

**М.О.Перестюк, В.В.Маринець,
В.Л.Рого**

**ЗБІРНИК ЗАДАЧ
З МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
математичних факультетів університетів
та вищих технічних навчальних закладів

Кам'янець-Подільський
“Аксиома”
2012

УДК 53 (075.8)
ББК 22.311я73
П 27

Рецензенти

О.А.Бойчук

– провідний науковий співробітник ІМ НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор

О.В.Капустян

– доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач
кафедри математичного моделювання економічних
систем НТУУ «КПІ»

О.М.Станжицький

– доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач
кафедри загальної математики Київського національ-
ного університету імені Тараса Шевченка

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
математичних факультетів університетів
та вищих технічних навчальних закладів
(лист Міністерства освіти і науки України 1.4./18-Г-2825 від 24.12.2008 р.)*

Перестюк М.О.

П 27 Збірник задач з математичної фізики: навчальний посібник. – Вид. 2-ге виправлене і доповнене / М.О.Перестюк, В.В.Маринець, В.Л.Рего. – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.

ISBN 978-966-496-213-8

Збірник містить задачі на виведення рівнянь і побудову математичних моделей, а також на застосування різних методів розв'язування основних задач математичної фізики. Даються теоретичні відомості по основних розділах курсу з ілюстративними прикладами, поряд із відповідями до задач часто наводяться вказівки.

Навчальний посібник призначений для студентів та аспірантів університетів та технічних вузів.

Табл. 3. Рис. 49. Бібліогр. 15 назв.

УДК 53 (075.8)
ББК 22.311я73

ISBN 978-966-496-213-8

© М.О.Перестюк,
В.В.Маринець,
В.Л.Рего, 2012

© “Аксіома”, видання, 2012

ЗМІСТ

Передмова	5
Розділ I. Класифікація та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку	6
§1. Основні поняття та означення теорії ДРЧП	6
§2. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними	8
§3. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними	15
Варіанти індивідуальних завдань до розділу I	19
Розділ II. Рівняння гіперболічного типу. Метод характеристик (метод поширення хвиль)	28
§1. Фізичні процеси, які приводять до ДРЧП гіперболічного типу	28
§2. Інтегрування ДРЧП з двома незалежними змінними	30
§3. Задача Коші для рівнянь з двома незалежними змінними	35
§4. Рівняння з багатьма незалежними змінними	41
§5. Задача Коші для рівняння коливань струни	42
§6. Задачі Коші для хвильових рівнянь на площині та в просторі	47
Варіанти індивідуальних завдань до розділу II	55
Розділ III. Мішані задачі для рівнянь гіперболічного типу. Методи характеристик та відокремлення змінних	61
§1. Постановка мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу	61
§2. Метод характеристик побудови розв'язку мішаних задач для напівнескінченої струни	63
§3. Геометричне зображення процесу вільних коливань напівнескінченої струни	68
§4. Метод характеристик побудови розв'язку мішаних задач для скінченної струни	74
§5. Метод відокремлення змінних	78
Варіанти індивідуальних завдань до розділу III	91
Розділ IV. Рівняння параболічного типу	105
§1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь параболічного типу. Постановка мішаних задач	105
§2. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) побудови розв'язків мішаних задач для рівнянь параболічного типу	109
§3. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності	119
§4. Мішані задачі для напівнескінченного стержня з теплоізолюваною бічною поверхнею	122
Варіанти індивідуальних завдань до розділу IV	126

Розділ V. Рівняння еліптичного типу. Теорія потенціалу	141
§1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь еліптичного типу. Постановка крайових задач	141
§2. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод Фур'є. Метод власних функцій	144
§3. Крайові задачі для кругових областей. Метод відокремлення змінних	157
§4. Функція Гріна оператора Лапласа	166
§5. Теорія потенціалу	172
Варіанти індивідуальних завдань до розділу V	179
Відповіді до розділу I	192
Відповіді до розділу II	195
Відповіді до розділу III	207
Відповіді до розділу IV	215
Відповіді до розділу V	222
Додаток	236
I. Різні ортогональні системи координат	236
II. Основні закони фізики, які використовуються при виведенні рівнянь	241
III. Деякі спеціальні функції	244
Література	249

ПЕРЕДМОВА

Даний збірник задач написаний на основі практичних та лабораторних занять з курсу "Рівняння математичної фізики", які проводились авторами на протязі багатьох років на математичних та фізичних факультетах національних університетів.

Навчальний посібник містить приклади та задачі, пов'язані з диференціальними рівняннями з частинними похідними, в обсязі програми нормативного курсу для студентів механіко-математичних факультетів університетів і технічних вищих навчальних закладів з поглибленим вивченням математики. Він є практичним забезпеченням підручника М.О.Перестюка та В.В.Маринця "Теорія рівнянь математичної фізики" [11].

Збірник задач складається із п'яти розділів згідно з типами рівнянь та методами розв'язування відповідних задач.

До кожного з розділів, які розбиті на параграфи, подані короткі теоретичні відомості, розв'язані типові задачі, наведені задачі для аудиторної роботи і по 30 варіантів індивідуальних завдань. До значного числа задач подані детальні вказівки щодо їх розв'язування, наведені відповіді. Усе це спрямоване на те, щоб дати можливість студентам шляхом самостійної роботи досягнути елементарних технічних навиків розв'язування задач з основних розділів теорії рівнянь математичної фізики. При цьому збірник не претендує на охоплення всіх методів, які використовуються в математичній фізиці. У ньому, наприклад, не розглядаються операційний метод, варіаційні, асимптотичні і різницеві методи, застосування інтегральних рівнянь тощо. Однак сподіваємося, що даний збірник буде корисним не тільки для студентів вузів, але також для інженерів і співробітників науково-дослідних закладів.

РОЗДІЛ І

КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

§1. Основні поняття та означення теорії ДРЧП

Означення 1. Співвідношення між незалежними змінними x_1, x_2, \dots, x_n , невідомою функцією $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та її частинними похідними називається **диференціальним рівнянням із частинними похідними** (ДРЧП).

Означення 2. ДРЧП називається **рівнянням m -го порядку**, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну m -го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП m -го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}\right) = 0, \quad (1)$$

де $\sum_{i=1}^n k_i = m$, F – задана функція своїх аргументів, а

$$u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}} = \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Означення 3. Всяка m разів неперервно диференційовна в області задання рівняння (1) функція $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка після підстановки її в дане рівняння замість невідомої функції, а її частинних похідних – замість відповідних частинних похідних невідомої функції, перетворює його в тотожність, називається **розв'язком** ДРЧП (1).

Означення 4. ДРЧП називається **лінійним**, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Лінійне ДРЧП другого порядку запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i} + c(x_1, x_2, \dots, x_n) u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Рівняння (2) називається **лінійним однорідним**, якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, і **лінійним неоднорідним** у протилежному випадку. Якщо всі коефіцієнти a_{ij} , b_i , c є сталими, то ДРЧП (2) називається **лінійним зі сталими коефіцієнтами**.

Означення 5. ДРЧП називається **квазілінійним**, якщо воно є лінійним відносно старших похідних.

Квазілінійне ДРЧП другого порядку має вигляд

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) u_{x_i x_j} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}).$$

Зауважимо, що не всі рівності, в які входять частинні похідні, є ДРЧП.

Так, наприклад, рівність $\sin^2(u_{xx} + u_{yy}) + \cos^2(u_{xx} + u_{yy}) = 1$ є тотожністю, а тому не є ДРЧП. Рівність $yu_y - \frac{\partial}{\partial y}(yu) + u^2(x, y) = 2$ також не є ДРЧП, оскільки після спрощення дістанемо алгебраїчне рівняння $u^2 - u(x, y) = 2$.

❖ З'ясувати, чи є наведені нижче рівності диференціальними рівняннями з частинними похідними та дати повне їх визначення:

1. $2(\sin 2u_{xy})^{-1} \cdot u_{xy^2} - \frac{\partial}{\partial y} \ln(\operatorname{tg} u_{xy}) + 3xyu(x, y) - 5 = 0.$

2. $u_{x^2y^3} + 4(u_{x^3})^{10} \cdot u(x, y) - x^3y = 0.$

3. $u_{xy^2z} + 3u_{x^3z^2} - xyu_z + 3z = 0, \quad u = u(x, y, z).$

4. $\operatorname{tg}^2 u_{x^3} - (\cos u_{x^3})^{-2} + 5u(x, y) - \operatorname{tg}(xy) + 1 = 0.$

5. $\ln|u_{x^2z} \cdot u_z| - \ln|u_{x^2y}| + 3u_x - 5z = 0, \quad u = u(x, y, z).$

6. $u_{x^2y^2} - 5u_{x^6} - 3x^8u(x, y) = 0.$

7. $2\sin^2(0,5u_{xx}) + \cos u_{xx} + 3yu(x, y) = 0.$

8. $u_{xyz}^2 + 5xu_z - 6u(x, y, z) = 0.$

9. $e^{u_x} \cdot u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}(e^{u_x} + u^2) + (2u_y + 5)u(x, y) = 4u_{xy}.$

10. $u_{x^2y^5z} - 4u_{x^3y^3} - u_{z^4} + 9zu(x, y, z) = 1.$

11. $u_x u_{x^3y^2} - 8u_{xy^2}^4 - \ln|u(x, y)| = 0.$

12. $\operatorname{cth}^2 u_{xy} - \operatorname{cosech}^2 u_{xy} + u^2(x, y) = 2.$

13. $u_{xz^4} - e^{u_{y^2}} + u_{x^2}^4 = 3xyz - 5u(x, y, z).$

14. $\cos(u_x + u_y)\cos(u_x - u_y) - \cos^2 u_y + \sin^2 u_x = 3 \ln|u(x, y)|.$

15. $u_{xy^2z} + \ln(u_{x^2}^4 + 1) - 5xzu(x, y, z) = 0.$

16. $u_{y^2z^3} + 3u_{xz} - 4u(x, y, z) - yz = 0.$

17. $u_{x_1^2x_3^4} + 2x_2x_3u_{x_4^7} + u_{x_2x_3} \cdot u_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.$

18. $(4\cos^3 u_x - 3\cos u_x)u_{xy} - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\sin 3u_x + 4\operatorname{tg} u(x, y) = \sin x.$

19. $u_{x_1x_2x_3x_4} - u_{x_1^5} + 2x_3x_4u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$

20. $u_{x^3z}^2 + 3xu_{yz} - 4zu(x, y, z) = 0.$

21. $x^2u_x e^{xu} - \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xu}) + 5yu(x, y) = 0.$

22. $u_{x^3z} - \ln(u^6 + 2) + 5xyu(x, y, z) = \operatorname{sh}(yz).$

§2. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку вигляду

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (3)$$

де $a_{ij}(x, y)$, $i, j = 1, 2$ – неперервні функції в деякій області \mathbf{G} площини xOy .

Здійсимо в рівнянні (3) заміну незалежних змінних за формулами

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (4)$$

які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (ξ, η) і (x, y) відповідних областей, тобто з (4) x і y визначаються як однозначні функції незалежних змінних ξ та η : $x = \Phi(\xi, \eta)$, $y = \Psi(\xi, \eta)$. Вважатимемо, що функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ при $(x, y) \in \mathbf{G}$ є неперервними разом з частинними похідними до другого порядку включно.

Введемо позначення: $u(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)) = U(\xi, \eta)$. Тоді

$$\begin{aligned} u_x &= \xi_x U_\xi + \eta_x U_\eta, & u_y &= \xi_y U_\xi + \eta_y U_\eta, \\ u_{xx} &= \xi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x U_{\xi\eta} + \eta_x^2 U_{\eta\eta} + \xi_{xx} U_\xi + \eta_{xx} U_\eta, \\ u_{yy} &= \xi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y U_{\xi\eta} + \eta_y^2 U_{\eta\eta} + \xi_{yy} U_\xi + \eta_{yy} U_\eta, \\ u_{xy} &= \xi_x \xi_y U_{\xi\xi} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) U_{\xi\eta} + \eta_x \eta_y U_{\eta\eta} + \xi_{xy} U_\xi + \eta_{xy} U_\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши вирази для похідних (5) у (2), одержимо рівняння вигляду

$$\alpha_{11}(\xi, \eta)U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}(\xi, \eta)U_{\xi\eta} + \alpha_{22}(\xi, \eta)U_{\eta\eta} = F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \xi_x^2 a_{11} + 2\xi_x \xi_y a_{12} + \xi_y^2 a_{22}, \\ \alpha_{22} &= \eta_x^2 a_{11} + 2\eta_x \eta_y a_{12} + \eta_y^2 a_{22}, \\ \alpha_{12} &= \xi_x \eta_x a_{11} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) a_{12} + \xi_y \eta_y a_{22}. \end{aligned} \quad (7)$$

Зауважимо, що часто формули (5) записують, замінюючи $U(\xi, \eta)$ на $u(\xi, \eta)$. Однак при цьому символи u_ξ і u_η в правій частині рівностей (5) слід розуміти як похідні вздовж ліній відповідно $\eta = \text{const}$ і $\xi = \text{const}$:

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi} \left(u \Big|_{\eta=\text{const}} \right), \quad u_\eta = \frac{d}{d\eta} \left(u \Big|_{\xi=\text{const}} \right)$$

тобто як U_ξ і U_η , а не як частинні похідні по ξ або по η від функції $u(x, y)$, оскільки вирази u_ξ і u_η не мають змісту, поки не вибрана друга координата η або ξ .

Із (7) очевидно: якщо функція $z = \varphi(x, y)$ є деяким частинним розв'язком рівняння

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0, \quad (8)$$

то в (6) коефіцієнт $\alpha_{11} = 0$.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0, \quad (9)$$

яке називається *характеристичним* для рівняння (3), а його інтеграли – *характеристиками*.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо $z = \varphi(x, y)$ – деякий розв’язок рівняння (8), тоді співвідношення $C = \varphi(x, y)$ є загальним інтегралом рівняння (9). Має силу і обернене твердження.

Нехай $a_{11} \neq 0$ ($a_{22} \neq 0$). Тоді із (9) маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}, \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}} \right), \quad (10)$$

де $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

Означення. Рівняння (3) в області $\mathbf{D} \subset \mathbf{G}$ називається рівнянням:

а) *гіперболічного типу*, якщо дискримінант $\Delta > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$;

б) *параболічного типу*, якщо $\Delta = 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$;

в) *еліптичного типу*, якщо $\Delta < 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості тотожності

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\mathfrak{J}^2,$$

де $\mathfrak{J} \equiv \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$ – якобіан функцій $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$.

Згідно наших припущень $\mathfrak{J} \neq 0$ в області \mathbf{G} , отже, тип ДРЧП (3) є інваріантом відносно перетворення незалежних змінних (4).

Рівняння гіперболічного типу. В цьому випадку $\Delta > 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$, а отже, із рівнянь (10) одержуємо дві дійсні різні сім’ї характеристик $C_1 = \varphi(x, y)$, $C_2 = \psi(x, y)$. Легко показати, що при цьому $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ є незалежними, тобто $\mathfrak{J} \neq 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$. Покладемо $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Тоді в рівнянні (6) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, тобто матимемо

$$U_{\xi\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0. \quad (11)$$

Рівняння (11) є першою канонічною формою ДРЧП гіперболічного типу. Покладаючи в (11) $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$, одержимо другу канонічну форму рівнянь гіперболічного типу:

$$\bar{U}_{\alpha\alpha} - \bar{U}_{\beta\beta} = F_1(\alpha, \beta, \bar{U}, \bar{U}_\alpha, \bar{U}_\beta), \quad U\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \bar{U}(\alpha, \beta).$$

Рівняння параболічного типу. У випадку ДРЧП параболічного типу $\Delta = 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$, і рівняння (9) має один загальний інтеграл

$C = \varphi(x, y)$. Покладемо $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, де $\eta(x, y)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, незалежна від $\varphi(x, y)$. Тоді згідно (7)

$$\alpha_{11} = \left(\sqrt{a_{11}} \xi_x + \sqrt{a_{22}} \xi_y \right)^2 \equiv 0,$$

а отже

$$\alpha_{12} = \left(\sqrt{a_{11}} \xi_x + \sqrt{a_{22}} \xi_y \right) \left(\sqrt{a_{11}} \eta_x + \sqrt{a_{22}} \eta_y \right) \equiv 0.$$

Таким чином, із (6) одержуємо:

$$U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) є канонічною формою ДРЧП параболічного типу.

