УДК 517.9

О. Д. Кічмаренко (Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

СТУПІНЧАСТЕ УСЕРЕДНЕННЯ КЕРОВАНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

For nonlinear controlled functional-differential systems the possibility of applying a step-by-step averaging scheme on a finite interval is substantiated without the condition of asymptotic constancy of control, and an algorithm for constructing appropriate controls for the original and averaged tasks is proposed.

В роботі для нелінійних керованих функціонально-диференціальних систем обгрунтовується можливість застосування схеми ступінчастого усереднення на скінченному проміжку без умови асимптотичної сталості керування, запропоновано алгоритм побудови відповідних керувань вихідної та усередненої задач.

Вступ. Метод усереднення є одним із асимптотичних методів, який широко застосовується для дослідження систем різної природи. Строге обгрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь було отримано в роботах Н.М. Крилова, М.М. Боголюбова [1]. Подальші фундаментальні розробки різних алгоритмів методу усереднення та розширення класів систем, для яких можна застосувати метод, були здійснені в роботах М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського [2], А.М. Самойленка [3], О.М. Філатова, М.М. Хапаева [4, 5] та ін. Обгрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь із запізненням було запропоновано в [6], а також [7, 8], для диференціальних рівнянь із максимумом [9–12]. Узагальнення методу усереднення на функціонально-диференціальні рівняння можна знайти, наприклад, в роботах J. Hale [13, 14] та B.Lehman, S.Weibel [15]. Окремо варто виділити дослідження, пов'язані з розробкою асимптотичних методів для керованих систем. Вперше застосування методу усереднення для дослідження задач оптимального керування було запропоноване М.М. Моісеєвим [16]. Він визначив два основних підходи в цьому напрямку. Перший - усереднення крайової задачі принципу максимуму Л.С. Понтрягіна. При цьому виникають суттєві труднощі пов'язані з розривністю функції правої частини диференціальних рівнянь крайової задачі. Другий підхід принципово інший - він полягає у безпосередньому усередненні рівнянь керованого руху. Цей метод ставить у відповідність точній задачі оптимального керування більш просту задачу оптимального керування, розв'язання якої можна проводити будь-яким чисельним методом. В.О. Плотніковим [17] цей метод був перенесений на загальний випадок вимірних керувань і ґрунтувався на розробці методу усереднення диференціальних включень. Застосування методу усереднення до функціонально-диференціальних систем з асимптотично сталим керуванням було запропоновано в [18]. А в роботі [19] було запропоновано схеми повного усереднення функціонально-диференціальних систем на скінченному проміжку без умови асимптотичної сталості керування.

Мета даної роботи — довести можливість застосування різних алгоритмів усереднення керованих функціонально-диференціальних систем, що грунтуються на схемі часткового ступінчастого усереднення на скінченому проміжку для функціонально-диференціальних систем з керуванням, яке входить нелінійно та без умови асимптотичної сталості керування.

Стаття організована наступним чином: у першій секції ми даємо необхідні позначення і постановку задачі, у другій секції побудовано алгоритми ступінчастого усереднення для періодичного і неперіодичного випадків та сформульовано теореми, які обгрунтовують відповідні алгоритми, а також наведено приклади застосування відповідних схем усереднення, секція 3 присвячена доведенню теорем.

1. Необхідні позначення і постановка задачі. Введемо необхідні в подальшому позначення та функціональні простори. Оберемо та зафіксуємо дійсне число $h \geq 0$. Позначимо через $C_n\left([-h,0];\mathbb{R}^n\right)$ банахів простір неперервних вектор-функцій, визначених на $[-h,0]$, які діють в простір $\mathbb{R}^n$, з рівномірною метрикою $\|\varphi\|_C = \max\limits_{\theta\in[-h;0]} |\varphi(\theta)|$, де $|\cdot|$ – норма в $\mathbb{R}^n$, при цьому через $\|\cdot\|$ будемо позначати норму матриці, узгоджену з нормою вектора.

Нехай $x \in C_n\left([0,\infty);\mathbb{R}^n\right)$, початкова функція $\varphi \in C_n\left([-h,0];\mathbb{R}^n\right)$ при деякому $h \geq 0$. Якщо $x(0) = \varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t)\,,\ t\in[-h,0]\,, \\ x(t)\,, t\geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

є неперервною.

Далі стандартним чином введемо елемент $x_t(\varphi) \in C_n\left([-h,0];\mathbb{R}^n\right)$ для кожного $t \geq 0$ при $\theta\in[-h,0]$ як $x_t(\varphi) = x(t+\theta,\varphi)$. Надалі використовуватимемо x_t замість $x_t(\varphi)$. Якщо $h = 0$, то банахів простір $C_n\left([-h,0];\mathbb{R}^n\right)$ співпадає з $\mathbb{R}^n$, а x_t співпадає з $x(t)$ для кожного $t\in[0,\infty)$.

