УДК 517.9

К. Ю. Сапожнікова (Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ЧАСТКОВЕ УСЕРЕДНЕННЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАКСИМУМОМ

In this work system of differential equations with dynamics depending on the maximum of solutions over prehistory is studied. For such system partly averaged system with maximum is considered and the justification of application of of partly averaging is proved. An example is provided.

В данній роботі вивчається система дифференціальних рівнянь, динаміка яких залежить від максимуму розв'язку на інтервалі передісторії. Для такої системи розглянута відповідна частково усереднена системи з максимумом та обґрунтовано застосування схеми часткового усереднення. Наведено приклад.

1. Вступ. Дифференціальні рівняння з максимумом належать до класу рівнянь із запізненням, де функція запізнення залежить від стану об'єкта у попередній момент часу. Рівняння такого типу виникають при моделюванні економічних [1], технічних [2], біологічних [3], [4] процесів тощо. Через наявність максимуму, у правій частині рівнння, воно є нескінченно-вимірним та нелінійним, навіть коли функція правої частини є лінійною. Деякі методи дослідження таких систем наведені у [5]. Зокрема, у [5] авторами була запропонована схема повного усереднення систем дифференціальних рівняннь з максимумом, особливістю якої є відсутність максимуму в усередненій системі. Для схеми усереднення у роботі [6] пропонується, у ролі усередненої системи, розглядати систему з максумумом. Перевагою такого методу є те, що усереднена система зберігає особливість вихідної задачі, недоліком – складність системи, і як результат, можлива складність при аналізуванні. У випадку, коли вдається підібрати функцію, яка хоча і залежіть від часу але є зручною для інтегрування, застосовується схема часткового усередення. Для систем звичайних дифференціальних рівняннь цей метод запропоновано у роботі [7]. У цій статі ми обґрунтовуємо застосування методу часткового усереднення для систем дифференціальних рівнянь з максимумом та іллюструємо застосування методу на прикладі.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівняннь з макисмумом:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)),\ t \geq 0, \tag{1}$$

та початковою умовою:

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\min_{t \geq 0} g(t), 0], \tag{2}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, функції $g, \gamma \in C([0, \infty); [0, \infty))$ такі, що $g(t) \leq \gamma(t) \leq t$, $t \in [0, \infty)$, початкова функція $\varphi \in C([\min_{t \geq 0} g(t), 0]; \mathbb{R}^n)$.

Нехай існує функція $\widetilde{f}(t, x, y)$ для якої

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(f(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)) - \widetilde{f}(t, x(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} x(\tau)) \right) dt = 0. \tag{3}$$

Поставимо у відповідність системі (1) наступну частково усереднену систему

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \widetilde{f}(t, y(t), \max_{\tau \in [g(t), \gamma(t)]} y(\tau)), \ t \geq 0, \tag{4}$$

з початковою умовою

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [\min_{t \geq 0} g(t), 0]. \tag{5}$$

3. Основний результат. Розглянемо питання близькості розв'язків задач (1), (2) та (4), (5) на скінченному асимптотично великому проміжку часу.

Теорема 1. *Нехай в області $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ виконуються наступні умови:*

1) функції $f(t,x,y)$ та $\widetilde{f}(t,x,y)$ неперервні за t та існують константи $M > 0$ та $\lambda > 0$ такі, що

$$\|f(t,x,y)\| \leq M, \ \left\|\widetilde{f}(t,x,y)\right\| \leq M,$$

$$\|f(t,x,y) - f(t,x',y')\| \leq \lambda(\|x - x'\| + \|y - y'\|),$$
$$\left\|\widetilde{f}(t,x,y) - \widetilde{f}(t,x',y')\right\| \leq \lambda(\|x - x'\| + \|y - y'\|);$$

2) рівномірно по x в області D існує межа (3);

3) функції g, γ рівномірно-неперервні на для всіх $t \in [0, \infty)$;

4) існує $\rho > 0$ таке, що розв'язок $y = y(t)$, $y(0) = x(0) \in D' \subset D$ частково усередненої системи (4) при $t \geq 0$, належить разом з ρ-околом області D, для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тоді для будь-яких $\eta \in (0, \rho)$ та $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L) > 0$, що для будь-яких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ та $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ буде виконуватися наступна оцінка

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \eta, \tag{6}$$

де x – розв'язок задачі (1), (2) на $[0, \infty)$.

Доведення. З умов 1), 2) теореми слідує, що у задач (1), (2) та (4), (5) існують єдині продовжувані при $t \geq 0$ розв'язки допоки x, y належать області D.

