УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко, О. В. Варцаба (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ АЛГЕБРИ U_2

The complete identities system of algebra U_2 have been constructed in the paper. On the basis of the complete identities system an algorithm for constructing the perfect disjunctive normal form is developed.

У роботі побудована повна система тотожностей алгебри U_2 на основі якої розроблений алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

У роботах [1, 2] розглядаються класи алгебр $P = \{U_n = (A_{n\times n},\ \Omega), n \in N\}$, де $A_{n\times n}$ — множина всіх бінарних квадратних матриць порядку $n \geq 1$, $\Omega = \{\vee, \wedge, T_i, i = 0, 1, \ldots, 7\}$, $x \vee y = \max(x, y)$, $x \wedge y = \min(x, y)$, T_i, $i \in Z_8$ — множина унарних операцій, які у даній роботі задають перестановку елементів матриці, що еквівалентна поворотам зображень кратним 90° відносно осей або центра симетрії квадрата. Показано, що довільні формули $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебри U_n можна привести до диз'юнктивних нормальних форм $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ та $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l$. У цих роботах наведено алгоритм побудови досконалих диз'юнктивних нормальних форм формул алгебр U_k, $k \geq 3$, а також показано, що в цих алгебрах ДНФ формул співпадає з ДДНФ.

В алгебрі U_2 ці формули не є досконалими диз'юнктивними нормальними формами. Метою даної роботи є побудова алгоритму знаходження досконалої диз'юнктивної нормальної форми формул алгебри U_2.

Означення 1. *Зображення A_c^1 (A_c^0), в якому всі пікселі дорівнюють одиниці (нулеві), називаються константою одиниці (константою нуля).*

Для констант A_c^1 і A_c^0 та довільного бінарного зображення x виконуються тотожності:

$$A_c^1 \vee A_c^0 = A_c^1; A_c^1 \wedge A_c^0 = A_c^0; A_c^1 \vee x = A_c^1;$$
$$A_c^0 \vee x = x; A_c^1 \wedge x = x; A_c^0 \wedge x = A_c^0.$$

Означення 2. *Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебри U_2 зберігає константу одиниці (константу нуля), якщо $\varphi(A_c^1, A_c^1, \ldots, A_c^1) = A_c^1$ ($\varphi(A_c^0, A_c^0, \ldots, A_c^0) = A_c^0$).*

З означень операцій алгебри U_n випливає, що всі формули цієї алгебри зберігають константу одиниці (константу нуля), а отже має місце твердження.

Твердження 1. *В алгебрах U_n не існує формул, які задають константу одиниці або константу нуля.*

Означення 3. *Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебри U_n, $n \geq 1$, називається квазінулем, якщо*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} A_c^1, \text{ якщо } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A_c^1, \\ A_c^0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Означення 4. *Формула $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ алгебри U_n, $n \geq 1$, називається квазіодиницею, якщо*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} A_c^0, \text{ якщо } x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A_c^0, \\ A_c^1, \text{ в іншому випадку .} \end{cases}$$

Твердження 2. *Якщо $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квазіодиниця, $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — квазінуль, то для довільної формули $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$ алгебри U_n такої, що $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\} \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ мають місце тотожності:*

$$\varphi \vee \varphi_1 = \varphi_1; \varphi \wedge \varphi_1 = \varphi; \varphi \vee \varphi_2 = \varphi; \varphi \wedge \varphi_2 = \varphi_2.$$

Твердження 2 випливає з означень квазіодиниці і квазінуля та операцій алгебри P.

Означення 5. *Формула φ_1 називається локальною одиницею (локальним нулем) для формули φ_2, якщо $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_2$ ($\varphi_1 \vee \varphi_2 = \varphi_1$).*

Значення формули $\varphi(x) = x^{T_i}$, $i \in Z_8$, на всіх можливих зображеннях A_j^k, $k = 1,\ 2,\ 3$, $j = 1,\ 2,\ \ldots, 6$, алгебри U_2 (k вказує число одиниць зображення A_j, а j – порядковий номер зображення для цього числа k одиниць) представимо у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