Рівняння еліптичного типу. У випадку ДРЧП еліптичного типу $\Delta < 0$ для всіх $(x, y) \in \mathbf{D}$, і відповідне характеристичне рівняння (9) має дві комплексно спряжені сім'ї характеристик $C_1 = \rho(x, y) + i\sigma(x, y)$, $C_2 = \rho(x, y) - i\sigma(x, y)$, причому функції $\rho(x, y)$ і $\sigma(x, y)$ при $(x, y) \in \mathbf{D}$ є незалежними. Введемо нові незалежні змінні (4) наступним чином: $\xi = \rho(x, y)$, $\eta = \sigma(x, y)$. В результаті такої підстановки одержимо: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ і $\alpha_{12} = 0$. Таким чином, ДРЧП (6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{11} \neq 0. \quad (13)$$

Рівняння (13) є канонічною формою ДРЧП еліптичного типу.

Зауваження 1. ДРЧП (3) в різних областях площини xOy може належати до різних типів.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (8) $a_{11} \neq 0$ ($a_{22} \neq 0$), то його можна записати у вигляді

$$\left(\begin{aligned} & [a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y] \cdot [a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y] = 0, \\ & \left([a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x] \cdot [a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x] = 0 \right), \end{aligned} \right)$$

тобто

$$\left(\begin{aligned} & a_{11}z_x + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_y = 0, \quad a_{11}z_x + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_y = 0, \\ & (a_{22}z_y + (a_{12} + \sqrt{\Delta})z_x = 0, \quad a_{22}z_y + (a_{12} - \sqrt{\Delta})z_x = 0). \end{aligned} \right)$$

У процесі інтегрування одержаних лінійних рівнянь із частинними похідними першого порядку приходимо до рівнянь (10).

Зауваження 3. Якщо розглядати лінійні ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тоді канонічні форми будуть також лінійними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. В цьому випадку одержані рівняння вдається спростити шляхом введення нової невідомої функції $V(\xi, \eta)$ згідно з формулою

$$U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot V(\xi, \eta),$$

де λ, μ – сталі, які вибираються таким чином, щоб коефіцієнти при V_ξ і V_η (у випадку рівнянь гіперболічного та еліптичного типів) або при V_η і V (у випадку рівнянь параболічного типу) перетворилися в нуль. Таким чином, у випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо наступні канонічні форми:

$$\left. \begin{aligned} V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \text{ – еліптичний тип;} \\ V_{\eta\eta} + b_1 V_\xi &= g(\xi, \eta) \text{ – параболічний тип;} \\ \left. \begin{aligned} V_{\xi\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \\ V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \gamma V &= g(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \text{ – гіперболічний тип.} \end{aligned}$$

ПРИКЛАДИ. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

$$1. u_{xx} - yu_{yy} + u(x, y) = 0, \quad y \neq 0. \quad (14)$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення типу ДРЧП складемо дискримінант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y.$$

а) Нехай $y > 0$. Тоді рівняння (14) є рівнянням гіперболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві дійсні різні сім'ї характеристик

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y}.$$

Характеристиками є праві і ліві вітки сім'ї парабол $y = 0,25(x - C)^2$ (рис. 1). Вершини парабол, які лежать на осі Ox , не належать характеристикам, тому що в цих точках $\Delta = 0$ ($y = 0$ – лінія параболічності).

Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y}.$$

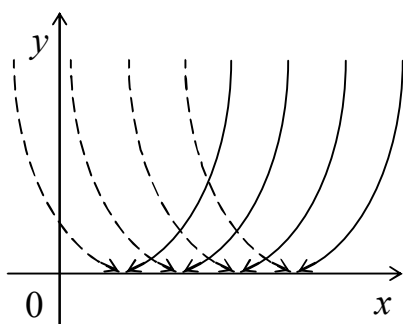


Рис. 1

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}(U_\eta - U_\xi),$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = y^{-1}(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}) - (2y^{3/2})^{-1}(U_\eta - U_\xi).$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (14), одержимо:

$$U_{\xi\eta} = 0,5(\eta - \xi)^{-1}(U_\xi - U_\eta) - 0,25U(\xi, \eta). \quad (15)$$

Зведемо рівняння (14) до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього вводимо нові незалежні змінні

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta.$$

Тоді

$$U_\xi = \bar{U}_\alpha + \bar{U}_\beta, \quad U_\eta = \bar{U}_\alpha - \bar{U}_\beta, \quad U_{\xi\eta} = \bar{U}_{\alpha\alpha} - \bar{U}_{\beta\beta},$$

а отже, із (15) матимемо

$$\bar{U}_{\alpha\alpha} - \bar{U}_{\beta\beta} = -\beta^{-1}\bar{U}_\beta - 0,25\bar{U}(\alpha,\beta).$$

б) В області $y < 0$ ДРЧП (14) є рівнянням еліптичного типу. Маємо дві комплексно спряжені сім'ї характеристик: $C_3 = x - 2i\sqrt{-y}$, $C_4 = x + 2i\sqrt{-y}$.

Покладемо $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$. Тоді

$$u_x = U_\xi, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = -y^{-1}U_{\eta\eta} - \left[2(-y)^{3/2}\right]^{-1}U_\eta.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (14), одержимо

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -\eta^{-1}U_\eta - U(\xi,\eta).$$

$$\mathbf{2.} \quad e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + \ln[u^2(x,y) + 1] = 0. \quad (16)$$

Розв'язання. Рівняння (16) є квазілінійним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними. Визначимо його тип:

$$\Delta = e^{2(x+y)} - e^{2x} \cdot e^{2y} = 0.$$

Отже, задане рівняння у всій дійсній площині є рівнянням параболічного типу. Знаходимо його єдину сім'ю характеристик:

$$y'(x) = e^{y-x}, \quad C = e^{-x} - e^{-y}.$$

Покладемо $\xi = e^{-x} - e^{-y}$, $\eta = x$. Очевидно, що якобіан такого перетворення $\mathfrak{J} \neq 0$. Тоді

$$u_x = -e^{-x}U_\xi + U_\eta, \quad u_y = e^{-y}U_\xi, \quad u_{yy} = e^{-2y}U_{\xi\xi} - e^{-y}U_\xi,$$

$$u_{xx} = e^{-2x}U_{\xi\xi} - 2e^{-x}U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta} + e^{-x}U_\xi, \quad u_{xy} = -e^{-x-y}U_{\xi\xi} + e^{-y}U_{\xi\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (16), одержимо:

$$U_{\eta\eta} - \xi(1 - \xi e^\eta)^{-1}U_\xi + e^{-2\eta} \ln[U^2(\xi,\eta) + 1] = 0.$$

$$\mathbf{3.} \quad u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 3 \sin \sqrt{3}x. \quad (17)$$

Розв'язання. Рівняння (17) є лінійним неоднорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами.

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Отже, (17) є рівнянням еліптичного типу у всій дійсній площині. Маємо:

$$y'(x) = 1 \pm \sqrt{3}i, \quad C_1 = y - x + \sqrt{3}ix, \quad C_2 = y - x - \sqrt{3}ix.$$

Перетворення незалежних змінних

$$\xi = y - x, \quad \eta = \sqrt{3}x$$

дає

$$\begin{aligned}u_x &= -U_\xi + \sqrt{3}U_\eta, & u_y &= U_\xi, & u_{yy} &= U_{\xi\xi}, \\u_{xx} &= U_{\xi\xi} - 2\sqrt{3}U_{\xi\eta} + 3U_{\eta\eta}, & u_{xy} &= -U_{\xi\xi} + \sqrt{3}U_{\xi\eta},\end{aligned}$$

а отже, рівняння (17) зведеться до вигляду

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{1}{3}U_\xi + \frac{2}{\sqrt{3}}U_\eta = \sin \eta. \quad (18)$$

Для спрощення рівняння (18) вводимо нову невідому функцію $V(\xi, \eta)$:

$$U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot V(\xi, \eta),$$

де λ і μ – довільні сталі. Маємо:

$$\begin{aligned}U_\xi &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (V_\xi + \lambda V), & U_\eta &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (V_\eta + \mu V), \\U_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (V_{\xi\xi} + 2\lambda V_\xi + \lambda^2 V), & U_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi + \mu\eta} (V_{\eta\eta} + 2\mu V_\eta + \mu^2 V).\end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні у рівняння (18), одержимо:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \left(2\lambda + \frac{1}{3}\right)V_\xi + \left(2\mu + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)V_\eta + \left(\lambda^2 + \mu^2 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{\sqrt{3}}\mu\right)V = e^{-\lambda\xi - \mu\eta} \sin \eta. \quad (19)$$

Вибираємо сталі λ і μ таким чином, щоб $2\lambda + \frac{1}{3} = 0$, $2\mu + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$. Тоді (19)

запишеться у вигляді

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} = \frac{13}{36}V(\xi, \eta) + e^{\frac{1}{6}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta} \sin \eta.$$

❖ Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

23. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y(x, y) = 0$.

24. $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_y(x, y) = 0$.

25. $\sin^2 xu_{xx} - 2y\sin xu_{xy} + y^2 u_{yy}(x, y) = 0$.

26. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}(x, y) = 0, \quad xy \neq 0$.

27. $u_{xx} + \ln(x^2 + 2)u_{xy} + 3u_x + 4u(x, y) = 0$.

28. $\operatorname{tg} xu_{xx} + \operatorname{ctg} xu_{yy} + 3u_y - u(x, y) + 5x = 0$.

29. $\sin^2 yu_{xx} - 2\sin yu_{xy} + u_{yy} - 5u_y = u(x, y)$.

30. $u_{xx} + y^2 u_{yy} + 2u_y + 3u(x, y) = 0; \quad y > 0$.

31. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

32. $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} - u_x \cdot u(x, y) = 0, \quad xy \geq 0$.

33. $\operatorname{tg}^2 xu_{xx} - 2y\operatorname{tg} xu_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^3 xu_x(x, y) - \ln 2 = 0$.

34. $u_{xx} - 2xu_{xy} + (x^2 - 1)u_{yy} + (1 - x)^{-1}u_x(x, y) - \operatorname{tg} x^2 = 0, \quad x \neq 1$.

35. $2u_{xx} - 2e^y u_{xy} + e^{2y} u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0$.

36. $u_{xx} + xu_{xy} + 0,25x^2 u_{yy} + \sin u(x, y) = 0$.

37. $u_{xx} + \operatorname{ch} xu_{xy} + 3u_x - u_y(x, y) = 0.$
 38. $xu_{xx} - yu_{yy} + 0,5(u_x - u_y) - e^{u(x,y)} = 0, \quad xy \leq 0.$
 39. $4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - 2y(1 + y^2)^{-1}(2u_x - u_y) = (1 + y^2)^2 u(x, y).$
 40. $u_{xx} - 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} u_{xy} + (2 + \cos x)u_{yy}(x, y) + \operatorname{sh} \pi = 0.$
 41. $u_{xy} + u_{yy} + 5xu_y - yu_x(x, y) + \operatorname{tg}(xy) = 0.$
 42. $\sec xu_{xx} + 2u_{xy} + \cos xu_{yy}(x, y) + y + \sin x = 0.$

❖ Використовуючи заміну $U(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot V(\xi, \eta)$, звести до найпростішого вигляду ДРЧП зі сталими коефіцієнтами:

43. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + 2u_y(x, y) - x = 0.$
 44. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_y = 3u(x, y).$
 45. $u_{xx} + 6u_{xy} - u_x + 7u_y(x, y) + 3y = 0.$
 46. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y(x, y) = 0.$
 47. $4u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + 3u(x, y) = 0.$
 48. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y(x, y) = 0.$
 49. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x(x, y) = 0.$
 50. $u_{yy} + u_{xy} + 3u_y - 4u_x(x, y) = 0.$
 51. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0.$
 52. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0.$
 53. $u_{xx} + 9u_{yy} - u_y + 2u_x + 5u(x, y) = 0.$
 54. $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - 4u(x, y) = 0.$
 55. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_y + 2u_x(x, y) = 0.$
 56. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x(x, y) = e^{0,5(x+y)}.$
 57. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 6u_y + u(x, y) = 12e^{-0,25(3x-y)}.$
 58. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + u_y + 2u(x, y) = xe^{-5x+y}.$
 59. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_y + 5u_x(x, y) = x(x + y).$
 60. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - u_y + u_x(x, y) = y(y + 4x).$
 61. $u_{xx} - u_{xy} - u_y + 3u_x(x, y) = ye^{x+y}.$
 62. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = xe^{-0,5x}.$
 63. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_y + u_x(x, y) = y - 3x.$
 64. $u_{xy} + 2u_{yy} - 3u_x + 4u_y(x, y) = e^{3y}.$
 65. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_y + 4u_x + u(x, y) = 2x^2 e^{-2y}.$
 66. $u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x - 4u_y(x, y) + e^{-2x} = 0.$

§3. Класифікація та зведення до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними

Нехай задане квазілінійне ДРЧП вигляду

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}), \quad (20)$$

де всі коефіцієнти a_{ij} є сталими.

Введемо нові незалежні змінні $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} x_i, \quad k = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Тоді ДРЧП (20) зведеться до рівняння

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \bar{a}_{kp} U_{\xi_k \xi_p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \dots, U_{\xi_n}), \quad (22)$$

де

$$\bar{a}_{kp} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{pj}. \quad (23)$$

Формули (23) перетворення коефіцієнтів при других похідних від функції u при заміні незалежних змінних, згідно формул (21), співпадають з формулами перетворення коефіцієнтів квадратичної форми

$$\Omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (24)$$

якщо в ній здійснити лінійне перетворення

$$x_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \eta_k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (25)$$

Вираз (24) називається **характеристичною квадратичною формою** для ДРЧП (20). Відповідним вибором коефіцієнтів α_{ki} в (25) квадратичну форму (24) можна звести до канонічного вигляду

$$\bar{\Omega}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \eta_k^2, \quad (26)$$

де коефіцієнти λ_k рівні ± 1 або нулеві, тобто

$$\bar{a}_{kp} = \begin{cases} 0, & k \neq p, \\ \lambda_k, & k = p. \end{cases}$$

Таким чином, якщо в (21) коефіцієнти α_{ki} є такими, що неособливе перетворення (25) зводить (24) до канонічної форми (26), то рівняння (22) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, \dots, U_{\xi_n}). \quad (27)$$

Згідно закону інерції для квадратичних форм число додатніх, рівних нулеві і від'ємних коефіцієнтів λ_k інваріантне відносно неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. У зв'язку з цим ДРЧП (20) називають рівнянням:

а) *еліптичного типу*, якщо в (27) всі коефіцієнти λ_k відмінні від нуля й одного знаку;

б) *параболічного типу*, якщо хоча б один із коефіцієнтів λ_k в (27) рівний нулеві;

в) *гіперболічного типу*, якщо в (27) всі λ_k відмінні від нуля, але серед них є один коефіцієнт із знаком, протилежним знакам інших коефіцієнтів;

г) *ультрагіперболічного типу*, якщо в (27) всі λ_k відмінні від нуля, але серед них $r > 1$ коефіцієнтів є додатними, а $n - r > 1$ – від'ємними.

На практиці тип рівняння (20) можна визначити вже з канонічного вигляду характеристичної квадратичної форми, оскільки коефіцієнти λ_k в (27) і (26) співпадають.

