УДК 512.44

Г. І. Сливка-Тилищак (Пряшівський ун-т в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»),
М. М. Михасюк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ПРЯМІЙ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА

In this paper the heat equation with random right side are examined. In particular, we give conditions for existence with probability one of the generalized solutions in the case when the right side is a random field from the Orlicz space.

В роботі досліджуються властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча.

1. Вступ. Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами є класичною задачею математичної фізики. Зовсім недавно, кілька вчених досліджували розв'язок рівняння теплопровідності в залежності від різних типів випадкових умов. Роботи Ратанова Н. Е. та ін. [1], Войчінского В. А. [2], Сургайліса Д. і Войчінского В. А. [3] містять важливі результати по даній тематиці. Зокрема, отримані граничні теореми для рівняння теплопровідності і пов'язані з ним так звані рівняння Бюргерса. В праці Козаченка Ю.В. та Леоненко Г. М. досліджується задача Коші для рівняння теплопровідності, коли початкова умова є строго субгауссовим випадковим процесом. У статті Бегін І., Козаченка Ю. та ін. [4] дослуджувалось лінійне рівняння теплопровідності непарного порядку з випадковими початковими умовами. У роботах Козаченка Ю. В. та Вереш К. Й. [5–7] обґрунтовано застосування методу Фур'є для однорідного параболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча, знайдені оцінки розподілу супремуму розв'язку однорідного рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з простору Орліча, а також неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною із просторів Орліча. В роботах [8, 9] отримано умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною.

У монографії [10] можна знайти посилання і на інші роботи, які проводилися в даному напрямку.

В роботі досліджується неоднорідне рівняння теплопровідності на прямій з випадковою правою частиною.

Для даної задачі знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця узагальненого розв'язку, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча.

2. Основний результат. Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності, яке задане на прямій:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \xi(x,t), \tag{1}$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Нехай в умовах даної задачі $\xi(x,t) = \{\xi(x,t), \quad x \in R, \ t > 0\}$ — вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, таке що $\mathbb{E}\xi(x,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,t))^2 < +\infty$. $B(x,t,z,s) = \mathbb{E}\xi(x,t)\xi(y,s)$ — коваріаційна функція випадкового процесу $\xi(x, \ t)$. Нехай $B(x,t,z,s)$ неперервна функція.

Наведемо деякі необхідні дані з теорії інтегралів Фур'є.

Теорема 1. *[11] Нехай функція $f(x)$ є неперервною і абсолютно інтегровною на всій числовій осі і нехай в точці x вона є диференційовною. Тоді*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \lim_{N \to +\infty} \int\limits_{-N}^{N} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Зауваження 1. *Запис v.p. означає "головне значення"інтегралу.*

Як випливає з даної теореми [11] (ст. 90), якщо функція $f(x)$ є диференційовна, неперервною і абсолютно інтегровною на всій числовій осі, то перетворення Фур'є

$$F: \quad f \to \widehat{f} = Ff,$$

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

має обернене перетворення

$$F^{(-1)}: \quad \widehat{f} \to f = F^{(-1)} f,$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Розглянемо

$$G(y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{t} e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y,\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x,\tau) dx,$$

і

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y,t) dy. \tag{3}$$

Нехай $D = \{(x,t): \ x \in [-A,A], \ t \in [0,T]\}$. Введемо позначення

$$u_{a_n}(x,t) = \int\limits_{-a_n}^{+a_n} \cos yx G(y,t) dy. \tag{4}$$

Означення 1. *Будемо називати узагальненим розв'язком рівняння (1) при умові (2) функцію $u(x,t)$, що зображена у вигляді (3), яка є границею рівномірно збіжної з імовірністю одиниця в області D послідовності (4) і задовольняє умову (2).*

Лема 1. *[8] Нехай $\xi(x,t)$ — вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле, для якого при кожному $t>0$ з імовірністю одиниця існує неперервна похідна $\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}$ при всіх $x\in R$ та $t>0$ виконується умова*

$$\int\limits_R \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2(x,t))}dx<\infty, \tag{5}$$

тоді для $\xi(x,t)$ при кожному $t>0$ з імовірністю одиниця існує інтегральне перетворення Фур'є

$$\tilde{\xi}(y,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yx\xi(x,\tau)dx,$$

та справджується рівність

$$\xi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yx\tilde{\xi}(y,\ t)dy.$$

