УДК 519.21

Р. Є. Ямненко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПРОЦЕСІВ НАКОПИЧЕННЯ, ПОРОДЖЕНИХ СУБГАУССОВИМИ ПРОЦЕСАМИ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

The properties of continuous queue filled by cumulative process created by generalized sub-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck process are studied. The distributions of certain functionals of the cumulative stochastic process are obtained.

Досліджуються властивості неперевної черги, породженої процесом накопичення, утвореним узагальненим субгауссовим процесом Орнштейна-Уленбека. Отримано оцінки розподілів певних функціоналів від відповідного стохастичного процесу.

Вступ. Робота продовжує цикл статей із вивчення черг, утворених стохастичними процесами з φ-субгауссовими приростами (див., зокрема, [2,4,6,7]). Класи $V(\varphi,\psi)$ процесів із такими приростами є загальними класами випадкових процесів. Зокрема, у частковому випадку вони містять і гауссові. Тобто, вивчаючи властивості цих класів, можна отримувати нові результати як для відомих випадкових процесів, так і для їх узагальнень. Зокрема, у даній роботі ми застосуємо результати з [7] до процесу накопичення неперервної черги, породженої узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека з класу $V(\varphi,\psi)$.

Поведінка відповідної черги вивчатимемо через оцінювання розподілу певних екстремальних функціоналів від приростів випадкового процесу $\{X(t), t\in T\}$ з класу $V(\varphi,\psi)$, зокрема

$$\sup_{s\le t; s,t\in B}\big(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\big),\quad \inf_{s\le t; s,t\in B}\big(X(t)-X(s)-(f(t)-f(s))\big),$$

де $f(t)$ – деяка неперервна функція. Отримані оцінки є корисними для дослідження розподілу максимальної довжини черги чи ймовірності переповнення чергою буфера. Функцію f трактуватимемо при цьому як інтенсивність обслуговування черги (див., наприклад, [1]).

Робота складається із двох розділів. У першому згадуються деякі необхідні поняття та теореми з теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів. У другому розділі наведено приклад застосування отриманих оцінок до субгауссових процесів, які, зокрема, мають місце для процесів дробового броунівського руху.

1. Випадкові процеси з класів $V(\varphi,\psi)$ Нехай $\{\Omega,\mathcal{B},\mathsf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір, T – деяка параметрична множина.

Означення 1. [3] *Функцію $U=\{U(x), x\in\mathbb{R}\}$ є N-функцією Орліча, якщо U – неперервна парна опукла функція така, що $U(0)=0$, $U(x)$ монотонно зростає при $x>0$, $\frac{U(x)}{x}\to 0$ при $x\to 0$ та $\frac{U(x)}{x}\to\infty$ при $x\to\infty$.*

Будемо казати, що для N-функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^2}=c>0. \tag{1}$$

Означення 2. *N-функція φ_1 підпорядкована N-функції φ_2 ($\varphi_1 \prec \varphi_2$), якщо існують певні сталі $c > 0$ та $x_0 > 0$ такі, що для $x > x_0$ має місце нерівність $\varphi_1(x) < \varphi_2(cx)$. N-функції φ_1 та φ_2 еквівалентні, якщо $\varphi_1 \prec \varphi_2$ та $\varphi_2 \prec \varphi_1$.*

Означення 3. [3] *Нехай φ – N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{2}$$

Теорема 1. [3] *Простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda>0} \frac{\varphi^{(-1)}(\log \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\})}{\lambda}, \tag{3}$$

де $\varphi^{(-1)}$ – функція, обернена до функції φ, і для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}. \tag{4}$$

Означення 4. [4] *Нехай $\varphi \prec \psi$ – дві N-функції Орліча. Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить класу $V(\varphi, \psi)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t)$ належать простору $\mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, та для всіх $s, t \in T$ їхні прирости $(X(t) - X(s))$ належать простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.*

Приклад 1. [3] *Гауссові та субгауссові процеси належать класу $V(\varphi, \varphi)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$. Зокрема, для такої N-функції $\tau_\varphi(\xi) = (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}}$.*

Приклад 2. [4] *Нехай*

$$X(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t),$$

де випадкова величина $\xi_0 \in \mathrm{Sub}_\psi(\Omega)$, $\{\xi_k, k = 1, 2, \ldots\} \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_\varphi(\xi_k)|f_k(t)| < \infty.$$

Тоді випадковий процес $X(t)$ належить класу $V(\varphi, \psi)$.

