

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маринець В. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Заст. головн. редактора — Гече Ф. Е., доктор технічних наук; доцент.
Заст. головн. редактора — Король І. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Відповідальний секретар — Мич І. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Члени редакційної колегії:

Бовді А. А., доктор фізико-математичних наук, професор.
Бовді В. А., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Бондаренко В. М., доктор фізико-математичних наук, професор.
Волошин О. Ф., доктор технічних наук, професор.
Головач Й. Г., доктор технічних наук, професор.
Гусак Д. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Задирака В. К., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Козаченко Ю. В., доктор фізико-математичних наук, професор.
Кузка О. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент.
Перестюк М. О., академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор.
Ронто А. М., доктор фізико-математичних наук, професор,
Ронто М. Й., доктор фізико-математичних наук, професор,
Сливка-Тилищак Г. І., доктор фізико-математичних наук, доцент.
Слюсарчук П. В., кандидат фізико-математичних наук, професор.
Шапочка І. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

© В. В. Маринець,
І. А. Мич, упорядкування, 2017

© Ужгородський національний університет,
2017

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Chief editor — Marynets V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Deputy Chief editor — Heche F., As. prof., Dr. Sci. (Tech.).
Deputy Chief editor — Korol I., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
Responsible secretary — Mych I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
Members: Bovdi A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Bovdi V., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Bondarenko V., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Voloshyn O., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Holovach J., Prof., Dr. Sci. (Tech.).
 Gusak D., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Zadyraka V., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kozachenko Yu., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Kuzka A., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Perestyuk N., Prof., academic of NA of Sc of Ukraine,
 Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto A., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Ronto M., Prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyvka-Tylyshchak G., As. prof., Dr. Sci. (Phys.-Math.).
 Slyusarchuk P., Prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).
 Shapochka I., As. prof., Cand. Sci. (Phys.-Math.).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

1. <i>Маринець В. В.</i> Міклош Йосипович Ронто — до 75-ти річчя від дня народження	7
2. <i>Аюбова Н. С.</i> Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху в моделі з похибками вимірювань	10
3. <i>Баранник В. Ф.</i> Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи	15
4. <i>Бобик І. О., Симотюк М. М.</i> Задача типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументом	21
5. <i>Бондаренко В. М., Костишин Е. М.</i> Модулярні зображення з додатковими умовами напівгрупи $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Бондаренко В. М., Литвинчук І. В.</i> Опис категорії зображень постійного жорданового типу найменшої нециклічної групи	37
7. <i>Боярищева Т. В., Поляк І. Й.</i> Швидкість збіжності в ЦГТ для послідовності серій випадкових величин	48
8. <i>Варга Я. В.</i> Про одну нелінійну інтегральну крайову задачу	54
9. <i>Жучок Ю. В.</i> Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп	63
10. <i>Заціха Я. В.</i> Опис піднапівгруп напівгруп малого порядку	69
11. <i>Капустей М. М., Слюсарчук П. В.</i> Застосування усереднених псевдомоментів для оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин	72
12. <i>Кирилюк О. А.</i> Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Клименко І. С., Лисенко С. В., Петравчук А. П.</i> Алгебри Лі диференціювань з абелевими ідеалами максимального рангу	83
14. <i>Козаченко Ю. В., Петранова М. Ю.</i> Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями	90
15. <i>Корепанова К. С.</i> Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь n -го порядку з правильно змінними нелінійностями	101
16. <i>Король І. І., Король І. Ю.</i> Побудова лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші методом невизначених коефіцієнтів	115
17. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В.</i> Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр	123
18. <i>Скочко В. М.</i> Графи переходів ітерацій ініціальних $(2, 2)$ -автоматів	129
19. <i>Тоїчкіна О. О.</i> Ендотипи деяких часткових відношень еквівалентності	137

