УДК 517.956.4

В. М. Лучко, М. І. Матійчук, В. С. Лучко (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича)

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто задачу Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння вищого порядку по t зі змінним символом. Для такої задачі методом Е. Леві побудовано фундаментальну систему розв'язків та вивчено її властивості.

The problem of Cauchy is considered for parabolic pseudodifferential equation of higher order for t with variable character. For such problem by the method of E. Levi the fundamental system of solution is constructed and its properties are studied.

Дослідження параболічного псевдодиференціального рівняння з сталим однорідним символом було розпочато С.Д. Ейдельманом і Я.М. Дрінем в [1]. Для такого символа фундаментальний розв'язок задачі Коші вираховується за допомогою перетворення Фур'є. М.В. Федорюком у праці [2] була знайдена точна асимптотика фундаментального розв'язку при $|x| \to \infty$, яка виявилася не експоненціальною, як для диференціальних рівнянь параболічного типу [3], а степеневою. Для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші у загальному випадку змінного символа були зроблені спроби використати класичний метод Е. Леві. Перші результати в цьому напрямку отримані в працях С.Д. Ейдельмана і Я.М. Дріня [4], де побудований параметрикс – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння з "замороженими"коефіцієнтами і доведена розв'язність інтегрального рівняння, яке визначає фундаментальний розв'язок. У 1988 році вийшла праця А.Н. Кочубея [5], яка присвячена побудові і дослідженню фундаментального розв'язку задачі Коші, де псевдодиференціальні оператори трактуються як гіперсингулярні інтеграли.

У шарі $\Pi_T = \{(t,x)| t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$ розглядається рівняння довільного порядку

$$L(t,x,A,D_t)u(t,x) \equiv \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} - Au(t,x) = 0 \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

тут

$$Au(t,x) = F^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)\frac{d^{k_0}V}{dt^{k_0}}\right), \quad V(t,\sigma) = F_{x\to\sigma}u(t,x),$$

$\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \geq 1$, $k_0 < m$, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$ – відомі функції, що допускають перетворення Фур'є.

Метою даної роботи є побудова фундаментальної системи розв'язків (ф.с.р.) $\Gamma(t,x,\tau,\xi) = \{\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\}_{j=1}^m$

$$L(t,x,A,D_t)\Gamma_j(t,x,\tau,\xi) = 0, \qquad (3)$$

$$
\begin{gathered}
\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)|_{t=\tau}=0,\\
\dots\\
\tfrac{\partial^{j-2}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j-2}}|_{t=\tau}=0,\\
\tfrac{\partial^{j-1}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j-1}}|_{t=\tau}=\delta(x-\xi),\\
\tfrac{\partial^{j}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{j}}|_{t=\tau}=0,\\
\dots\\
\tfrac{\partial^{m-1}\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)}{\partial t^{m-1}}|_{t=0}=0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

$\delta(t)$ – дельта функція Дірака.

Функції $\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)$ можуть бути побудовані по методу Е. Леві, який полягає в тому, що вони шукаються у вигляді суми двох доданків: головного доданку, який має потрібну особливість при $t=\tau$, $x=\xi$, і деякого додаткового доданку.

В якості головного доданка вибираються функції $Z_j(t-\tau,x-\xi,\xi,\tau)$ – компоненти ф.с.р. рівняння (1), в яке входить псевдодиференціальна операція (п.д.о.) з символами $P_{\nu k_0}(\tau,\xi,\sigma)$, зафіксовані в точці (τ,ξ). Другий доданок шукається у вигляді інтегрального оператора з ядром Z_j, щільність якого визначається з інтегрального рівняння.

Нехай символи $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ задовольняють умовам:

1) рівномірно по (t,x) символи $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ однорідні по аргументу σ степеня ν, тобто виконується співвідношення $P_{\nu k_0}(t,x,\mu\sigma)=\mu^\nu P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$, $\mu>0$.

2) $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma\neq 0$, причому

$$|D^x_\sigma P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)|\le C_N|\sigma|^{\gamma-|\chi|},$$

$$|D^x_\sigma[P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)-P_{\nu k_0}(\tau,y,\sigma)]|\le C_N\left(|t-\tau|^{\frac{\lambda}{\gamma}}+|x+y|^\lambda\right)|\sigma|^{\gamma-|\chi|},$$

для всіх $|\chi|\le N$, $\sigma,x,y\in\mathbb{R}^n$, $(\sigma\neq 0)$, $t,\tau\in[0,T]$, $(\lambda\in(0,1)$ – константа).