Більш детально про властивості, приклади та різне застосування випадкових процесів з класів $V(\varphi, \psi)$ можна прочитати у книгах [3], [4] та інших роботах, вказаних у бібліографії.

Нехай (T, ρ) – псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ. Будемо розглядати сепарабельний випадковий процес $X = \{X(t),\ t \in T\}$ з класу $V(\varphi, \psi)$. Припустимо, що існує така неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$, що $\sigma(h) \to 0$, коли $h \to 0$, та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le \sigma(h). \tag{5}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t,s)\le h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)),$$

якщо процес $X(t)$ неперервний у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B – компактна множина, $B \subseteq T$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

— $\beta > 0$ – деяке число, таке що $\beta \le \sigma\left(\inf\limits_{s\in B}\sup\limits_{t\in B}\rho(t,s)\right)$;

— $\mathsf{N}(u) = \mathsf{N}_{(B,\rho)}(u)$ – метрична масивність простору (B,ρ) (мінімальна кількість замкнених куль радіуса u, що покривають простір (B,ρ));

— $\mathsf{L}(u) = \frac{(\mathsf{N}(u))^2+\mathsf{N}(u)}{2}$.

Теорема 2. [7] *Нехай для випадкового процесу $X(t) = \{X(t),\ t \in B\}$ із класу $V(\varphi,\psi)$ виконується умова (5), і нехай $f = \{f(t), t \in B\}$ — неперервна функція, така що $|f(u) - f(w)| \le \delta(\rho(u,w))$, де функція $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — невід'ємна монотонно зростаюча, а $r = \{r(u), u \ge 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$, коли $u > 1$, причому функція $s(t) = r(\exp\{t\}), t \ge 0$, — опукла. Тоді при виконанні умови*

$$\int_0^\beta r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u < \infty \tag{6}$$

для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ справджуються нерівності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \le Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s\le t; s,t\in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \le Z_r(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s\le t; s,t\in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \le 2Z_r(p,x),$$

де

$$Z_r(p,t,x) = r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)\times$$

$$\times\inf_{\lambda>0} W_2(\lambda,p)\exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right) + \lambda\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right) - x\right)\right\},$$

$$\begin{aligned} W_2(\lambda,p) = \Bigg(&\sum_{l=0}^{\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p))-1}\left(\mathsf{N}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) - l\right)\times \\ &\times\exp\left\{\varphi\left(\frac{\lambda\sigma(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right) + \frac{\lambda\delta(2l\sigma^{(-1)}(\beta p))}{1-p}\right\}\Bigg)^{1-p}. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Процеси накопичення, породжені узагальненими процесами Орнштейна-Уленбека

Означення 5. *Будемо називати випадковий процес $Y = \{Y(t), t \in T\}$ субгауссовим узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека, якщо Y є субгауссовим процесом із такою коваріаційною функцією:*

$$B_Y(t,s) = \mathsf{E}Y(t)Y(s) = e^{-\tau|t-s|}, \quad \tau > 0. \tag{8}$$

Розглянемо процес накопичення неперевної черги, вхідний процес якого має вигляд

$$X(t) = \int\limits_0^t Y(u)\mathsf{d}u, \tag{9}$$

де $Y(u)$ – субгауссовий узагальнений процес Орнштейна-Уленбека, тобто належить класу $V(\frac{x^2}{2}, \frac{x^2}{2})$.

Легко пересвідчитись, що коваріаційна функція процесу $X(t)$ дорівнює

$$B_X(t,s) = \frac{2\min(t,s)}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}\left(e^{-\tau t} + e^{-\tau s} - e^{-\tau|t-s|}\right). \tag{10}$$

Припустимо також, що $f(t)$ – неперервна функція, визначена на $T = [a,b]$, така що

$$|f(t) - f(s)| \leq c|t-s|^n, \tag{11}$$

де $c > 0$ та $n > 0$ – деякі сталі. Тоді, користуючись результатами теореми 2, можна отримати наступні оцінки.