Будемо говорити, що функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x_t), \quad x(s)=\varphi(s),\, s\in[-h,0],\, \varphi\in C_n \tag{2}$$

на $[0,\infty)$, якщо для кожного $t\geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ з (1) задовольняє співвідношення:

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int\limits_0^t f(s,x_s(\varphi))ds. \tag{3}$$

Розглянемо задачу оптимального керування системою, яка описується функціонально-диференціальним рівнянням наступного вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon\left[f(t,x_t) + A(x(t))\psi(t,u)\right], \quad t>0, \\ &x(t) = \varphi(t),\, t\in[-h,0] \end{aligned} \tag{4}$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \Phi(x(L\varepsilon^{-1},u)) \to \inf, \tag{5}$$

де $t\geq 0$, x – n-вимірний фазовий вектор, $\varepsilon>0$ – малий параметр, $f:\mathbb{R}_+\times C_n\to\mathbb{R}^n$, $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$, $\psi:\mathbb{R}_+\times U\to\mathbb{R}^m$, вектор керування $u(t)\in U$, $U\in comp\left(\mathbb{R}^r\right)$, $L>0$ – деяка константа.

Керування $u(t)$ вважається допустимим для задачі (4)-(5), якщо виконується наступне:

A1) функція $u(t)$ є локально інтегровною при $t \geq 0$;

A2) $u(t) \in U$ для $t \geq 0$.

Через $x(t, u)$ позначимо розв'язок рівняння (4) при фіксованому допустимому керуванні $u(t)$.

Розв'язком задачі (4)-(5) є пара $(x^*(t), u^*(t))$, якщо $u^*(t)$ – допустиме керування та $J_\varepsilon[u^*] = \inf\limits_{u \in U} J_\varepsilon[u]$, а $x^*(t)$ – траєкторія, що відповідає керуванню $u^*(t)$.

При усередненні рівнянь керованого руху типу (4) виникає проблема з усередненням функції $\psi(t, u(t))$, оскільки для довільного керування не можна передбачати існування середнього.

Один із підходів – це перехід до диференціальних включень та обгрунтування методу усереднення для диференціальних включень [20, 21]. Але такий підхід, по-перше, ставить у відповідність вихідній системі систему іншої природи – з множинно-значною правою частиною, і, по-друге, вимагає залучення нового математичного апарату – теорії диференціальних включень та множинно-значних рівнянь. Автори роботи [18] в аналогічній постановці обмежилися асимптотично сталим керуванням, що суттєво звужує вибір функції керування.

Ми пропонуємо різні алгоритми усереднення керованих функціонально-диференціальних систем, які грунтуються на схемі часткового ступінчастого усереднення функції $\psi(t, u(t))$.

2. Схеми часткового ступінчастого усереднення керованих функціонально-диференціальних систем. Нехай далі для (4) виконані наступні умови:

B1) відображення $f(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ неперервне за сукупністю змінних;

B2) відображення $f(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ задовольняює умову Ліпшиця по φ з константою λ, тобто існує константа $\lambda > 0$ така, що для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in C_n$ виконується нерівність

$$|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)| \leq \lambda \|\varphi_1 - \varphi_2\|_C, \quad t \geq 0;$$

B3) існує константа $M > 0$ така, що $|f(t, 0)| \leq M$, $t \geq 0$;

B4) матричнозначна функція $A(x)$ рівномірно обмежена константою M, задовольняє умову Ліпшиця з константою λ;

B5) функція $\psi(t, u)$ неперервна по t і u і обмежена константою M_1.

Розглянемо періодичний та неперіодичний за часом випадки правої частини в (4), розробимо та обгрунтуємо наступні схеми усереднення.

2.1. Періодичний випадок. Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (4), побудуємо у такий спосіб.

Для кожного елемента $\varphi \in C_n$ через $\bar{\varphi} \in C_n$ позначимо такий, що $\bar{\varphi}(t) = \varphi(0)$ при $t \in [-h, 0]$. За відображенням $f(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ будуємо відображення $\tilde{f}(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ наступним чином. Для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ розглянемо елемент $\varphi \in C_n$ такий, що $\varphi(0) = x$. Тоді $\tilde{f}(t, x) = f(t, \bar{\varphi})$. Очевидно, що $\tilde{f}$ є вже скінчено-вимірним відображенням.

Нехай додатково виконані умови:

B6) відображення $f(t, \varphi) : \mathbb{R}_+ \times C_n \to \mathbb{R}^n$ є 2π-періодичним по t;

B7) існує середнє

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(t, x) dt = \overline{f}(x); \tag{6}$$

B8) функція $\psi(t,u)$ є 2π-періодичною по t.

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (4) поставимо у відповідність наступне усереднене рівняння:

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon\left[\,\overline{f}(y(t))+A(y(t))v(t)\right],\quad y(0)=\varphi(0),\tag{7}$$

де $v(t)$ – новий вектор керування, який буде побудовано одним із алгоритмів, описаних нижче.

Алгоритм 1.

Означимо множину

$$V=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,U\right)dt,$$

де інтеграл від множинно-значного відображення розуміємо в сенсі Аумана [23], тобто

$$V=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}z\left(t\right)dt,\;z\left(t\right)\in\psi\left(t,U\right)\right\}.\tag{8}$$

За лемою А.Ф. Філіппова, для довільної вимірної функції $z\left(t\right)$ існує вимірна функція $u(t)$ така, що $z\left(t\right)=\psi\left(t,u\left(t\right)\right)$ і для будь-якої вимірної функції $u\left(t\right)$ функція $z\left(t\right)=\psi\left(t,u\left(t\right)\right)$ вимірна.