Зауваження 1. Якщо в рівнянні (20) $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то класифікацію та зведення до канонічного вигляду таких рівнянь здійснюють в точці розглядуваної області.

Зауваження 2. Якщо рівняння (20) лінійне зі сталими коефіцієнтами, то рівняння (27) також буде лінійним зі сталими коефіцієнтами, тобто запишеться у вигляді

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k U_{\xi_k \xi_k} + b_k U_{\xi_k}) + cU = f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n). \quad (28)$$

Нехай у (28) всі $\lambda_k \neq 0$. Тоді після введення нової невідомої функції $V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ згідно з формулою

$$U(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) e^{-0,5 \sum_{k=1}^n b_k \lambda_k^{-1} \xi_k}$$

рівняння (28) зведеться до простішого вигляду

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k V_{\xi_k \xi_k} + c_1 V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

ПРИКЛАД. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП

$$u_{x_1 x_3} - 5u_{x_2 x_3} + u_{x_2 x_4} - 2,5u_{x_2} = 0, \quad u = u(x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (29)$$

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з чотирма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами. Щоб звести його до канонічного вигляду, складаємо характеристичну квадратичну форму

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_3 - 5x_2 x_3 + x_2 x_4.$$

Шляхом виділення повних квадратів послідовно відносно кожної з незалежних змінних останній вираз можна подати у вигляді

$$\Omega(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \left(x_1 - \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \left(x_2 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 - \left(x_2 + \frac{5}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4\right)^2,$$

тобто канонічний вигляд характеристичної квадратичної форми є

$$\overline{\Omega}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_4^2, \quad (30)$$

де

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,25 & 0 \\ 1 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0,25 \\ 0 & 1 & 1,25 & -0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Коефіцієнти при квадратах у виразі (30) усі відмінні від нуля, причому два з них додатні, а інші два – від’ємні. Тому згідно наведеної вище класифікації ДРЧП (29) є рівнянням ультрагіперболічного типу.

Позначимо через A матрицю перетворення (31). Тоді матриця A^{-1} задаватиме обернене перетворення (25), а шукане перетворення (21), яке зводить розглядуване ДРЧП до канонічного вигляду, буде визначатися транспонованою матрицею $(A^{-1})^T$. Отже, вводимо перетворення незалежних змінних

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 2 & 10 \\ 0,5 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_{x_1} &= 0,5(U_{\xi_1} + U_{\xi_2}), & u_{x_2} &= 0,5(U_{\xi_3} + U_{\xi_4}), & u_{x_2 x_3} &= U_{\xi_1 \xi_3} + U_{\xi_1 \xi_4} - U_{\xi_2 \xi_3} - U_{\xi_2 \xi_4}, \\ u_{x_1 x_3} &= U_{\xi_1 \xi_1} - U_{\xi_2 \xi_2}, & u_{x_2 x_4} &= U_{\xi_3 \xi_3} - U_{\xi_4 \xi_4} + 5(U_{\xi_1 \xi_3} + U_{\xi_1 \xi_4} - U_{\xi_2 \xi_3} - U_{\xi_2 \xi_4}). \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (28), одержимо:

$$U_{\xi_1 \xi_1} - U_{\xi_2 \xi_2} + U_{\xi_3 \xi_3} - U_{\xi_4 \xi_4} - 1,25(U_{\xi_3} + U_{\xi_4}) = 0. \quad (32)$$

Зауваження. Для зведення квадратичної форми до канонічного вигляду можна застосувати також метод Лагранжа (див. *Окунев Л.Я.* Вища алгебра. – К.: Радянська школа, 1950. – С. 157-177).

Спростимо рівняння (32). Для цього введемо нову невідому функцію $V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ згідно з формулою

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = V(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} U_{\xi_3} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot (V_{\xi_3} + \frac{5}{8}V), & U_{\xi_4} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot (V_{\xi_4} - \frac{5}{8}V), & U_{\xi_1 \xi_1} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot V_{\xi_1 \xi_1}, \\ U_{\xi_2 \xi_2} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot V_{\xi_2 \xi_2}, & U_{\xi_3 \xi_3} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot (V_{\xi_3 \xi_3} + \frac{5}{4}V_{\xi_3} + \frac{25}{64}V), \\ U_{\xi_4 \xi_4} &= e^{\frac{5}{8}(\xi_3 - \xi_4)} \cdot (V_{\xi_4 \xi_4} - \frac{5}{4}V_{\xi_4} + \frac{25}{64}V) \end{aligned}$$

Підставивши знайдені похідні в (32), дістанемо остаточно

$$V_{\xi_1 \xi_1} - V_{\xi_2 \xi_2} + V_{\xi_3 \xi_3} - V_{\xi_4 \xi_4} = 0.$$

❖ Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:

$$67. 2u_{xx} + 2u_{yy} - 3u_{zz} - 4u_{xy} + 2u_{yz} - 2u_{xz}(x, y, z) = 0.$$

$$68. u_{xx} + 5u_{yy} + 14u_{zz} + 4u_{xy} + 16u_{yz} + 6u_{xz}(x, y, z) = 0.$$

$$69. 4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 4u_{yz} + 10u_{xz} + 2u(x, y, z) = 0.$$

$$70. u_{xx} + 25u_{yy} + 0,5u_{zz} - u_{xz} + u_x - u_z(x, y, z) = 0.$$

$$71. u_{zz} - 0,25u_{xx} + u_{yz} + u_y - u_z(x, y, z) = 0.$$

$$72. u_{yy} - u_{yz} + 0,5u_{zz} + 8u_{xx} - 2u_{xz} + u_x - u_y(x, y, z) = 0.$$

$$73. u_{zz} - 2u_{xz} + 2u_{xx} + 0,5u_{yy} - u_{xy} - 5u_x + 2u_y(x, y, z) = 0.$$

$$74. 2u_{yy} - u_{yz} + 0,25u_{zz} + u_{xx} - u_y + u_z(x, y, z) = 0.$$

$$75. 3u_{xz} + 2u_{yy} - u_{yz} + 0,25u_{zz} + 36u_{xx} + u_x - u(x, y, z) = 0.$$

$$76. u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x(x, y, z) = e^{2y+z}.$$

$$77. u_{yy} - u_{xy} + 2u_{yz} - 3u_x(x, y, z) = z(2x + z).$$

$$78. u_{yy} - u_{zz} - 4u_{xy} + u_{yz} + u_z(x, y, z) = y.$$

$$79. u_{yy} - 3u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_z + u(x, y, z) = y(2x - 3y).$$

$$80. u_{zz} + 5u_{xx} + 0,5u_{yy} + u_{yz} - u_y + u_z(x, y, z) = e^{-0,5z}.$$

$$81. u_{zz} - 2u_{xx} + u_{yz} - u_y - u(x, y, z) = 2e^{z-2y}.$$

$$82. u_{zz} - 3u_{yy} + 5u_{yz} - u_{xz}(x, y, z) = 4x(x + z).$$

$$83. u_{zz} + u_{xy} - 2u_{xz} - u_y + u(x, y, z) = 2(x + y) + 3z.$$

$$84. u_{zz} - u_{xz} + 3u_{yz} - u_x(x, y, z) = 2x + z.$$

$$85. u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yz} + u_x(x, y, z) = -e^{3x+5z}.$$

$$86. u_{xx} + 4u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 2u_x - 4u_y(x, y, z) + xye^x = 0.$$

$$87. u_{xx} + 4u_{yy} + u_{zz} - 4u_{xy} + 2u_{xz} - 2xyu_x + 3xu(x, y, z) = xz.$$

$$88. 5u_{xy} - u_{zz} + u_{zt} - u_y(x, y, z, t) = 2t.$$

$$89. 2u_{xt} + 6u_{yz} - 2u_z + 3u_t(x, y, z, t) = 1.$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ І

Варіант	Завдання №1	Завдання №2
	З'ясувати, чи є наведені нижче рівності ДРЧП і дати повне їх визначення:	Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду наступні ДРЧП:
1	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\cos(u_x + u_y) - \cos u_x \cos u_y + \sin u_x \sin u_y = u(x, y);$ 2. $x^2 u_{xy^2} - u_x^5 - 5u(x, y) = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} + u_x \cdot u(x, y) = 0, \quad xy \neq 0;$ 2. $\operatorname{tg}^2 yu_{xx} + 2 \operatorname{tg} yu_{xy} + u_{yy} + \sec^2 yu_x(x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} - xyu_{yy}(x, y) = 6y, \quad xy > 0;$ 4. $4u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y + 3u(x, y) = 0;$ 5. $u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yz} + u_y - u_z(x, y, z) = 0.$
2	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{\partial}{\partial x}(xu_{y^2x} - u_y) + 5u_{x^2}u(x, y) = 0;$ 2. $\sin^2(u_{x^2} + u_{xy}) + \cos^2(u_{x^2} + u_{xy}) - u(x, y) = 1.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{xx} + y^2 u_{yy} + 0,5u_y(x, y) = 8x;$ 2. $\sin^2 yu_{xx} + 2 \sin yu_{xy} + u_{yy} + \cos yu_x(x, y) = 0;$ 3. $\sin^2 xu_{xx} + 2 \cos xu_{xy} - u_{yy} + u_y \cdot u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 2u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{xy} + 2u_{xz} - u_x + u_z(x, y, z) = 0.$
3	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\log_2 u_x \cdot u_y - \log_2 u_x - \log_2 u_y + 6u(x, y) - 6 = 0$ 2. $xy^2 u_{x^2y^2} - (x^2y^2 + 1)u_{x^2}^3 - 2u(x, y) = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + u^2(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} - 2 \sin xu_{xy} + \sin^2 xu_{yy} - \operatorname{ctg} xu_x(x, y) = 0;$ 3. $e^y u_{xx} + e^x u_{yy} - 0,5e^y u_x - 0,5e^x u_y(x, y) = 5xy;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 6u_y + u(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} + u_y - u_x(x, y, z) = 0.$

4	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 u_{x^2} - 5u) + xu_y - u_x(x, y) = 0;$ 2. $\sin(u_x + u_{xy}) - \sin u_{xy} \cdot \cos u_x -$ $-\cos u_{xy} \sin u_x + 2u(x, y) = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{xx} + e^{2x} u_{yy}(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2 \cos xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy} - \sin xu_y(x, y) = 3 \operatorname{tg} x;$ 3. $u_{xx} - x^2 u_{yy} + \sqrt{ u(x, y) } = 0;$ 4. $u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + u_y + 2u(x, y) = 0;$ 5. $u_{xx} + 2u_{yy} - u_{xz} + u_x - u_z(x, y, z) = 0.$
5	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u - u_x \sec^2 u - 3u(x, y) - 2 = 0;$ 2. $u_x u_{xy^2} + xu_{y^3} + 2u_{xy}^3 \cdot u(x, y) -$ $-xye^y = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $e^{2y} u_{xx} - u_{yy} + \sqrt{ u_x(x, y) } = 0;$ 2. $u_{xx} + (1 + x^2)^2 u_{yy} - 2x(1 + x^2)^{-1} u_x(x, y) = 0;$ 3. $\cos^2 xu_{xx} - 2 \cos xu_{xy} + u_{yy} + \sin yu_x(x, y) = 0,5 \sin y;$ 4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_x + 5u_y(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 2u_{xx} + u_{yz} + u_y - u_z(x, y, z) = 0.$
6	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\cos^2 u_{xy} + \sin^2 u_{xy} - 2u_x^2 - 3u_y +$ $+ u(x, y) = 0;$ 2. $\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{tg} u - u_y \sec^2 u + 5u(x, y) - 1 = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $x^2 u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + \ln u_x(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_y(x, y) = 0,2e^x;$ 3. $u_{xx} + 2 \sin xu_{xy} + (1 + \sin^2 x) u_{yy}(x, y) = 0;$ 4. $5u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{yz} + 2u_{xz} + u_x - u_y(x, y, z) = 0.$
7	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\frac{\partial}{\partial x}(u_{y^2}^2 - u_y) - 2u_x + 2 -$ $- 2u_{y^2} \frac{\partial}{\partial y}(u_{xy} - u_x) = u(x, y);$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $2e^x u_{xy} - u_{yy} + e^{xu} u_x(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2yu_{xy} + (1 + y^2) u_{yy}(x, y) = 9x;$ 3. $u_{xx} + 2 \cos xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy}(x, y) = 0;$

	2. $u_x^{-1}u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \ln u_x + 2u(x, y) = 5.$	4. $u_{yy} + u_{xy} + 3u_y - 4u_x(x, y) = 0;$ 5. $2u_{zz} + u_{xz} - u_{yz} - u_x + u(x, y, z) = 0.$
8	1. $\log_3 \left u_{x^2} u_{y^2}^{-1} \right + \log_3 \left u_{y^2} \right -$ $-\log_3 \left u_{x^2} \right - u(x, y) + 5x = 0;$ 2. $2u_{x^2} u_{x^2 y} - \frac{\partial}{\partial y} (u_{x^2} - u_y)^2 -$ $-2u_y u_{x^2 y} + u_x(x, y) = 0.$	1. $u_{xx} + 2xu_{xy} + (1 + x^2)u_{yy} + \ln u(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} - \cos xu_{xy} - 0,25 \sin^2 xu_{yy}(x, y) = 5xy;$ 3. $u_{xx} + 4e^x u_{xy} + 4e^{2x} u_{yy} + 5u_x(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{xy} + 2u_{yz} - 3u_x(x, y, z) = 0.$
9	1. $yu_y e^{yu} - \frac{\partial}{\partial y} e^{yu(x, y)} + 3 = 0;$ 2. $e^x u_{xy^2} - \frac{\partial}{\partial y} (xu_{x^3}) + 4yu(x, y) = 0.$	1. $u_{yy} + 2(1 + y^2)u_{xy} + 3u_x + 5u_y \cdot u(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 6 \ln x u_{xy} + 9 \ln^2 x u_{yy}(x, y) = 0;$ 3. $u_{yy} - 2 \cos yu_{xy} + (2 - \sin^2 y)u_{xx}(x, y) = \sin y;$ 4. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} - 4u_y + 5u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{yz} + u_y - u_z(x, y, z) = 0.$
10	1. $u_{xy^2} + 5u_{xy}^2 \cdot u(x, y) + 6xy = 0;$ 2. $\ln \left \frac{\partial}{\partial x} e^u \right - \ln u_x - 2u(x, y) + x = 0.$	1. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg} u(x, y) = 0;$ 2. $u_{xy} - e^x u_{yy} + 3u_y(x, y) - e^y = 0;$ 3. $u_{xx} + 2 \operatorname{tg} xu_{xy} + (1 + \operatorname{tg}^2 x)u_{yy} + u_x(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - u_y + u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - u_{zz} - 4u_{xy} + u_{yz} + u_z(x, y, z) = 0.$
11	1. $xu_{xy^2} - 5u_{x^2}^2 + xyu(x, y) = \ln x ;$	1. $u_{xx} + 4e^y u_{xy} + 4e^{2y} u_{yy} + \ln u(x, y) = 0;$

