
37. *Bondarenko V. M., Gerasimova T. G„ Sergeichuk V. V.* Pairs of mutually annihilating operators // Linear Algebra Appl.– 2009. – **430**, no. 1. – P. 86–105.
38. *Сергейчук В. В.* О классификации метаабелевых p-групп // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977, 150–161.
39. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О дикости задачи описания некоторых классов групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серия матем. – 1998, № 3. – С. 69–77.
40. *Belitskii G., Bondarenko V. M., Lipyanski R., Plachotnik V. V., Sergeichuk V. V.* The problems of classifying pairs of forms and local algebras with zero cube radical are wild // Linear Algebra Appl. – 2005. – **402**, no. 6. – P. 135–142.
41. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. 191–234.
42. *Carlson J. F., Friedlander E. M.* Exact category of modules of constant Jordan type // Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 267–290, Progr. Math.,

269, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

43. *Carlson J. F., Friedlander E. M., Suslin A.* Modules for $Z/p \times Z/p$ // Comment. Math. Helv. – 2011. – **86**, no. 3. – P. 609–657.
44. *Benson D., Pevtsova Ju.* A realization theorem for modules of constant Jordan type and vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. – 2012. – **364**, no. 12. – P. 6459–6478.
45. *Benson D. J.* A survey of modules of constant Jordan type and vector bundles on projective space // Advances in representation theory of algebras, 39–63, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2013.
46. *Benson, D. J.* Modules of constant Jordan type and a conjecture of Rickard // J. Algebra. – 2014. – **398**. – P. 343–349.
47. *Baland S., Chan K.* Modules of constant Jordan type, pullbacks of bundles and generic kernel filtrations // J. Algebra. – 2016. – **462**. – P. 253-284.
48. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2012. – **23**, №1. – С. 19–27.
49. *Bondarenko V. M.; Lytvynchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. – 2012. – **14**, no. 1. – P. 29–36.

Одержано 02.08.2017