A_j^k x^{T_i}	A_1^3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	A_2^3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	A_3^3 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	A_4^3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	A_1^2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	A_2^2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	A_3^2 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	A_4^2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	A_5^2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	A_6^2 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	A_1^1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	A_2^1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	A_3^1 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	A_4^1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
x^{T_0}	A_1^3	A_2^3	A_3^3	A_4^3	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_4^2	A_5^2	A_6^2	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1
x^{T_1}	A_1^3	A_4^3	A_3^3	A_2^3	A_2^2	A_1^2	A_4^2	A_3^2	A_5^2	A_6^2	A_1^1	A_4^1	A_3^1	A_2^1
x^{T_2}	A_4^3	A_1^3	A_2^3	A_3^3	A_4^2	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_6^2	A_5^2	A_4^1	A_1^1	A_2^1	A_3^1
x^{T_3}	A_2^3	A_3^3	A_4^3	A_1^3	A_2^2	A_3^2	A_4^2	A_1^2	A_6^2	A_5^2	A_2^1	A_3^1	A_4^1	A_1^1
x^{T_4}	A_3^3	A_2^3	A_1^3	A_4^3	A_4^2	A_3^2	A_2^2	A_1^2	A_5^2	A_6^2	A_3^1	A_2^1	A_1^1	A_4^1
x^{T_5}	A_2^3	A_1^3	A_4^3	A_3^3	A_3^2	A_2^2	A_1^2	A_4^2	A_6^2	A_5^2	A_2^1	A_1^1	A_4^1	A_3^1
x^{T_6}	A_4^3	A_3^3	A_2^3	A_1^3	A_1^2	A_4^2	A_3^2	A_2^2	A_6^2	A_5^2	A_4^1	A_3^1	A_2^1	A_1^1
x^{T_7}	A_3^3	A_4^3	A_1^3	A_2^3	A_3^2	A_4^2	A_1^2	A_2^2	A_5^2	A_6^2	A_3^1	A_4^1	A_1^1	A_2^1

За допомогою таблиці 1 можна переконатись, що формула $q_1(x) = x^{T_0}x^{T_1} \vee x^{T_0}x^{T_4} \vee x^{T_1}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_5} \vee x^{T_2}x^{T_6} \vee x^{T_3}x^{T_5} \vee x^{T_3}x^{T_6} \vee x^{T_4}x^{T_7}$ є квазіодиницею для формул алгебри U_2.

Для кожної змінної x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ формули $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можливий один з двох випадків:

1) змінна x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, не входить у елементарну кон'юнкцію p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$;

2) змінна x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ може входити у елементарну кон'юнкцію від одного до восьми разів у вигляді множників $x_j^{T_i}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i \in Z_8$.

Домноживши довільну елементарну кон'юнкцію p_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, в яку змінна x входить не більше одного разу, на $q_1(x)$, отримаємо елементарні кон'юнкції, в яких змінна x зустрічається не менше двох разів. Тобто, після виконання операції домноження на квазіодиницю, в елементарних кон'юнкціях кількість множників однієї змінної буде не менше двох. Використовуючи таблицю 1 побудуємо таблицю 2 обчислення значень виразу $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}$, $i_1, i_2 \in Z_8$. Зауважимо, що таких кон'юнкцій для $i_1 \neq i_2$ є двадцять вісім, врахувавши, що $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}} = x^{T_{i_2}}x^{T_{i_1}}$.