Отже,

$$V=\left\{\left.\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,u\left(t\right)\right)dt,\;\right|u\left(t\right)\in U\right\}.\tag{9}$$

Оскільки функція $\psi\left(t,U\right)$ непервна і обмежена константою M, то за теоремою А.А. Ляпунова [22] множина V є опуклою і компактною. Отже, для побудови множини V можна скористатися опорною функцією. Використовуючи властивості інтеграла від множинно-значного відображення, маємо:

$$\begin{gathered}C\left(V,z\right)=\max_{v\in V}\left(v,z\right)=\left(v_0\left(z\right),z\right)=\\=C\left(\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,U\right)dt,\;z\right)=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}C\left(\psi\left(t,U\right),z\right)dt=\\=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\max_{u\in U}\left(\psi\left(t,u\right),\,z\right)dt=\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi\left(t,p\left(t,z\right),\,z\right)dt=\chi\left(z\right).\end{gathered}$$

Тоді

1. Кожному керуванню $v\left(t\right)$ ставимо у відповідність керування $u\left(t\right)$ наступним чином:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}v\left(t\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)}\psi\left(t,u\left(t,\varepsilon\right)\right)dt,\quad i=0,1,...\tag{10}$$

Очевидно, що для заданого керування $v\left(t\right)\in V$ ми маємо:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v\left(t\right)dt = v_i \in V. \tag{11}$$

У відповідності до (9) для довільного $v_i \in V$ існує $u\left(t,\varepsilon\right) \in U$ – вимірне керування таке, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t,u\left(t,\varepsilon\right)\right)dt = v_i.$$

2. Кожному керуванню $u\left(t\right) \in U$ ставимо у відповідність керування $v\left(t\right)$ за допомогою співвідношення (10).

Для заданого керування $u\left(t\right) \in U$ маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t,u\left(t\right)\right)dt = v_i \in V.$$

Керування $v\left(t\right)$ можна задати, наприклад, у вигляді ступінчастої функції:

$$v\left(t\right) = \left\{v_i,\ 2\pi i \le t < 2\pi\left(i+1\right),\ i=0,1,...\right\}. \tag{12}$$

Алгоритм 1 є ефективним, якщо перевірка $v \in V$ не викликає труднощів.

Алгоритм 2.

При наближеному розв'язанні задачі оптимального керування можна обирати $v \in \partial V$ і, значить, задавати як нове керування опорний до множини V вектор $w(\tau) \in \mathrm{R}^m$ ($\|w(\tau)\| = 1$). Тоді

$$v_0(w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \psi(t,p(t,w))dt, \tag{13}$$

де функція $p(t,w)$ визначається із умови:

$$(\psi(t,p(t,w)),w) = \max_{u\in U}(\psi(t,u),w). \tag{14}$$

Нехай, функція $p(t,w)$ визначається однозначно для будь-якого w і для майже всіх $t \in [0,2\pi]$. При цьому множина V є строго опуклою.

Зауважимо, що інтеграли виду (13) і максимум функції (14) необхідно обчислювати і при усередненні крайових задач принципа максимума, при цьому також вважається, що функція $p(t,w)$ знаходиться однозначно.

Системі (4) поставимо у відповідність наступну частково усереднену систему:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\bar{f}\left(y(t)\right) + A\left(y(t)\right)v_0\left(w\right)\right],\ y\left(0\right) = \varphi(0). \tag{15}$$

Установимо відповідність між керуваннями $u(t,\varepsilon)$ і $w(t)$.

1. Кожному керуванню $w(t)$ поставимо у відповідність керування $u(t,\varepsilon)$ наступним чином:

$$\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right)dt = \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w(t)\right)dt.$$

Оскільки $v_0\left(w(t)\right) \in \partial V$ і $V \in conv(R^n)$, то $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w(t)\right)dt = v_i \in V$. Значить, існує керування $u\left(t,\varepsilon\right) \in U$ таке, що $\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right)dt = 2\pi v_i$.

2. Кожному керуванню $u(t,\varepsilon)$ покладемо у відповідність керування $w(t)$ наступним чином:

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \psi\left(t, u(t,\varepsilon)\right)dt = v_i \in V, \tag{16}$$

то за теоремою Каратеодорі [6] існують $v_i^j \in \partial V$, $\lambda_i^j \ge 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j = 1$, $r \le m+1$ такі, що $v_i = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j v_i^j = \sum\limits_{j=1}^{r} \lambda_i^j v_0(w_i^j)$.