CONTENTS

1. <i>Marynets V. V.</i> Miclos Ronto(in the occasion of 75 th anniversary of his birthday)	7
2. <i>Aiubova N. S.</i> Estimation of the Hurst parameter of the Fractional Brownian Motion in one model with measurement errors	10
3. <i>Barannik V. F.</i> Tensor products of irreducible projective integer 2-adic representations of cyclic 2-group	15
4. <i>Bobyk I. O., Symotyuk M. M.</i> Dirichlet-type problem for partial differential equations with delay argument	21
5. <i>Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.</i> Modular representations with additional conditions of the semigroup $T_2 \times S_2$	28
6. <i>Bondarenko V. M., Lytvynchuk I. V.</i> Description of the category of representations of constant Jordan type of the smallest noncyclic group	37
7. <i>Bojarischeva T. V., Poliak I. Y.</i> The rate of convergence in central limit theorem for sequence series of random variables	48
8. <i>Varga I. V.</i> On one nonlinear integral boundary value problem	54
9. <i>Zhuchok Yu. V.</i> Endomorphism monoids of semilattices of semigroups	63
10. <i>Zaciha Ya. V.</i> Description of the subsemigroup of semigroups of small order	69
11. <i>Kapustej M. M., Slyusarchuk P. V.</i> Using of middle pseudomoments for the estimation of proximity distributions of two sums of random variables	72
12. <i>Kyryl'uk O. A.</i> Minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$	78
13. <i>Klimenko I. S., Lysenko S. V., Petravchuk A. P.</i> Lie algebras of derivations with abelian ideals of maximal rank	83
14. <i>Kozachenko Yu. V., Petranova M. Yu.</i> Real stationary Gaussian processes with stable correlation functions	90
15. <i>Korepanova K. S.</i> Asymptotic Behaviour of Solutions of n -th Order Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities	101
16. <i>Korol I.I., Korol I.Yu.</i> Constructing of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem by the method of undetermined coefficients	115
17. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V.</i> Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras	123
18. <i>Skochko V. M.</i> Transition graphs of iterations of initial $(2, 2)$ -automata	129
19. <i>Toichkina O. O.</i> Endotypes of certain partial equivalence relations	137

УДК 512.53

О. О. Тоїчкіна (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ)

**ЕНДОТИПИ ДЕЯКИХ ЧАСТКОВИХ ВІДНОШЕНЬ
ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ**

We classify certain partial equivalence relations according to their type of an endomorphism.

В роботі класифікуються часткові відношення еквівалентності певного виду за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Напівгрупи ендоморфізмів реляційних систем вивчалися багатьма авторами. Основна увага при їх вивченні приділялася дослідженню визначеності реляційних систем їх напівгрупами ендоморфізмів [1–3], опису їх абстрактних властивостей і зображень [4–6], вивченню алгебраїчних і комбінаторних властивостей моноїдів ендоморфізмів [7,8]. Основним поняттям, яке тут вивчається, є поняття ендотипу реляційної системи. Поняття ендотипу, як числової характеристики, що зв'язує множини шести типів ендоморфізмів симетричного бінарного відношення, було введено в [9], а надалі в [10] і для відношень довільної арності. Використовуючи це поняття, можна класифікувати відношення за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. Так, в [11] знайдено ендотипи узагальнених полігонів, в [12] — ендотипи доповнень скінченного шляху, а в [13] — ендотипи графів N -призм. У [14] класифіковано всі відношення еквівалентності за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. У [15] обчислені всі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів. Тут ми визначаємо всі ендотипи часткових відношень еквівалентності певного виду, що доповнює основний результат з [14].

Робота побудована таким чином. У пункті 1 даються визначення шести типів ендоморфізмів і приклади ендоморфізмів кожного типу. У пункті 2 наведено необхідні та достатні умови існування відповідних ендоморфізмів часткового відношення еквівалентності. У пункті 3 обчислюються всі можливі значення ендотипу заданих часткових еквівалентностей.

1. Типи ендоморфізмів. Нехай X — довільна непорожня множина, $\mathfrak{S}(X)$ — симетрична напівгрупа на множині X і $\rho \subseteq X \times X$.