	<p>2. $(1 + \operatorname{tg}^2 u_x) u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{tg} u_x + u^2(x, y) - x = 0.$</p>	<p>2. $u_{xx} + 2xyu_{xy} + 10x^2y^2u_{yy} + u_x(x, y) = 0, \quad xy \neq 0;$ 3. $0,5yu_{xx} - 2u_{xy} + 5u_x - u_y(x, y) - 3xy = 0;$ 4. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - u_{xz} + 2u_{yz} + u_x - u_y(x, y, z) = 0.$</p>
<p>12</p>	<p>1. $u_{x^2}^2 + u_{y^2}^2 - (u_{x^2} - u_{y^2})^2 = u(x, y);$ 2. $(\operatorname{tg} u_{x^2} + \operatorname{ctg} u_{y^2}) \cos u_{x^2} \sin u_{y^2} - \cos(u_{x^2} - u_{y^2}) = \ln(u^2(x, y) + 1).$</p>	<p>1. $u_{xx} - 2e^{0,5x}u_{xy} - u_y + u_x \cos u(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} + 2 \sin xu_{xy} + (1 + \sin^2 x)u_{yy}(x, y) - x \ln y = 0;$ 3. $y^2u_{xx} - 4xyu_{xy} + 4x^2u_{yy} + 3u_x(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 9u_{yy} - u_y + 2u_x + 5u(x, y) = 0;$ 5. $2u_{yy} - u_{yz} + u_{xy} - 5u_z + u(x, y, z) = 0.$</p>
<p>13</p>	<p>1. $-0,5 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sh} 2u_{xy} \cdot u_{x^2y}^{-1} + \operatorname{sh}^2 u_{xy} + \operatorname{ch}^2 u_{xy} + \operatorname{th} u(x, y) = \sqrt{3}y;$ 2. $2xzu_{xy^2z} + 5u_{xz}^8 + (y - z)u(x, y, z) = 0.$</p>	<p>1. $u_{yy} + 2(1 + x^2)u_{xy} - u_x + u(x, y) - \sin(xy) = 0;$ 2. $9u_{xx} - 6e^y u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + u_x \ln u(x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} + 4 \cos xu_{xy} + (1 + 4 \cos^2 x)u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} - u_{xy} - u_y + 3u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 2u_{xz} + u_{xy} - 5u_x + 2u_y(x, y, z) = 0.$</p>
<p>14</p>	<p>1. $-0,5 \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{sh} 2u_{xy} \cdot u_{xy^2}^{-1} + 2 \operatorname{ch}^2 u_{xy} + 3u(x, y) - 2 = 0;$ 2. $u_{x^2y^2} - 5u_{x^6} - 3x^8u(x, y) = 0.$</p>	<p>1. $e^y u_{xx} - u_{xy} + u_y - e^y u_x + \cos u(x, y) = 0;$ 2. $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x(x, y) = e^y;$ 3. $\sin^2 xu_{xx} - 2y \sin xu_{xy} + (1 + y^2)u_{yy}(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - 5u_y + u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - 3u_{xy} + u_{xz} + u_{yz} - u_z + u(x, y, z) = 0.$</p>

15	<ol style="list-style-type: none"> 1. $2 \sin^2(0,5u_{xx}) + \cos u_{xx} + 3yu(x, y) = 0;$ 2. $u_{xyz}^2 + 5xu_z - 6u(x, y, z) = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{yy} + 4e^{2y}u_{xy} + u_y - u_x(x, y) - e^x = 0;$ 2. $u_{xx} + y^2u_{yy} + 2u_y + 3u(x, y) = 0; \quad y > 0;$ 3. $\sin^2 xu_{xx} - 2y \sin xu_{xy} + y^2u_{yy} + \operatorname{tg} u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x - 4u(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} - 3u_{zz} + 2u_{xz} + u_x - u_y(x, y, z) = 0.$
16	<ol style="list-style-type: none"> 1. $e^{u_x} \cdot u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y}(e^{u_x} + u^2) + (2u_y + 5)u(x, y) = 4x;$ 2. $u_{x^2y^5z} - 4u_{x^3y^3} \cdot u_{z^4} + 9zu(x, y, z) = 0.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{xx} - 2 \cos xu_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{y^2} - yu_y(x, y) = 0;$ 2. $(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$ 3. $u_{xx} + 2e^x u_{xy} + e^{2x} u_{yy} + u_x \ln u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + 3u_y + 2u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 5u_{xx} + u_{yz} - u_y + u_x(x, y, z) = 0.$
17	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_x u_{x^3y^2} - 8u_{xy^2}^4 - \ln u(x, y) = 0;$ 2. $\operatorname{cth}^2 u_{xy} - \operatorname{cosech}^2 u_{xy} + u^2(x, y) = 2.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $\operatorname{ctg}^2 xu_{xx} - 2 \operatorname{ctg} xu_{xy} + u_{yy} + \operatorname{cosec}^2 xu_y = e^{u(x, y)};$ 2. $4y^2 u_{xx} - e^{2x} u_{yy} - 4y^2 u_x(x, y) - 8y^2 = 0;$ 3. $x^2 u_{xx} + u_{yy} + xu_x(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_y + u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - 2u_{xx} + u_{yz} - u_y - u(x, y, z) = 0.$
18	<ol style="list-style-type: none"> 1. $u_{y^4z^3} - u_{x^4}^3 - 5xzu(x, y, z) = 0;$ 2. $\operatorname{tg}^2 u_{xy} - \operatorname{sec}^2 u_{xy} + 4e^{u(x, y)} = 5y.$ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}u_{xy} + yu_{yy} - u_x \cdot u(x, y) = 0, \quad xy \geq 0;$ 2. $\sin^2 yu_{xx} - e^{2x} u_{yy} + 3u_x - 5u(x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} - 2 \cos xu_{xy} + (9 + \cos^2 x)u_{yy} + xu_y(x, y) = \ln(1 + y^2);$

		<p>4. $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 3u_y(x, y) = 0;$</p> <p>5. $u_{zz} - 3u_{yy} + 5u_{yz} - u_{xz}(x, y, z) = 0.$</p>
19	<p>1. $(1 + u_y^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \ln(1 + u_x^2) -$ $- 2u_x(1 + u_x^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg} u_y +$ $+ 4yu(x, y) = 0.$</p> <p>2. $u_{xy^2z} + u_{z^2}^5 + zxu_y(x, y, z) = 0.$</p>	<p>1. $\operatorname{tg}^2 xu_{xx} - 2y \operatorname{tg} xu_{xy} + y^2 u_{yy} + \operatorname{tg}^3 xu_x(x, y) - \ln 2 = 0;$</p> <p>2. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2 u_{yy} + yu_y(x, y) = 0;$</p> <p>3. $e^{2x} u_{xx} + 4e^{x+y} u_{xy} + 3e^{2y} u_{yy} = \sin u(x, y);$</p> <p>4. $u_{xy} + 2u_{yy} - 3u_x + 4u_y(x, y) = 0;$</p> <p>5. $u_{xz} - u_{zz} + 2u_{yz} - u_x + u_z(x, y, z) = 0.$</p>
20	<p>1. $u_{xz^4} - e^{u_{y^2}} \cdot u(x, y, z) + u_{x^2}^4 = 3xyz;$</p> <p>2. $\cos(u_x + u_y) \cos(u_x - u_y) -$ $-\cos^2 u_y + \sin^2 u_x = 3 \ln u(x, y) .$</p>	<p>1. $e^x u_{xx} + u_{yy} + xu_y + u_x - \operatorname{tg} u(x, y) = 0;$</p> <p>2. $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} - 2u_y(x, y) + e^{x+y} = 0;$</p> <p>3. $u_{xx} + 2 \sin xu_{xy} + (10 - \cos^2 x) u_{yy} + u_y(x, y) = 0;$</p> <p>4. $2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_y + 4u_x + u(x, y) = 0;$</p> <p>5. $u_{yz} - 3u_{zz} + u_{xx} - u_y + u_z(x, y, z) = 0.$</p>
21	<p>1. $\operatorname{sh} 2u_x \cdot \operatorname{cth} u_x - \operatorname{ch} 2u_x +$ $+ 5xu(x, y) = 0;$</p> <p>2. $u_{xy^2z} + \ln(u_{x^2}^4 + 1) - 5xzu(x, y, z) = 0.$</p>	<p>1. $u_{xx} - 2xu_{xy} + (x^2 - 1) u_{yy} + yu_x(x, y) - \operatorname{tg} x^2 = 0;$</p> <p>2. $\sin^2 yu_{xx} + 2x \sin yu_{xy} + x^2 u_{yy} + u^2(x, y) = 0;$</p> <p>3. $2u_{xx} - 2e^y u_{xy} + e^{2y} u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0;$</p> <p>4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_y + u_x + 3u(x, y) = 0;$</p> <p>5. $u_{zz} + u_{xy} - 2u_{xz} - u_y + u(x, y, z) = 0.$</p>
22	<p>1. $u_{y^2z^3} + 3yu_{xz}^5 - 4zu(x, y, z) = 0;$</p>	<p>1. $\sin^2 xu_{yy} + 2 \cos xu_{xy} - u_{xx} = yu_x(x, y);$</p>

	<p>2. $yu_y \cos(yu) - \frac{\partial}{\partial y} \sin(yu) + 2xu(x, y) = 3 \ln(1 + x^2)$</p>	<p>2. $u_{xx} + xu_{xy} + 0,25x^2u_{yy} + \sin u(x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} + 2 \sin xu_{xy} + (2 - \cos^2 x)u_{yy}(x, y) + \ln(x^2 + 1) = 0;$ 4. $u_{xy} - u_{yy} + 5u_x - 4u_y + 5u(x, y) = 0;$ 5. $5u_{xy} - u_{zz} + u_{zt} - u_y(x, y, z, t) = 0.$</p>
<p>23</p>	<p>1. $2 \cos^2 u_{yy} - \cos 2u_{yy} - 4xu(x, y) = e^y;$ 2. $u_{x_1^2 x_5^4} + 2x_2 x_3 u_{x_4^7} + u_{x_2 x_3} \cdot u_{x_1}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.$</p>	<p>1. $(1 + x^2)u_{xx} - (1 + y^2)u_{yy} + xu_x - yu_y = u(x, y);$ 2. $x^2u_{xx} - 2x \cos yu_{xy} + \cos^2 yu_{yy}(x, y) + \operatorname{tg} x = 0;$ 3. $u_{xx} + 2e^{0,5x}u_{xy} + 2e^x u_{yy} + u_x \ln u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} - 2\sqrt{5}u_{xy} + 4u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0;$ 5. $u_{zz} - u_{xz} + 3u_{yz} - u_x(x, y, z) = 0.$</p>
<p>24</p>	<p>1. $(4 \cos^3 u_x - 3 \cos u_x)u_{xy} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \sin 3u_x + 4 \operatorname{tg} u(x, y) = \sin x;$ 2. $u_{x_1 x_2 x_3 x_4} - u_{x_1^5} + 2x_3 x_4 u(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$</p>	<p>1. $2u_{xx} + 2\sqrt{2}yu_{xy} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y(x, y) = 0;$ 2. $u_{xx} - 2 \operatorname{ctg} xu_{xy} + \operatorname{ctg}^2 xu_{yy} + u_y \cdot u(x, y) = 0;$ 3. $u_{xx} + \operatorname{ch} xu_{xy} + 3u_x - u_y(x, y) = 0;$ 4. $u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x - 4u_y(x, y) + e^{\sqrt{2}x} = 0;$ 5. $u_{xz} + u_{yz} - 2u_{zz} - u_x + u_y(x, y, z) = 0.$</p>
<p>25</p>	<p>1. $2u_{xy} \sin^{-1} 2u_x + \frac{\partial}{\partial y} \ln \operatorname{ctg} u_x + \sqrt{1 + u^2}(x, y) = 2xy;$ 2. $u_{x^3 z}^2 + 3xu_{yz} - 4zu(x, y, z) = 0.$</p>	<p>1. $xu_{xx} - yu_{yy} + 0,5(u_x - u_y) - e^{u(x,y)} = 0, \quad xy \leq 0;$ 2. $x^2u_{xx} - 2x \sin yu_{xy} + \sin^2 yu_{yy} + yu_y = 2xu(x, y);$ 3. $\operatorname{sh} yu_{xy} - xu_{yy} + u_x(x, y) + \ln(y^2 + 1) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + u_y(x, y) = 0;$ 5. $3u_{xz} - 2u_{yy} + u_{yz} + u_x - u(x, y, z) = 0.$</p>

<p>26</p>	<p>1. $u_{x^3y^2} + u_{z^4}^2 + 5xu(x, y, z) = 0;$ 2. $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tg} u_y - u_{xy} \sec^2 u_y + 6yu(x, y) = e^x.$</p>	<p>1. $4y^2u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - 2y(1 + y^2)^{-1}(2u_x - u_y) = u(x, y);$ 2. $u_{xx} - 2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} u_{xy} + (2 + \cos x)u_{yy}(x, y) + \operatorname{sh} \pi = 0;$ 3. $e^{2y}u_{xx} + e^y u_{xy} + 0,25u_{yy} + \operatorname{ch} u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + 2u_y - u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{yy} + 3u_{xy} - 2u_{yz} - u_z(x, y, z) = 0.$</p>
<p>27</p>	<p>1. $x^2u_x e^{xu} - \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xu}) + 5yu(x, y) = 0;$ 2. $u_{x^3z} - \ln(u^6 + 2) + 5xyu(x, y, z) = \operatorname{sh}(yz).$</p>	<p>1. $u_{xx} + 2 \sin y u_{xy} + (1 - \cos^2 y)u_{yy}(x, y) + e^{xy} = 0;$ 2. $(1 + e^{2x})u_{xx} + 2e^x u_{xy} + u_{yy} = 2yu_x(x, y);$ 3. $yu_{xx} - 2u_{xy} + \operatorname{sh} u(x, y) = 0;$ 4. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_y - u_x(x, y) = 0;$ 5. $u_{xy} + u_{zt} - 2u_{xz} + u_t(x, y, z, t) = 0.$</p>
<p>28</p>	<p>1. $u_{x^2y^2}^5 - 4xu_{y^2} + 3yu_{x^3}(x, y) = 0;$ 2. $u_{xy} \sin 2u_y - \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2 u_y) + \sqrt{1 + u^2}(x, y) - xy = 0.$</p>	<p>1. $u_{xx} - 2e^{0,5y}u_{xy} + e^y u_{yy} = \operatorname{ch} u(x, y);$ 2. $u_{xy} + u_{yy} + 5xu_y - yu_x(x, y) + \operatorname{tg}(xy) = 0;$ 3. $(8 + \sin^2 x)u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - u_{yy} + u_x = 3xu_y(x, y);$ 4. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_y + 5u_x + u(x, y) = 0;$ 5. $2u_{xt} + 6u_{yz} - 2u_z + 3u_t(x, y, z, t) = 0.$</p>
<p>29</p>	<p>1. $(8 \cos^4 u_x - 8 \cos^2 u_x + 1)u_{xy} - 0,25 \frac{\partial}{\partial y}(\sin 4u_x) + e^{u(x,y)} = 2xy;$</p>	<p>1. $u_{xx} - 2e^y u_{xy} + 5xu_y = \sin u(x, y);$ 2. $\sec x u_{xx} + 2u_{xy} + \cos x u_{yy}(x, y) + y + \sin x = 0;$ 3. $u_{xx} + 2xu_{xy} + (1 + x^2)u_{yy} + yu_x(x, y) = 0;$</p>

	2. $u_{xz^4} - 5u_y^6 + 2u_{xyz}(x, y, z) - 5z^7 = 0.$	4. $0,25u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + 5u_x - 6u(x, y) = 0;$ 5. $4u_{xy} - 3u_{yy} + 10u_{yz} - 4u_{xz} + 5u_z(x, y, z) = 0.$
30	1. $u_{y^2z^3}^2 - 5u_{x^4} + 4xzu(x, y, z) = 0;$ 2. $(1 + u_x^2)^{-1} \cdot u_{xy} - \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} u_x + u(x, y) + \operatorname{sh}(xy) = 0.$	1. $\operatorname{csc} xu_{xx} + 2u_{xy} + \sin xu_{yy} + xe^{u(x,y)} = 0;$ 2. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 5xyu(x, y) = 0;$ 3. $u_{yy} - 2 \operatorname{sh} yu_{xy} + 3xu_y(x, y) + e^y = 0;$ 4. $u_{yy} + 6u_{xy} - 5u_y + u_x = u(x, y);$ 5. $u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yz} + u_x(x, y, z) = 0.$

РОЗДІЛ II РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК (МЕТОД ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ)

§1. Фізичні процеси, які приводять до ДРЧП гіперболічного типу

У багатьох випадках дослідження тих чи інших явищ природи можна звести до знаходження розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, які мають назву *рівнянь математичної фізики*. Щоб використовувати методи математичної фізики, спершу потрібно встановити, які величини є визначальними для досліджуваного явища. Потім, користуючись фізичними законами, які виражають зв'язок між цими величинами, скласти рівняння з частинними похідними і додаткові умови (зокрема початкові, крайові) до цього рівняння, із яких в подальшому визначаються, причому однозначно, невідомі величини, які характеризують досліджуване явище. Важливо мати на увазі, що одна й та сама задача математичної фізики може слугувати моделлю абсолютно різних по своїй природі явищ.

