

УДК 519.21

DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).45-54

М. С. Герич (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

**ПРО РОЗПОДІЛ ПЕРЕСТРИБКІВ ЧЕРЕЗ НУЛЬОВИЙ РІВЕНЬ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАТЧАСТИХ ПРОЦЕСІВ**

Unexplored in the question of the function of crossing a zero-level for oscillating lattice random walks and processes are investigated in this article for almost semicontinuous bottom of all-valued Poisson processes.

Невивчені в питання про функціонали перетину нульового рівня для осцилюючих гратчастих випадкових блукань та процесів досліджуються в даній статті для майже напівнеперервних знизу цілозначних пуассонівських процесів.

Дана стаття присвячена вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для цілочислових пуассонівських гратчастих процесів. Зауважимо, що в розділі 7 монографії [5] та [6] для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ розподіли $\gamma_k(x)$ розглядалися не для всіх випадків значень $m_1^0 = E\xi(1)$ і лише при скінченних $x < \infty$, крім рівня $x = 0$. Там детально вивчався розподіл $\gamma_k(x)$. Щоб усунути цю прогалину, ми детальніше розглянемо розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератрис $\gamma_k(0)$ при різних знаках значення $m_1^0 \geq 0$.

Розглянемо складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = \sum_{k \leq \nu(t)} \xi_k,$$

де $\nu(t)$ – процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Означення 1. *Однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = 0\}$ називається гратчастим пуассонівським процесом, якщо стрибкова міра Леві зосереджена в послідовності точок $\{x_r = rh\}$ ($h > 0, r \neq 0$ – ціле) і визначається співвідношенням*

$$\Pi_0(r) = \Pi_0(x_r) = \lambda p_r, \quad p_r = P\{\xi_1 = rh\}, \quad r = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

а генератриса такого процесу визначається співвідношенням

$$g_t(z) = Ez^{\xi(t)} = e^{tk(z)}, \quad |z| = 1,$$

$$k(z) = \lambda(p(z) - 1), \quad p(z) = Ez^{\xi_1} = \sum_{r \neq 0} z^{rh} p_r, \quad |z| = 1. \quad (1)$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $h = 1$ і розглядати тільки цілозначні процеси. Як і раніше функцію $k(z) = \ln g_1(z)$ називаємо кумулянтою процесу.

Означення 2. *Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = 0\}$ називається майже напівнеперервним знизу, якщо $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише геометрично розподіленими стрибками, а його кумулянта має вигляд*

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1-z}{z-b} \quad (0 < b < 1, \lambda_1, \lambda_2 > 0), \quad |m_1^0| < \infty. \quad (2)$$

Означення 3. Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t), t \geq 0, \xi(0) = 0\}$ називається напівнеперервним знизу, якщо $b = 0$.

Зокрема, процес $\xi(\theta_s)$ має генератрису

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - k(z)}, \quad |z| = 1. \quad (3)$$

Крім того, для генератриси процесу $\xi(\theta_s)$ має місце основна факторизаційна тотожність (див. [1])

$$g(s, z) = g_+(s, z)g_-(s, z), \quad |z| = 1, \quad (4)$$

де $g_{\pm}(s, z) = Ez^{\xi^{\pm}(\theta_s)}$ ($|z|^{\pm 1} \leq 1$).

Оскільки в роботах [6], [3] для ґратчастих пуассонівських процесів розподіли $\gamma_k(x)$ розглядалися не для всіх випадків знаку $m_1^0 = E\xi(1)$.

Введемо позначення граничних функціоналів процесу
 $\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}$ – момент 1-го досягнення рівня $x \geq 0$,
 $\gamma_1(x) = \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x$ – перший перестрибок через x ,
 $\gamma_2(x) = \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0)$ – перший недострибок $\xi(t)$,
 $\gamma_3(x) = \gamma_x^+ = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$ – перший стрибок, що накриває рівень x ,
 $\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} (\inf) \xi(u)$, $\xi^{\pm} = \sup_{0 \leq t < \infty} (\inf) \xi(t)$ – екстремуми процесу $\xi(t)$.