Означення 1. *Рівняння (1) будемо називати рівномірно параболічним в області Π_T, якщо для довільної точки (t,x) дійсні частини λ - коренів рівняння*

$$\lambda^m-\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)\lambda^{k_0}=0 \tag{5}$$

задовольняють нерівність

$$Re\lambda_j(t,x,\sigma)\le -a_0|\sigma|^\gamma,$$

$a_0>0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $j=\overline{1,m}$.

Спочатку побудуємо функції $Z_j(t–\tau,x–\xi,\tau,\xi)$. Зафіксуємо символ $P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)$ в точці $t=\beta$, $x=p$ і розглянемо задачу про знаходження обмеженого розв'язку псевдодиференціального рівняння (п. д. р.) зі сталим символом

$$L(\beta,p,A,D_t)u(t,x)=0 \tag{6}$$

і початковими умовами (4). В образах Фур'є задача (6), (2) набуде вигляду

$$\frac{d^m v(t,\sigma)}{dt^m}=\sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma}P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)\frac{d^{k_0}v(t,\sigma)}{dt^{k_0}}, \tag{7}$$

$$\left.\frac{d^{j-1}v(t,\sigma)}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = \widetilde{\varphi}_j(\sigma), \quad j=\overline{1,m}, \tag{8}$$

а її розв'язком є функція

$$v(t,\sigma) = \sum_{j=1}^{m} K_j(\beta,p,t,\sigma)\widetilde{\varphi}_j(\sigma),$$

де $\widetilde{\varphi}_j(\sigma) \equiv F_{x\to\sigma}(\varphi_j(x)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,x)}\varphi(\xi)d\xi$, при цьому необхідно припускати, що перетворення Фур'є функцій $u(t,x)$ і $\varphi_j(x)$ існує. Отже,

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-\xi,\sigma)}K_j(\beta,p,t,\sigma)d\sigma\right)\varphi_j(\xi)d\xi.$$

Позначимо

$$Z_j(t-\tau,x-\xi,\beta,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-\xi,\sigma)}K_j(\beta,p,t,\sigma)d\sigma. \tag{9}$$

Функції $K_j(\beta,p,t,\sigma)$ є розв'язками задачі Коші

$$\frac{d^m K_j}{dt^m} = \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)\frac{d^{k_0}K_j}{dt^{k_0}},$$

$$\left.\frac{d^{l-1}K_j}{dt^{l-1}}\right|_{t=0} = \delta_{l,j},$$

де $\delta_{l,j} = \begin{cases} 0, l\neq j, \\ 1, l=j. \end{cases}$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти рівняння (7) $P_{\nu k_0}(\beta,p,\sigma)$ мають N неперервних похідних по σ при $\sigma\neq 0$ та виконуються умови 1), 2), тоді корені характеристичного рівняння (5) є однорідними функціями аргументу σ степеня γ і для їх похідних справедлива нерівність*

$$|D^l_\sigma \lambda_j(\beta,p,\sigma)| \leq C_N|\sigma|^{\gamma-|l|}, \quad j=\overline{1,m}, \tag{10}$$

де C_N не залежить від β, p.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, тоді для функцій $\{K_j(\beta,p,t,\sigma)\}_{j=1}^m$ справедливі такі зображення*

$$K_j(\beta,p,t,\sigma) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \frac{t^{j-1}}{(j+1)!}\frac{\widetilde{W}^*_j(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}, \tag{11}$$

у випадку $j<m$, та при $j=m$

$$K_m(\beta,p,t,\sigma) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{t^{m-1}}{(m)!}\frac{\widetilde{W}_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)} + \frac{t^{m-1}}{(m+1)!}\frac{\widetilde{W}^*_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}{W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)}, \tag{12}$$

де введено такі позначення

$$\widetilde{W}^*_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)=\begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{j-2}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{j-2}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ \lambda_1^{j+1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)h_{1,j+1}(\lambda_1) & ... & \lambda_m^{j+1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)h_{m,j+1}(\lambda_m) \\ \lambda_1^{j}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{j}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{W}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-2}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2^{m-2}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-2}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ \lambda_1^{m}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & \lambda_2^{m}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$W(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma)=\begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ \lambda_1(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \\ ... & ... & ... \\ \lambda_1^{m-1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) & ... & \lambda_m^{m-1}(\beta,p,t^{\frac{1}{\gamma}}\sigma) \end{vmatrix},$$

$$h_{l,j}(a_l)=j!a_l^{-j}\left(e^{a_l}-1-a_l-\frac{a_l^2}{2!}-...-\frac{a_l^{j-1}}{(j-1)!}\right).$$