Задамо

$$w(t) = \left\{ w_i^j \;\middle|\; \tau_i^{j-1} \le t < \tau_i^j, \quad \tau_i^0 = 2\pi i, \quad \tau_i^j - \tau_i^{j-1} = 2\pi\lambda_i^j, \quad j = \overline{1,r}, \right.$$
$$\left. t \in \left[2\pi i, 2\pi\left(i+1\right)\right), \quad i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v_0\left(w\left(t\right)\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{j-1}}^{\tau_i^j} v_0\left(w_i^j\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{j-1}}^{\tau_i^j} v_i^j dt = \sum_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_i^j = v_i.$$

Теорема 1. *Нехай в області $Q = \{t \ge 0, \ \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\left(\mathbb{R}^r\right)\}$ виконані умови B1)-B8).*

Тоді існують $\varepsilon_0(L) > 0$ і $C > 0$ такі, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і для будь-якого $t \in [0, \ L\varepsilon^{-1}]$ справедливими є наступні твердження :

1) *Розв'язки $x(t,u)$ і $y(t,v)$ задач (4) і (7) визначені на $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$.*

2) *Для будь-якого допустимого керування $u\left(t\right) \in U$ системи (4) існує керування $v\left(t\right)$ системи (7) таке, що*

$$\left|x\left(t\right) - y\left(t\right)\right| \le C\varepsilon, \tag{17}$$

де $x\left(t\right)$ – розв'язок системи (4) з керуванням $u\left(t\right)$, $y\left(t\right)$ – розв'язок системи (7) з керуванням $v\left(t\right)$ і $x\left(0\right) = y\left(0\right) = \varphi(0)$.

3) *Для будь-якого допустимого керування* $v(t) \in V$ *системи* (7) *існує керування* $u(t)$ *системи* (4) *таке, що справедливою є оцінка* (17).

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми 1 безпосередньо слідує оцінка:*

$$h\left(K(T), K^0(T)\right) \le C\varepsilon, \tag{18}$$

де $K(T)$ – замикання множини досяжності системи (4), $K^0(T)$ – множина досяжності системи (7), $T = L\varepsilon^{-1}$, $h(\cdot,\cdot)$ – відстань за Хаусдорфом між множинами.

Аналогічна теорема справедлива для схеми ступінчастого усереднення за алгоритмом 2.

2.2. Неперіодичний випадок. Тепер нехай права частина функціонально-диференціального рівняння (4) є неперіодичною за часом. Аналогічно до періодичного випадку будуємо відображення $\tilde{f}(t,x)$.

Усереднену керовану систему, яка відповідатиме вихідній системі (4), побудуємо у такий спосіб.

Нехай виконана умова

B9) рівномірно за $x \in \mathbb{R}^n$ існує границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t,x)dt = \overline{f}(x)\,. \tag{19}$$

Тоді функціонально-диференціальному рівнянню (4) покладемоо у відповідність наступне усереднене рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\left[\,\overline{f}(y(t)) + A(y(t))v(t)\right], \quad y(0) = \varphi(0), \tag{20}$$

де v – новий вектор керування, який буде побудовано одним із описаних нижче алгоритмів.

Зауважимо, що (20) – це звичайне диференціальне рівняння при допустимому керуванні $v(t)$.

<u>Алгоритм 3.</u>

Відповідність між керуванням $u(t) \in U$ і керуванням $v(t)$ встановимо з урахуванням

$$v \in V = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \psi(s,U)\,ds. \tag{21}$$

В (21) інтеграл від множинно-значного відображення розуміємо в сенсі Аумана [23], а збіжність в сенсі метрики Хаусдорфа.

Нехай збіжність в (21) рівномірна відносно t.

Встановимо відповідність між керуваннями $u(t,\varepsilon)$ і $v(t)$.

1. Керуванню $v(t) \in V$ покладемо у відповідність керування $u(t) \in U$ наступним чином:

а) обчислимо значення $v_i = \frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} v(t)dt \quad i = 0,1,2,\ldots,$ (тут T_0 – довільно обрана константа);

б) будуємо керування $u(t) = \{u_i(t),\ iT_0 \le t < (i+1)T_0\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови:

$$\min_{u(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi\left(t,u(t)\right)dt-v_i\right\|=\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi\left(t,u_i(t)\right)dt-v_i\right\|. \tag{22}$$

Множина точок

$$V_{T_0}^{i}=\left\{\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi(t,u_i(t))dt\,\middle|\,u_i(t)\in U\right\},$$

за теоремою Ляпунова [22], є опуклим компактом, і $\lim\limits_{T\to\infty}h\left(V_{T_0}^{i},V\right)=0$, (згідно з (21)) отже, існує точка цієї множини $\bar{v}_i\in V_{T_0}^{i}$, найближча до v_i, тобто, існує керування $u_i(t)$ в (22) таке, що

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi(t,u_i(t))dt=\bar{v}_i. \tag{23}$$

Керування $u(t)$ із (23) взагалі визначається неоднозначно.

2. Керуванню $u(t)\in U$ поставимо у відповідність $v(t)\in V$ наступним чином:

а) обчислюємо $w_i=\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\varphi\left(t,u_i(t)\right)dt,\quad i=0,1,2,\ldots.$

б) будуємо керування $v(t)=\{v_i,\ iT_0\le t<(i+1)T_0,\ i=0,1,\ldots\}$, де v_i знаходимо із умови

$$\min_{v\in V}\|w_i-v\|=\|w_i-v_i\|. \tag{24}$$

Знаходження керування $u_i(t)$ у (22) можливе не завжди, але умова рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ гарантує існування розв'язку задачі мінімізації (24). Дійсно, із рівномірної обмеженості функції $\psi(t,u)$ випливає інтегральна обмеженість відображення $\psi(t,U)$, а тому опуклість і компактність множини точок $\left\{\frac{1}{T_1}\int\limits_{iT_1}^{(i+1)T_1}\psi(t,u_i)dt\,\middle|\,u_i\in U\right\}$, що є наслідком узагальнення теореми Ляпунова [22]. Отже, існує точка цієї множини, найближча до v_i, тобто існує керування $u_i(t)$ в (22).