Позначимо через θ_s випадкову величину з показниковим розподілом:
 $P\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$, $t \geq 0$ і відповідно генератриси цих функціоналів

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} \quad (|z| = 1), \quad g_{\pm}(s, z) = Ez^{\xi^{\pm}(\theta_s)} \quad (|z|^{\pm 1} \leq 1);$$

$$V(s, x, u_1, u_2, u_3) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_1^{\gamma_1(x)} u_2^{\gamma_2(x)} u_3^{\gamma_3(x)}, \tau^+(x) < \infty];$$

$$V_k(s, x, u_k) = E[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)}, \tau^+(x) < \infty], \quad k = \overline{1, 3}.$$

В позначеннях $V(\dots)$ та $V_k(\dots)$ у випадку $m_1^0 \geq 0$ $P\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$, тому в них достовірна подія пропускається.

Спільна генератриси всіх перестрибкових функціоналів визначається при довільному знаку m_1^0 , згідно з теоремою 7.7. в [6], таким чином

$$sV(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y=0}^x p_y^+(s) W(s, x - y, u_1, u_2, u_3), \quad x \in \mathbb{Z}_0^+, \quad (5)$$

$$p_{\pm y}^{\pm}(s) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) = \pm y\}, \quad y \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$W(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y \geq 0} A(x + y, u_1, u_2, u_3) p_{-y}^-(s), \quad x \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$A(x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{k \geq x+1} u_1^{k-x} u_2^x u_3^k \Pi_0^+(k), \quad \Pi_0^+(k) = \lambda_1 p_k, \quad x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ми обмежимося розглядом генератрис маргінальних розподілів. Зокрема, згідно з теоремою 7.7. в [6], для маргінальних генератрис

$$V_k(s, x, u_k) = E \left[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)}, \tau^+(x) < \infty \right] =$$

$$= E \left[u_k^{\gamma_k(x)}, \xi^+(\theta_s) > x \right], \quad 0 < x < \infty, \quad k = \overline{1, 3}$$

та їх твірних перетворень

$$v_k(s, z, u_k) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x V_k(s, x, u_k), \quad k = \overline{1, 3}$$

одержані співвідношення

$$V_k(s, x, u_k) = s^{-1} \sum_{y=0}^x p_y^+(s) W_k(s, x-y, u_k), \quad x \geq 0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (6)$$

$$v_k(s, z, u_k) = s^{-1} w_k(s, z, u_k) g_+(s, z), \quad k = \overline{1, 3}. \quad (7)$$

Функції $W_k(s, x, u_k)$ визначаються таким чином

$$W_k(s, x, u_k) = \sum_{y \geq 0} A_k(x+y, u_k) p_{-y}^-(s), \quad x \geq 0, \quad (8)$$

де

$$A_1(x, u_1) = \sum_{k \geq x+1} u_1^{k-x} \Pi_0^+(k), \quad A_2(x, u_2) = \sum_{k \geq x+1} u_2^x \Pi_0^+(k) = u_2^x \Pi(x),$$

$$A_3(x, u_3) = \sum_{k \geq x+1} u_3^k \Pi_0^+(k), \quad a_k(z, u_k) = \sum_{x \geq 0} z^x A_k(x, u_k),$$

які остаточно виражаються через генератрису додатних стрибків

$$\tilde{\Pi}_0^+(z) = \sum_{x \geq 0} z^x \Pi_0^+(x) = \lambda_1 \tilde{p}_1(z),$$

де $\tilde{\Pi}_0^+(1) = \lambda_1$, та генератриси хвостів розподілу

$$\tilde{\Pi}(z) = \sum_{r \geq 0} z^r \Pi(r), \quad \Pi(r) = \sum_{k \geq r+1} \Pi_0^+(k), \quad \Pi(0) = \lambda_1,$$

$\tilde{\Pi}(1) = \sum_{r \geq 0} \Pi(r) = \lambda_1 \sum_{r > 0} r p_r$. Причому генератриса хвостів зв'язана з розподілом стрибків наступним співвідношенням

$$\tilde{\Pi}(z) = \frac{\lambda_1}{1-z} (1 - \tilde{p}_1(z)), \quad (9)$$

$$A_1(0, u_1) = \lambda_1 \tilde{p}_1(u_1) = \tilde{\Pi}_0^+(u_1), \quad A_1(0, 1) = \lambda_1, \quad A_1(x, 1) = \Pi(x),$$

$$a_1(z, u_1) = \frac{u_1}{u_1 - z} (\tilde{\Pi}_0^+(u_1) - \tilde{\Pi}_0^+(z)) = \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - z} (\tilde{p}_1(u_1) - \tilde{p}_1(z)),$$