Таблиця 2

A_j^k $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}$	A_1^3 $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	A_2^3 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	A_3^3 $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	A_4^3 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	A_1^2 $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$	A_2^2 $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$	A_3^2 $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$	A_4^2 $\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$	A_5^2 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	A_6^2 $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	A_1^1 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	A_2^1 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$	A_3^1 $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	A_4^1 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$
$x^{T_0}x^{T_1}$	A_1^3	A_5^2	A_3^3	A_5^2	A_1^1	A_1^1	A_3^1	A_3^1	A_5^2	A_6^2	A_1^1	A_c^0	A_3^1	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_4}$	A_6^2	A_2^3	A_6^2	A_4^3	A_4^1	A_2^1	A_2^1	A_4^1	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_2^1	A_c^0	A_4^1
$x^{T_1}x^{T_7}$	A_6^2	A_4^3	A_6^2	A_2^3	A_2^1	A_4^1	A_4^1	A_2^1	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_4^1	A_c^0	A_2^1
$x^{T_2}x^{T_5}$	A_5^2	A_1^3	A_5^2	A_3^3	A_3^1	A_1^1	A_1^1	A_3^1	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_1^1	A_c^0	A_3^1
$x^{T_2}x^{T_6}$	A_4^3	A_6^2	A_2^3	A_6^2	A_4^1	A_4^1	A_2^1	A_2^1	A_6^2	A_5^2	A_4^1	A_c^0	A_2^1	A_c^0
$x^{T_3}x^{T_5}$	A_2^3	A_6^2	A_4^3	A_6^2	A_2^1	A_2^1	A_4^1	A_4^1	A_6^2	A_5^2	A_2^1	A_c^0	A_4^1	A_c^0
$x^{T_3}x^{T_6}$	A_5^2	A_3^3	A_5^2	A_1^3	A_1^1	A_3^1	A_3^1	A_1^1	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_3^1	A_c^0	A_1^1
$x^{T_4}x^{T_7}$	A_3^3	A_5^2	A_1^3	A_5^2	A_3^1	A_3^1	A_1^1	A_1^1	A_5^2	A_6^2	A_3^1	A_c^0	A_1^1	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_7}$	A_6^2	A_5^2	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_1}x^{T_4}$	A_6^2	A_5^2	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_2}x^{T_3}$	A_5^2	A_6^2	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_5}x^{T_6}$	A_5^2	A_6^2	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_5}$	A_2^2	A_2^2	A_4^2	A_4^2	A_c^0	A_2^2	A_c^0	A_4^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_6}$	A_1^2	A_3^2	A_3^2	A_1^2	A_1^2	A_c^0	A_3^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_1}x^{T_2}$	A_1^2	A_1^2	A_3^2	A_3^2	A_c^0	A_1^2	A_c^0	A_3^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_1}x^{T_3}$	A_2^2	A_4^2	A_4^2	A_2^2	A_2^2	A_c^0	A_4^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_2}x^{T_4}$	A_4^2	A_2^2	A_2^2	A_4^2	A_4^2	A_c^0	A_2^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_3}x^{T_4}$	A_3^2	A_3^2	A_1^2	A_1^2	A_c^0	A_3^2	A_c^0	A_1^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_5}x^{T_7}$	A_3^2	A_1^2	A_1^2	A_3^2	A_3^2	A_c^0	A_1^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_6}x^{T_7}$	A_4^2	A_4^2	A_2^2	A_2^2	A_c^0	A_4^2	A_c^0	A_2^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_2}$	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_4^2	A_4^1	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_0}x^{T_3}$	A_2^2	A_3^2	A_4^2	A_1^2	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_1}x^{T_5}$	A_2^2	A_1^2	A_4^2	A_3^2	A_2^1	A_1^1	A_4^1	A_3^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_1}x^{T_6}$	A_1^2	A_4^2	A_3^2	A_2^2	A_1^1	A_4^1	A_3^1	A_2^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_2}x^{T_7}$	A_4^2	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_3^1	A_4^1	A_1^1	A_2^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_2}x^{T_3}$	A_5^2	A_6^2	A_5^2	A_6^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_6^2	A_5^2	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_4}x^{T_5}$	A_3^2	A_2^2	A_1^2	A_4^2	A_3^1	A_2^1	A_1^1	A_4^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0
$x^{T_4}x^{T_6}$	A_4^2	A_3^2	A_2^2	A_1^2	A_4^1	A_3^1	A_2^1	A_1^1	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0	A_c^0

Твердження 3. *Тільки елементарні кон'юнкції*

$$r_1^2(x) = x^{T_0}x^{T_1}; r_2^2(x) = x^{T_0}x^{T_4};\ r_3^2(x) = x^{T_1}x^{T_7};\ r_4^2(x) = x^{T_2}x^{T_5};$$

$$r_5^2(x) = x^{T_2}x^{T_6}; r_6^2(x) = x^{T_3}x^{T_5};\ r_7^2(x) = x^{T_3}x^{T_6};\ r_8^2(x) = x^{T_4}x^{T_7}$$

формули $q_1(x)$, *на наборах зображень* $A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_4^1$ *можуть приймати значення відмінне від* A_c^0.

Твердження 3 випливає безпосередньо з таблиці 2. В алгоритмі побудови досконалих диз'юнктивних нормальних форм елементарні кон'юнкції $r_i^2(x), i = 1, 2, \ldots, 8$, не змінюються.

З таблиці 2 отримаємо, що формули $q_1^2(x) = x^{T_0}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_3}$, $q_2^2(x) = x^{T_1}x^{T_4} \vee x^{T_5}x^{T_6}$ є локальними одиницями для елементарних кон'юнкцій $x^{T_0}x^{T_7}$, $x^{T_2}x^{T_3}$, $x^{T_1}x^{T_4}$, $x^{T_5}x^{T_6}$. Домноживши елементарні кон'юнкції $x^{T_0}x^{T_7}$, $x^{T_2}x^{T_3}$ на $q_2^2(x)$, а елементарні кон'юнкції $x^{T_1}x^{T_4}$, $x^{T_5}x^{T_6}$ на $q_1^2(x)$, отримаємо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, кожна з яких має чотири множники.

