УДК 512.84

О. А. Кирилюк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2, R_p)$

All minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$ (R_p is the ring of integers of the finite ixtension F_p of the fileld rational p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ for $p > 2$) are described up to conjugation.

Описуються з точністю до спряженості всі мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ (R_p – кільце цілих величин скінченного розширення F_p поля раціональних p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ для $p > 2$).

В $[1, 2]$ класифіковані мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ при $p = 2$.

Основні позначення статей $[1, 2]$ будуть використані і в даній роботі.

I. Нехай $p > 2$ – просте число і ε – первісний корінь степеня p з одиниці.

Якщо $\varepsilon \notin R_p$, то має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $p > 2$ – просте число і $\varepsilon \notin R_p$. Тоді:*

1. *Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $i \in P_2 (i^2 = -1)$ або $\sqcap' \neq \oslash$, з точністю до спряженості вичерпуються групами*

$$H_{2^{n+1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \ H_{2,r} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 \\ 1 & \beta_1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де $P_2 = \langle \xi \rangle$, $|P_2| = 2^n (n \geq 2)$, $r \in \sqcap'$, а β_0, β_1 – коефіцієнти незвідного над F_p дільника $f(x) = x^2 - \beta_1 x - \beta_0$ полінома $x^r - 1$.

2. *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $i \in P_2$ або $\sqcap \neq \oslash$, з точністю до спряженості вичерпуються групами:*

1) $W_1^{(q)} = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2$ *і* $q \in \sqcap$;

2) $W_1^{(q)}, W_2^{(q)} = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$; $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$;

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^2$ *і* $q \in \sqcap$;

3) V_1, V_2, *якщо* $|P_2| = 2^2$ *і* $\sqcap = \oslash$;

4) $V_1, V_2, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} \xi_k & 0 \\ 0 & -\xi_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $\sqcap \neq \oslash$;

5) $V_1, V_2, V_k, W_l^q = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi_l \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^n (n \geq 3); q \in \sqcap$;

де Θ_q – елемент порядка q у кільці R_p, q пробігає множину $\sqcap$, ξ_k, ξ_l – елементи порядків 2 і 2 відповідно у кільці R_p ($1 \leq l \leq n$; $3 \leq k \leq n$), причому

$$V_1 \cong D_4,\, V_2 \cong K_4,\, V_k \cong H_k = \left\langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1,\, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \right\rangle (k = 3, ..., n),$$

$$W_l^{(q)} \cong G_{l,q} = \left\langle a, b | a^q = b^{2^q} = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle (l = 1, ..., n). \qquad (1)$$

Доведення. 1. Нехай G – абелева мінімальна незвідна підгрупа групи $GL(2, R_p)$. Тоді з [3] випливає, що $G \cong H_{2^{n+1}}$ або $G \cong H_{2,r}$. Якщо $r \neq 3$, то G є p'-групою і спряжена в $GL(2, F_p)$ з групою $H_{2^{n+1}}$ або з групою $H_{2,r}$, звідки G спряжена з $H_{2^{n+1}}$ або з групою $H_{2,r}$ і в групі $GL(2, R_p)$ (див. [1]). Якщо $r = p = 3$, то, як легко бачити, $H_{2,3}$ – єдина з точністю до спряженості незвідна підгрупа порядка 3 групи $GL(2, R_3)$.

2. Нехай $|P_2| = 2^n$, тоді, в силу [3], неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються 2-групами Міллера–Морено $H_{2^r,2^k} \cong H_k$ ($k = 3, ..., n$), D_4, K_4 і біпримарними групами Міллера–Морено $G_{l,q,\tau}$ порядка $2^l \cdot q^m$ ($q \in \sqcap$), де m – показник, якому належить q за модулем 2. Оскільки $q \neq 2$, то $m = 1$ і $|G_{l,q,\tau}| = |G_{,q}| = 2^l \cdot q$ ($l = 1, ..., n$). Якщо позначити $G_{l,q,\tau} = \langle a, b \rangle$, то одержимо $b^{-1}ab = a^r$. Оскільки b^2 лежить в центрі групи $G_{l,q,\tau}$, то $r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, тобто $(r-1)(r+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$. З неабелевості групи $G_{l,q,\tau}$ випливає, що $r = -1$ і $G_{l,q,\tau} \cong G_{l,q}$. Далі, так як $p \nmid |G_{l,q}|$, то групи (1) є p'-групами. Тоді з тих же міркувань, що і в п. 1), випливає доведення п. 2). Теорему доведено.