Побудуємо алгоритм, коли керування усередненої системи обиратиметься з границі множини V тобто $v\in\partial V$. Точку на границі множини V визначає опорний вектор $w(t)\in R^m,(\|w(t)\|=1)$. Системі (4) поставимо у відповідність наступну частково усереднену систему:

$$\frac{dy}{dt}=\varepsilon\left[\bar{f}\left(y(t)\right)+A\left(y(t)\right)v_0\left(w\right)\right],\ y\left(0\right)=\varphi(0), \tag{25}$$

де $\bar{f}$ визначається з (6).

<u>Алгоритм 4.</u>

<u>Встановимо</u> відповідність між керуваннями $u(t,\varepsilon)$ и $w\left(t\right)$.

1. Кожному керуванню $w\,(t)$ покладемо у відповідність керування $u(t,\varepsilon)$ наступним чином:

а) зафіксуємо $T_0{>}0$. Розіб'ємо інтервал $[0,\,L\varepsilon^{-1}]$ точками $t_i\;=\;iT_0,\quad i\;=\;0,1,...$;

б) обчислюємо $v_i = \frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} v_0(w(t))dt \quad v_i \in V^i_{T_0}, \quad \lim\limits_{T_0\to\infty} V^i_{T_0} = V.$

в) будуємо керування $u(\varepsilon,t)=\{u_i(t),\ t_i{\le}t{<}t_{i+1},\ i=0,1,\ldots\}$, де $u_i(t)$ знаходимо із умови

$$\min_{u(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\psi\left(t,u\left(t\right)\right)dt-v_i\right\|=\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\psi\left(t,u_i\left(t\right)\right)dt-v_i\right\|.$$

2. Кожному керуванню $u(t,\varepsilon)$ покладемо у відповідність керування $w(t)$ наступним чином:

$v_i = \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(t,u(t,\varepsilon))dt, \quad v_i \in V^i_{T_0} = \frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\psi(t,U)dt;$

б) знайдемо $\widetilde{v}_i \in V$ із умови:

$$\min_{v\in V}\|v-v_i\|=\|\widetilde{v}_i-v_i\|\,.$$

За теоремою Каратеодорі [6] існують $v_i^j\in\partial V,\quad \lambda_i^j\ge 0,\quad \sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j=1,\quad r\le m{+}1$ такі, що $\widetilde{v}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_i^j=\sum\limits_{j=1}^{r}\lambda_i^j v_0(w_i^j)$.

3. Задамо керування:

$$w(t)=\left\{w_i^j\ \mid \tau_i^{j-1}\le t\le\tau_i^j,\ \tau_i^0=iT_0,\ \tau_i^j{-}\tau_i^{j-1}=T_0\lambda_i^j,\ j=\overline{1,r},\right.$$

$$\left.t\in\left[iT_0,(i{+}1)\,T_0\right),\ i=0,1,....\right\}$$

Тоді

$$\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}v_0\left(w\left(t\right)\right)dt=\frac{1}{T_0}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j}v_0\left(w_i^j\right)dt=\frac{1}{T_0}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{\tau_i^{i-1}}^{\tau_i^j}v_i^jdt=\sum_{j=1}^{r}\lambda_i^jv_i^j=\tilde{v}_i.$$

Теорема 2. *[19] Нехай в області $Q=\{t{\ge}0,\varphi{\in}C_n,x\in\mathbb{R}^n,u\in U{\subset}comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ виконані умови B1)-B5)і B9).*

Тоді для довільного $\eta>0$ і довільного $L>0$ існує $\varepsilon_0(\eta,L)>0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і для будь-якого $t\in[0,\,L\varepsilon^{-1}]$ справедливими є наступні твердження :

1) *Розв'язки $x(t,u)$ і $y(t,v)$ задач (4) і (20) визначені на $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$.*

2) *Для будь-якого допустимого керування $u\,(t)\in U$ системи (4) існує керування $v\,(t)$ системи (20) таке, що*

$$|x\,(t)-y\,(t)|\le\eta, \tag{26}$$

де $x\,(t)$ *– розв'язок системи* (4) *з керуванням* $u\,(t)$, $y\,(t)$ *– розв'язок системи* (20) *з керуванням* $v\,(t)$ *і* $x\,(0) = y\,(0) = \varphi(0)$.

3) Для будь-якого допустимого керування $v\,(t) \in V$ *системи* (20) *існує керування* $u\,(t)$ *системи* (4) *таке, що справедливою є оцінка* (26).

Аналогічна теорема справедлива для схеми ступінчастого усереднення за алгоритмом 4.

Зауважимо, що оцінки (17) і (26) є рівномірними за всіма u і v та $\varphi(0)$, тобто ε_0 не залежить від керувань u і v та від початкової функції.

Наслідок 2. *При виконанні умов теореми 2 безпосередньо слідує оцінка:*

$$h\left(K(T), K^0(T)\right) \leq C\varepsilon, \tag{27}$$

$K(T)$ – замикання множини досяжності системи (4), $K^0(T)$ – множина досяжності системи (20), $T = L\varepsilon^{-1}$.