Лема 2. *Нехай $\xi(x,t)$ — вибірково неперервне випадкове поле з простору Орліча із заданою коваріаційною функцією $B(x,t,v,s)$. Нехай для всіх $t>0$, $s>0$ виконуються умова:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|B(x,t,v,s)|\,dxdx\leqslant B<\infty.$$

Тоді з імовірністю одиниця існуює інтеграл Лебега

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yxG(y,t)dy.$$

Доведення. Доведемо існування інтегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yxG(y,t)dy.$$

Для того, щоб даний інтеграл існував з імовірністю одиниця, достатньо щоб існував інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}|G(y,t)|dy.$$

Має місце нерівність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}|G(y,t)|dy \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\mathbb{E}(G(y,t))^2}dy.$$

Розглянемо

$$\mathbb{E}(G(y,t))^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}e^{-a^2y^2(t-s)}\mathbb{E}(\tilde{\xi}(y,\tau)\tilde{\xi}(y,s))d\tau ds.$$

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}(y,\tau)\tilde{\xi}(y,s)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yx\cos yv\mathbb{E}(\xi(x,\tau)\xi(v,s))dxdv =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos yx\cos yv B(x,\tau,v,s)dxdv.$$

$$\left|\mathbb{E}(\tilde{\xi}(y,\tau)\tilde{\xi}(y,s))\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|B(x,t,v,s)|\,dxdv \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot B.$$

Тоді

$$\mathbb{E}(G(y,t))^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot B\int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}e^{-a^2y^2(t-s)}d\tau ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{a^4y^4}B(1-e^{a^2y^2t})^2.$$

Отже, при $y \neq 0$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\mathbb{E}(G(y,t))^2}dy \leqslant \frac{\sqrt{B(4,2,2)}}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(1-e^{-a^2y^2t}\right)}{y^2}dy.$$

Останній інтеграл є збіжним при довільному $y \in R$.

Теорема 2. *[6] Нехай* $\mathbf{R}^k$ *— k-вимірний простір,*

$$d(t,s) = \max_{1\le i\le k}|t_i - s_i|,$$

$T = \{0 \le t_i \le T_i, i = 1,2,\ldots,k\}$, $X_n = \{X_n(t), t\in T\}$, $n = 1,2,\ldots$ *— послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча* $L_U(\Omega)$ *випадкових величин, де для функції* U *виконується* g*-умова. Нехай виконуються умови:*

1) процеси $X_n(t)$ *— сепарабельні;*

2) $X_n(t)\to X(t)$ *при* $n\to\infty$, $t\in T$ *за ймовірністю;*

3) $\sup\limits_{d(t,s)\le h}\sup\limits_{n=\overline{1,\infty}}\|X_n(t)-X_n(s)\|_{L_U}\le\sigma(h)$, *де* $\sigma=\{\sigma(h),h>0\}$ *така неперервна монотонна зростаюча функція, що* $\sigma(h)\to 0$ *коли* $h\to 0$*;*

4) для деякого $\varepsilon>0$

$$\int\limits_0^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ *— функція обернена до* $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ *збігаються за ймовірністю в просторі* $C(T)$.

Теорема 3. *Нехай* $\xi(x,t)$ *— вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, для якого виконуються умови леми* 1 *і леми* 2 *і*

$$\sup_{\substack{|x-x_i|\le h\\|t-t_1|\le h}}\tau_\varphi\left(u_n(x,t)-u_n^{(}x_1,t_1)\right)\le\sigma(h),$$

де $\sigma(h)$ *— неперервна монотонно зростаюча функція, така що* $\sigma(h)\to 0$ *при* $h\to\ 0$*, і виконується умова:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty \tag{6}$$

де $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ *— обернена функція до* $\sigma(\varepsilon)$.

Тоді функція $u(x,t)$*, що зображена у вигляді* (3) *буде узагальненим розв'язком задачі* (1)*–*(2)*.*

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 2.