$$a_1(1, u_1) = u_1 \tilde{\Pi}(u_1),$$

$$A_2(0, u_2) = \Pi(0) = \lambda_1, \quad A_2(0, 1) = \lambda_1, \quad A_2(x, 1) = \Pi(x),$$

$$a_2(z, u_2) = \frac{1}{1 - zu_2} (\tilde{\Pi}_0^+(1) - \tilde{\Pi}_0^+(zu_2)) = \frac{\lambda_1}{1 - zu_2} (1 - \tilde{p}_1(zu_2)) = \tilde{\Pi}(zu_2),$$

$$\begin{aligned}
 a_2(1, u_2) &= \tilde{\Pi}(u_2), \\
 A_3(0, u_3) &= \tilde{\Pi}_0^+(u_3), \quad A_3(0, 1) = \lambda_1, \quad A_3(x, 1) = \Pi(x), \\
 a_3(z, u_3) &= \frac{1}{1-z} (\tilde{\Pi}_0^+(u_3) - \tilde{\Pi}_0^+(zu_3)) = \frac{\lambda_1}{1-z} (\tilde{p}_1(u_3) - \tilde{p}_1(zu_3)), \\
 a_3(1, u_3) &= \lambda_1 u_3 \tilde{p}'_1(u_3).
 \end{aligned}$$

Твірні перетворення функцій (8) мають вигляд

$$w_k(s, z, u_k) = \sum_{x \geq 0} z^x W_k(s, x, u_k). \quad (10)$$

Якщо $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) – майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуассона з кумулянтою (2), тоді $\xi^-(\theta_s)$ має геометричний розподіл, завдяки якому вдається конкретизувати представлення (8) для $W_k(s, x, u_k)$ ($k = \overline{1, 3}$).

Для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x = 0$ та $x \rightarrow \infty$ використаємо лему, що випливає з результатів розділу 7 в [6], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s \rightarrow 0$

$$k(z) = s, \quad s \geq 0. \quad (\mathfrak{L}_s)$$

Лема 1. [5] Для $\xi(t)$ з кумулянтою (2) з $|m_1^0| < \infty$ та $\sigma_1^2 < \infty$ рівняння (\mathfrak{L}_s) при $s \rightarrow 0$ має 2 дійсні корені $0 < z_1(s) < 1 < z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$

$$\begin{aligned}
 g_-(s, z) &= \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)}, \quad p_-(s) = \frac{1-z_1(s)}{1-b}, \\
 z_1(s) &= q_-(s) + bp_-(s), \\
 p_{-k}^-(s) &= p_-(s)(z_1(s)-b)(z_1(s))^{k-1}, \quad k \geq 1.
 \end{aligned} \quad (11)$$

а) Якщо $m_1^0 = 0$, тоді при $s \rightarrow 0$ добуток доповнень коренів $\bar{z}_1(s) = 1 - z_1(s)$, $\bar{z}_2(s) = z_2(s) - 1$

$$\bar{z}_1(s)\bar{z}_2(s) = O(s), \quad p_-(s)p_+(s) \approx k_1 s, \quad k_1 = (\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \quad (12)$$

б) Якщо $m_1^0 > 0$, тоді $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ визначає генератрису ξ^-

$$\begin{aligned}
 E z^{\xi^-} &= \frac{p_-(1-b)(z-b)}{z-z_1(0)}, \quad p_- = \frac{1-z_1(0)}{(1-b)}, \quad z_1(0) = q_- + bp_-, \\
 s^{-1} p_+(s) p_-(s) &\rightarrow_{s \rightarrow 0} p'_+(0) p_-, \quad p'_+(0) = E[\tau^+(0)].
 \end{aligned} \quad (13)$$

в) Якщо $m_1^0 < 0$, тоді $z_2(0) > 1$, а $z_1(0) = 1$, при цьому (див. (7.91) в [6])

$$\begin{aligned}
 z_1(s) &\approx 1 + \frac{s}{|m_1^0|}, \quad p_-(s) \approx \frac{s}{|m_1^0|(1-b)}, \\
 s^{-1} p_-(s) p_+(s) &\rightarrow_{s \rightarrow 0} p'_-(0) p_+, \quad s \rightarrow 0, \\
 p'_-(0) &= E[\tau^-(0)] = \frac{1}{|m_1^0|(1-b)}.
 \end{aligned} \quad (14)$$

Отже, при $m_1^0 = 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має двократний корінь $z_{1,2}(0) = 1$ (див. (12)). При $m_1^0 > 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має корінь $z_2(0) = 1$, а $z_1(0) < 1$ (визначає p_- в (13)). При $m_1^0 < 0$ рівняння (\mathfrak{L}_0) має корінь $z_2(0) > 1$, і $z_1(0) = 1$, а $1 - z_1(s) \approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (14).