ДРЧП гіперболічного типу одержуються при математичному моделюванні коливних процесів. Зокрема, багато задач механіки (коливання струн, стержнів, мембран і тривимірних об'ємів) і фізики (електромагнітні коливання) описуються рівнянням коливань вигляду (див. [6], с. 45)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

де невідома функція $u(\mathbf{x}, t)$ залежить від n просторових координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і часу t ; коефіцієнти ρ , p і q визначаються властивостями середовища, де відбувається коливний процес; вільний член $F(\mathbf{x}, t)$ характеризує інтенсивність зовнішнього збурення. У рівнянні (1), у відповідності з визначенням операторів div і grad ,

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

❖ Вивести рівняння, які описують наступні коливні процеси:

1. **Малі поперечні коливання струни.** Пружна абсолютно гнучка струна змінної густини $\rho(x)$, натягнута з силою $T = \text{const}$, коливається в одній площині під дією неперервно розподіленої по всій довжині струни поперечної сили інтенсивності $F(x, t)$. Записати а) рівняння для визначення зміщення $u(x, t)$ точки струни з абсцисою x , нехтуючи опором середовища і степенями u_x порядку вищого за перший. Розглянути б) випадок однорідної струни. Отримати в) рівняння малих поперечних коливань однорідної струни в середовищі з опором, пропорційним швидкості.

2. **Поздовжні коливання стержня.** Пружний прямолінійний стержень змінного поперечного перерізу $S(x)$, густина якого $\rho(x)$, а модуль пружності рівний $E(x)$, коливається в середовищі без опору тільки за рахунок початкових відхилень і швидкостей його точок. Записати а) рівняння для визначення зміщення $u(x,t)$ уздовж осі x поперечного перерізу, абсциса якого в положенні рівноваги рівна x , нехтуючи деформацією поперечних перерізів. Розглянути б) випадок однорідного стержня сталого перерізу.
3. Отримати рівняння вільних (викликаних тільки наданими точкам стержня початковими зміщеннями і швидкостями) поздовжних коливань в середовищі без опору однорідного пружного стержня довжини l , який має форму
 - а) зрізаного конуса, радіуси основ якого r і $R > r$;
 - б) обеліска (зрізаного клину) з квадратним поперечним перерізом, сторони основ якого рівні h_1 і $h_2 > h_1$.
4. **Крутильні коливання пружного циліндра.** Пружний однорідний циліндр виводиться зі стану спокою тим, що в момент часу $t=0$ його поперечні перерізи зазнають малих поворотів у своїх площинах відносно осі циліндра. Записати рівняння для визначення кутів повороту поперечних перерізів циліндра.
5. **Електричні коливання в проводах.** Записати рівняння для визначення сили і напруги змінного струму, який тече уздовж тонкого проводу з неперервно розподіленими по його довжині: опором R , ємністю C , самоіндукцією L і витокком G (усі перераховані величини є сталими).
6. По струні, електричним опором якої можна нехтувати, тече змінний струм $I = I(t)$, причому струна перебуває в постійному магнітному полі з напруженістю H , перпендикулярному до струни. Отримати рівняння поперечних коливань струни, викликаних пондеромоторними силами, прикладеними до струни.
7. **Поздовжні коливання газу в трубці.** Поміщений в циліндричну трубку ідеальний газ здійснює малі поздовжні коливання, причому плоскі поперечні перерізи, що складаються з частинок газу, не деформуються, і всі частинки газу рухаються паралельно до осі циліндра. Скласти рівняння для визначення: а) густини ρ , б) тиску p , в) потенціалу ϕ швидкостей частинок газу, г) швидкості v і д) зміщення u частинок газу.
8. Скласти рівняння поширення малих збурень в однорідному ідеальному газі, який заповнює необмежений простір, беручи за функцію, що характеризує процес, одну з величин: густину газу ρ , тиск в газі p , потенціал швидкостей частинок газу V , вектор швидкості частинок газу \mathbf{v} , потенціал зміщення частинок газу U , або вектор зміщення частинок газу \mathbf{u} . Показати, що через кожен з цих величин може бути виражена будь-яка інша з цих величин.
9. **Малі поперечні коливання мембрани.** Скласти рівняння малих поперечних коливань однорідної мембрани в середовищі без опору під дією неперервно розподіленої по всій мембрані поперечної сили інтенсивності $F(x, y, t)$.

10. *Задача про коливання мембрани барабану.* Скласти рівняння коливань мембрани, натягнутої на отвір замкненої посудини G , враховуючи зміну тиску в посудині, викликану коливаннями мембрани, і вважаючи швидкість поширення малих збурень у газі (повітрі) а) значно більшою і б) значно меншою за швидкість поширення хвиль у мембрані.

§2. Інтегрування ДРЧП з двома незалежними змінними

У теорії звичайних диференціальних рівнянь як основна ставиться задача про знаходження загального розв'язку відповідного рівняння. Для ДРЧП дати строге визначення загального розв'язку неможливо. Тому надалі під загальним розв'язком ДРЧП будемо розуміти сукупність усіх можливих розв'язків розглядуваного рівняння. Знання загального розв'язку ДРЧП в деяких випадках є корисним, поскільки це дає можливість розв'язувати в замкненому вигляді задачі математичної фізики. ДРЧП, розв'язки яких можна одержати в явному вигляді (рівняння інтегруються в квадратурах), називатимемо *інтегровними типами*.

Поширеним методом інтегрування деяких небагаточисельних лінійних ДРЧП другого порядку є так званий *метод характеристик*. Суть цього методу полягає в наступному: задане ДРЧП спочатку зводять до канонічного вигляду і інтегрують його; далі в одержаному загальному розв'язку рівняння в канонічній формі переходять до старих незалежних змінних і таким чином знаходять загальний розв'язок вихідного рівняння. Іноді ДРЧП досить легко інтегрується і без зведення його до канонічної форми, проте найчастіше це зробити значно важче, ніж у випадку канонічного вигляду, адже останній є найпростішим еквівалентним виглядом заданого рівняння.

До інтегровних типів ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними належать лише деякі рівняння гіперболічного та параболічного типів (рівняння еліптичного типу не інтегруються в квадратурах, для їх розв'язування застосовують різноманітні наближені методи).

Загальний розв'язок ДРЧП другого порядку, якщо він існує, обов'язково містить довільні функції, аргументами яких є характеристики заданого рівняння.

Для ілюстрації методу характеристик розглянемо лінійне ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними вигляду

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + b_3(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad (2)$$

де коефіцієнти $a_{11}(x, y)$, $a_{12}(x, y)$, $a_{22}(x, y)$ в розглядуваній області D справджують умову

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \quad (x, y) \in D.$$

Тоді підстановкою незалежних змінних $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, де $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ – характеристики заданого ДРЧП (тоді $x = \Phi(\xi, \eta)$, $y = \Psi(\xi, \eta)$ – див. §2 розділу I), рівняння (2) зводиться до канонічного вигляду

$$2\alpha_{12}U_{\xi\eta} + B_1U_{\xi} + B_2U_{\eta} + B_3U(\xi, \eta) = F(\xi, \eta), \quad (3)$$

де

$$\alpha_{12}(\xi, \eta) = \xi_x \eta_x a_{11} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) a_{12} + \xi_y \eta_y a_{22},$$

$$B_1(\xi, \eta) = \xi_{xx} a_{11} + 2\xi_{xy} a_{12} + \xi_{yy} a_{22} + \xi_x b_1 + \xi_y b_2,$$

$$B_2(\xi, \eta) = \eta_{xx} a_{11} + 2\eta_{xy} a_{12} + \eta_{yy} a_{22} + \eta_x b_1 + \eta_y b_2,$$

$$B_3(\xi, \eta) = b_3(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)), \quad F(\xi, \eta) = f(\Phi(\xi, \eta), \Psi(\xi, \eta)).$$

ДРЧП (3) можна розв'язувати наближено. В деяких випадках, коли рівняння (3) є досить простим, його вдається зінтегрувати і знайти загальний розв'язок $U(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta)$. Тоді загальним розв'язком рівняння (2) є функція

$$u(x, y) = \omega(\varphi(x, y), \psi(x, y)). \quad (4)$$

Для прикладу припустимо, що рівняння (3) можна подати у вигляді

$$\alpha(\xi)v_{\xi} + \beta(\xi)v(\xi, \eta) = F(\xi, \eta),$$

де

$$v(\xi, \eta) = \gamma(\eta) \frac{\partial U}{\partial \eta} + \delta(\eta)U(\xi, \eta), \quad (5)$$

причому $\alpha(\xi) \neq 0$, $\gamma(\eta) \neq 0$.

Одержане лінійне ДРЧП першого порядку можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння відносно $v(\xi, \eta)$, де η є параметром. Інтегруючи його, знайдемо

$$v(\xi, \eta) = e^{-\int \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi} \left[f_1(\eta) + \int e^{\int \frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)} d\xi} \cdot F(\xi, \eta) d\xi \right],$$

де $f_1(\eta)$ – довільна неперервно диференційовна функція незалежної змінної η .

Підставивши знайдену функцію $v(\xi, \eta)$ в рівняння (5) і зінтегрувавши його, дістанемо загальний розв'язок рівняння (3):

$$U(\xi, \eta) = e^{-\int \frac{\delta(\eta)}{\gamma(\eta)} d\eta} \left[f_2(\xi) + \int e^{\int \frac{\delta(\eta)}{\gamma(\eta)} d\eta} \cdot v(\xi, \eta) d\eta \right] \equiv \omega(\xi, \eta),$$

де $f_2(\xi)$ – довільна неперервно диференційовна функція незалежної змінної ξ .

Беручи до уваги (4), знаходимо загальний розв'язок рівняння (2).

Проілюструємо викладену методику на прикладі.

ПРИКЛАД 1. Знайти загальний розв'язок ДРЧП

$$3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + 4(y-x)^{-1}(u_y + u_x) = x - y, \quad u = u(x, y). \quad (6)$$

Розв'язання. Зведемо задане ДРЧП до канонічного вигляду. Маємо: $y'(x) = 1$ або $3y'(x) = -1$, звідки $C_1 = y - x$, $C_2 = 3y + x$.

Вводимо нові незалежні змінні $\xi = y - x$, $\eta = 3y + x$. Тоді

$$u_x = -U_{\xi} + U_{\eta}, \quad u_y = U_{\xi} + 3U_{\eta}, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = U_{\xi\xi} + 6U_{\xi\eta} + 9U_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + 3U_{\eta\eta}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (6), дістанемо

$$U_{\xi\eta} - \xi^{-1}U_{\eta} = \frac{\xi}{16}. \quad (7)$$

Рівняння (7) можна зінтегрувати шляхом виділення частинної похідної, або ж за допомогою заміни $U_{\eta} = z(\xi, \eta)$. Зокрема, в останньому випадку з (7) дістанемо:

$$z_{\xi} - \xi^{-1}z = \frac{\xi}{16}.$$

Вважаючи в останньому рівнянні η параметром, ми можемо інтегрувати його як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку, де довільна стала інтегрування буде функцією параметру η . Отже,

$$z(\xi, \eta) \equiv U_{\eta} = \xi f(\eta) + \frac{\xi^2}{16},$$

де $f(\eta)$ – довільна неперервно диференційовна функція однієї змінної η . Інтегруючи одержану рівність по змінній η , вважаючи ξ параметром, дістанемо загальний розв'язок ДРЧП (7):

$$U(\xi, \eta) = \int \left[\xi f(\eta) + \frac{\xi^2}{16} \right] d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + \xi f_2(\eta) + \frac{\xi^2 \eta}{16}.$$

Повертаючись в останній рівності до старих незалежних змінних, одержуємо загальний розв'язок рівняння (6)

$$u(x, y) = f_1(y - x) + (y - x)f_2(3y + x) + \frac{(y - x)^2(3y + x)}{16}. \quad (8)$$

Зауваження 1. Наведений вище метод характеристик застосовний також для деяких лінійних ДРЧП параболічного типу, тобто коли в рівнянні (2)

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D}.$$

У цьому випадку, на відміну від рівнянь гіперболічного типу, довільні функції в загальному розв'язку залежатимуть від одного й того ж аргумента.

ПРИКЛАД 2. Зінтегрувати ДРЧП

$$\operatorname{tg} x u_{xx} - 2 \sin x \cos^{-3} x u(x, y) = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. Маємо рівняння параболічного типу, вже задане в канонічному вигляді, яке для зручності інтегрування запишемо як

$$\operatorname{tg} x u_{xx} + \cos^{-2} x u_x - \cos^{-2} x u_x - 2 \sin x \cos^{-3} x u(x, y) = 0.$$

Враховуючи, що $\operatorname{tg}'(x) = \cos^{-2} x$, а $(\cos^{-2} x)' = 2 \sin x \cos^{-3} x$, виділимо в лівій частині останньої рівності частинну похідну:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{tg} x u_x - \cos^{-2} x u) = 0,$$

звідки після інтегрування по x , вважаючи y параметром, дістанемо

$$\operatorname{tg} x u_x - \cos^{-2} x u(x, y) = f_1(y)$$

або

$$u_x - \sin^{-1} x \cos^{-1} x u(x, y) = f_1(y) \operatorname{ctg} x.$$

Інтегруючи вдруге по x , вважаючи y параметром, цього разу як лінійне диференціальне рівняння першого порядку (див. приклад 1), одержимо шуканий загальний розв'язок

$$u(x, y) = e^{\int \frac{2}{\sin 2x} dx} \left(f_1(y) \int \operatorname{ctg} x e^{-\int \frac{2}{\sin 2x} dx} dx + f_2(y) \right) = \operatorname{tg} x f_2(y) - (x \operatorname{tg} x + 1) f_1(y).$$

Зауваження 2. Усі розглянуті в розділі II інтегровні типи є лінійними ДРЧП. Проте в деяких частинних випадках вдається отримати в явному вигляді також розв'язки нелінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку.