Нехай виконуються умови 1), 2) з $k_0\gamma+\nu=m\gamma$, $N\geq 2n+[\gamma]+1$, то для функцій $\{Z_j(t,x,\beta,p)\}_{j=1}^m$ справджуються оцінки рівномірно по параметрам β, p

$$|Z_j(t,x,\beta,p)|\leq C\frac{t^j}{(t^{\frac{1}{\gamma}}+|x|)^{n+\gamma}}, \tag{13}$$

$$|D_t^{k_0}Z_j(t,x,\beta,p)|\leq C\frac{t^{j-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}}+|x|)^{n+\gamma k_0}},\quad k_0\geq 1, \tag{14}$$

$$|Z_j(t,x,\beta,p_1)-Z_j(t,x,\beta,p_2)|\leq C\cdot|p_1-p_2|^{\lambda}\frac{t^j}{(t^{\frac{1}{\gamma}}+|x|)^{n+\gamma}}, \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}Z_j(t,x,\beta,p_1)-\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}Z_j(t,x,\beta,p_2)\right|\leq C\cdot|p_1-p_2|^{\lambda}\frac{t^{j-1}}{(t^{\frac{1}{\gamma}}+|x|)^{n+2\gamma k_0}}. \tag{16}$$

Розглянемо задачу Коші (1)–(2). Будемо припускати, що функції $\{\varphi_j\}_{i=1}^m$ неперервні і обмежені. Під розв'язком задачі (1)–(2) будемо розуміти обмежену функцію $u(t,x)$, неперервну на $\mathbb{R}^n\times[0,T]$ за сукупністю змінних, яка задовольняє рівняння (1) і початкові умови (2).

Теорема 3. *Розв'язок задачі Коші (1)–(2) існує і записується у вигляді*

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^m\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma_j(t,x,0,\xi)\varphi_j(\xi)d\xi, \tag{17}$$

де ф.с.р. $\{\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\}_{j=1}^m$, $x,\xi \in \mathbb{R}^n$, $0 \le t \le T$ *має вигляд*

$$\Gamma_j(t,x,\tau,\xi) = Z_j(t,x,\tau,\xi) + W_j(t,x,\tau,\xi), \qquad (18)$$

$$|W_j(t,x,\tau,\xi)| \le C \frac{t^{\frac{\gamma_j+\lambda}{\gamma}}}{(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|)^{n+\gamma}}, \qquad (19)$$

а для Z_j *мають місце оцінки (13)–(16).*

Доведення. У відповідності з звичайною схемою методу Леві, компоненти фундаментальної системи розв'язків задачі Коші шукаються у вигляді (18), де

$$W_j(t,x,\tau,\xi) = \int_\tau^t d\mu \int_{\mathbb{R}^n} Z_j(t-\mu, x-\eta, \mu, \eta)\Phi_j(\mu,\eta,\tau,\xi)d\eta,$$

а функції Φ_j визначаються із інтегрального рівняння

$$\Phi_j(t,x,\tau,\xi) = P_j(t,x,\tau,\xi) + \int_\tau^t d\mu \int_{\mathbb{R}^n} P_j(t,x,\mu,\eta)\Phi_j(\mu,\eta,\tau,\xi)d\eta, \qquad (19)$$

у якому

$$P_j(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k_0\gamma+\nu=m\gamma} [P_{\nu k_0}(\tau,\xi,\sigma) -$$

$$-P_{\nu k_0}(t,x,\sigma)]\, e^{i(x-\xi)\sigma} \frac{d^{k_0}}{dt^{k_0}} K_j(\tau,\xi,t,\sigma)d\sigma.$$

Згідно теореми 1 отримуємо

$$|P_j(t,x,\tau,\xi)| \le c\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma}} + |x-\xi|\right)^{-n-\gamma-\lambda}.$$

Таким чином, інтегральне рівняння (19) може бути розв'язане і досліджене за допомогою методики, наведеної при доведенні теореми 1 у [6].

1. *Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Приближенные методы математического анализа.— Киев, 1974. — С. 60—69.
2. *Федорюк М. В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального уравнения / М. В. Федорюк // Дифференц. уравнения. — 1978. — № 7. — С. 1296—1301.
3. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман // – М.: Наука, 1964. – 444 с.
4. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я. М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 1. — С. 19—21.
5. *Эйдельман С. Д.* Построение и исследование класических фундаментальных решений задачи Коши для равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Математические исследования.— Кишинев, 1981. — Вып. 63.— С. 18—33.
6. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А. Н. Кочубей // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — Т. 52, № 5. — С. 909—934.

Одержано 06.10.2012