Запишемо (1), (2) та (4), (5) відповідно в інтегральній формі

$$x(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t \left(f(s, x(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} x(\tau)) \right) ds, \tag{7}$$

$$y(t) = \varphi(0) + \varepsilon \int_0^t \left(\widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau)) \right) ds. \tag{8}$$

Для $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ оцінимо різницю $x(t) - y(t)$, додавши до правої частини $\pm f(s, y(s), \max\limits_{\tau \in [g(s), \gamma(s)]} y(\tau))$, отримаємо

$$x(t) - y(t) = \varepsilon \int\limits_0^t \Big[f(s, x(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} x(\tau)) - f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \\ + f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \Big] ds.$$

Використовуючи умову 1) теореми маємо

$$\|x(t) - y(t)\| \le \lambda\varepsilon \int\limits_0^t \left(\|x(s) - y(s)\| + \left\| \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} x(\tau) - \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau) \right\| \right) + \\ + \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \right) \right\| ds \le \\ \le 2\varepsilon\lambda \int\limits_0^t \left(\left\| \max_{\sigma \in [0,s]} \|x(\sigma) - y(\sigma)\| \right) \right\| ds + \\ + \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \right) \right\| ds. \tag{9}$$

Для того, щоб отримати оцінку для останнього доданку у (9), розіб'ємо інтервал $[0, L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин точками $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}, i = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ та позначимо $y(t_i) := y_i$, $\max\limits_{\tau \in [g(t_i), \gamma(t_i)]} y(\tau) := \check{y}_i$. Нехай $t \in (t_k, t_{k+1})$ для деякого $k \in [0, m-1]$. Маємо

$$\varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \right) \right\| ds \le \\ \le \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - f(s, y_i, \check{y}_i) \right\| ds + \\ + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau \in [g(s),\gamma(s)]} \check{y}(\tau)) \right\| ds + \\ + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int\limits_0^{t_{i-1}} f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \\ + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int\limits_0^{t_i} f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \Big(f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_k, \check{y}_k) \Big) ds \right\|. \tag{10}$$

Для першого доданку у (10) маємо

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| f(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - f(s, y_i, \check{y}_i) \right\| ds \leq$$

$$\leq \lambda\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\|y(s) - y_i\| + \left\| \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \check{y}_i \right\| \right) ds \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \max_{\sigma\in[0,s]} y(\sigma) - y_i) \right\| ds =$$

$$= 2\varepsilon\lambda \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \max_{\sigma\in[0,s]} \left\| \int_{t_i}^{\sigma} \widetilde{f}(\varsigma, y(\varsigma), \max_{\tau\in[g(\varsigma),\gamma(\varsigma)]} y(\tau)) d\varsigma \right\| ds \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\lambda M \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{\sigma} d\varsigma ds = 2\varepsilon\lambda M \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\sigma - t_i) ds = 2\varepsilon\lambda M \frac{L^2}{m}.$$

Аналогічно отримуємо для другого доданку у (10)

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} \check{y}(\tau)) \right\| ds \leq 2\varepsilon\lambda M \frac{L^2}{m}.$$

З умови 2) теореми слідує, що існує монотоно спадна функція $\mu(t)$, яка прямує до 0 при $t \to \infty$ і така, що в усій області D виконується нерівність

$$\left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \right) \right\| ds \leq t\mu(t) \leq \omega(\varepsilon),$$

де $\omega(\varepsilon) := \sup\limits_{\tau\in[0,L]} \left[\tau\mu(\frac{\tau}{\varepsilon})\right]$, $\tau := \varepsilon t$. Зауважимо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \omega(\varepsilon) = 0$. Таким чином

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_{i-1}} f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} \left\| \int_0^{t_i} f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_i, \check{y}_i) ds \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y_i, \check{y}_i) - \widetilde{f}(s, y_k, \check{y}_k) \right) ds \right\| \leq 2m\omega(\varepsilon).$$

Отже,

$$\varepsilon \left\| \int_0^t \left(f(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) - \widetilde{f}(s, y(s), \max_{\tau\in[g(s),\gamma(s)]} y(\tau)) \right) \right\| ds \leq$$

$$\leq 2\varepsilon\lambda M \frac{L^2}{m} + 2m\omega(\varepsilon) := \widetilde{\omega}(\varepsilon, m).$$

Зауважимо, що при достатньо великому m та достатньо малому ε величина $\widetilde{\omega}$ може бути зроблена як завгодно малою. Таким чином, вважаючи, що $\eta > \widetilde{\omega}(\varepsilon, m)$ маємо

$$\|x(t) - y(t)\| \le \eta. \tag{11}$$

Теорему доведено.