ПРИКЛАД 3. Показати, що функція

$$u(t, x) = \ln \left\{ -\frac{8}{\lambda} \cdot \frac{f'(x+t)g'(x-t)}{[f(x+t) + g(x-t)]^2} \right\},$$

де $f(x+t)$, $g(x-t)$ – довільні диференційовні функції, λ – параметр, $\lambda fg < 0$, є розв'язком диференціального рівняння

$$u_{xx} - u_{tt} + \lambda e^{u(t,x)} = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$u_t = \frac{f''(x+t)}{f'(x+t)} - \frac{g''(x-t)}{g'(x-t)} - 2 \frac{f'(x+t) - g'(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)},$$

$$u_x = \frac{f''(x+t)}{f'(x+t)} + \frac{g''(x-t)}{g'(x-t)} - 2 \frac{f'(x+t) + g'(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)},$$

$$u_{tt} = \frac{f'''(x+t)}{f'(x+t)} - \left[\frac{f''(x+t)}{f'(x+t)} \right]^2 + \frac{g'''(x-t)}{g'(x-t)} - \left[\frac{g''(x-t)}{g'(x-t)} \right]^2 -$$

$$- 2 \frac{f''(x+t) + g''(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)} + 2 \left[\frac{f'(x+t) - g'(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)} \right]^2,$$

$$u_{xx} = \frac{f'''(x+t)}{f'(x+t)} - \left[\frac{f''(x+t)}{f'(x+t)} \right]^2 + \frac{g'''(x-t)}{g'(x-t)} - \left[\frac{g''(x-t)}{g'(x-t)} \right]^2 -$$

$$- 2 \frac{f''(x+t) + g''(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)} + 2 \left[\frac{f'(x+t) + g'(x-t)}{f(x+t) + g(x-t)} \right]^2,$$

отже

$$u_{xx} - u_{tt} + \lambda e^{u(t,x)} = 8 \frac{f'(x+t)g'(x-t)}{[f(x+t) + g(x-t)]^2} - \lambda \frac{8}{\lambda} \cdot \frac{f'(x+t)g'(x-t)}{[f(x+t) + g(x-t)]^2} \equiv 0.$$

Вправа. Показати, що функція

$$u(x, y) = \sin[\varphi(x - 2y) + \psi(2x + y)],$$

де $\varphi(x - 2y)$, $\psi(2x + y)$ – довільні диференційовні функції, є розв'язком диференціального рівняння

$$2u_{xx} - 3u_{xy} - 2u_{yy} = \frac{(u_x - 2u_y)(2u_x + u_y)}{u^2 - 1} \cdot u(x, y).$$

❖ Зінтегрувати ДРЧП, задані в канонічному вигляді:

11. $x^3 u_{xx} + 2x^2 u_x - 2xu(x, y) = 0.$

16. $u_{yy} + y^{-1}u_y - y^{-2}u(x, y) + 6xy = 0.$

12. $xu_{xy} + xu_x + yu_y + u(x, y) = 0.$

17. $\operatorname{ch} x(u_{xx} - u(x, y)) = \operatorname{sh} 2x.$

13. $(e^x + e^y)u_{xy} + e^x u_y + e^y u_x(x, y) = 2ye^x.$

18. $\sin y(u_{yy} + u(x, y)) = \sin 2y.$

14. $xu_{xy} + u_y + xu_x + u(x, y) + 6x^2 y = 0.$

19. $u_{xy} - 2u_x - 3u_y + 6u(x, y) = 2e^{x+y}.$

15. $x^{-2}u_{xx} - 6x^{-4}u(x, y) = 2x \ln y.$

20. $(y + \cos^2 x)u_{xy} - \sin 2xu_y + u_x(x, y) = xy.$

❖ Зінтегрувати ДРЧП, попередньо звівши їх до канонічного вигляду:

21. $u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy}(x, y) = 0.$

22. $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0.$

23. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y(x, y) = 0.$

24. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x + 4u_y(x, y) = 0.$

25. $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} - \cos xu_y(x, y) = 0.$

26. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y(x, y) = 0, \quad xy > 0.$

27. $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y(x, y) = 0, \quad y \neq 0.$

28. $u_{xx} - 2xu_{xy} + (2x - 1)u_{yy} - \frac{1}{x-1}(u_x - u_y(x, y)) = 0, \quad x \neq 1.$

29. $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2 u_{yy} - \frac{1}{x+1}(u_x + u_y(x, y)) = 0, \quad x \neq -1.$

30. $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} + \sin^2 xu_{yy} - \operatorname{ctg} x u_x(x, y) = 0.$

31. $x^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 3y^2 u_{yy} + 4xu_x(x, y) = 0.$

32. $u_{xx} - e^{-2x}u_{yy} + u_x(x, y) = 0.$

33. $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} - \cos^2 xu_{yy} + (1 - \cos x)u_y - 0,25u(x, y) = 0.$

34. $\sin^2 xu_{xx} - 2y \sin xu_{xy} + y^2 u_{yy} + 0,5 \sin 2xu_x + yu_y(x, y) = 0, \quad xy \neq 0.$

35. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y(x, y) = 2, \quad u = u(x, y).$

36. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 6x(y + 3x), \quad u = u(x, y).$

37. $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 3u_y = 4e^x, \quad u = u(x, y).$

38. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y = 64x, \quad u = u(x, y).$

39. $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y + 4(3x + y)e^{x+y} = 0, \quad u = u(x, y).$

40. $e^{2x}u_{xx} - 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} + e^{2x}u_x + e^{2y}u_y = 1$, $u = u(x, y)$.
41. $\sin^2 y u_{xx} + 2\sin y u_{xy} + u_{yy} - \operatorname{ctg} y u_y = \sin^4 y$, $u = u(x, y)$.
42. $u_{xx} + 4xu_{xy} - 5x^2u_{yy} - x^{-1}u_x = -1728x^4$, $u = u(x, y)$.
43. $u_{xx} + u_{xy} + (y-x)^{-1}u_x = 1$, $u = u(x, y)$.
44. $xu_{xx} + yu_{yy} + 2u_x + yx^{-1}u_y = -1$, $u = u(x, y)$.
45. $\operatorname{tg} x u_{xx} - \operatorname{ctg} x u_{yy} + \sec^2 x u_x + 8y \operatorname{ctg} x = 0$, $\sin 2x \neq 0$, $u = u(x, y)$.

§3. Задача Коші для рівнянь з двома незалежними змінними

Задача Коші для ДРЧП, як і у випадку звичайних диференціальних рівнянь, полягає у знаходженні такого розв'язку заданого рівняння, який справджував би певні початкові умови. При цьому, як відомо, для звичайних ДР початкові умови задаються в деякій точці. Для ДРЧП з двома незалежними змінними носієм початкових умов є деяка "вільна" крива. Якщо ж додаткові умови для шуканої функції задаються на двох характеристиках ДРЧП, які мають спільну точку перетину, то задача називається **задачею Гурса**, або **характеристичною задачею Коші**.

Щоб розв'язати задачу Коші (Гурса) для ДРЧП другого порядку, необхідно:

- знайти загальний розв'язок заданого ДРЧП (див. §2);
- із загального розв'язку визначити той розв'язок, який задовольняє задані початкові умови або умови на характеристиках.

ПРИКЛАД 1. Знайти розв'язок ДРЧП

$$x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} - 3y^2 u_{yy} (x, y) = 0, \quad xy \neq 0, \quad (9)$$

який справджує початкові умови

$$u(x, 1) = \varphi_0(x), \quad u_y(x, 1) = \varphi_1(x). \quad (10)$$

Розв'язання. Перший етап: знаходимо загальний розв'язок рівняння (9). Для цього зводимо його до канонічної форми. Маємо:

$$y'(x) = x^{-1}(-y \pm 2y), \quad \text{звідки } C_1 = yx^{-1}, \quad C_2 = xy^{1/3}.$$

Вводимо нові незалежні змінні $\xi = yx^{-1}$, $\eta = x\sqrt[3]{y}$. Тоді

$$u_x = -yx^{-2}U_\xi + y^{1/3}U_\eta, \quad u_y = x^{-1}U_\xi + x(3y^{2/3})^{-1}U_\eta,$$

$$u_{xx} = y^2 x^{-4}U_{\xi\xi} - 2x^{-2}y^{4/3}U_{\xi\eta} + y^{2/3}U_{\eta\eta} + 2yx^{-3}U_\xi,$$

$$u_{yy} = x^{-2}U_{\xi\xi} + 2(3y^{2/3})^{-1}U_{\xi\eta} + x^2(9y^{4/3})^{-1}U_{\eta\eta} - 2x(9y^{4/3})^{-1}U_\eta,$$

$$u_{xy} = -yx^{-3}U_{\xi\xi} + 2y^{1/3}(3x)^{-1}U_{\xi\eta} + 3(3y^{1/3})^{-1}U_{\eta\eta} - x^{-2}U_\xi + (3y^{2/3})^{-1}U_\eta.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (9), дістанемо

$$U_{\xi\eta} - \frac{3}{4\eta}U_{\xi} = 0. \quad (11)$$

Рівняння (11) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_{\eta} - \frac{3}{4\eta}U \right) = 0,$$

звідки випливає, що $v(\xi, \eta) \equiv U_{\eta} - 3(4\eta)^{-1}U = f(\eta)$, де $f(\eta)$ – довільна неперервна функція тільки від η . Вважаючи в останньому рівнянні ξ параметром, ми можемо інтегрувати його як звичайне диференціальне рівняння, де довільна стала інтегрування буде функцією параметру ξ . Отже,

$$U(\xi, \eta) = e^{\int 3(4\eta)^{-1}d\eta} \left[f_1(\xi) + \int e^{-\int 3(4\eta)^{-1}d\eta} \cdot f(\eta)d\eta \right] = \eta^{3/4} [f_1(\xi) + f_2(\eta)].$$

Повертаючись в останній рівності до старих незалежних змінних, одержуємо загальний розв'язок рівняння (9)

$$u(x, y) = \sqrt[4]{x^3 y} \left[f_1(yx^{-1}) + f_2(xy^{1/3}) \right] \quad (12)$$

Другий етап: знаходимо розв'язок задачі Коші (9),(10). Для цього функції f_1 та f_2 вибираємо таким чином, щоб для виразу (12) виконувалися умови (10).

Маємо:

$$\begin{cases} u(x,1) \equiv \sqrt[4]{x^3} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] = \varphi_0(x), \\ u_y(x,1) \equiv 0,25\sqrt[4]{x^3} [f_1(x^{-1}) + f_2(x)] + \sqrt[4]{x^3} [x^{-1} f_1'(x^{-1}) + \frac{1}{3} x f_2'(x)] = \varphi_1(x), \end{cases}$$

звідки знаходимо

$$f_2(x) = \frac{3}{4} x^{-3/4} \varphi_0(x) + \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} [\varphi_1(z) - \frac{1}{4} \varphi_0(z)] dz + C,$$

$$f_1(x^{-1}) = \frac{1}{4} x^{-3/4} \varphi_0(x) - \frac{3}{4} \int_{x_0}^x z^{-7/4} [\varphi_1(z) - \frac{1}{4} \varphi_0(z)] dz - C,$$

де x_0, C – довільні сталі. Покладемо в останній рівності $x^{-1} = \zeta$, тоді

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{4} \zeta^{3/4} \varphi_0(x) - \frac{3}{4} \int_{x_0}^{\zeta^{-1}} z^{-7/4} [\varphi_1(z) - \frac{1}{4} \varphi_0(z)] dz - C.$$

Підставивши знайдені функції в (12), одержимо розв'язок задачі Коші (9),(10):

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \left[y \varphi_0(xy^{-1}) + 3 \varphi_0(xy^{1/3}) \right] + \frac{3}{16} \sqrt[4]{x^3 y} \int_{xy^{1/3}}^{xy^{-1}} z^{-7/4} [\varphi_0(z) - 4\varphi_1(z)] dz.$$

При цьому вважаємо, що $\varphi_0(x)$ неперервна разом з похідними до другого порядку включно, а $\varphi_1(x)$ – неперервна разом з першою похідною в розглядуваній області.

ПРИКЛАД 2. Знайти розв'язок ДРЧП (6), який задовольняє початкові умови: а) $u(0, y) = 1$, $u_x(0, y) = y^2$; б) $u(y, y) = 1$, $u_x(y, y) = y^2$.

Розв'язання. У випадку а) початкові умови задані на прямій $x = 0$, яка не є характеристикою рівняння (6). Підставивши загальний розв'язок (8) в умови а), дістанемо:

$$\begin{cases} u(0, y) \equiv f_1(y) + yf_2(3y) + \frac{3y^3}{16} = 1, \\ u_x(0, y) \equiv -f_1'(y) - f_2(3y) + yf_2'(3y) - \frac{5y^2}{16} = y^2. \end{cases}$$

Продиференціювавши перше з рівнянь системи по змінній y і додавши одержану рівність до другого рівняння системи, після інтегрування дістанемо:

$$f_2(3y) = \frac{9y^2}{32} + C = \frac{(3y)^2}{32} + C, \quad f_1(y) = 1 - \frac{15y^3}{32} - Cy,$$

де C – довільна стала. Тоді, згідно з (8), єдиним розв'язком задачі Коші (6а) буде функція

$$u(x, y) = 1 - \frac{15(y-x)^3}{32} - C(y-x) + (y-x) \left[\frac{(3y+x)^2}{32} + C \right] + \frac{(y-x)^2(3y+x)}{16},$$

або, після спрощення, $u(x, y) = 1 + xy^2 + 0,5x^2(x-3y)$.

У випадку б) початкові умови задані на прямій $x = y$, яка є характеристикою рівняння (6). Підставимо загальний розв'язок (8) в умови б). Маємо:

$$\begin{cases} u(y, y) \equiv f_1(0) = 1, \\ u_x(y, y) \equiv -f_1'(0) - f_2(4y) = y^2. \end{cases}$$

Звідси $f_2(4y) = -f_1'(0) - y^2$, і, згідно з (8), задача (6б) матиме безліч розв'язків вигляду

$$u(x, y) = f_1(y-x) + (x-y) \left[f_1'(0) + \frac{(3y+x)^2}{16} \right] + \frac{(y-x)^2(3y+x)}{16},$$

де f_1 – довільна неперервно диференційовна функція, для якої $f_1(0) = 1$.

Зауважимо: якщо перша з умов б) мала б вигляд $u(y, y) = \varphi(y) \neq const$, тоді одержуємо $f_1(0) \equiv const = \varphi(y)$. У цьому випадку задача (6б) не має розв'язку.

Метод Рімана. При інтегруванні ряду задач Коші для ДРЧП гіперболічного типу другого порядку з двома незалежними змінними, заданих у канонічному вигляді, може бути застосований метод, ідея якого належить німецькому математику Георгу Фрідріху Бернгарду Ріману (1826-1866).

Розглянемо задачу: в області $\mathbf{D} = \{(t, x) \mid x_0 < x < x_0 + \alpha, g(x) < t < t_0 + \beta\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (рис. 2), знайти розв'язок рівняння

$$U_{tx} + a(t, x)U_x + b(t, x)U_t + c(t, x)U = f(t, x), \quad (13)$$

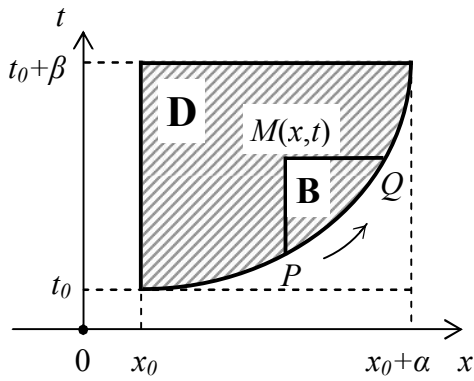


Рис. 2

який на "вільній" кривій $t = g(x)$ ($g'(x) > 0$) задовольняє умови

$$U(g(x), x) = \varphi(x), \quad U_t(g(x), x) = \psi(x). \quad (14)$$

Вважатимемо, що коефіцієнти рівняння (13) і функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ є неперервно диференційовними в області \mathbf{D} , а $f(t, x) \in C(\mathbf{D})$.

Візьмемо в області \mathbf{D} довільну точку $M(x, t)$ і позначимо через \mathbf{B} область, обмежену дугою кривої $t = g(x)$ і двома променями, паралельними осям координат, які виходять з

точки $M(x, t)$ і перетинають криву в точках P і Q (див. рис. 2). Тоді розв'язок задачі Коші (13), (14) подається **формулою Рімана**

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \left[U(Q)V(Q) + U(P)V(P) + \int_{\cup PQ} K d\xi + H d\eta \right] - \iint_{\mathbf{B}} V f(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad (15)$$

де $K(x, t) = UV_x - VU_x - 2bUV$, $H(x, t) = VU_t - UV_t + 2aUV$, а $V(x, t; \xi, \eta)$ як функція точки (ξ, η) , для якої точка (x, t) грає роль параметра, є єдиним розв'язком задачі Гурса

$$V_{\xi\eta} - [a(\xi, \eta)V]_{\xi} - [b(\xi, \eta)V]_{\eta} + c(\xi, \eta)V = 0,$$

$$V(x, t; \xi, t) = \exp\left(\int_x^{\xi} b(\lambda, t) d\lambda\right), \quad V(x, t; x, \eta) = \exp\left(\int_t^{\eta} a(x, \lambda) d\lambda\right) \quad (16)$$

і має назву **функції Рімана**. Зауважимо, що функція Рімана не залежить ні від даних Коші (14), ані від вигляду кривої $t = g(x)$.