Перетворення $f \in \mathfrak{S}(X)$ називається *ендоморфізмом* відношення $\rho \subseteq X \times X$, якщо з $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yf) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх ендоморфізмів бінарного відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює напівгрупу, яка позначається через $End(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *напівсильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існують такі $x' \in xff^{-1}$, $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $HEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *локально сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що для кожного $x' \in xff^{-1}$ знайдеться такий $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$, і аналогічно для кожного прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $LEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *квазісильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існує такий $x' \in xff^{-1}$, який знаходиться у відношенні ρ з кожним прообразом з yff^{-1} , і аналогічно для деякого прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх квазісильних ендоморфізмів бінарного відношення ρ позначається через $QEnd(X, \rho)$.

Зазначимо, що множини $HEnd(X, \rho)$, $LEnd(X, \rho)$ і $QEnd(X, \rho)$ у загальному випадку не є напівгрупами [9].

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх сильних ендоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює моноїд, який позначається як $SEnd(X, \rho)$. Неважко переконатися, що $SEnd(X, \rho)$ є піднапівгрупою $End(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *автоморфізмом*, якщо f є бієкцією і f^{-1} — ендоморфізм бінарного відношення ρ . Множина всіх автоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції підстановок утворює групу, яка позначається через $Aut(X, \rho)$. Зрозуміло, що $Aut(X, \rho)$ є підгрупою $End(X, \rho)$.

Як відомо [9], для довільного бінарного відношення ρ на множині X має місце ланцюг включень:

$$\begin{aligned} End(X, \rho) \supseteq HEnd(X, \rho) \supseteq LEnd(X, \rho) \supseteq QEnd(X, \rho) \supseteq \\ \supseteq SEnd(X, \rho) \supseteq Aut(X, \rho). \end{aligned}$$

Розглянемо приклади ендоморфізмів кожного типу для відношення $\rho = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, d), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$, визначеного на множині $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & c & b & c & c \end{pmatrix} \in End(X, \rho) \setminus HEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & b & b & e & e \end{pmatrix} \in HEnd(X, \rho) \setminus LEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & b & b & d & d \end{pmatrix} \in LEnd(X, \rho) \setminus QEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in QEnd(X, \rho) \setminus SEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in SEnd(X, \rho) \setminus Aut(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix} \in Aut(X, \rho).$$

2. Ендоморфізми часткових еквівалентностей. Нехай $Eq(X)$ — множина всіх еквівалентностей на X і $\alpha \in Eq(X)$. Через X/α позначається фактормножина множини X по еквівалентності α , а через \bar{x} — клас еквівалентності, який містить $x \in X$.

Лема 1 ([16]). Перетворення $f \in \mathfrak{S}(X)$ є ендоморфізмом відношення $\alpha \in Eq(X)$ тоді і тільки тоді, коли для кожного класу еквівалентності $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$, такий що $Af \subseteq B$.

Лема 2 ([17]). (i) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є напівсильним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $B \in X/\alpha$, такого що $B \cap im(f) \neq \emptyset$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $A \in X/\alpha$, такий що $a, b \in Af$.

(ii) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $A, B, C \in X/\alpha$ з того, що $Af \subseteq C, Bf \subseteq C$, випливає $Af = Bf$.

(iii) Для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ маємо $QEnd(X, \alpha) = SEnd(X, \alpha)$.

Лема 3. Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є сильним тоді і тільки тоді, коли $\tau^* : X/\alpha \rightarrow X/\alpha : \bar{a} \mapsto \overline{af}$ є ін'єктивним перетворенням.

Доведення. Випливає з леми 3.1 в [5].

Бінарне відношення ρ на множині X називається частковою еквівалентністю (див., наприклад, [18]) на X , якщо воно симетричне і транзитивне.

Нехай A — непорожня власна підмножина множини X , α_A — еквівалентність на A . Відношення $\alpha_A \subset X \times X$ очевидно є частковим відношенням еквівалентності на множині X . Множину всіх таких часткових еквівалентностей $\alpha_A, A \subset X$, будемо позначати $Eq_A(X)$.