II. Нехай тепер $p > 2$ і $\varepsilon \in R_p$. Як випливає з описання мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, F_p)$ (див. [3]), з точністю до ізоморфізму мінімальні і незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ в цьому випадку вичерпуються групами D_4 і K_4 при $|P_2| = 2$ і групами D_4, K_4, $G_{l,q}$ і

$$N_l = \left\langle a, b | a^p = b^{2^l} = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle (l = 1, ..., n) \qquad (2)$$

при $|P_2| = 2^n$ ($n \geq 3$, $3 \leq k \leq n$).

Опишемо точні незвідні R_p-зображення степеня 2 групи N_l. Очевидно, точні незвідні R_p-зображення степеня 2 групи N_l мають вигляд

$$a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A,\;\; b \to B\ (B \in GL(2, R_p)).$$

Як відомо [4], всі точні R_p-зображення групи $H = \langle a | a^p = 1 \rangle$ виду $a \to A$ з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями

$$\Gamma_0 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},\; \Gamma_s : a \to \begin{pmatrix} \xi & t^{d-s} \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}\ (s = 1, ..., d),$$

де $\varepsilon^{-1} - \varepsilon = \pi = \Theta t^d$ ($\Theta \in R_p^*$, t – простий елемент кільця R_p).

Легко бачити, що зображення Γ_0 продовжується до точного R_p-зображення Δ_0 групи N_l виду

$$\Delta_0 : a \to \Gamma_0(a),\;\; b \to \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де γ – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p, причому зображення $\Delta_0(\gamma)$ і $\Delta_0(\delta)$ R_p-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\gamma=\delta$.

Нехай тепер R_p-зображення групи N_l має вигляд

$$\Delta_s : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = B_s.$$

Із співвідношення $A_sB_s = B_sA_s^{-1}$ випливає система рівностей

$$\begin{cases} \varepsilon\alpha + \gamma t^{d-s} & = & \alpha\varepsilon^{-1}, \\ \delta & = & -\alpha. \end{cases}$$

Позначивши $\pi=\varepsilon^{-1}-\varepsilon$, одержимо $\gamma=\frac{\alpha\pi}{t^{d-s}}$. Оскільки $s>0$, то $\gamma\equiv 0(\mod t)$. Отже, $\alpha\in R_p^*$, звідки, враховуючи умову $B^{2^l}=E$, одержимо $\left(\alpha^2+\frac{\alpha\beta\pi}{t^{d-s}}\right)^{2^{l-1}}=1$, звідки $\alpha^2+\alpha\beta t^{d-s}=\xi$ і далі $\beta=\frac{(\xi-\alpha^2)t^{d-s}}{\alpha\pi}$ (ξ – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p). Очевидно $\beta\in R_p$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2\equiv\xi(\mod t^s)$ $(s=1,...,d)$. Таким чином, зображення Δ_s при $\alpha=\alpha_s$ має вигляд

$$\Delta_s(\alpha_s,\xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(\xi-\alpha_s)^2 t^{d-s}}{\alpha_s\pi} \\ \frac{\alpha_s\pi}{t^{d-s}} & -\alpha \end{pmatrix} = B_s. \qquad (3)$$

Нехай $\Delta_s(\overline{\alpha}_s,\xi')$ – деяке інше точне R_p-зображення виду (3) групи N_l. Має місце наступна лема.

Лема 1. *Зображення $\Delta_s(\alpha_s,\xi)$ і $\Delta_s(\overline{\alpha}_s,\xi')$ групи N_l будуть R_p-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\xi=\xi'$ і $\alpha_s\equiv\overline{\alpha}_s(\mod t^s)$ $(s=1,..,d)$.*

Доведення. Нехай $C^{-1}\Delta_s(\overline{\alpha},\xi')(g)C=\Delta_s(\alpha_s,\xi)(g)$, $(g\in N_l)$, де $C\in GL(2,R_p)$. Із співвідношення $A_sC=CA_s$ одержимо $C=\begin{pmatrix} c_1 & \frac{(c_4-c_1)t^{d-s}}{\pi} \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}$ $(c_1,c_4\in R_p^*)$. Тоді

$$\begin{cases} \alpha_s c_1 = \alpha_s c_4, \\ \frac{(c_4\xi-\alpha_s^2 c_1)t^{d-s}}{\alpha_s\pi} = \frac{(c_1\xi'-\overline{\alpha}_s c_4)t^{d-s}}{\overline{\alpha}_s\pi}, \end{cases} \qquad (4)$$