ПРИКЛАД 3. За допомогою методу Рімана знайти розв'язок задачі Коші

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty, \quad (17)$$

$$u(x, 1) = x, \quad u_y(x, 1) = x, \quad 0 < x < +\infty \quad (18)$$

Розв'язання. Рівняння (17) в розглядуваній області належить до гіперболічного типу й має дві різні сім'ї характеристик $C_1 = xy$, $C_2 = ux^{-1}$. Ввівши нові незалежні змінні $\xi = xy$, $\eta = ux^{-1}$, дістанемо канонічну форму рівняння (17):

$$U_{\xi\eta} - (2\xi)^{-1} U_{\eta} = 0. \quad (19)$$

Зауважимо, що пряма $y = 1$, яка є носієм початкових умов (18), в нових незалежних змінних матиме вигляд гіперболи $\xi\eta = 1$. Враховуючи співвідношення $x = \xi(\xi\eta)^{-0,5}$, $y = (\xi\eta)^{0,5}$, маємо

$$\begin{aligned} U|_{\xi\eta=1} &= \xi, \quad U_{\xi}|_{\xi\eta=1} = \frac{1}{2} [(\xi\eta)^{-0,5} u_x + \xi^{-1} (\xi\eta)^{0,5} u_y]_{\xi\eta=1} = 1, \\ U_{\eta}|_{\xi\eta=1} &= \frac{1}{2} [\xi(\xi\eta)^{-0,5} u_y - \xi^2 (\xi\eta)^{-1,5} u_x]_{\xi\eta=1} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

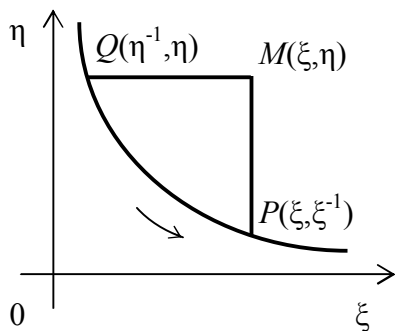


Рис. 3

До задачі Коші (19),(20) застосуємо формулу Рімана (15). Маємо: $a = 0$, $b = -(2\xi)^{-1}$, $c = 0$, $f = 0$. Тому згідно з (15) (див. рис. 3)

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[U(Q)V(Q) + U(P)V(P) + \int_{\cup QP} (VU_\lambda - UV_\lambda - \lambda^{-1}UV) d\lambda - (VU_\mu - UV_\mu) d\mu \right], \quad (21)$$

де функція Рімана $V(\xi, \eta; \lambda, \mu)$ повинна бути розв'язком задачі Гурса (16), яка в даному випадку запишеться у вигляді

$$V_{\lambda\mu} + (2\lambda)^{-1}V_\mu = 0, \quad (22)$$

$$V(\xi, \eta; \lambda, \eta) = \exp\left(-\int_{\xi}^{\lambda} (2\alpha)^{-1} d\alpha\right) = \sqrt{\xi\lambda^{-1}}, \quad V(\xi, \eta; \xi, \mu) = 1. \quad (23)$$

Зінтегрувавши рівняння (22), дістанемо

$$V(\xi, \eta; \lambda, \mu) = \lambda^{-0,5} [f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu)],$$

де $f_1(\xi, \eta, \lambda)$, $f_2(\xi, \eta, \mu)$ – довільні неперервно диференційовні функції. Умови (23) дають

$$f_1(\xi, \eta, \lambda) + f_2(\xi, \eta, \mu) = \sqrt{\xi},$$

а отже, функція Рімана є

$$V(\xi, \eta; \lambda, \mu) = \sqrt{\xi\lambda^{-1}}.$$

Беручи до уваги, що $U(P) = \xi$, $U(Q) = \eta^{-1}$, $V(P) = V(\xi, \eta; \xi, \xi^{-1}) = 1$, $V(Q) = V(\xi, \eta; \eta^{-1}, \eta) = \sqrt{\xi\eta}$, із (21) отримуємо:

$$U(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \left[\xi + \eta^{-1} \sqrt{\xi\eta} + 0,5 \sqrt{\xi} \int_{\eta^{-1}}^{\xi} \lambda^{-0,5} d\lambda \right] = \xi.$$

Повертаючись до старих незалежних змінних x і y , знаходимо шуканий розв'язок задачі Коші (17),(18) $u(x, y) = xy$.

❖ Знайти розв'язки $u(x, y)$ задач Коші:

46. $9u_{xx} = u_{yy}$; $u(0, y) = \sin y$, $u_x(0, y) = 6 \cos y$.

47. $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0$; $u(0, y) = 3y^2$, $u_x(0, y) = 0$.

48. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x + u_y = 0$; $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = 2e^{2x}$.

49. $x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} = 0$, $u(x, 1) = x$, $u_y(x, 1) = 1$.

50. $e^x u_{xy} + u_{yy} = 0$; $u(x, e^{-x}) = 0$, $u_y(x, e^{-x}) = e^{2x}$.

51. $e^x u_{xy} - u_{xx} + u_x = 0$; $u(0, y) = -0,5y^2$, $u_x(0, y) = 0$.

52. $yu_{xx} + x(2y-1)u_{xy} - 2x^2u_{yy} - \frac{y}{x}u_x = 0 \quad (x > 0); \quad u(x,0) = x^2, \quad u_y(x,0) = 1.$

53. $u_{xy} - x^{-1}u_y = 0; \quad u(2y,y) = 4y, \quad u_x(2y,y) = 2.$

54. $u_{xx} + yu_{yy} - 0,5u_y = 0 \quad (y < 0); \quad u(x,-1) = x^2, \quad u_y(x,-1) = -4.$

55. $u_{xy} + u_{yy} = 12; \quad u(x,1) = 0, \quad u_y(x,1) = 0.$

❖ Знайти розв'язки задач Коші з початковими умовами загального вигляду і одержати з них ті, що відповідають заданим початковим функціям:

56. $u_{xx} + 2\cos xu_{xy} - \sin^2 xu_{yy} - \sin xu_y(x,y) = 0;$
 $u(x, \sin x) = \varphi(x), \quad u_y(x, \sin x) = \psi(x) \quad \{\varphi(x) = x + \cos x, \quad \psi(x) = \sin x\}.$

57. $4y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0;$
 $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x) \quad \{\varphi(x) = 4x^3, \quad \psi(x) = 0\}.$

58. $u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0;$
 $u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) = \psi(y) \quad \{\varphi(y) = -2e^y, \quad \psi(y) = 4ye^y\}.$

59. $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0;$
 $u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x) \quad \{\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = -1\}.$

60. $3u_{xx} - 2u_{xy} - 5u_{yy} = 0;$
 $u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) = \psi(y) \quad \{\varphi(y) = y, \quad \psi(y) = 1\}.$

61. $y^2u_{yy} - x^2u_{xx} = 0; \quad u(x,1) = \varphi(x), \quad u_y(x,1) = \psi(x) \quad \{\varphi(x) = 3x, \quad \psi(x) = 6x^2\}.$

❖ Дослідити задачі з початковими умовами на характеристиках:

62. $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad u(x,x) = 4x^2, \quad u_y(x,x) = 2x.$

63. $u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y(x,y) = 0, \quad u(x,-x) = 6x, \quad u_y(x,-x) = 0.$

64. $u_{xy} + u_{yy} = 0, \quad u(0,y) = 2y, \quad u_x(0,y) = 2.$

65. $u_{xy} + \operatorname{tg} xu_y = 4\cos^2 x, \quad u(0,y) = 1, \quad u_x(0,y) = 4y.$

66. $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0 \quad (x \neq 0), \quad u(x,x^{-1}) = 1, \quad u_y(x,x^{-1}) = x.$

67. $yu_{xy} - xu_{xx} - u_x = 2xy^3 \quad (y \neq 0), \quad u(y^{-1},y) = y, \quad u_x(y^{-1},y) = 3.$

68. $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} - 7u_y - 2lu_x = 0, \quad u(3y,y) = 14y, \quad u_x(3y,y) = 18(y+2).$

❖ За допомогою методу Рімана розв'язати задачі Коші:

69. $u_{xy} + \frac{u_y}{y-x} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad x < y < +\infty;$

$u(2y,y) = 4y, \quad u_x(2y,y) = 0, \quad 0 < y < +\infty.$

70. $u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \alpha\beta u = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{const}, \quad \alpha\beta \neq 0, \quad \beta \neq -4\alpha, \quad -\infty < x, y < +\infty.$
 $u(x, 4x) = \alpha, \quad u_y(x, 4x) = \gamma\beta^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty.$
71. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty;$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$
72. $u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty;$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$
73. $u_{tt} = a^2 [(l-x)u_{xx} - u_x], \quad 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < l, \quad l > 0;$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x \leq l.$
74. $u_{yy} = (l^2 - x^2)u_{xx} - 2xu_x - 0,25u, \quad -l < x < l, \quad 0 < y < +\infty;$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -l \leq x \leq l.$

§4. Рівняння з багатьма незалежними змінними

До інтегровних типів ДРЧП другого порядку з n незалежними змінними ($n > 2$) належать лише деякі рівняння параболічного типу, зокрема такі, котрі зводяться до канонічної форми вигляду

$$U_{\xi_1 \xi_1} - U_{\xi_2 \xi_2} = F(\xi_1, \dots, \xi_n, U, U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_n}) \quad (24)$$

(аналог другої канонічної форми для ДРЧП гіперболічного типу з двома незалежними змінними). Підстановка

$$\eta_1 = \xi_1 - \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_k = \xi_k, \quad k = \overline{3, n},$$

зведе рівняння (24) до вигляду

$$U_{\eta_1 \eta_2} = F_1(\eta_1, \dots, \eta_n, U, U_{\eta_1}, \dots, U_{\eta_n}).$$

В деяких окремих випадках одержане рівняння можна зінтегрувати. При цьому довільні функції у загальному розв'язку будуть функціями $(n-1)$ -го аргумента.

❖ Знайти загальний розв'язок $u(x, y, z)$ ДРЧП:

75. $u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - 2u_{yz} + u_x + 0,25u = 0.$
76. $u_{yy} - 4u_{xx} + 4u_{xz} - u_{zz} = 0.$
77. $3u_{yy} - 2u_{xy} - 2u_{yz} = 0.$
78. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0.$
79. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2(u_{xy} + u_{yz} + u_{xz}) - (u_x + u_y + u_z) = 0.$
80. $u_{zz} - u_{xx} - 2u_{xy} - u_{yy} = 2z.$
81. $u_{yy} - 2u_{xx} + 2u_{xz} - 0,5u_{zz} = 4e^{2y+z}.$
82. $u_{zz} - 2u_{xx} + 4u_{yz} + 4u_{yy} = e^{y-2z}.$

§5. Задача Коші для рівняння коливань струни

Застосовуючи викладений вище метод характеристик до побудови розв'язку задачі Коші для рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(x, t), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (25)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (26)$$

одержимо

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (27)$$

Формула (27) називається **формулою Д'Аламбера**.

Розв'язок (27) є суперпозицією прямих та зворотних хвиль, які рухаються відповідно в напрямку осі Ox та в зворотному їй напрямку зі швидкістю a . Фізичну інтерпретацію формули Д'Аламбера, поширення хвиль відхилення та імпульсу див. у [11], с. 37-55.

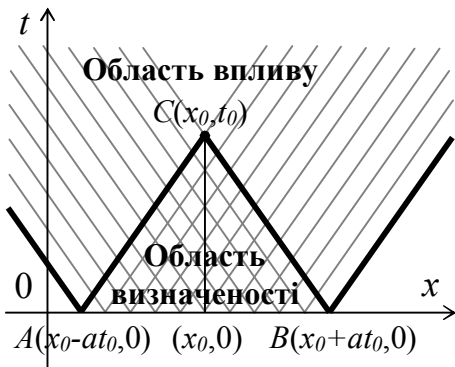


Рис. 4

Із формули Д'Аламбера (27) випливає, що для обчислення розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші (25),(26) в точці (x_0, t_0) достатньо знати початкові відхилення $\varphi(x)$ у двох точках $x = x_0 + at_0$ і $x = x_0 - at_0$, а також початкові швидкості $\psi(x)$ на відрізку $x \in [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Значення функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ зовні зазначеного відрізка не впливають на розв'язок $u(x, t)$ в точці (x_0, t_0) та в усіх внутрішніх точках трикутника ACB (див. рис. 4), обмеженого віссю Ox і характеристиками

$x + at = x_0 + at_0 = const$, $x - at = x_0 - at_0 = const$, які проходять через точку $C(x_0, t_0)$. У зв'язку з цим відрізок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ називають **областю залежності** розв'язку задачі Коші (25),(26) для точки $C(x_0, t_0)$. Сам же трикутник ACB називають **характеристичним**.

Таким чином, якщо $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задані на відрізку $x \in [x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, то розв'язок задачі Коші (25),(26) визначений в характеристичному трикутнику з основою $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Тому трикутник ACB називають **областю визначеності** відрізка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$. Із формули Д'Аламбера видно, що початкові умови на відрізку впливають на розв'язок не тільки в характеристичному трикутнику, але й в області, яка обмежена відрізком $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ і характеристиками $x + at = x_0 - at_0$ та $x - at = x_0 + at_0$. Внаслідок цього зазначену область називають **областю впливу** відрізка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$.

На підставі наведених вище міркувань можемо сказати: струну можна вважати нескінченною, якщо розглядувана точка x_0 знаходиться від кінців струни на віддалі, більшій за at_0 , де t_0 – розглядуваний момент часу.

Зауваження 1. Якщо в (26) $\varphi(x) \notin C^2(-\infty, +\infty)$ або $\psi(x) \notin C^1(-\infty, +\infty)$, то маємо так звані **узагальнені розв'язки** задачі Коші (25),(26), які також даються формулою Д'Аламбера (27). У цьому випадку узагальнений розв'язок $u(x,t)$ може бути і розривною функцією. Розривні розв'язки для рівняння коливання струни і стержня позбавлені фізичного змісту. Однак, таке ж хвильове рівняння справджує тиск $p(x,t)$ газу в довгій вузькій трубці (наприклад, у флейті чи в органній трубці). Функція $p(x,t)$ може бути розривною. Розривні розв'язки хвильового рівняння в газовій динаміці називаються **ударними хвилями**.