Приклад 1. *Нехай* $\xi(x,t)$ *— строго орлічеві випадкові поля з простору* $L_U(\Omega)$*. Нехай* $U(x)$ *така функція, що* $U(x)=|x|^p$ *для* $p>2$ *і* $|x|>1$*. Умова* (6) *теореми* 3 *виконується, коли* $\sigma(h)=C|h|^\delta$ *для* $0<\delta\le 1$*. В цьому випадку для* $\varepsilon>0$ *маємо:*

$$I=\int\limits_0^{\varepsilon}U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du<\infty,$$

$$I\le\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{AC^{\frac{1}{\delta}}}{u^{\frac{1}{\delta}}}\cdot\frac{TC^{\frac{1}{\delta}}}{2u^{\frac{1}{\delta}}}\right)^{\frac{1}{2}}du\le D\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{1}{u^{\frac{2}{p\delta}}}du.$$

останній інтеграл є збіжним для $\delta>\frac{2}{p}$*.*

Теорема 4. *Нехай* $\xi(x,t)$ *— вибірково неперервне з імовірністю одиниця строго орлічеве випадкове поле з простору* $L_U(\Omega)$*, де* $U(x)$ *така функція, що* $U(x)=|x|^p$ *для* $p>2$ *і* $|x|>1$*. Нехай виконуються умови леми* 1 *і леми* 2 *і для деякого* $\Theta>0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbb{E}\left|\xi(x,\tau)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx<\Theta.$$

Тоді функція $u(x,t)$, що зображена у вигляді (3) *буде узагальненим розв'язком задачі* (1)–(2).

Доведення. Для того, щоб функція $u(x,t)$, що зображена у вигляді (3) була узагальненим розв'язком задачі (1)–(2), потрібно, щоб інтеграл (4) збігався за ймовірністю до інтегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(yx)\, G(y,t)dy,$$

для $|x| \le A$, $0 \le t \le T$.

Використовуючи теорему 2 і приклад 1, для того, щоб інтеграл (4) збігався за ймовірністю в $C(D)$ потрібно щоб виконувалася умова

$$\|u_{a_n}(x,t) - u_{a_n}(x_1,t_1)\|_{L_U} \le Ch^{\alpha},$$

де

$$u_n(x,t) = \int_{-a_n}^{a_n} \cos(yx)\, G(y,t)dy,$$

$$\|u_{a_n}(x,t) - u_{a_n}(x_1,t_1)\|_{L_U} \le \widehat{C}_{\Delta_1} \left(\mathbb{E}\,|u_{a_n}(x,t) - u_{a_n}(x_1,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи узагальнену нерівність Міньковського, отримаємо

$$\left(\mathbb{E}\,|u_{a_n}(x,t) - u_{a_n}(x_1,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left|\int_{-a_n}^{a_n} \cos(yx)\, G(y,t)dy - \int_{-a_n}^{a_n} \cos(yx_1)\, G(y,t_1)dy\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left|\int_{-a_n}^{a_n} [\cos(yx)\, G(y,t) - \cos(yx_1)\, G(y,t_1)]\, dy\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left|\int_{-a_n}^{a_n} [(\cos(yx) - \cos(yx_1))G(y,t_1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(G(y,t) - G(y,t_1))\cos(yx)]\, dy\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left[|\cos(yx) - \cos(yx_1)| \left(|G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}|G(y,t) - G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] dy.$$

Застосовуючи нерівність $|\sin x| \le |x|^{\alpha}$ для $0 < \alpha \le 1$ при достатньо малому h, $|x - x_1| \le h$ ми отримаємо

$$|\cos(yx) - \cos(yx_1)| \le 2\left|\sin \frac{y(x-x_1)}{2}\right| \le 2^{1-\alpha}|y|^{\alpha}h^{\alpha}.$$

Розглянемо

$$\left(\mathbb{E}|G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathbb{E}\left|\int\limits_0^{t_1} e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\tilde{\xi}(y,\tau)d\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{t_1} e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\left(\mathbb{E}|\tilde{\xi}(y,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

$$\left(\mathbb{E}|\tilde{\xi}(y,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathbb{E}\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(yx)\,\xi(x,\tau)dx\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\mathbb{E}\,|\xi(x,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Theta.$$

Отже,

$$\left(\mathbb{E}|G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{t_1}\Theta e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\Theta^{\frac{1}{2}}\frac{1}{a^2y^2}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right|.$$