звідки $c_4=\alpha_s\overline{\alpha}_s c_1$. Легко перевірити, що підстановка цього значення c_4 у другу рівність (4) дає $\alpha_s(\xi-\xi')=0$. Оскільки $\alpha_s\in R_p^*$, то $\xi=\xi'$, а так як $c_4\equiv c_1(\mod t^s)$, то $c_4-c_1=(\alpha_s\overline{\alpha}_s^{-1}-1)=\overline{\alpha}_s^{-1}c_1(\alpha_s-\overline{\alpha}_s)\equiv 0(\mod t^s)$, звідки $\alpha\equiv\overline{\alpha}_s(\mod t^s)$. Необхідність доведена. Достатність одержиться, якщо провести міркування у зворотному порядку.

Лема 2. *Нехай $p>2$ і $\varepsilon\in R_p$. Незвідні точні R_p-зображення степеня 2 груп N_l з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями*

$$\Delta_0(\xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^k & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-k} \end{pmatrix} = A,\ b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

$$\Delta_s(\xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^k & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-k} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha\pi t^{d-s} & -\alpha \end{pmatrix} = B_s,$$

де ξ пробігає первісні корені степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p, $\alpha^2=\xi$; $\varepsilon^{-k}-\varepsilon^k=\Theta t^d$ $(\Theta\in R_p^*;\ s=1,...,d;\ k=1,...,\frac{p-1}{2};\ l=1,...,n)$.

Доведення. Нехай у (3)

$$\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{5}$$

де λ_i $(i = 0, 1, ..., s-1)$ – представники лівих суміжних класів кільця R_p за ідеалом tR_p. Очевидно, якщо $\overline{\alpha}_s = \alpha_s + \lambda t^s$ $(\lambda \in R_p/tR_p)$, то $\alpha_s = \overline{\alpha}(\bmod t^s)$. Тому, в силу леми 1, в (4) достатньо розглядати елементи α_s виду (5). Покажемо, що $\alpha_s^2 = \xi$. Доведення будемо проводити індукцією по s. Якщо $s = 1$, то $\alpha_1 = \lambda_0$ і $\lambda_0^2 = \xi$, тобто $\alpha_1^2 = \xi$.

Нехай тепер $\alpha_s^2 = \xi$ для всіх $s < s'$ і покажемо, що $\alpha_{s'}^2 = \xi$, де $s' = s + 1$. Маємо $\alpha_{s'} = \alpha_{s+1} = \alpha_s + \lambda_s t^s$ $(\lambda_s \in R_p/tR_p)$. Оскільки $\xi - \alpha_{s'}^2 = 0(\bmod t^{s+1})$, то $\xi - \alpha_{s'}^2 = \xi - (\alpha_s + \lambda_s t^s)^2 \equiv \xi - \alpha_s^2 - 2\lambda_s t^s \equiv -2\lambda_s \alpha_s t^s (\bmod t^{s+1})$. Так як $2, \alpha_s \in R_p^*$, то конгруенція $-2\lambda_s\alpha_s t^s \equiv 0(\bmod t^{s+1})$ має місце лише при $\lambda_s = 0$. Звідси $\alpha_{s+1}^2 = \xi$. Очевидно, Δ_0 і $\Delta_s(\xi)$ нееквівалентні над R_p для всіх $s = 1, ..., d$. Нехай

$$\Gamma_0 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^r & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix} = A', \;\; b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

– деяке точне R_p-зображення степеня 2 групи N_l. Легко бачити, що $\Delta_0(s)$ і Γ_0 R_p-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$ і $k = \pm r$. Нехай тепер

$$\Delta'_s(\xi') : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^r & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix} = A'_s, \;\; b \to \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta\pi' t^{s-d} & -\beta \end{pmatrix} = B'_s$$

(ξ' – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1, $\pi' = \varepsilon^{-r} - \varepsilon^r$, $\beta^2 = \xi$) – точне R_p-зображення групи N_l виду (3). Неважко довести, що $\Delta'_s(\xi')$ R_p-еквівалентне $\Delta_s(\xi)$ тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$ і $r = \pm k$. Лему доведено.