Надалі будемо розглядати майже напівнеперервний знизу процес. Знайдемо для цих процесів вигляд для спільних генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$.

Лема 2. [6] Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (2) має місце співвідношення (6), де $W_k(s, x, u_k)$ визначаються через $A_k(x, u_k)$

$$W_1(s, x, u_1) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_1(x, u_1) + \frac{(z_1(s) - b)u_1}{u_1 - z_1(s)} \{A_1(x, u_1) - A_1(x, z_1(s))\}], \quad (15)$$

$$W_2(s, x, u_2) = p_-(s)u_2^x(z_1(s))^{-1}[b\Pi(x) + (z_1(s) - b) \sum_{y \geq 0} (u_2 z_1(s))^y \Pi(x + y)], \quad (16)$$

$$W_3(s, x, u_3) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_3(x, u_3) + \frac{z_1(s) - b}{1 - z_1(s)} \{A_3(x, u_3) - (z_1(s))^{-x} A_3(x, u_3 z_1(s))\}]. \quad (17)$$

Із співвідношення в (7.46) (див. теорему 7.7 в [6]) та (5) випливає твердження для спільної генератриси функціоналів

Теорема 1. [6] Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (2) має місце співвідношення

$$\begin{aligned} \tilde{v}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) &= s^{-1}g_+(s, \varepsilon)\tilde{w}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) = \\ &= s^{-1}(1 - \varepsilon)g_+(s, \varepsilon)w(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3), \end{aligned} \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} w(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) &= p_-(s) \left[a(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) + \frac{u_2(z_1(s) - b)}{u_1 - u_2 z_1(s)} \cdot \left\{ a(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) - u_1 u_2^{-1} (z_1(s))^{-1} a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1}, u_2 u_3 z_1(s)) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

З теореми 1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 1. Спільні генератриси пар функціоналів $\{\tau^+(\tilde{v}_\varepsilon), \gamma_k(\tilde{v}_\varepsilon)\}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k(s, \varepsilon, u_k) &= E \left[e^{-s\tau^+(\tilde{v}_\varepsilon)} u_k^{\gamma_k(\tilde{v}_\varepsilon)}, \tau^+(\tilde{v}_\varepsilon) < \infty \right] = \\ &= (1 - \varepsilon)v_k(s, \varepsilon, u_k) = s^{-1}(1 - \varepsilon)g_+(s, \varepsilon)w_k(s, \varepsilon, u_k) = \\ &= s^{-1}g_+(s, \varepsilon)\tilde{w}_k(s, \varepsilon, u_k), \quad k = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$\begin{aligned} w_1(s, \varepsilon, u_1) &= p_-(s)(z_1(s))^{-1} \left[ba_1(\varepsilon, u_1) + \frac{(z_1(s) - b)u_1}{u_1 - z_1(s)} \cdot \left\{ a_1(\varepsilon, u_1) - a_1(\varepsilon, z_1(s)) \right\} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

$$w_2(s, \varepsilon, u_2) = p_-(s)(z_1(s))^{-1} \left[b\tilde{\Pi}(\varepsilon u_2) + \frac{z_1(s)(z_1(s) - b)}{z_1(s) - \varepsilon} \cdot \left\{ \tilde{\Pi}(z_1(s)u_2) - \varepsilon(z_1(s))^{-1}\tilde{\Pi}(\varepsilon u_2) \right\} \right], \quad (22)$$

$$w_3(s, \varepsilon, u_3) = p_-(s)(z_1(s))^{-1} \left[ba_3(\varepsilon, u_3) + \frac{z_1(s) - b}{1 - z_1(s)} \cdot \left\{ a_3(\varepsilon, u_3) - a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1}, u_3 z_1(s)) \right\} \right]. \quad (23)$$

У випадку $m_1^0 \leq 0$, $z_1(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 0$, тому $w_k^0(\varepsilon, u_k) = \lim_{s \rightarrow 0} w_k(s, \varepsilon, u_k)$ залежить тільки від ε, u_k .