Теорема 3. *Нехай для субгауссового випадкового процесу $X(t) = \{X(t), t \in [a,b]\}$ та функції $f = \{f(t), t \in [a,b]\}$ виконуються умови теореми 2 та (11) відповідно. Тоді для всіх $p \in \left(0; \left(\frac{2}{3}\right)^H\right]$ і*

$$x > c(b-a)^n + \frac{2c(\beta p^2)^{2n}}{1-p^{2n}} \tag{12}$$

мають місце оцінки

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t; s,t \in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) > x\right\} \leq Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\inf_{s \leq t; s,t \in B}(X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))) < -x\right\} \leq Z(p,x),$$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{s \leq t; s,t \in B}|X(t) - X(s) - (f(t) - f(s))| > x\right\} \leq 2Z(p,x),$$

де

$$Z(p,x) = \tfrac{2\tau^2 e^4}{p^4} \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}}\left(\tfrac{\tau}{2p^2} + 1 - l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x - c(2l)^n p^{2n}(b-a)^n\tau^{-n} - \frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n} + \frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p}. \tag{13}$$

$$Z(p,x)=\tfrac{2\tau^2e^4}{p^4}\times$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}}\left(\tfrac{\tau}{2p^2}+1-l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x-c(2l)^np^{2n}(b-a)^n\tau^{-n}-\frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n}+\frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p}. \tag{14}$$

Доведення. Перевіримо спершу умову (5). Оскільки

$$\sup_{|t-s|\le h}\tau_\varphi(Y(t)-Y(s))=\sup_{|t-s|\le h}\left(\mathsf{E}(Y(t)-Y(s))^2\right)^{\frac12}=$$
$$=\sup_{|t-s|\le h}\tfrac{\sqrt2}{\tau}\left(\tau|t-s|-1+e^{-\tau|t-s|}\right)^{\frac12}=\tfrac{\sqrt2}{\tau}\left(\tau h-1+e^{-\tau h}\right)^{\frac12}\le\left(\tfrac{2h}{\tau}\right)^{\frac12},$$

то покладемо

$$\sigma(h)=\left(\frac{2h}{\tau}\right)^{\frac12}.$$

Тоді $\sigma^{(-1)}(u)=\frac{\tau u^2}{2}$, і якщо $u\le\beta$, то $\sigma^{(-1)}(u)\le\sigma^{(-1)}(\beta)\le\frac{b-a}{2}$, причому виконується нерівність

$$\mathsf{N}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\le\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\le\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(u)}=\frac{2(b-a)}{\tau u^2}.$$

Покладемо $r(u)=u^\alpha$, $0<\alpha<\frac14$. Перевіримо виконання умови (6). Коли $p\le\left(\frac23\right)^{1/2}$, то $\frac{b-a}{\tau u^2}>\frac32$, оскільки $u\le\left(\frac23\right)^{1/2}\left(\frac{b-a}{\tau}\right)^{1/2}\le p\beta$. Тоді

$$\begin{aligned}&r^{(-1)}\left(\tfrac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}r\left(\mathsf{L}\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathsf{d}u\right)\le\\&\le\left(\tfrac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\left(\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}+1\right)^2+\tfrac{b-a}{\tau u^2}+1\right)^\alpha/2^\alpha\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha}<\\&<\tfrac12\left(\tfrac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}+\tfrac32\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha}\le2\left(\tfrac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p}\left(\tfrac{b-a}{\tau u^2}\right)^{2\alpha}\mathsf{d}u\right)^{\frac1\alpha}=\\&=2\tfrac{(b-a)^2}{\tau^2}(\beta p)^{\frac2H}(1-4\alpha)^{-\frac1\alpha}\to2(b-a)^2\left(\tfrac{e}{\beta p}\right)^4,\quad\alpha\to0.\end{aligned}\tag{15}$$

Також справедливою є рівність

$$\sum_{k=1}^\infty\delta(\sigma^{(-1)}(\beta p^k))=\sum_{k=1}^\infty c(\beta p^k)^{\frac nH}=\frac{c\beta^{\frac nH}p^{2n}}{1-p^{2n}}. \tag{16}$$

