УДК 512.53+512.64 DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).19-26

В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха (Інститут математики НАН України)

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ МОНОЇДІВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

We describe canonical forms of the matrix representations of monoids of the fourth order over an arbitrary field and indicate criteria on representation type.

Ми описуємо канонічні форми матричних зображень некомутативних моноїдів четвертого порядку над довільним полем та вказуємо критерії про зображувальний тип.

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не так добре, як скінченних груп. Якщо говорити про опис нерозкладних зображень напівгруп, то в першу чергу слід виділити окремі результати про цілком прості напівгрупи [1] та напівгрупи всіх перетворень скінченної множини [2, 3] (у випадку скінченного зображувального типу) і для напівгруп Рісса [4, 5] та напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням [6–8] (як у випадку скінченного типу, так і ручного нескінченного типу). Добре відомий опис зображень алгебр $< a, b \,|\, a^n = 0, b^m = 0, ab = ba = 0 >$ [9, 10] та $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0, (ab)^n = 0, (ba)^m = 0 >$ [11, 12] також природно розглядати як результати про зображення (скінченних) напівгруп.

Ця стаття присвячена матричним зображенням некомутативних моноїдів четвертого порядку над довільним полем.

Напівгрупи четвертого порядку. Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні. Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, в 1953 р. [13]. Вони вивчалися, зокрема, в [14–16]. Напівгрупи порядку $n = 4$ вперше описав також Т. Тамура в 1953 р. [17]. а в 1955 р. Г. Е. Форсайт [18] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності (дуальною до напівгрупи називається та ж сама множина з операцією множення $x \circ y = yx$). Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються *різними.*

Приведемо деякі пояснення до списку моноїдів, що вказані в теоремі, яка формулюється нижче. В круглих дужках вказано всі елементи моноїда, а в кутових – мінімальну систему твірних. Через 0 та e позначається відповідно нульовий та одиничний елементи; у випадку, коли моноїд з відкинутим елементом e також є моноїдом, новий одиничний елемент позначаємо через e_0 (тривіальні визначальні співвідношення для e та e_0 виписуватись не будуть). Наявність різних букв в позначеннях твірних різних напівгруп визначається специфікою запропонованого першим автором алгоритму знаходження мінімальних систем твірних (див., наприклад, [16]).

Теорема 1. *Моноїди вигляду*

1n) $(e, 0, b, c) = \langle e, b, c\rangle$*:* $b^2 = 0,\ c^2 = c,\ bc = 0,\ cb = b;$

2n) $(e, bc, b, c) = \langle e, b, c\rangle$*:* $b^3 = b^2,\ c^2 = c,\ bc = b^2,\ cb = c;$

3n) $(e, bc, b, c) = \langle e, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

4n) $(e, 0, b, c) = \langle e, 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

5n) $(e, a, e_0, c) = \langle e, a, e_0, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

6n) $(e, a, b, c) = \langle e, a, b, c\rangle$: $a^2 = a$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $ab = a$,
$ac = a$, $ba = b$, $bc = b$, $ca = c$, $cb = c$.

7n) $(e, a, c, d) = \langle a, c, d\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = e$, $d^2 = d$, $ac = a$, $ca = a$,
$ad = a$, $da = d$, $cd = d$, $dc = d$.

8n) $(e, a, d, da) = \langle a, d\rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $ad = a$.

утворюють повну систему попарно різних некомутативних моноїдів четвертого порядку.

Зауважимо, що системи твірних не завжди є мінімальними. По-перше, така задача авторами не ставилася, по-друге, для вивчення матричних зображень напівгруп це і не потрібно (інколи, для нашого методу вивчення, зайві співвідношення можуть бути навіть корисними).

Переходимо до доведення теореми 1.

Моноїд M називається з приєднаною одиницею e, якщо $M \setminus e$ — напівгрупа.