У випадку $m_1^0 > 0$, $z_1(s) \rightarrow z_1(0) = q_- + bp_- < 1$ при $s \rightarrow 0$, тому границя $w_k^+(\varepsilon, u_k) = \lim_{s \rightarrow 0} w_k(s, \varepsilon, u_k)$ крім ε, u_k суттєво залежить від $z_1(0) < 1$.

Лема 3. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (2) при $|m_1^0| < \infty$ та $\sigma_1^2 < \infty$

1) При $m_1^0 = 0$

$$m^0(1) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 1}} m_0(s, \varepsilon) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 1}} \frac{1 - \varepsilon}{s} p_-(s) g_+(s, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma_1^2(1 - b)}. \quad (24)$$

2) При $m_1^0 > 0$

$$m_+(1) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 1}} m_+(s, \varepsilon) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 1}} \frac{1 - \varepsilon}{s} g_+(s, \varepsilon) = \frac{1}{m_1^0}. \quad (25)$$

Зауважимо, що при $m_1^0 = 0$ моменти додатних стрибків $\mu_1 = \tilde{p}'_1(1)$, $\mu_2 = \tilde{p}''_1(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\lambda_1 \mu_1 = \lambda_2(1 - b)^{-1}, \quad (26)$$

$$\sigma_1^2 = k''(1) = \lambda_1 \mu_2 + \frac{\lambda_2 b}{(1 - b)^2} = \lambda_1(1 - b)^{-1}(b\mu_1 + (1 - b)\mu_2).$$

Для скінченного рівня $0 < x < \infty$ лише при $m_1^0 < 0$ в наслідку 7.1 (див. [5]) наведені граничні розподіли $\gamma_k(x)$, $k = \overline{1, 3}$, які називаються функціями банкрутства і визначаються співвідношеннями (7.73). В теорії ризику вважається перша функція банкрутства при $k = 1$ з перестрибком $\gamma_1(u) = \gamma^+(u)$, що називається "дефіцитною", оскільки після банкрутства резерв страховика вичерпаний.

Позначимо $z_1(s) = z_s$ і розглянемо спочатку перестрибкові функціонали через рівень $x = 0$. Нехай

$$W_k^0(s, x, u_k) = p_-^{-1}(s) W_k(s, x, u_k), \quad x \geq 0, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (27)$$

Лема 4. Згідно з (6) спільні генератрисис пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ для довільного знаку m_1^0 визначаються простими співвідношеннями

$$V_k(s, 0, u_k) = s^{-1} p_+(s) W_k(s, 0, u_k) = s^{-1} p_-(s) p_+(s) W_k^0(s, 0, u_k), \quad k = \overline{1, 3}, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} W_1^0(s, 0, u_1) &= bz_s^{-1}A_1(0, u_1) + (z_s - b)z_s^{-1}a_1(z_s, u_1), \\ W_2^0(s, 0, u_2) &= bz_s^{-1}A_2(0, u_2) + (z_s - b)z_s^{-1}a_2(z_s, u_2), \\ W_3^0(s, 0, u_3) &= bz_s^{-1}A_3(0, u_3) + (z_s - b)z_s^{-1}a_3(z_s, u_3). \end{aligned} \quad (29)$$

Доведення. Використовуючи означення $W_k^0(s, x, u_k)$ та співвідношення (6) при $x = 0$, отримаємо (28). Підставивши (15)-(17) в (27) при $x = 0$, отримаємо відповідно перше, друге та третє співвідношення в (29).

Теорема 2. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (2) генератрисою перестрибків мають вигляд

1) Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$\begin{aligned} E[u_1^{\gamma_1(0)}] &= [b\tilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1, u_1)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \\ E[u_2^{\gamma_2(0)}] &= [b\Pi(0) + (1-b)a_2(1, u_2)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \\ E[u_3^{\gamma_3(0)}] &= [b\tilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1, u_3)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

2) Якщо $m_1^0 < 0$, тоді згідно з (27)

$$\begin{aligned} E[u_1^{\gamma_1(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0) [b\tilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1, u_1)], \\ E[u_2^{\gamma_2(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0) [b\Pi(0) + (1-b)a_2(1, u_2)], \\ E[u_3^{\gamma_3(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0) [b\tilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1, u_3)]. \end{aligned} \quad (31)$$

3) Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$\begin{aligned} E[u_1^{\gamma_1(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_- [b\tilde{\Pi}_0^+(u_1) + (z_0 - b)a_1(z_0, u_1)], \\ E[u_2^{\gamma_2(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_- [b\Pi(0) + (z_0 - b)a_2(z_0, u_2)], \\ E[u_3^{\gamma_3(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_- [b\tilde{\Pi}_0^+(u_3) + (z_0 - b)a_3(z_0, u_3)]. \end{aligned} \quad (32)$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $m_1^0 = 0$. Зауважимо, що $z_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 0$. З першого співвідношення (29) леми 4

$$W_1^0(s, 0, u_1) = bz_s^{-1}A_1(0, u_1) + (z_s - b)z_s^{-1}a_1(z_s, u_1),$$

її граничні значення при $s \rightarrow 0, u_1 \rightarrow 1$

$$W_1^0(0, 0, u_1) = b\tilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1, u_1), \quad (33)$$

$$W_1^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \quad (34)$$

Згідно з (28) при $k = \overline{1, 3}$

$$E[e^{-s\tau^+(0)} u_k^{\gamma_k(0)}] = s^{-1} p_-(s) p_+(s) W_k^0(s, 0, u_k). \quad (35)$$

Враховуючи друге співвідношення (12) (див. лему 1) після граничного переходу $s \rightarrow 0$ з (35) випливає:

$$E[u_1^{\gamma_1(0)}] = k_1 W_1^0(0, 0, u_1) \xrightarrow{u_1 \rightarrow 1} 1, \quad (36)$$

отже, $k_1 = (W_1^0(0, 0, 1))^{-1}$.

Згідно (26), перепишемо (34) у виді

$$W_1^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_2. \quad (37)$$

Підставивши в ліву частину (36) співвідношення (33) і (37) отримаємо перше співвідношення (29).

У випадку $k = 2$ з другого співвідношення (29) обчислюється функція W_2^0 з її граничними значеннями $s \rightarrow 0, u_2 \rightarrow 1$

$$W_2^0(0, 0, u_2) = b\Pi(0) + (1 - b)a_2(1, u_2), \quad (38)$$

$$W_2^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1 - b)\mu_1. \quad (39)$$

Як і в попередньому випадку з урахуванням (26) генератриса $\gamma_2(0)$ визначається через (38) і (39) після граничного переходу $s \rightarrow 0$ у (35) при $k = 2$. Таким чином, отримане друге співвідношення (30).

Для випадку $k = 3$, аналогічно з третього співвідношення (29) при граничному переході $s \rightarrow 0, u_3 \rightarrow 1$

$$W_3^0(0, 0, u_3) = b\tilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1 - b)a_3(1, u_3), \quad (40)$$

$$W_2^0(0, 0, 1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1 - b)\mu_1. \quad (41)$$

Із урахуванням (26) генератриса $\gamma_3(0)$ визначається через (40) і (41) після граничного переходу $s \rightarrow 0$ у (35) при $k = 3$. Отже, третє співвідношення в (30) доведено.

Далі встановимо справедливість співвідношень (31) у випадку $m_1^0 < 0$. Зауважимо, що $z_s \rightarrow 1$ при $s \rightarrow 0$.

Здійснивши граничний перехід в (28) при $s \rightarrow 0$, згідно (14), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s \rightarrow 0} V_k(s, 0, u_k) = p_+ p'_-(0) W_k^0(0, 0, u_k), \quad (42)$$

і підставивши в (42) замість $W_k^0(0, 0, u_k)$ при $k = 1, 2, 3$ відповідно (33), (38) і (40) отримаємо (31).

І накінець зупинимось на випадку $m_1^0 > 0$. З (28) при $s \rightarrow 0$, врахувавши (13), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s \rightarrow 0} V_k(s, 0, u_k) = p'_+(0) p_- W_k^0(0, 0, u_k), \quad (43)$$

де $W_k^0(0, 0, u_k)$ визначені в (28). Підставивши в (43) граничні співвідношення отримані із (28) при $s \rightarrow 0$, відповідно при $k = 1, 2, 3$, отримаємо всі співвідношення (32). Теорема доведена.

Після обернення співвідношень (30)–(32) отримаємо

Наслідок 2. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтною (2) розподіли перестрибків мають вигляд

1) Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1 - b)\Pi(r - 1)]k_1, r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r\} &= [b\Pi(0) + (1 - b)\Pi(r)]k_1, r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1 - b)r\Pi_0^+(r)]k_1, r \in \mathbb{Z}_+^0, \end{aligned} \quad (44)$$

де $k_1 = (\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}$.