Твердження 4. *Тільки елементарні кон'юнкції з чотирма множниками $r_1^4(x) = x^{T_0}x^{T_1}x^{T_4}x^{T_7}$ і $r_2^4(x) = x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$ на зображеннях A_5^2 і A_6^2 можуть приймати значення, які відмінні від A_c^0. Інші елементарні кон'юнкції з чотирма і більше множниками на цих зображеннях приймають значення A_c^0.*

Доведення цього твердження випливає з таблиці 2.

Елементарні кон'юнкції з трьома множниками $x^{T_{i_1}}x^{T_{i_2}}x^{T_{i_3}}$, $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, на наборах A_5^2 і A_6^2 можуть приймати значення відмінні від A_c^0 тільки тоді, коли $\{T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3}\} \subset \{T_0, T_1, T_4, T_7\}$ або $\{T_{i_1}, T_{i_2}, T_{i_3}\} \subset \{T_2, T_3, T_5, T_6\}$.

Для цих елементарних кон'юнкцій формули $q_1^2(x)$ і $q_2^2(x)$ є локальними одиницями і домноживши першу групу на $q_2^2(x)$, а другу на $q_1^2(x)$, отримаємо елементарні кон'юнкції, які мають не менше чотирьох множників.

З тверджень 3 і 4 випливає

Твердження 5. *Формула*

$$q_1^4(x) = x^{T_0}x^{T_6}x^{T_1}x^{T_3} \vee x^{T_0}x^{T_6}x^{T_2}x^{T_3} \vee x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee$$

$$\vee x^{T_0}x^{T_5}x^{T_1}x^{T_2} \vee x^{T_0}x^{T_5}x^{T_3}x^{T_4} \vee x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$$

є локальною одиницею для всіх елементарних кон'юнкцій, крім $r_i^2(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ та $r_1^4(x)$ і $r_2^4(x)$.

Домноживши всі елементарні кон'юнкції на їх локальну одиницю отримаємо елементарні кон'юнкції, що містять не менше чотирьох множників.

Твердження 6. *Тільки елементарні кон'юнкції*

$$r_3^4(x) = x^{T_0}x^{T_6}x^{T_1}x^{T_3}; r_4^4(x) = x^{T_0}x^{T_6}x^{T_2}x^{T_4}; r_5^4(x) = x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7};$$

$$r_6^4(x) = x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}; r_7^4(x) = x^{T_0}x^{T_5}x^{T_1}x^{T_2}; r_8^4(x) = x^{T_0}x^{T_5}x^{T_3}x^{T_4};$$

$$r_9^4(x) = x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_6}; r_{10}^4(x) = x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$$

при підстановці зображень A_1^2, A_2^2, A_3^2, A_4^2 можуть приймати значення відмінне від A_c^0. Решта елементарних кон'юнкцій від чотирьох і більше змінних на цих зображеннях приймають значення A_c^0.

Далі при побудові досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгоритм не змінює елементарні кон'юнкції $r_i^2(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, $r_i^4(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

Твердження 7. *Формула*

$$q_1^4(x) = x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_6}x^{T_7} \vee$$

$$\vee x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6} \vee$$

$$\vee x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7} \vee x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$$

є локальною одиницею для всіх елементарних кон'юнкцій, крім $r_i^2(x),\ i = 1, 2, \ldots, 8,$ $r_j^4(x),\ j = 1, 2, \ldots, 10.$

Домноживши елементарні кон'юнкції на їх локальну одиницю, отримаємо елементарні кон'юнкції, які містять не менше шести змінних.

Твердження 8. *Тільки елементарні кон'юнкції, які входять в* $q_1^4(x)$, *на наборах* A_1^3, A_2^3, A_3^3, A_4^3 *можуть приймати значення відмінні від* A_c^0. *Всі інші елементарні кон'юнкції на цих наборах зображень приймають значення* A_c^0.

У результаті виконання алгоритму, описаного вище, отримаємо диз'юнктивну нормальну форму, в якій елементарні кон'юнкції, що складаються з множників $r_i^2(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, $r_i^4(x)$, $i = 1, 2, \ldots, 10$ та восьми множників, які є доданками в формулі $q_1^4(x)$.

Всі ці елементарні кон'юнкції зведені в таблицю 3. Перший стовпчик таблиці показує, яке зображення підставляється в елементарну кон'юнкцію, а перший рядок вказує значення, яке може приймати відповідна елементарна кон'юнкція.