Перші шість моноїдів із списку (вказаного в теоремі) є напівгрупами з приєднаною одиницею, а для двох інших одиниця не є приєднаною. Той факт, що немає інших моноїдів з приєднаною одиницею, випливає з опису мінімальних систем твірних, разом з визначальними співвідношеннями, всіх напівгруп порядку 3 [19]. Із основного результату роботи [20] випливає, що некомутативні моноїди порядку 4 з неприєднаною одиницею вичерпуються моноїдами вигляду $7n$) і $8n$) (це напівгрупи з номерами 98 і 100).

Формулювання основних теорем. Під зображенням завжди розуміємо матричне зображення над (довільним) полем K.

Будемо вважати, що матриця зображення напівгрупи, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова матриця 0 (відповідно одинична матриця E). При цьому (див. [21]) "втрачається" лише одне нерозкладне зображення, а саме одновимірне зображення, що складається із одиничних (відповідно нульових) елементів поля. При вивченні зображень напівгруп порядку 4, вказаних в теоремі 1, матриця зображення, що відповідає твірному елементу e_0, a, b, c позначається відповідно через E_0, A, B, C.

Нагадаємо, що напівгрупи розглядаються з точністю до дуальності (і, звичайно, ізоморфізму). Це по суті не є обмеженням, бо дуальним напівгрупам відповідають зображення з транспонованими матрицями.

Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (відповідно дикою) над полем K, якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою); точні означення приведено в роботі [22]. Якщо напівгрупа над (деяким) нескінченним полем $L \supseteq K$ має, з точністю до еквівалентності, нескінченне число нерозкладних зображень, то кажуть, що вона є нескінченного зображувального типу над полем K. В іншому разі — скінченного зображувального типу.

Теорема 2. *Всі некомутативні моноїди четвертого порядку є ручними.*

Теорема 3. *Серед некомутативних моноїдів четвертого порядку лише моноїд* 6n) *має* (*з точністю до еквівалентності*) *нескінченне число нерозкладних зображень.*

Обидві теореми випливають із результатів роботи [19] та теореми цієї статті, яка сформульована і доведена нижче. А саме, той факт, що моноїд вигляду 6n) має нескінченний зображувальний тип випливає теореми 1 роботи [19] (оскільки цей моноїд з приєднаною одиницею). Ручність цього моноїду випливає із результатів параграфу 6 тієї ж роботи. Решта моноїдів, як випливає з наступної теорем 4, мають скінченний зображувальний тип.

Переходимо до формулювання теореми про канонічні форми матричних зображень моноїдів у випадках sn), $s \in \{1, 2, \ldots, 8\} \setminus 6$.

За традицією теорії матричних задач через E будемо позначати одиничну матрицю довільного розміру $n \times n$ ($n \geq 0$), а тому довільні дві клітини E в матрицях не обов'язково рівні (якщо їх рівність не випливає із деяких умов). Це робиться для того, щоб не загромаджувати індекси.

Теорема 4. *Канонічна форма для некомутативних моноїдів четвертого порядку, що мають скінченний зображувальний тип, така:*

1n) $(e, 0, b, c) = \langle e, b, c \rangle$*:* $b^2 = 0$*,* $c^2 = c$*,* $bc = 0$*,* $cb = b$*;*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2n) $(e, bc, b, c) = \langle e, b, c \rangle$*:* $b^3 = b^2$*,* $c^2 = c$*,* $bc = b^2$*,* $cb = c$*;*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3п) $(e, bc, b, c) = \langle e, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4п) $(e, 0, b, c) = \langle e, 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5п) $(e, a, e_0, c) = \langle e, a, e_0, c\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = c$, $ac = a$, $ca = c$;

$$E_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7п) $(e, a, c, d) = \langle a, c, d\rangle$: $a^2 = a$, $c^2 = e$, $d^2 = d$, $ac = a$, $ca = a$, $ad = a$, $da = d$, $cd = d$, $dc = d$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $\mathrm{char}\, K \neq 2$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $char\, K = 2$.

