УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦГТ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper containse the estimotes of rate of convergence to the normal law in series scheme.

У роботі містяться оцінки щвидкості збіжності до нормального закону у схемі серій.

У роботі [3] одержано досить загальні оцінки швидкості збіжності в ЦГТ в термінах псевдомоментів, пізніше ці результати ввійшли у монографію [2]. Ці результати викликали новий інтерес до різних узагальнень. Зокрема, у роботі [3] результати із [3] узагальнюються на послідовність серій незалежних випадкових величин. Використовуючи ідеї з [1], у даній роботі ми продовжуємо такі дослідження.

Нехай задано послідовність серій випадкових величин $\xi_{n1}, ..., \xi_{nn}$. При n фіксованому випадкові величини ξ_{ni} незалежні і однаково розподілені, $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$; $F_n(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}; $f_n(t)$ – характеристична функція ξ_{ni}. Позначимо $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ (тоді $DS_n = 1$), $\Phi_n(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону.

Введемо псевдомоменти

$$\nu_{n0}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right|,$$

$$\kappa_{n0}(r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \left|\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| dx,$$

$$\kappa_{n}(r) = r\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx,$$

де $r \in (2, 3]$.

Теорема. *Для всіх $n \leq 1$ справедливі нерівності*

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \tag{1}$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max\left\{\frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\kappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}}(r)}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{2}$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max\left\{\frac{\kappa_{n}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\kappa_{n}^{\frac{n}{rn+1}}(r)}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{3}$$

де $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ – деякі сталі.

Лема 1. *Нехай* $\omega_n(t) = \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|$. *Для будь-яких* $t \in R$ *мають місце наступні нерівності*:

$$\omega_n(t) \le \nu_{n0}(r) \min\left(1, \frac{|t|^r}{6^{r-2}}\right), \tag{4}$$

$$\omega_n(t) \le \kappa_n(r) \frac{2^{5-2r}|t|^r}{r}, \tag{5}$$

$$\omega_n(t) \le \kappa_{n0}(r) \min\left(|t|, \frac{2^{5-2r}|t|^r}{r}\right). \tag{6}$$

Доведення здійснюється аналогічно до [1], зокрема, при доведенні тверджень (5) і (6) використовується оцінка

$$|\omega_n(t)| = \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| =$$

$$= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| =$$

$$= \left|-it\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx\right| = \left|-it\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - it)\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx\right|. \tag{7}$$

Лема 2. *Нехай* $c \in (0; e^{-6})$. *Нехай для деяких* $\theta_n > 0$ *і* $s \in [0; r]$, *де* $2 < r \le 3$, *і для будь-якого* $t \in R$ *виконується умова*

$$\omega_n(t) = \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \theta_n \min(|t|^s, |t|^r). \tag{8}$$

Якщо $\theta_n \le c$ *і* $|t| \le T_1 = \sqrt{-2\ln\theta_n}$, *то*

$$\left|f_n(t\sqrt{n})\right| \le e^{-c_1 t^2}, \tag{9}$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c}(-2\ln c)^{\frac{r-2}{2}} > 0$.

А якщо $\theta_n \le c$ *і* $|t| > T_1$, *то*

$$\left|f_n(t\sqrt{n})\right| \le \theta_n\left(1 + |t|^s\right). \tag{10}$$

Якщо ж $\bar{\theta}_n > c$, *то при* $|t| \le T_2 = \left(\frac{c}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{r-2}}$

$$\left|f_n(t\sqrt{n})\right| \le e^{-c_2 t^2}, \tag{11}$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - c\sqrt{e} > 0$.

Доведення леми 2 міститься у [1].

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми 2. Тоді для всіх* $n \ge 2$

$$\rho_n \le C \max\left\{\frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\theta_n^p}{\sqrt{n}}\right\},$$

де C – деяка абсолютна стала, $p = \min\left\{1, \frac{n}{sn+1}\right\}$.

Доведення. Використаємо нерівність ([4], стор. 299):

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T} \left| \sup_x G'(x) \right|.$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x) = \Phi_n(x);\ G(x) = \Phi(x);\ f(t) = \varphi_n(t);\ g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^T \left| f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}.$$

Зробимо заміну $t = z\sqrt{n}$ в інтегралі правої частини цієї нерівності. Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{z^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \tag{12}$$

Використавши рівність

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \cdot b^{k-1},$$

де у нашому випадку $a = f_n(t\sqrt{n})$, $b = e^{-\frac{t^2}{2}}$, одержимо:

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \sum_{k=1}^{n} \left| f_n(t\sqrt{n}) \right|^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \tag{13}$$

Із умов леми, нерівностей (10) і (11) леми 2 і (13) одержимо: якщо $|t| \leq T_m$ ($m = 1$ при $\theta_n \leq c$ і $m = 2$ при $\theta_n > c$), то

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \theta_n |t|^r \sum_{k=1}^{n} e^{-c_m t^2 (n-k)} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \leq \theta_n |t|^r n e^{-c_m t^2 (n-1)}. \tag{14}$$

Ми врахували, що $c_m \leq \frac{1}{2}$.

Нехай $n \geq 2$, $\theta_n > c$. У (12) покладемо $T = T_2\sqrt{n}$.