Приклад 1. *Розглянемо наступну задачу Коші*

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \varepsilon(-\tfrac{1}{2}x(t)\sin t - \max_{\tau\in[t-1,t]} x(\tau)), && t \in [0,\infty), \\ &x(t) = 1, && t \in [-1,0], \end{aligned} \tag{12}$$

де $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. *Зауважимо, що функція*

$$f(t, x(t), \max_{\tau\in[t-1,t]} x(\tau)) := -\frac{1}{2}x(t)\sin t - \max_{\tau\in[t-1,t]} x(\tau),$$

неперервна за часом та задовольняє умову Ліпшиця за другим та третім аргументом з константою $\lambda > 1$. *Отже, існує єдиний розв'язок* $x = x(t)$ *задачі (12). Для функції*

$$\widetilde{f}(t, x(t), \max_{\tau\in[t-1,t]} x(\tau)) := -\max_{\tau\in[t-1,t]} x(\tau),$$

виконується умова

$$\lim_{T\to\infty}\left|\frac{1}{T}\int_0^T \Big(f(t,x,y) - \widetilde{f}(t,x,y)\Big)\,dt\right| = \lim_{T\to\infty}\left|\frac{x}{2T}\int_0^T \sin t dt\right| = 0.$$

Тоді, частково усереднена система має вигляд

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = -\varepsilon \max_{\tau\in[t-1,t]} y(\tau)), && t \in [0,\infty), \\ &y(t) = 1, && t \in [-1,0]. \end{aligned} \tag{13}$$

На наступних рисунках 1–4 для різних значень ε *побудовано графіки вхідної (12) та усередененої (13) задач на відповідних проміжках часу.*

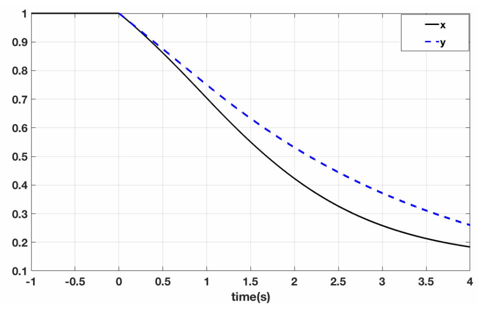

Рис. 1. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.25, L = 1$

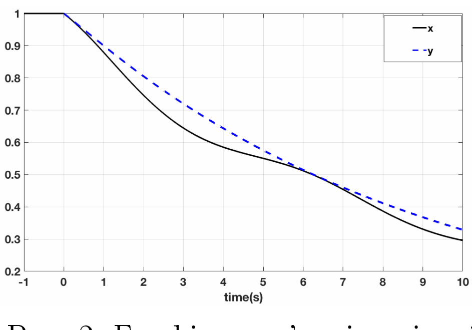

Рис. 2. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.1, L = 1$

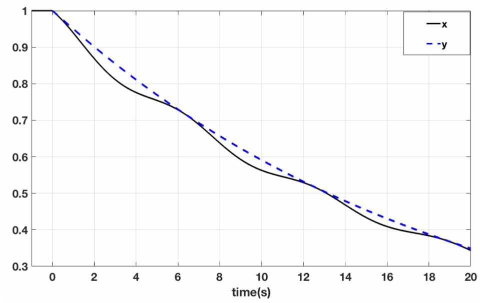

Рис. 3. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.05, L = 1$

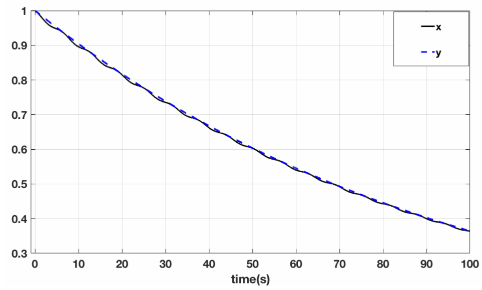

Рис. 4. Графік розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при $\varepsilon = 0.01, L = 1$

У наведеній нижче таблиці представлені оцінки близькості розв'язків вхідної (12) та усередненої (13) задач при різних значеннях параметра ε.

ε	0.25	0.1	0.05	0.01	0.001
$\max\limits_{t\in[0,\frac{L}{\varepsilon}]} \lvert x(t)-y(t)\rvert$	0.1012	0.0700	0.0501	0.0021	0.0002

Отже, розв'язки вихідної (12) та усередненої (13) задач задовольняють оцінку (11).

Список використаної літератури

1. *Appleby J.A.D., Wu H.*, Exponential growth and Gaussian—like fluctuations of solutions of stochastic differential equations with maximum functionals // J. of Physics: Conference series.– 2008.– **138**, №1.– pp.1–25.
2. *Azhmyakov V., Aftab A., Verriest E. I.* On the optimal control of systems evolving with state suprema// InProceedings: 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC).–2016.– pp.3617–3623.
3. *Chan D.M., Kent C.M., Kocić V., Stević S.* A proposal for an application of a max-type difference equation to epilepsy// InProceedings:International Conference on Differential & Difference Equations and Applications.– 2017.– pp.193–210.
4. *Karafyllis I., Jiang Z.-P.* Stability and stabilization of nonlinear systems.- New York:Springer Science & Business Media, 2011.- - 385p.
5. *Bainov D., Hristova S.* Differential Equations with Maxima.- New York: CRC Press, 2011.– 291p.
6. *Plotnikov V.A., Kichmarenko O.D.* A note on the averaging method for differential equations with maxima //Iranian J. of optimization.– 2009.–**2**, №1.– pp.132–140.
7. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления.– К.: Лыбидь.– 1992.– 187с.

Одержано 04.05.2018