Нехай $t_1 < t$, тоді

$$\left(\mathbb{E}|G(y,t)-G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathbb{E}\left|\int\limits_0^{t} e^{-a^2y^2(t-\tau)}\tilde{\xi}(y,\tau)d\tau - \int\limits_0^{t_1} e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\tilde{\xi}(y,\tau)d\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathbb{E}\left|\int\limits_0^{t_1}\left[e^{-a^2y^2(t-\tau)} - e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\right]\tilde{\xi}(y,\tau)d\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a^2y^2(t-\tau)}\tilde{\xi}(y,\tau)d\tau\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_0^{t_1}\left[\left|e^{-a^2y^2(t-\tau)} - e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\right|\left(\mathbb{E}|\tilde{\xi}(y,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_1}^{t} e^{-a^2y^2(t-\tau)}\left(\mathbb{E}|\tilde{\xi}(y,\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\tau\right).$$

З леми 3.21 роботи [10](ст. 227) випливає

$$\left|e^{-a^2y^2(t-\tau)} - e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\right| = \left|e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\right|\left|e^{-a^2y^2(t-t_1)} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\max(1,a^2)y^{2\alpha}|t-t_1|^\alpha \le e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\max(1,a^2)y^{2\alpha}h^\alpha.$$

Отже,

$$\left(\mathbb{E}|G(y,t)-G(y,t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^t e^{-a^2y^2(t_1-\tau)}\max(1,a^2)y^{2\alpha}h^\alpha\Theta^{\frac{1}{2}}d\tau + \int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}\Theta^{\frac{1}{2}}d\tau\right) =$$

$$= \frac{\Theta}{2\pi}\left(\max(1,a^2)y^{2\alpha}h^\alpha\frac{1}{a^2y^2}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right) =$$

$$= \frac{\Theta}{2\pi}\left(\max(1,a^2)\frac{h^\alpha}{a^2y^2(1-\alpha)}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right).$$

Тоді

$$\left(\mathbb{E}\left|u_{a_n}(x,t)-u_{a_n}(x_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\Theta}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2^{1-\alpha}|y^\alpha h^\alpha|\frac{1}{a^2y^2}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +\right.$$

$$+h^\alpha\max(1,a^2)\frac{h^\alpha}{a^2y^2(1-\alpha)}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +$$

$$\left.+\int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right]dy = \frac{\Theta}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[2^{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{a^2y^{2-\alpha}}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +\right.$$

$$\left.+\,h^\alpha\max(1,a^2)\frac{h^\alpha}{a^2y^2(1-\alpha)}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right]dy =$$

$$= \frac{\Theta}{\pi}\left\{\int_0^1\left[2^{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{a^2y^{2-\alpha}}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +\right.\right.$$

$$+h^\alpha\max(1,a^2)\frac{h^\alpha}{a^2y^2(1-\alpha}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +$$

$$\left.+\int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right]dy + \int_1^{+\infty}\left[2^{1-\alpha}\frac{h^\alpha}{a^2y^{2-\alpha}}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| +\right.$$

$$\left.\left.+\,h^\alpha\max(1,a^2)\frac{h^\alpha}{a^2y^2(1-\alpha)}\left|1-e^{-a^2y^2t_1}\right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2y^2(t-\tau)}d\tau\right]dy\right\} =$$

$$= \frac{\Theta}{\pi}\left(I_1+I_2\right).$$

Розглянемо

$$I_1 = \int_0^1 \left[2^{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{a^2 y^{2-\alpha}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right.$$

$$+ h^\alpha \max(1, a^2) \frac{h^\alpha}{a^2 y^2 (1-\alpha)} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| +$$

$$\left. + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy = \frac{2^{1-\alpha} h^\alpha}{a^2} \int_0^1 \frac{1}{y^{2-\alpha}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy +$$

$$+ \frac{h^\alpha}{a^2} \max(1, a^2) \int_0^1 \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy +$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy =$$

$$= \frac{2^{1-\alpha} h^\alpha}{a^2} I_{11} + \frac{h^\alpha}{a^2} \max(1, a^2) I_{12} + I_{13}.$$

Оскільки $\left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| \leq a^2 y^2 t_1 \leq a^2 y^2 T$, то

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \frac{a^2 T}{\alpha + 1}.$$

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \frac{a^2 T}{2\alpha + 1}.$$

Використовуючи $e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \leq 1$, будемо мати

$$I_{13} = \int_0^1 \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy \leq \int_0^1 (t - t_1) dy \leq h \leq h^\alpha T^{1-\alpha}.$$