Якщо $f : X \rightarrow X$ — деяке перетворення і $A \subseteq X$, то через $f|_A$ позначатимемо обмеження перетворення f на підмножину A .

Лема 4. (i) Перетворення $f \in \mathfrak{S}(X)$ є ендоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in End(A, \alpha_A)$.

(ii) Підстановка f множини X є автоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in Aut(A, \alpha_A)$.

(iii) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є напівсильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-якого класу $B \in A/\alpha_A$ такого, що $B \cap im(f) \neq \emptyset$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $Y \in A/\alpha_A$ такий, що $a, b \in Yf$.

(iv) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A \text{ і } f|_A \in LEnd(A, \alpha_A).$$

(v) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \setminus A)f \subseteq X \setminus A \text{ і } f \in SEnd(A, \alpha_A).$$

(vi) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є квазісильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли f — сильний ендоморфізм.

Доведення. Твердження (iii) доводиться аналогічно тому, як лема 2 з [17], а решта тверджень (i), (ii), (iv)–(vi) — подібно лемам 1–3 цього пункту.

Відмітимо, що з пунктів (v), (vi) леми 4 випливає, що $QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $\alpha_A \in Eq_A(X)$.

3. Ендотипи часткових відношень еквівалентності. Нехай X — довільна непорожня множина, ρ — бінарне відношення на множині X . Ланцюгу включень

$$\begin{aligned} \text{End}(X, \rho) \supseteq \text{HEnd}(X, \rho) \supseteq \text{LEnd}(X, \rho) \supseteq \text{QEnd}(X, \rho) \supseteq \\ \supseteq \text{SEnd}(X, \rho) \supseteq \text{Aut}(X, \rho) \end{aligned}$$

відповідає послідовність $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \dots, 5\}$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i -тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, $s_i = 1$ в протилежному випадку. Наприклад, $s_3 = 0$ означає $\text{LEnd}(X, \rho) = \text{QEnd}(X, \rho)$, а $s_5 = 1$ вказує на $\text{SEnd}(X, \rho) \neq \text{Aut}(X, \rho)$. Значення суми $\sum_{i=1}^5 s_i 2^{i-1}$ називається *ендотипом* бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів і позначається через $\text{Endotype}(X, \rho)$.

Відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *тотожним*, якщо $\rho = i_X = \{(x, x) | x \in X\}$ і *універсальним*, якщо $\rho = \omega_X = X \times X$.

Теорема 1. Нехай $A \neq \emptyset$ і $A \subset X$. Для будь-якої часткової еквівалентності $\alpha_A \in \text{Eq}_A(X)$:

$$\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } |A| = 1, |X| = 2; \\ 7, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, |X \setminus A| = 1, \alpha_A = i_A; \\ 18, & \text{якщо } |A| = 1, 2 < |X|; \\ 19, & \text{якщо } 2 \leq |A|, \alpha_A = \omega_A; \\ 23, & \text{якщо } 2 \leq |A| < \infty, i_A \neq \alpha_A \neq \omega_A \text{ або} \\ & 2 \leq |A| < \infty, 1 < |X \setminus A|, \alpha_A = i_A \text{ або} \\ & |A| = \infty, \alpha_A \neq \omega_A. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай $|X| = 2$, $A \subset X$ — підмножина, що містить один елемент. Тоді $\text{Eq}_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому, як випливає з леми 4, $\text{End}(X, \alpha_A) = \text{HEnd}(X, \alpha_A)$ і потужність цих множин дорівнює 2, а $\text{LEnd}(X, \alpha_A) = \text{Aut}(X, \alpha_A)$ з потужністю 1, отже, $\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 2$.