Зауваження 1. Побудова керування $v(t)$ за керуванням $u(t)$ у 2-му і 4-му алгоритмах не є конструктивною. Фактично стверджується тільки факт існування за теоремою Каратеодорі такого керування. Однак, такі побудови необхідні лише для доведення теореми, яка обгрунтовує метод усереднення. Для практичного застосування алгоритма необхідно за знайденим керуванням $v(t)$ спрощеної задачі будувати керування $u(t)$ вихідної задачі. Ця частина алгоритмів у всіх випадках є конструктивною.

Зауваження 2. Випадок неоднозначності $v^0(z)$ можливий та відповідає особливим керуванням. Тому цей випадок розглядається окремо.

2.3. Близькість оптимальних значень критеріїв оригінальної та усередненої задач. Розглянемо задачу оптимального керування (4),(5) і задачу оптимального керування усередненою системою, яка побудована за алгоритмом 1 (або 2, 3, 4) з критерієм якості (5) на траєкторіях усередненої системи.

Припустимо, що виконані умови:

С1) функція $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — задовольняє умову Ліпшиця з константою μ;

С2) задача (4),(5) має розв'язок, через u^* позначимо оптимальне керування цієї задачі.

Зауважимо, що відповідна усереднена задача має розв'язок, оскільки, як було показано вище, допустимі керування усередненої задачі обираються із опуклого компакта. Позначимо через v^* — оптимальне керування усередненої задачі, побудованої за алгоритмом 1 або 3 (w^* — оптимальне керування усередненої задачі, побудованої за алгоритмом 2 або 4).

Використовуючи отриманий нами результат про близькість розв'язків вихідної функціонально-диференціальної системи і усередненої, яка описується звичайними диференціальними рівняннями, оцінимо близькість значень термінальних критеріїв якості вихідної і усередненої задач на відповідних керуваннях.

Наступна теорема доводить основний результат — близькість термінальних критеріїв якості вихідної і усередненої задач на відповідних керуваннях.

Теорема 3. *[19] Нехай в області* $Q = \{t \geq 0, \varphi \in \mathrm{C}_n, x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset comp\,(\mathbb{R}^r)\}$ *виконані умови теореми 1 (або теореми 2), умови С1) і С2). Тоді для будь-яких*

$\eta > 0$ і $L > 0$ існує таке $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ і $t_0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ виконуються наступні нерівності:

$$\left|J[u^*] - \bar{J}[v^*]\right| < \eta,$$
$$J[u_{v^*}] - J[u^*] < \eta,$$
$$\bar{J}[v_{u^*}] - \bar{J}[v^*] < \eta,$$

де u_{v^*} — керування системи (4), побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню v^* усередненої задачі, а v_{u^*} — керування усередненої системи, побудоване за алгоритмом 1 або 3, яке відповідає оптимальному керуванню u^* задачі (4), (5).

Зауважимо, по-перше, що для періодичного випадку $\eta = \varepsilon C$, по-друге, що аналогічна теорема може бути доведена для усереднених задач, побудованих за алгоритмом 2 або 4.

2.4. Приклади.

Приклад 1. Нехай $\psi(t, u) = A(t)u$, де

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}sin(t) & a_{12}cos(t) \\ a_{21}cos(t) & a_{22}sin(t) \end{pmatrix}, \quad u \in U = S_1(0).$$

Тоді

$$C(V, z) = C\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(t)S_1(0)dt, z\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C(A(t)S_1(0), z)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C\left(S_1(0), A^T(t)z\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[|a_{11}z_1 sin(t) + a_{21}z_2 cos(t)| + |a_{12}z_1 cos(t) + a_{22}z_2 sin(t)|\right]dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{{a_{11}}^2{z_1}^2 + {a_{21}}^2 z_2)^2} + \sqrt{{a_{12}}^2{z_1}^2 + {a_{22}}^2{z_2}^2}\right].$$

При цьому

$$u_1^*(t, z) = \operatorname{sign}\left[a_{11}z_1 sin(t) + a_{21}z_2 cos(t)\right]$$
$$u_2^*(t, z) = \operatorname{sign}\left[a_{12}z_1 cos(t) + a_{22}z_2 sin(t)\right].$$

Якщо $|a_{11}| = |a_{21}|$ і $|a_{12}| = |a_{22}|$, то $C(V, z) = \frac{2}{\pi}\left(|a_{11}| + |a_{12}|\right)\sqrt{{z_1}^2 + {z_2}^2}$, тобто $V = S_r(0),\ r = \frac{2}{\pi}\left(|a_{11}| + |a_{12}|\right)$

Якщо $a_{21} = a_{12} = 0$, то $C(V, z) = \frac{2}{\pi}(|a_{11}z_1| + |a_{22}z_2|)$, тобто $V = \{|v_1| \leq \frac{2}{\pi}|a_{11}|,\ \ |v_2| \leq \frac{2}{\pi}|a_{22}|\}$.

В цьому випадку зручно скористатися першим алгоритмом.