Будемо вважати, що

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}},\ \left(\frac{\theta_n}{c}\right)^{\frac{1}{r-2}} \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}},\ \frac{(\theta_n)^{\frac{3-r}{r-2}} c^{\frac{-1}{r-2}}}{n^{\frac{3-r}{2}}} > 1$$

і

$$\frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} c^{r-3} > 1. \tag{16}$$

Оскільки

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le 1,$$

то із (16) одержимо

$$\rho_n \le 1 < \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} c^{r-3}$$

і нерівність (1) виконується.

Із (14) для інтеграла у (12) одержуємо ($m = 2$)

$$I = \int_0^{T_2} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \le \int_0^{T_2} \theta_n |t|^r n e^{-c_m t^2(n-1)} \frac{dt}{t} = \theta_n n \int_0^{T_2} t^{r-1} e^{-c_2 t^2(n-1)} dt =$$

$$= \theta_n n \frac{1}{2\left(c_2(n-1)\right)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{c_2 T_2^2(n-1)} z^{\frac{r}{2}-1} e^{-z} dz \le \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right). \quad (17)$$

Тоді із (17), (15) і (12) для $n \ge 2$

$$\rho_n \le C_3 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}.$$

Якщо $\theta_1 > c$, то $\rho_1 \le 1 < \frac{\theta_1}{c}$. У випадку $\theta_n > c$ теорема доведена.

Нехай $\theta_n \le c$, $n \ge 2$. Покладемо у (17) $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\theta_n)^{-p}$, $p = \min\left\{1; \frac{1}{sn+1}\right\}$. Тоді

$$I = \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{T'} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2, \quad (18)$$

де $T' = \min(T_1, X)$.

Будемо розглядати випадок $T' = T_1$, бо інакше $I_2 = 0$ і доведення випливає із оцінки інтеграла I_1.

$$I_1 \le \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = C_4 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \quad (19)$$

$$I_2 = \int_{T_1}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \le \int_{T_1}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_1}^{X} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_2' + I_2''. \quad (20)$$

Із (10) (враховуємо, що $T_1 \ge \sqrt{12}$)

$$I_2' \le (\theta_n)^n \int_{T_1}^{X} (1 + |t|^s)^n \frac{dt}{t} \le (2\theta_n)^n \int_{T_1}^{X} t^{sn-1} dt.$$

У випадку $s \geq \frac{1}{3}$

$$I_2' \leq (2\theta_n)^n \frac{X^{sn}}{sn} \leq \frac{3}{n}(\theta_n)^{(1-sp)n}(2c_1)^n \leq C_5 \frac{(\theta_n)^p}{\sqrt{n}}. \tag{21}$$

Якщо $n \geq 2$ і $s < \frac{1}{3}$, то $p = 1$, крім того $n - 1 - sn - \frac{1}{3} > 0$. Тоді

$$I_2' \leq (2\theta_n)^n \int\limits_{T_1}^{X} t^{sn-1} dt = (2\theta_n)^n \int\limits_{T_1}^{X} t^{sn-\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \leq \frac{(2\theta_n)^n}{\sqrt[3]{T_1\left(sn+\frac{1}{3}\right)}} X^{sn+\frac{1}{3}} \leq$$

$$\leq \theta_n \frac{2^n 3}{\sqrt[6]{12}} (\theta_n)^{n-1-sn-\frac{1}{3}} c^{sn+\frac{1}{3}} \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} \frac{3}{c\sqrt[6]{12}} n^{\frac{r-2}{2}} (2c)^n \leq C_6 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \tag{22}$$

Залишилось оцінити I_2'':

$$I_2'' = \int\limits_{T_1\sqrt{n}}^{X\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{(T_1\sqrt{n})^2} e^{-\frac{(T_1\sqrt{n})^2}{2}} \leq \frac{(\theta_n)^n}{12n} \leq \frac{\theta_n}{\sqrt{n}} \frac{c}{12\sqrt{2}}. \tag{23}$$

Із (7), (18)—(23) випливає, що у випадку $\theta_n \leq c$, $n \geq 2$ лема доведена.

Нехай $n = 1$, $\theta_1 \leq c$, $s > 0$. Тоді із (7) і умов леми

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^X \left| f_1(z) - e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X} \leq \frac{2}{\pi}\theta_1 \int\limits_0^X t^{s-1} dt + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi\sqrt{2\pi}c} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(\theta_1)^{1-sp} c^s}{s} + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi\sqrt{2\pi}c} \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{s}\right) (\theta_1)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Лема доведена.

Доведення теореми. Використовуємо лему 1. Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_n(r)$, $s = r$. Тоді

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max\left\{ \frac{\kappa_n(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_n(r))^{\frac{n}{rn+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_{n0}(r)$, $s = 1$. Тоді одержимо

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max\left\{ \frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_{n0}(r))^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \nu_{n0}(r)$, $s = 0$. Тоді для всіх $n \geq 2$

$$\rho_n \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}} \text{ і } \rho_1 \leq \nu_{10}(r).$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Zolotarev V. M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531–543.
2. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Боярищева Т. В., Далекорей М. В., Михасюк М. М., Поляк І. Й., Слюсарчук П. В.* Деякі узагальнення оцінок Золотарьова для послідовності серій // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2017. – Вип. № 1 (30). – С. 32–42.
4. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різно розподілених величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд–во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 12.07.2017