2) Якщо $m_1^0 < 0$, тоді

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)\Pi(r-1)], r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)\Pi(r)], r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)r\Pi_0^+(r)], r \in \mathbb{Z}_+^0. \end{aligned} \tag{45}$$

3) Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r\} &= z_0^{-1}p_-p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)(z_0^{-r}\tilde{\Pi}(z_0) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r-1} z_0^{-k-1}\Pi_0^+(r-k-1))], r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r\} &= z_0^{-1}p_-p'_+(0)[b\Pi(0) + (z_0 - b)z_0^r\Pi(r)], r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r\} &= p_-p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)\sum_{k=0}^{r-1} z_0^k\Pi_0^+(r)], r \in \mathbb{Z}_+^0. \end{aligned} \tag{46}$$

Доведення. Після обернення співвідношень (30)-(31) відповідно по $u_k, k = \overline{1, 3}$ одержуються розподіли $\gamma_k(0)$ в термінах хвостів розподілу $\Pi(r)$. Отже, (44)-(45) доведено.

При $m_1^0 > 0$ (32) теж можна обернути по $u_k, k = \overline{1, 3}$, але співвідношення для розподілу $\gamma_k(0)$ будуть складнішими, поскільки залежать від $z_1(0) < 1$, зокрема

$$\begin{aligned} a_1(z_0, u_1) &= \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - z_0} (\tilde{p}_1(u_1) - \tilde{p}_1(z_0)), \\ a_2(z_0, u_2) &= \tilde{\Pi}(z_0 u_2), \\ a_3(z_0, u_3) &= \frac{\lambda_1}{1 - z_0} (\tilde{p}_1(u_3) - \tilde{p}_1(z_0 u_3)). \end{aligned} \tag{47}$$

Для обернення (47) по $u_k, k = \overline{1, 3}$ слід здійснити деякі перетворення і звести їх до вигляду

$$\begin{aligned} a_1(z_0, u_1) &= \frac{u_1}{u_1 - z_0} ((1 - z_0)\tilde{\Pi}(z_0) - (1 - u_1)\tilde{\Pi}(u_1)), \\ a_2(z_0, u_2) &= \tilde{\Pi}(z_0 u_2), \\ a_3(z_0, u_3) &= \frac{1}{1 - z_0} ((1 - u_3 z_0)\tilde{\Pi}(u_3 z_0) - (1 - u_3)\tilde{\Pi}(u_3)). \end{aligned} \tag{48}$$

Після обернення (48) одержується згортка геометричного розподілу (з параметром $0 < z_1(0) < 1$) з відповідними послідовностями

$$\begin{aligned} a_r^{(1)} &= z_0^{-r}\tilde{\Pi}(z_0) - \sum_{k=0}^{r-1} (z_0^{-1})^{k+1}\Pi_0^+(r-k-1), r \in \mathbb{Z}_+, \\ a_r^{(2)} &= z_0^r\Pi(r), r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ a_r^{(3)} &= \frac{1 - z_0^r}{1 - z_0}\tilde{\Pi}_0^+(r). \end{aligned} \tag{49}$$

Обернення співвідношень (49) відповідно по u_k , $k = \overline{1, 3}$ визначає лише одну складову розподілу $\gamma_k(0)$, а ще одна складова цього розподілу визначається простим оберненням $A_k(0, u_k)$, $k = \overline{1, 3}$. Таким чином, (46) доведено.

Зауваження 1. *Слід зауважити, що при $m_1^0 < 0$*

$$P\{\gamma_2(0) = 0, \xi^+ > 0\} = bp_+p'_-(0)\Pi(0) > 0$$

за рахунок того, що при перетині рівня $x = 0$ першим додатним стрибком процесу $\xi(t)$ недострибок є нульовим.

Отже, в даній роботі розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси та розподіли $\gamma_k(0)$, ($k = \overline{1, 3}$) для всіх значень $m_1^0 = E\xi(1)$.

1. Герич М. С. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 54-63.
2. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації. – 2012. – 4, №2. – С. 229-240.
3. Герич М. С. Про стрибки через нескінченно віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, № 2. – С. 54-63.
4. Гусак Д. В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
5. Гусак Д. В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – 65 – 459 с.
6. Гусак Д. В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.

Одержано 19.11.2018