Таблиця 3

	A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1
A_1^3	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$
A_2^3	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$
A_3^3	$x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$
A_4^3	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_6}$
A_1^2	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}$
A_2^2	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}$	$x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7}$
A_3^2	$x^{T_2}x^{T_4}x^{T_5}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_2}x^{T_4}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_3}x^{T_5}x^{T_7}$
A_4^2	$x^{T_3}x^{T_4}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_1}x^{T_2}x^{T_6}x^{T_7}$	$x^{T_0}x^{T_1}x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_3}x^{T_4}x^{T_5}$
A_1^1	$x^{T_0}x^{T_1}$	$x^{T_3}x^{T_5}$	$x^{T_4}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_6}$
A_2^1	$x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_4}$	$x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_7}$
A_3^1	$x^{T_4}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_6}$	$x^{T_0}x^{T_1}$	$x^{T_3}x^{T_5}$
A_4^1	$x^{T_3}x^{T_6}$	$x^{T_1}x^{T_7}$	$x^{T_2}x^{T_5}$	$x^{T_0}x^{T_4}$

Означення 6. *Елементарні кон'юнкції в таблиці 3, які належать одному стовпцю називають однотипними.*

Твердження 9. *Елементарна кон'юнкція в отриманій диз'юнктивній нормальній формі не дорівнює* A_c^0, *якщо її множники є однотипними.*

Твердження 10. *Якщо в елементарній кон'юнкції всі множники однотипні, то для неї існує єдиний набір зображень, на якому вона приймає значення відмінні від* A_c^0.

Всі елементарні кон'юнкції, які складаються з неоднотипних множників можна опустити так, як вони є квазінулями.

Теорема 1. *Диз'юнктивна нормальна форма всі елементарні кон'юнкції якої є однотипними є досконалою диз'юнктивною нормальною формою.*

Доведення. Нехай $f_1 = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$, $f_2 = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l$ диз'юнктивна нормальна форма формул φ_1 і φ_2. Використовуючи алгоритм, приведений вище формули f_1 і f_2 можна привести до виду $\hat{f}_1 = \hat{p}_1 \vee \hat{p}_2 \vee \ldots \vee \hat{p}_{\hat{m}}$, $\hat{f}_2 = \hat{q}_1 \vee \hat{q}_2 \vee \ldots \vee \hat{q}_{\hat{l}}$, де $\hat{p}_i$ і $\hat{q}_j$, $i \in \{1, 2, \ldots, \hat{m}\}$, $j \in \left\{1, 2, \ldots, \hat{l}\right\}$ елементарні кон'юнкції, в яких всі множники є однотипними елементарними кон'юнкціями. Покажемо, що $\hat{f}_1$ і $\hat{f}_2$ досконалі диз'юнктивні нормальні форми формул φ_1 і φ_2. Нехай $\hat{p}_i = r\left(x_{i_1}\right) r\left(x_{i_2}\right) \ldots r\left(x_{i_t}\right)$ однотипна елементарна кон'юнкція. Тоді всі елементарні кон'юнкції $r\left(x_{i_\alpha}\right)$, $\alpha = 1, \ldots, t$ належать одному стовпчику таблиці 3, наприклад, третьому. Тоді відповідні значення першого стовпчика вказують на такі зображення $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_t}$, що $r\left(A_{i_1}\right) r\left(A_{i_2}\right) \ldots r\left(A_{i_t}\right) = A_2^1$, на всіх інших наборах $\hat{p}_i$ буде приймати значення A_c^0. На наборі зображень $\gamma_1 : x_{i_1} = A_{i_1}, x_{i_2} = A_{i_2}, \ldots, x_{i_t} = A_{i_t}$, $x_{i_\beta} = A_c^0$, якщо $x_{i_\beta} \notin p_i$, формула $\hat{f}_1$ приймає значення A_2^1. Формула f_2 на наборі зображень γ_1 прийме значення A_1^0 тільки тоді, коли існує q_j таке, що $q_j \subset p_i$. Задаючи відповідний для q_j набір γ_2 на якому $\hat{f}_2\left(\gamma_2\right) = A_2^1$ тільки тоді коли існує $p_\xi, \xi \in \{1, 2, \ldots, \hat{m}\}$, що $p_\xi \subset q_j$, а тому $p_\xi \subset p_i$ що неможливо, оскільки в досконалій диз'юнктивній нормальній формі ні одна елементарна кон'юнкція не може бути підформулою іншої. Таким чином, якщо $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ то $\forall p_i, i \in \{1, 2, \ldots, m\}\, \exists q_j, j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ така, що $p_i \subset q_j$. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Досконалі диз'юнктивні нормальны форми в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2017. – Вип. 2 (31). – С. 123–128.

Одержано 10.03.2018