В загальному випадку перевірка $v \in V$ є важкою, тому скористаємося другим алгоритмом. У цьому випадку

$$v_1^0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[a_{11}sin(t)u_1^*(t, z) + a_{12}cos(t)|u_2^*(t, z)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{{a_{11}}^2 z_1}{\sqrt{{a_{11}}^2 {z_1}^2 + {a_{21}}^2 z_2)^2}} + \frac{{a_{12}}^2 z_1}{\sqrt{{a_{12}}^2 {z_1}^2 + {a_{22}}^2 z_2)^2}}\right],$$

$$v_2^0(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[a_{21}cos(t)u_1^*(t,z) + a_{22}sin(t)|u_2^*(t,z)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{a_{21}^2 z_2}{za_{11}^2 z_1^2 + a_{21}^2 z_2^2} + \frac{a_{22}^2 z_2}{\sqrt{a_{12}^2 z_1^2 + a_{22}^2 z_2^2}}\right]$$

У випадку $a_{21} = a_{12} = 0$ при $z_1 = 0$ і $z_2 = 0$ значення $u_1^*(t,z)$, $u_2^*(t,z)$, визначаються із умов

$$(a_{11}z_1\sin(t) + a_{21}z_2\cos(t))u_1^*(t,z) = \max_{u\in U}(a_{11}z_1\sin(t) + a_{21}z_2\cos(t))u_1$$

$$(a_{12}z_1\cos(t) + a_{22}z_2\sin(t))u_2^*(t,z) = \max_{u\in U}(a_{12}z_1\cos(t) + a_{22}z_2\sin(t))u_1$$

Отже, неоднозначно визначається функція $v^0(z)$.
Приклад 2. Нехай $\psi(t,u) = A(t)u$, де

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(t) & 0 \\ 0 & f(t) \end{pmatrix}, \quad u \in U = S_1(0), \quad f(t) = f^0 + \exp(-t), \quad f^0 > 0.$$

Тоді

$$V_t^{t+T} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t)U\ dt \in conv(R^2),$$

$$C(V_t^{t+T}, z) = C\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} A(t)U\ dt, z\right) = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} C(U, A^T z)\ dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \sqrt{f(t)^2 z_1^2 + f(t)^2 z_2^2}\ dt = ||z||\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)\ dt =$$

$$= ||z||\left(f^0 + \frac{1}{T}(\exp(-t) - \exp(-t-T))\right).$$

Отже,

$$V = \lim_{T\to\infty} V_t^{t+T} = S_{f^0}(0)$$

і

$$h(V_t^{t+T}, V) < \eta \quad \text{при} \quad T > \frac{1}{\eta}. \tag{28}$$

В данному випадку можна використати алгоритми 3 і 4, а крок ступінчастого розбиття T_0 обрати, використовуючи оцінку (28).

3. Доведення теорем. Доведення теореми 1. Для доведення першого твердження теореми зауважимо, що за умовами B1)-B5) функція правої частини вихідного рівняння (4) є непереврною за сукупністю змінних, задовольняє умову Ліпшиця та обмежена, а значить і функція правої частини усередненої системи (7) є обмеженою та задовольняє умову Ліпшиця і умову лінійного росту, а тому при фіксованих допустимомих керуваннях $u(t)$ і $v(t)$ розв'язки задач (4) і (7) існують, єдині і необмежено продовжувані вправо.

Тепер доведемо твердження 2. Нехай $u(t)$ – деяке допустиме керування системи (4), а $x(t)$ – відповідна йому траекторія, визначена для всіх $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, $v(t)$ – керування усередненої системи (7), побудоване за алгоритмом (10), а $y(t)$ – відповідна йому траєкторія.

На $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ перейдемо від (4) і (7) до відповідних інтегральних зображень, враховуючи, що $x(0) = y(0) = \varphi(0)$, отримаємо

$$|x(t) - y(t)| \le \varepsilon \left| \int_0^t [f(s, x_s) - f(s, y(s))]\, ds \right| +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s))\Big]\, ds \right| + \varepsilon \int_0^t \|A(x(s)) - A(y(s))\|\, |\psi(s, u(s))|\, ds +$$

$$+\varepsilon \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right| \le$$

$$\le \varepsilon\lambda \int_0^t \|x_s - y(s)\|_{C_n} ds + \varepsilon \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s))\Big]\, ds \right| +$$
$$+\varepsilon\lambda M_1 \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + \varepsilon \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right|. \tag{29}$$

За означенням

$$\|x_s - y(s)\|_{C_n} = \max_{\theta \in [-h;0]} |x(s+\theta) - y(s)| \le \max_{\theta \in [-h;s]} |x(s+\theta) - y(s)| = \delta(s).$$

З (29), застосовуючи лему Гронуолла-Беллмана, ми отримаємо наступну нерівність:

$$\delta(t) \le \varepsilon\beta e^{\varepsilon\lambda(1+M_1)L}, \tag{30}$$

де

$$\beta = \left| \int_0^t \Big[\tilde{f}(s, y(s)) - \overline{f}(y(s))\Big]\, ds \right| + \left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s) - v(s)]\, ds \right|. \tag{31}$$

Спочатку оцінимо другий доданок в (31) з урахуванням (10).