2) Нехай $A \subset X$ — скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $|X \setminus A| = 1$ і α_A — тотожне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, проте $f \notin \text{HEnd}(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Аналогічно можна показати, що $\text{HEnd}(X, \alpha_A) \neq \text{LEnd}(X, \alpha_A) \neq \text{QEnd}(X, \alpha_A)$. Дійсно, визначивши $f : X \rightarrow X$, як

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A \setminus \{b\}, \\ b, & \text{якщо } x \in \{b\} \cup X \setminus A \end{cases}$$

для різних $a, b \in A$, приходимо до $f \in H\text{End}(X, \alpha_A) \setminus L\text{End}(X, \alpha_A)$. Перетворення

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

дає нам приклад такого $f \in L\text{End}(X, \alpha_A) \setminus Q\text{End}(X, \alpha_A)$. Оскільки $|X \setminus A| = 1$, $\alpha_A = i_A$ і A – скінченна множина, згідно з лемою 3, п. (ii) і п. (v) леми 4, $f \in \text{Aut}(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in S\text{End}(X, \alpha_A)$, тому $\text{Aut}(X, \alpha_A) = S\text{End}(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$\text{End}(X, \alpha_A) \supset H\text{End}(X, \alpha_A) \supset L\text{End}(X, \alpha_A) \supset Q\text{End}(X, \alpha_A) = \text{Aut}(X, \alpha_A).$$

Отже, $\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 7$.

3) Нехай $A = \{a\}$, X – множина, що містить більше двох елементів. Як і в п. 1), $\text{Eq}_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому для ендоморфізму f будь-якого типу очевидно, що $af = a$. Згідно з п. (iii) леми 4, $f \in H\text{End}(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, тому $H\text{End}(X, \alpha_A) = \text{End}(X, \alpha_A)$. Умови пунктів (iv)–(vi) леми 4 в даному випадку визначають один і той самий ендоморфізм, не обов'язково бієктивний, тому $L\text{End}(X, \alpha_A) = S\text{End}(X, \alpha_A)$ і $S\text{End}(X, \alpha) \neq \text{Aut}(X, \alpha)$. Таким чином,

$$\text{End}(X, \alpha_A) = H\text{End}(X, \alpha_A) \supset L\text{End}(X, \alpha_A) = S\text{End}(X, \alpha_A) \supset \text{Aut}(X, \alpha_A),$$

отже, $\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 18$.

4) Нехай A – множина, що містить не менше двох елементів і α_A – універсальне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення $f : X \rightarrow X$ за правилом:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1 і п. (i) леми 4, $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, але $f \notin H\text{End}(X, \alpha_A)$, що впливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, матимемо $f \in H\text{End}(X, \alpha_A) \setminus L\text{End}(X, \alpha_A)$. Оскільки $|A/\alpha_A| = 1$, умови пунктів (iv)–(vi) визначають один і той самий не обов'язково бієктивний ендоморфізм, тому $L\text{End}(X, \alpha_A) = S\text{End}(X, \alpha_A)$ і $S\text{End}(X, \alpha_A) \neq \text{Aut}(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$\text{End}(X, \alpha_A) \supset H\text{End}(X, \alpha_A) \supset L\text{End}(X, \alpha_A) = S\text{End}(X, \alpha_A) \supset \text{Aut}(X, \alpha_A),$$

отже, $\text{Endotype}(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 19$.

5) а) Нехай A – скінченна множина, що містить не менше двох елементів, і $\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$. Тоді $|A| \geq 3, |A/\alpha_A| \geq 2$ і в A/α_A існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Позначимо його через \bar{x} . Візьмемо різні $a, b \in \bar{x}$ і визначимо перетворення $f : X \rightarrow X$, поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in \text{End}(X, \alpha_A)$, але $f \notin H\text{End}(X, \alpha_A)$, що впливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, будемо мати приклад $f \in H\text{End}(X, \alpha_A) \setminus L\text{End}(X, \alpha_A)$.