8n) $(e, a, d, da) = \langle a, d\rangle$: $a^2 = a$, $d^2 = e$, $ad = a$;

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix}$$

при $char\, K \neq 2$ *і*

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

при $charK = 2$.

Доведення теореми 4. Оскільки у випадках $1n) - 5n)$ маємо моноїди з приєднаною одиницею, то в цих випадках твердження теореми випливає із теореми 3 [19] (але при цьому треба мати на увазі, що елементу e_0, якщо він існує, вже не обов'язково відповідає одинична матриця).

Розглянемо тепер випадки $7n$) і $8n$). Розпочнемо з моноїда $7n$).

Приведемо за допомогою перетворень подібності (одночасно з трьома матрицями A, C, D) матрицю A до жорданового вигляду

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і розіб'ємо матриці C і D на блоки (такого ж розміру):

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}.$$

Використаємо спочатку рівності $AC = A$, $CA = A$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

або (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З останніх двох рівностей маємо, що

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівності $AD = A$, $DA = D$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix},$$

або (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}.$$

З останніх двох рівностей маємо, що

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівність $D^2 = D$ виконується автоматично.

Ще не використані рівності $C^2 = E$, $CD = D$, $DC = D$ еквівалентні, як легко бачити, рівностям $C_4^2 = E$ і $C_4D_3 = D_3$.

Приведемо за допомогою перетворень подібності (одночасно з трьома матрицями A, C, D) матрицю C_4 до жорданового вигляду

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо характеристика $char\, K$ поля K дорівнює 2, і до жорданового вигляду

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $char\, K \neq 2$. Отже, враховуючи рівність $C_4D_3 = D_3$, маємо, що

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ D_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $char\, K \neq 2$ і

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ D_3' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_3'' & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

при $char\, K = 2$.

Далі доведення проводиться по тій же схемі, яка застосовувалась в роботі [19] при доведенні випадків 13) і 14) теореми 3. В результаті отримаємо канонічні форми, вказані в нашій теоремі.

Переходимо до моноїда $8n$).

Приведемо за допомогою перетворень подібності (одночасно з двома матрицями A, D) матрицю A до жорданового вигляду

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і розіб'ємо матрицю D на блоки (такого ж розміру):

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}.$$

Із рівності $AD = A$ випливає, що

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $D_4^2 = D_4$, то (перетвореннями подібності з матрицями A, D, що не змінюють отриманий вигляд матриці A) матрицю D приведемо до вигляду

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ D_3' & E & 0 \\ D_3'' & 0 & -E \end{pmatrix}$$

при $char\, K \neq 2$ і до вигляду

$$D = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ D_3' & E & E & 0 \\ D_3'' & 0 & E & 0 \\ D_4''' & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

при $char\ = 2$. При цьому в першому випадку $D_3' = 0$, а в другому — $D_3'' = 0$.

Далі доведення проводиться по тій же схемі, яка застосовувалась в роботі [19] при доведенні випадків 13) і 14) теореми 3.

Теорема 4 доведена.

1. *Понизовский И. С.* О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
2. *Понизовский И. С.* Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
3. *Ringel C.* The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429–434.
4. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2014. – **152**. – С. 27–31.
5. *Дяченко С. М.* Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу // Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки). – 2016. – **178**. – С. 23–26.

6. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 23–44.
7. *Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.* О полугруппах, порожденных идемпотентами с частичным нулевым умножением // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4. – С. 294–298.
8. *Bondarenko, V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – № 4. – P. 15–22.
9. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
10. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
11. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
12. *Ringel C.* Indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
13. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
14. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
15. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
16. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
17. *Tamura T.* Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4. // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1954. – **5**, – P. 17–27.
18. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.
19. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.
20. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про комбінаторні властивості напівгруп четвертого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2017. – **30**, № 1. – С. 25–31.
21. Бондаренко В. М., Костишин Е. М., Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.
22. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.

Одержано 27.09.2018