Зберігаючи попередні позначення, введемо дві серії груп

$$\left.\begin{aligned} U_l &= \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ U_l^s &= \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha\pi t^{s-d} & -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle, \; (s = 1, ...d), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

де ξ – елемент порядку 2^{l-1} у R_p^*, $1 \le l \le n$, α – фіксований розв'язок рівняння $x^2 = \xi$ у кільці R_p, $\varepsilon^{-1} - \varepsilon = \pi = \Theta t^d (\Theta \in R_p^*)$ і $|P_2| = 2^n$. Очевидно, $U_l \cong U_l^{(s)} \cong N_l$.

Теорема 2. *Нехай $p > 2$ і $\varepsilon \in R_p$. Тоді:*

1. *Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_{2^{n+1}}$, $H_{2,r}$, де $|P_2| = 2^n$ $(n > 1)$, а r пробігає множину $\sqcap'$.*

2. *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами.*

1) $U_1, U_1^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

2) $W_1^{(q)}, U_1, U_1^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2$ *і* $q \in \sqcap$ $(q \neq p)$;

3) $V_1, V_2, U_1, U_1^{(s)}, U_2, U_2^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^2$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

4) $W_1^{(q)}, W_2^{(q)}, V_1, V_2, U_1, U_1^{(s)}, U_2, U_2^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^2, q \in \sqcap$ $(q \neq p)$;

5) $V_1, V_2, V_k, U_l, U_l^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

6) $V_1, V_2, W_l^{(s)}, U_l, U_l^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $q \in \sqcap$ $(q \neq p)$.

Доведення. Пункт 1 теореми доводиться аналогічно п. 1 теореми 1. Доведемо пункт 2. В силу теореми 1 і [4] достатньо розглянути підгрупи групи $GL(2, R_p)$ ізоморфні групі N_l $(l = 1, ..., n)$. Користуючись лемою 2, введемо групи

$$T_l^{(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon^r & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta\pi' t^{s-d} & -\beta \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A'_s, B'_s \rangle,$$

де β – деякий розв'язок рівняння $x^2 = \xi$ в кільці R_p, $1 \leq r \leq p$. Легко бачити, що коли $C = \mathrm{diag}[\gamma, 1]$, де

$$\gamma = \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{r-1}, & \text{якщо } 2 \mid r, \\ 1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{r-1}, & \text{якщо } 2 \nmid r, \end{cases}$$

а $\pi_j = \varepsilon^{-j} + \varepsilon^j$ $(j = 1, ..., r-1)$, то $C^{-1} A_s^r C = A'_s$. Звідси, в силу леми 1, в $T_l^{(s)}$ можна покласти $r = 1$. З другого боку, знайдеться таке непарне натуральне число k, що $\beta = \alpha^k$. Оскільки $B_s^k = B'_s$, то при $r = 1$ $U_l^{(s)}$ $(s = 1, ..., d)$. Легко бачити також, що при $s \neq s'$ групи $U_l^{(s)}$ та $U_l^{(s')}$ не спряжені в групі $GL(2, R_p)$. Розглянемо тепер групи

$$T_0^{(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon^r & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi' \\ t & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A'_0, B'_0 \rangle, \ \ (s = 1, ...d),$$

де ξ' – елемент порядку 2^{l-1} в кільці R_p. Аналогічно попередньому можна вважати, що $\xi' = \xi^j$ для деякого натурального j. Тоді $A_0^r = A'_0$ і, якщо $j = 1$, то $T_0^{(s)} = U_0^{(s)}$. Звідси, за лемою 1 достатньо вважати, що в групі $T_0^{(s)}$ $A'_0 = A_0$. Легко бачити, що коли $C = \mathrm{diag}\left[1, \xi^{\frac{j-1}{2}}\right]$, то з рівності

$$B_0^j = \begin{pmatrix} 0 & \xi^{\frac{j+1}{2}} \\ \xi^{\frac{j-1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

одержимо $C^{-1} B_0^j C = B'_0 : C^{-1} A_0 C = A_0$, тобто $C^{-1} U_0 C = T_0^{(s)}$. Теорему доведено.

З теорем 1, 2 і [1, 2] випливає описання з точністю до спряженості всіх мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, R_p)$ для довільного простого p.

Список використаної літератури

1. *Кирилюк О. А., Кирилюк А. О.* Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2000. – Вип. № 2. – С. 77–87.
2. *Кирилюк О. А.* Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2016. – Вип. № 1(28). – С. 72–79.
3. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем.наук. – М.: Наука, 1963. – № 5. – С. 96–97.
4. *Гудивок П. М.* Представление конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1967. – Т 31, № 4. – С. 799–834.

Одержано 4.09.2017