Визначимо тепер перетворення f множини X , поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для всіх $x \in X$. Згідно з пунктами (iv) і (v) леми 4, $f \in LEnd(X, \alpha_A)$, проте $f \notin SEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (v) леми 4. Звідси $SEnd(X, \alpha_A) \neq LEnd(X, \alpha_A)$. Нерівність $Aut(X, \alpha_A) \neq SEnd(X, \alpha_A)$ є очевидною. Отже,

$$\begin{aligned} End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = \\ = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A) \end{aligned}$$

і $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

b) Нехай A — скінченна непорожня множина з $|A| \geq 2$, $|X \setminus A| > 1$ і $\alpha_A = i_A$. Ланцюг включень

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$$

доводиться аналогічно тому, як в п. 2) цього доведення. Оскільки множина $X \setminus A$ містить не менше 2 елементів, виберемо в ній довільний елемент a і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A, \\ a, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $f \in SEnd(X, \alpha_A) \setminus Aut(X, \alpha_A)$ і, як результат, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

c) Нехай A — нескінченна множина і $\alpha_A \neq \omega_A$. Розглянемо випадок, коли $\alpha_A = i_A$. Оскільки множина A нескінченна, на відміну від пункту 2), $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Приклад ендоморфізму $f \in SEnd(X, \alpha_A) \setminus Aut(X, \alpha_A)$ отримуємо при виборі на обмеженні $f|_A$ ін'єкції, яка не є сюр'єкцією. В цьому випадку

$$\begin{aligned} End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = \\ = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A). \end{aligned}$$

Таким чином, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^5 s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

Якщо ж $\alpha_A \neq i_A$, $\alpha_A \neq \omega_A$, то, міркуючи аналогічно тому, як в п. 5), а), приходимо до $Endotype(X, \alpha_A) = 23$. Теорема доведена.

Таким чином, всі можливі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності, знайдені в [14], і отриманий тут результат дають повну класифікацію всіх часткових відношень еквівалентності виду α_A , $A \subseteq X$, за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Список використаної літератури

1. Глушкин Л. М. Полугруппа изотонных преобразований // Успехи мат. наук. — 1961. — № 5. — С. 157–162.
2. Шнеперман Л. Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. — 1962. — 238. — С. 21–37.

3. Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 2. – С. 161–169.
4. Бондарь Е. А., Жучок Ю. В. Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n -однородных гиперграфов // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – **18**, № 1. – С. 21–34.
5. Бондарь Е. А., Жучок Ю. В. Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 6. – С. 743–754.
6. Шайн Б. М. Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сборник – 1964. – **65**, № 107 (2). – С. 161–169.
7. Mashevitzky G., Schein B. M. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2003. – **131**, № 6. – P. 1655–1660.
8. Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // Journal of Algebra. – 2004. – **278**, № 1. – P. 342–359.
9. Böttcher M., Knauer U. Endomorphism spectra of graphs // Discr. Math. – 1992. – **109**. – P. 45–57.
10. Решетников А. В. Об определениях гомоморфизма гиперграфов // Дискретная математика и ее приложения: Материалы X Междунар. сем. – Москва: МГУ. – 2010. – С. 325–327.
11. Hou H., Fan X., Luo Y. Endomorphism types of generalized polygon // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2009. – **33**, № 3. – P. 433–441.
12. Hou H., Fan X., Luo Y. The endomorphism monoid of \overline{P}_n // European J. Combinatorics. – 2008. – **29**, № 5. – P. 1173–1185.
13. Wang W., Hou H. The endomorphism monoid of N -prism // Intern. Math. Forum. – 2011. – **50**. – P. 2461–2471.
14. Zhuchok Y. V. Endotypes of equivalence relations // Quasigroups and Related Systems. – 2014. – **22**. – P. 295–300.
15. Жучок Ю. В., Тоичкина Е. А. Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности // Матем. сб. – 2014. – **205**, № 5. – С. 37–54.
16. Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – **3**. – С. 22–26.
17. Бондарь Е. А. О регулярности некоторых подполугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности // Прикладная дискретная математика. – 2014. – № 3(25). – С. 5–11.
18. Дудек В. А. Алгебры Менгера многоместных функций / В. А. Дудек, В. С. Трохименко. – Ch.: S. n., 2006. – 237 p.

Одержано 10.08.2017