УДК 512.643.8 DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).27-32

М. Ю. Бортош (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПРО ЗВІДНІСТЬ ОДНІЄЇ ДУОМІАЛЬНОЇ МАТРИЦІ НАД КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Duomial matrices over a commutative local ring are considered. The reducibility of strictly duomial matrix of some form over a commutative local ring is proved.

В роботі розглядаються дуоміальні матриці над комутативним локальним кільцем. Доведена звідність строго дуоміальної матриці деякого вигляду над комутативним локальним кільцем.

1. Вступ. В більшості випадків задача про класифікацію, з точністю до подібності, матриць над комутативним кільцем (що не є полем) містить в собі задачу про пару матриць над полем (в сучасній термінології є дикою [1]), як у випадку кілець класів лишків [2] і розв'язана лише над деякими кільцями головних ідеалів для матриць малих порядків (див., напр., [3] – [5]). В такій ситуації більш важливою стає задача про вивчення звідних та незвідних матриць над кільцями.

У ряді робіт (див., напр., [6] – [9]) вивчалися властивості матриць над комутативним кільцем, які мають вигляд

$$M(t; s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & t^{s_n} \\ t^{s_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & t^{s_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

де $s_1 \dots, s_n \in \mathbb{N} \cup 0$, і, зокрема, їх звідність чи незвідність (основним випадком є випадок, коли t не є оборотним).

Вивчалися (p, q)-звідні матриці над кільцем K (див., напр., [10] – [11]), тобто квадратні матриці A, які подібні матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

де A_{11} і A_{22} — матриці порядку $p \geq 1$ і $q \geq 1$ відповідно. Якщо при цьому порядок q матриці A_{22} малий, то матрицю A називали $(*, q)$-*звідною*. Розглядалися різні типи звідності: $(*, 2)$-звідність, $(*, 3)$-звідність, 2-спадкова звідність.

В даній роботі ми вивчаємо звідність дуоміальних матриць.

2. Формулювання основних результатів. На протязі всієї статті K позначає комутативне локальне кільце з радикалом $R = RadK \neq 0$ і t — будь-який фіксований ненульовий елемент із радикала R.

Матрицю над K (не обов'язково квадратну) назвемо *дуоміальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить не більше двох ненульових елементів. Квадратну матрицю назвемо *строго дуоміальною*, якщо кожний її рядок і кожний її стовпець містить рівно два ненульові елементи.

Теорема 1. *Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$, і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^2 = 0$. Строго дуоміальна матриця*

$$M = \begin{array}{c} \hphantom{t\;0\;0\;}\overbrace{\hphantom{0\;\;0\;\;\dots\;\;0\;\;\dots\;\;0\;\;0\;\;0}}^{n-6}\hphantom{\;0\;0\;t} \\ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & t & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & \dots & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & \dots & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

порядку n звідна над кільцем K.

Доведення. Спочатку введемо деякі позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K. $P_{ij}(a)$ позначає додавання i-го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j-го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \xrightarrow{a} s]^+$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$, а через $[m \xrightarrow{a} s]^-$ — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $Q_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $P_{sm}(-a)$.

Розглянемо звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0 \end{array}\right).$$

Покажемо, що матриця N подібна матриці M.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-t} n]^+$ і $[2 \xrightarrow{-1} n-2]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[n-1 \xrightarrow{t} 3]^-$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[n-1 \overset{-t}{\to} n]^{+}$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[2 \overset{-t}{\to} n]^{-}$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0
\end{array}\right).$$

На 7-му кроці застосуємо до матриці N_6 перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n]^-$:

$$N_7 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & t & 0 \end{array}\right).$$

Ця дуоміальна матриця перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду

$$M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & t & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 & \ddots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t & \ldots & t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & t & \ldots & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ddots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & t & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Висновки. У статті розглянуті дуоміальні матриці над комутативними локальними кільцями. Доведена звідність строго дуоміальної матриці деякого вигляду порядку $n \geq 6$ над комутативним локальним кільцем K.

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов // Математический сборник. – Киев: Из-во "Наукова думка", 1976. – С. 275–277.
3. *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
4. *Pizarro A.* Similarity Classes of 3×3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – **54**. – P. 29–51.
5. *Prasad A., Singla P., and Spallone S.* Similarity of matrices over local rings of length two// `http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf`.
6. *Динис Р. Ф., Тилищак О. А.* Про звідність матриць деякого вигляду над локальними областями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23, №1. – С. 57–62.

7. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
8. *Бортош М. Ю.* Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. 25, №1. – С. 15–20.
9. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.
10. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Про $(*, 2)$-звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. **29**, №2. – С. 22–30.
11. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. **30**, №1. – С. 11–24.

Одержано 30.09.2018