Застосовуючи (15) та наступний ланцюжок перетворень

$$
\begin{gathered}
\inf_{\lambda>0} \exp\left\{p\varphi\left(\frac{2\lambda\beta}{1-p}\right)+\lambda\left(2\sum_{k=1}^{\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}(\beta p^k)\right)-x\right)\right\}W_2(\lambda,p)= \\
=\inf\nolimits_{\lambda>0}\exp\left\{\frac{2p\lambda^2\beta^2}{(1-p)^2}+\lambda\left(\frac{2c\beta^{2n}p^{2n}}{1-p^{2n}}-x\right)\right\}\times \\
\times\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^2\right)-1}\left(N((\beta p)^2)-l\right)\exp\left\{\frac{2l\lambda^2(\beta p)^2}{2(1-p)^2}+\frac{\lambda(2l)^n c(\beta p)^{2n}}{1-p}\right\}\right)^{1-p}\leq \\
\leq\left(\sum_{l=0}^{N\left((\beta p)^2\right)-1}\left(\frac{b-a}{2(\beta p)^2}+1-l\right)\inf_{\lambda>0}\exp\left\{\lambda^2\left(\frac{2p\beta^2}{(1-p)^3}+\frac{2l(\beta p)^2}{2(1-p)^2}\right)-\right.\right. \\
\left.\left.-\lambda\left(\frac{x-\frac{2c\beta^{2n}p^{2n}}{1-p^{2n}}}{1-p}-\frac{(2l)^n c(\beta p)^{2n}}{1-p}\right)\right\}\right)^{1-p}\leq \\
\leq\left(\sum\nolimits_{l=0}^{\frac{b-a}{2(\beta p)^2}}\left(\frac{b-a}{2(\beta p)^2}+1-l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x-c(2l)^n(\beta p)^{2n}-\frac{2c(\beta p^2)^{2n}}{1-p^{2n}}\right)^2}{4l(\beta p)^2+\frac{8p\beta^2}{1-p}}\right\}\right)^{1-p}= \\
=\left(\sum\nolimits_{l=0}^{\frac{\tau}{2p^2}}\left(\frac{\tau}{2p^2}+1-l\right)\exp\left\{-\frac{\left(x-c(2l)^n p^{2n}(b-a)^n\tau^{-n}-\frac{2cp^{4n}(b-a)^n}{\tau^n(1-p^{2n})}\right)^2}{4lp^2(b-a)^n\tau^{-n}+\frac{8p(b-a)}{\tau(1-p)}}\right\}\right)^{1-p},
\end{gathered}
\tag{17}
$$

при підстановці $\beta^2=\frac{b-a}{\tau}$ до теореми 2, пересвідчуємося в справедливості теореми 3..

Висновки. Застосовано результати роботи [7] до субгауссових процесів накопичення, породжених процесами Орнштейна-Уленбека. Отримано оцінки, що характеризують надійність черг, утворених відповідними процесами накопичення. Одержані результати також можуть бути застосовані до широкого класу інших випадкових процесів, зокрема, гауссових.

1. R. Addie, P. Mannersalo, I. Norros, *Most probable paths and performance formulae for buffers with Gaussian input traffic*, Eur. Trans. Telecommun. **13(3)** (2002), 183-196.
2. *R. Yamnenko and O. Vasylyk* Random process from the class $V(\varphi,\psi)$: exceeding a curve// Theory of Stoch. Processes, – 2007. – **13 (29)**, No. 4 – P. 219-232.
3. В.В. Булдыгин, Ю.В. Козаченко, *Метрические характеристики случайных величин и процессов.* ТВіМС, Киев, 1998. (Видання англійською: V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* AMS, Providence, RI, 2000.)
4. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* φ-субгауссові випадкові процеси: монографія, – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008.– 231 с.
5. *Ямненко Р. Є.* Оцінка ймовірності переповнення буфера для черги, що є узагальненим процесом Орнштейна-Уленбека// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2005. – **73** – С. 181-194.
6. *Ямненко Р. Є., Шрамко О. С.* Про розподіл процесів накопичення з класу $V(\varphi,\psi)$// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2010. – **83** – С. 163-176.
7. *Ямненко Р. Є.* Про оцінки розподілу деяких функціоналів від процесів з φ-субгауссовими приростами// Теор. ймовірност. та матем. статист., – 2011. – **85** – С. 163-176.

Одержано 02.11.2012