Отже, ми отримали

$$I_1 \leq h^\alpha \left(\frac{2^{1-\alpha} T}{\alpha + 1} + \frac{\max(1, a^2) T}{2\alpha + 1} + T^{1-\alpha} \right).$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \left[2^{1-\alpha} \frac{h^\alpha}{a^2 y^{2-\alpha}} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy + \right.$$

$$\left. + h^\alpha \max(1, a^2) \frac{h^\alpha}{a^2 y^2 (1-\alpha)} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy =$$

$$= \frac{2^{1-\alpha}h^{\alpha}}{a^2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}} \left|1 - e^{-a^2y^2t_1}\right| dy +$$

$$+ \frac{h^{\alpha}}{a^2} \max(1, a^2) \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} \left|1 - e^{-a^2y^2t_1}\right| dy +$$

$$+ \int\limits_1^{+\infty} \left(\int\limits_{t_1}^{t} e^{-a^2y^2(t-\tau)} d\tau \right) dy =$$

$$\frac{2^{1-\alpha}h^{\alpha}}{a^2} I_{21} + \frac{h^{\alpha}}{a^2} \max(1, a^2) I_{22} + I_{23}.$$

$$I_{21} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}} \left|1 - e^{-a^2y^2t_1}\right| dy \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-\alpha}} dy = \frac{1}{1-\alpha}.$$

$$I_{22} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} \left|1 - e^{-a^2y^2t_1}\right| dy \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2(1-\alpha)}} dy = \frac{1}{1-2\alpha}.$$

$$I_{23} = \int\limits_1^{+\infty} \left(\int\limits_{t_1}^{t} e^{-a^2y^2(t-\tau)} d\tau \right) dy = \frac{1}{a^2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} \left(1 - e^{-a^2y^2(t-t_1)}\right) dy \leq$$

$$\leqslant \frac{h^{\alpha}}{a^2} \max 1, a^2 \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{y^{2(1-\alpha)}} = \frac{h^{\alpha}}{a^2} \max(1, a^2) \frac{1}{1-2\alpha}.$$

Тому

$$I_2 = \left(\frac{2^{1-\alpha}}{a^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{2\max(1, a^2)}{a^2} \right) h^{\alpha}.$$

Тоді для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, будемо мати

$$||u_{a_n}(x,t) - u_{a_n}(x_1, t_1)\|_{L_U} \leq Ch^{\alpha},$$

де

$$C = \frac{\Theta \widehat{C}_{\Delta_1}}{\pi} \left(\frac{2^{1-\alpha}T}{\alpha+1} + \frac{\max(1, a^2)T}{2\alpha+1} + T^{1-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha} + \frac{2max(1, a^2)}{a^2} \right).$$

Згідно теореми 2, умови теореми 4 виконуються для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Список використаної літератури

1. *Ratanov N. E., Shuhov A. G., Suhov Yu. M.* Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation // Acta Appl. Math. – 1991. – 22. – P. 103–115.
2. *Woyczynski W. A.* Burgers-KPZ Turbulence // Lecture Notes in Math. – Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1998. – Vol. 1700.
3. *Surgailis D., Woyczynski W. A.* Limit theorems for the Burgers equation initialized by data withlong-range dependence// Theory and Applications of Long-range Dependence. – Birkhausser, Boston, 2003.

4. *Beghin L., Kozachenko Yu., Orsingher E., Sakhno L.* On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial// Journal of Statistical Physics. – 2007. – Vol. 127, No. 4. – P. 721–739.
5. *Вереш К. Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з просторів Орліча// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика і інформатика. – 2009. – Вип. №18. – С. 39–45.
6. *Kozachenko Yu. V., Veresh K. J.* The heat equation with random initial conditions from Orlicz space// Teor. Imovirnost. Matem. Statist. – 2009. – **80**. – P. 63–75; English transl. in Theory Probab. Mathem. Statist. – 2010. – **80**. – P. 71–84.
7. *Kozachenko Yu. V., Veresh K. J.* Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side // Random Operators and Stochastic Equations. – 2010. – №18. – P. 97–119.
8. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right side// Random Oper. and Stoch. Equ. – 2014. – 22(1). – P. 53–64.
9. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_{\varphi}()\Omega$// Applied Mathematics. – 2014. – 5. – P. 2318–2333.
10. *Козаченко Ю. В., Кучінка К. Й., Сливка-Тилищак Г. І.* Випадкові процеси в задачах матнматичної фізики. Монографія. – Вид-во ТОВ "РІК-У"., 2017. . – 256с.
11. *Будылин А. М.* Ряды и интегралы Фурье. – Санкт-Петербург, 2002. – 137 с.

Одержано 25.01.2018