$$\left| \int_0^t A(y(s))\, [\psi(s, u(s)) - v(s)]\, ds \right| \le$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} A(y(s))\,[\psi(s,u(s))-v(s)]\,ds\right|+\left|\int\limits_{2\pi k}^{t} A(y(s))\,[\psi(s,u(s))-v(s)]\,ds\right|\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} |A(y(s))-A(y(2\pi i))|\,|\psi(s,u(s))-v(s)|\,ds+$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\left|\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} A(y(2\pi i))\,[\psi(s,u(s))-v(s)]\,ds\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{2\pi k}^{t} A(y(s))\,[\psi(s,u(s))-v(s)]\,ds\right|\leq$$

$$\leq 2\lambda M_1\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} |y(s)-(y(2\pi i))|\,ds+4\pi M M_1. \tag{32}$$

Оскільки

$$|y(s)-y(2\pi i)|\leq\varepsilon\int\limits_{2\pi i}^{s}\left|\overline{f}\,(y(s))+A\,(y(s))\,v(s)\right|ds\leq\varepsilon M(1+M_1)(s-2\pi i),$$

то

$$\left|\int\limits_{0}^{t} A(y(s))\,[\psi(s,u(s))-v(s)]\,ds\right|\leq\varepsilon 4\lambda M_1 M(M_1+1)L\pi+4MM_1\pi.$$

Аналогічно

$$\varepsilon\left|\int\limits_{0}^{t}\left[\tilde{f}(s,y(s))-\overline{f}(y(s))\right]ds\right|\leq\varepsilon 4\pi M+2\lambda M(M_1+1)L\pi.$$

Тоді

$$\beta\leq 2M(1+M_1)(2\pi+\lambda L(1+m_1)\pi). \tag{33}$$

При $C=\beta e^{\varepsilon\lambda(1+M_1)L}$ з (30) і (33) отримаємо твердження теореми.

Доведення теореми, яке обгрунтовує алгоритм 2, проводиться аналогічно доведенню теореми 2, отриманого в роботі [19], обгрунтування алгоритму 4 проводиться аналогічно до алгоритму 3. Доведення теореми 3 наведено в [19].

Список використаної літератури

1. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
3. *Самойленко А.М., Мустафаев Х.З.* О принципе усреднения для одного класса систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – К.: Ин-т матем. АН УССР, 1990. – С. 104 – 107.

4. *Филатов О.П., Хапаев М.М.* Усреднение систем дифференциальных включений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 160 с.
5. *Хапаев М.М.* О методе усреднения и некоторых задачах, связанных с усреднением // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 11, № 5. – С. 600 – 608.
6. *Халанай А.* Метод усреднения для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Rev. math. pyres et appl. Acad. RpR. – 1959. – Vol. 4, № 3. – P. 467 – 483.
7. *Фодчук В.И.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра // Укр. Мат. Журн. – 1964. – Т. 16, № 2. – С. 273 – 279.
8. *Фодчук В.И.* О построении асимптотических решений для нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малым параметром // Укр. мат. журн. – 1962. – Т. 14, № 4. – С. 435 – 440.
9. *D. D. Bainov, S. G. Hristova.* Differential equations with maxima, CRC Press Tylor and Francis Group, (2011) 291.
10. *Plotnikov V.A., Kichmarenko O.D.* A note on the averaging method for differential equations with maxima // Iranian Journal of optimization. – 2009. – V.1, № 2. – P. 132-140.
11. *Kichmarenko O.D., Sapozhnikova K.Yu.* Full averaging scheme for differential equation with maximum. // Contemporary Analysis and Applied Mathematics. 2015. – Vol. 3, Iss. 1. P. 113-122.
12. *S.Dashkovskiy, S.Hristova, O.Kichmarenko, K.Sapozhnikova.* Behavior of the solution to the systems with maximum *Proceedings: of 20th IFAC World Congress*, pages 13467-13472, 2017.
13. *J. Hale. Introduction to the functional differential equations.* Springer, 1966.
14. *J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel.* Averaging in infinite dimensions, J. Integral Equations Appl. 2 (1990), No. 4, 463-494.
15. *B.Lehman, S.Weibel.* Fundamental theorems of averaging for functional differential equations. *J.Differ.Equ.*, 152, pages 160-190, 1999.
16. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.– М.: На-ука, 1981.–400 с.
17. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев-Одесса: Лыбидь, 1992. – 188 с.
18. Застосування методу усереднення до задач оптимального керування функціонально-диференціальними рівняннями / Кравець В.І., Ковальчук Т.В., Могильова В.В., Станжицький О.М. //Укр. мат. журн. – 2018. - Т.70, № 2. – С. 205–214.
19. *Кічмаренко О.Д.* Схеми повного усереднення в задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою //Нелінійні коливання. – 2018. - Т.21, № 3. – С. 358–367.
20. *Плотников В.А.* Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложения к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 8. – С. 1427 – 1433.
21. *Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы.– Одесса: Астропринт, 1999.–356 с.
22. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. - М., Наука, гл ред. физ.-мат. лит-ры, 1974. - 85 с.
23. *Aumann R.J.* Integrals of Set-Valued Functions // J. Math. Analysis and Applic. – 1965. – Vol. 12, № 1. – P. 1 – 12.
24. *E.B. Lee, L. Markus. Foundations of optimal control theory.* Krieger Pub Co, 1986.

Одержано 02.03.2018