ПРИКЛАД 1. За допомогою фазової площини побудувати розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad (28)$$

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \psi(x) = \begin{cases} 2a \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \notin [0; \pi]. \end{cases} \quad (29)$$

Розв'язання. Маємо задачу Коші для рівняння вільних коливань струни (поширення хвиль імпульсу). Запишемо розв'язок згідно формули Д'Аламбера (27) у вигляді

$$u(t, x) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \quad (30)$$

де

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(z) dz = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 2, & x > \pi. \end{cases}$$

Фазова площина для задачі (28), (29) зображена на рис. 5. Чотири характеристики розбивають її на шість зон, позначених римськими цифрами, у кожній з яких пряма і зворотна складові розв'язку (30) визначаються однозначно. Маємо (табл. 1):

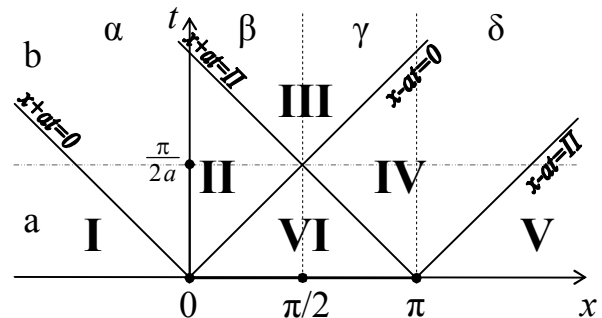


Рис. 5

Таблиця 1

Зона	Область зміни характеристик	Значення $\Psi(x + at)$ і $\Psi(x - at)$	Розв'язок (30)
I	$x \pm at < 0$	$\Psi(x \pm at) = 0$	$u(t, x) = 0$
II	$x - at < 0,$ $0 < x + at < \pi$	$\Psi(x - at) = 0,$ $\Psi(x + at) = 1 - \cos(x + at)$	$u(t, x) = 1 - \cos(x + at)$
III	$x - at < 0,$ $x + at > \pi$	$\Psi(x - at) = 0,$ $\Psi(x + at) = 2$	$u(t, x) = 2$
IV	$0 < x - at < \pi$ $x + at > \pi$	$\Psi(x - at) = 1 - \cos(x - at)$ $\Psi(x + at) = 2$	$u(t, x) = 1 + \cos(x - at)$
V	$x \pm at > \pi$	$\Psi(x \pm at) = 2$	$u(t, x) = 0$
VI	$0 < x \pm at < \pi$	$\Psi(x \pm at) = 1 - \cos(x \pm at)$	$u(t, x) = 2 \sin x \sin(at)$

Результати, одержані в таблиці, можна використати для побудови а) формул, які описують профіль струни в різні моменти часу, а також б) формул, які визначають закони руху точок струни з різними абсцисами. У першому випадку слід виписати розв'язок уздовж горизонтальних смуг $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2a}$ та $t \geq \frac{\pi}{2a}$ (на рис. 5 позначені латинськими літерами), а в другому – уздовж вертикальних півсмуг $x \leq 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ та $x \geq \pi$ (на рис. 5 позначені грецькими літерами).

ПРИКЛАД 2. Зобразити графічно розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) \equiv \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2; 4], \\ 8 - 2x^2, & -2 < x \leq 0, \\ 8 - 2x, & 0 < x < 4, \end{cases} \quad u_t(0, x) = 0.$$

Розв'язання. Коливання струни відбуваються тільки за рахунок початкового зміщення її точок (поширення хвиль відхилення). У цьому випадку розв'язок згідно формули Д'Аламбера (27) запишеться у вигляді

$$u(t, x) = \Phi(x + at) + \Phi(x - at), \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-2; 4], \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 4 - x, & 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

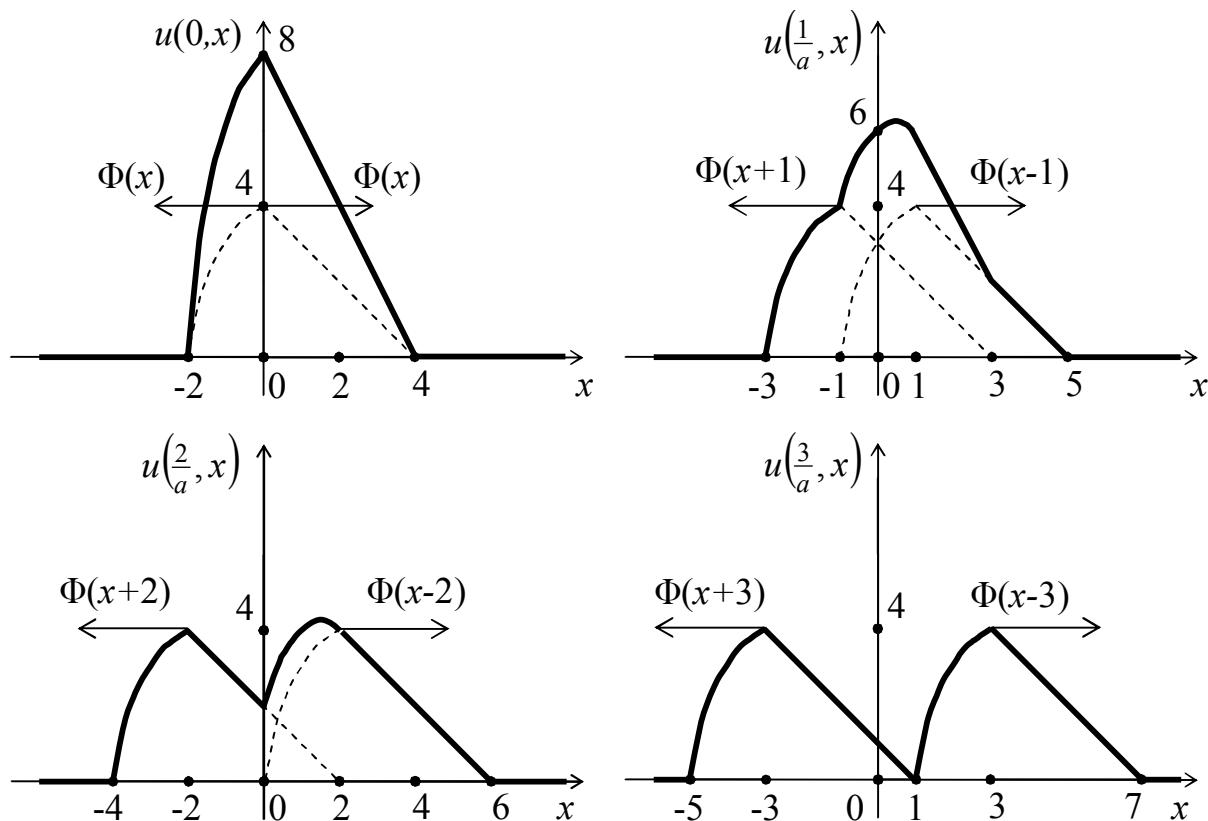


Рис. 6

На рис. 6 шляхом графічного накладання прямої і зворотної хвиль показані профілі струни в моменти часу $t_k = ka^{-1}$, $k = \overline{0,3}$. Очевидно, що при $t > 3a^{-1}$ ті точки струни, через які пройшли хвилі, повертаються в стан спокою.

Зауваження 2. Розв'язок задачі Коші для рівняння вимушених коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

з початковими умовами (26) будується з застосуванням **принципу Дюгамеля** (див. [11], с. 57-59) і дається формулою

$$u(t, x) = U(t, x) + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau,$$

де $U(t, x)$ визначається формулою Д'Аламбера (27).

❖ Розв'язати задачі:

83. Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної нескінченної струни, якщо:

- початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $[-4; 6]$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(-4; 0)$, $(-1; 6)$, $(0; 0)$, $(2; -4)$, $(6; 0)$;
- початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а їх початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжках $[-4; -1]$ і $[2; 6]$, де вона набуває сталого значення $2a$;
- початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжках $(-6; -2)$ і $(2; 6)$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(-6; 0)$, $(-4; 4)$, $(-2; 0)$, $(2; 0)$, $(4; -4)$, $(6; 0)$.
- початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $[-6; 0]$, де вона набуває сталого значення $-a$, і проміжку $[0; 4]$, де вона рівна $2a$.

84. За допомогою фазової площини знайти розв'язок задачі Коші для рівняння вільних коливань однорідної струни, якщо:

- початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а їх початкове відхилення описується функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 4, \\ 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right), & x \in (-4; 4). \end{cases}$$

- початкове відхилення точок струни рівне нулеві, а їх початкова швидкість описується функцією ($h = \text{const} > 0$)

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > h, \\ 8a, & x \in (0; h], \\ -8a, & x \in [-h; 0] \end{cases}$$

- в) початкове відхилення точок струни рівне нулевi, а їх початкова швидкiсть описується функцією ($c = \text{const} > 0$)

$$\psi(x) = \begin{cases} 6ac^{-2}x(2c-x), & c \leq x \leq 2c, \\ 0, & x \notin [c; 2c] \end{cases}$$

- г) початкова швидкiсть точок струни рiвна нулевi, а початкове відхилення описується функцією ($l = \text{const} > 0$)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0,01(l-x), & 0 \leq x \leq l, \\ 0,01(l+x), & -l \leq x < 0, \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$$

85. Записати формули, якi описують профiль однорiдної нескiнченої струни у процесi вiльних коливань в рiзні моменти часу $t > 0$, якщо

- а) початкове відхилення вiдмiнне вiд нуля тiльки на промiжку $(0; 2\pi)$, де воно рiвне $4 \sin x$, а початкова швидкiсть точок струни рiвна нулевi.

- б) початкове відхилення точок струни рiвне нулевi, а їх початкова швидкiсть описується функцією

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 4, \\ 2a, & x \in [-4; 4] \end{cases}$$

- в) в початковий момент часу струна ($a = 0,5$) займала прямолинійне положення, а початкова швидкiсть її точок описується функцією

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 2\pi], \\ 8 \sin 2x, & x \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

- г) в початковий момент часу швидкiсть точок струни була рiвна нулевi, а їх початкове відхилення описувалося функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 3, \\ 9 - x^2, & x \in [-3; 3] \end{cases}$$

86. Записати формули, якi визначають закон руху точок однорiдної нескiнченої струни з рiзними абсцисами у процесi вiльних коливань, якщо

- а) в початковий момент часу струна ($a = 1$) займала прямолинійне положення, а початкова швидкiсть її точок описується функцією

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0; 4], \\ 2x, & x \in [0; 4] \end{cases}$$

- б) початкова швидкiсть точок струни рiвна нулевi, а їх початкове відхилення описується функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{2}, \\ 8 \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

- в) в початковий момент часу струна ($a = 0,25$) займала прямолінійне положення, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки для точок із проміжку $(0;l)$, де вона набуває сталого значення $0,01a$ ($l = const > 0$).
- г) початкова швидкість точок струни рівна нулеві, а їх початкове відхилення описується функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{6} - x, & 0 \leq x \leq 6, \\ 0, & x \notin [0;6] \end{cases}$$

87. Вивчити процес вимушених коливань однорідної ($a = 1$) нескінченної струни, якщо:
- а) коливання відбуваються тільки за рахунок дії на струну неперервно розподіленої зовнішньої сили інтенсивності Ae^{-t-x} , $A = const \neq 0$;
- б) коливання відбуваються за рахунок дії неперервно розподіленої по струні зовнішньої сили інтенсивності $12(t+x)$ і початкового відхилення точок струни, заданого функцією $6\cos 2x$;
- в) коливання відбуваються за рахунок дії неперервно розподіленої по струні зовнішньої сили інтенсивності $24t^2x$ і початкової швидкості точок струни, яка рівна $4\sin x$.

§6. Задачі Коші для хвильових рівнянь на площині та в просторі

Хвильове рівняння в тривимірному просторі має вигляд

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, M), \quad t > 0, \quad M = M(x, y, z) \in E_3, \quad a^2 > 0, \quad (31)$$

де $E_3 = \{(x, y, z) | -\infty < x, y, z < +\infty\}$, а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Рівняння вигляду (31) описують процеси гідродинаміки, теорії пружності, поширення звукових та електромагнітних хвиль тощо.

Будемо шукати розв'язки рівняння (31) у вигляді [7]

$$u(t, M) = f(bt + \xi x + \eta y + \zeta z) = f(bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle), \quad (32)$$

де $\vec{P} = (\xi, \eta, \zeta) \neq \vec{0}$, $\langle \vec{P}, \vec{M} \rangle = \xi x + \eta y + \zeta z$.

У зв'язку з тим, що

а) при фіксованому $t = t_0$ поверхні рівня $u(t_0, M) = const$ є площинами

$$bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle = C,$$

перпендикулярними векторові \vec{P} ;

б) при різних значеннях $t = t_0, t_1$ функція $u(t_1, M)$ відрізняється від функції $u(t_0, M)$ зсувом на вектор

$$-|\vec{P}|^{-2} \cdot \vec{P} \cdot b(t_1 - t_0),$$

тобто

$$\begin{aligned} u(t_0, \vec{M} + \vec{P} \cdot |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0)) &= f(bt_0 + \langle \vec{P}, \vec{M} + \vec{P} \cdot |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0) \rangle) = \\ &= f(bt_0 + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle + \langle \vec{P}, \vec{P} \rangle |\vec{P}|^{-2} b(t_1 - t_0)) = f(bt_1 + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle) = u(t, M), \end{aligned} \quad (33)$$

то функція (32) називається **плоскою хвилею**, яка рухається вздовж напрямку вектора $-\vec{P}$ зі швидкістю $v = |\vec{P}|^{-1} b$.

Вираз $bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle$ називається **фазою хвилі** (32), а f – **формою хвилі**.

Позначивши одиничний вектор напрямку $-\vec{P}$ через $\vec{\omega} = -|\vec{P}|^{-1} \cdot \vec{P}$, функцію (32) можемо подати у вигляді

$$u(t, M) = f(v|\vec{P}|t - \langle \vec{\omega}, \vec{M} \rangle |\vec{P}|) = f(vt - \langle \vec{\omega}, \vec{M} \rangle) = g(vt - \langle \vec{\omega}, \vec{M} \rangle),$$

де $g(Q) = f(Q|\vec{P}|)$, $|\vec{\omega}| = 1$.

Підставивши (32) у (31), одержимо:

$$f''(bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle) b^2 = a^2 f''(bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle) (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

Звідси, вважаючи, що $f''(Q) \neq 0$, маємо

$$b^2 = a^2 |\vec{P}|. \quad (34)$$

Розв'язки цього рівняння – вектори $\vec{N} = (P, b) \in \mathbf{E}_4$, які лежать на конусі $\mathbf{K} \subset \mathbf{E}_4$, основою якого є сфера $|\vec{P}| = ba^{-1}$.

Означення. Вектор $\vec{N} = (\xi, \eta, \zeta, b) \in \mathbf{E}_4$, $\vec{N} \neq \vec{0}$, який задовольняє рівняння (34), називається **характеристичною нормаллю** хвильового рівняння (31).

Гіперплощина $N^\perp = \{(t, M) \in \mathbf{E}_4 | bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle = \text{const}\}$, перпендикулярна до деякої характеристичної нормалі \vec{N} , називається **характеристичною гіперплощиною** хвильового рівняння (31).

Гіперповерхня в \mathbf{E}_4 називається **характеристичною**, якщо в кожній точці її дотична гіперплощина є характеристичною.

На підставі характеристичного рівняння (33) і рівняння (34) швидкість поширення всіх плоских хвиль, які справджують рівняння (31), рівна a :

$$v^2 = |\vec{P}|^{-1} b^2 = a^2. \quad (35)$$

Має силу і обернене твердження: для довільного вектора $\vec{N} \in \mathbf{E}_4$, який справджує рівняння (34), плоска хвиля (32) є розв'язком рівняння (31) при довільній функції $f(Q)$. В частинному випадку $f(Q)$ може бути й розривною, або функцією, яка швидко змінюється в деякій точці, наприклад, $z = 2$. Тоді розв'язок (32) матиме той же розрив уздовж усієї гіперплощини в \mathbf{E}_4 ($\vec{P} \neq \vec{0}$):

$$bt + \langle \vec{P}, \vec{M} \rangle = 2. \quad (36)$$

При фіксованому t цей розрив розміщений на площині в \mathbf{E}_3 з рівнянням (36). З ростом t ця площина рухається в напрямку перпендикулярного до неї вектора $-\vec{P}$ зі швидкістю $v = a = |\vec{P}|^{-1} b$.

Звідси можна зробити висновок:

1) довільна характеристична гіперплощина може бути поверхнею розриву розв'язку рівняння (31);

2) всі плоскі хвилі і розриви цих хвиль, які справджують рівняння (31), поширюються зі швидкістю a .

Можна показати, що всі розв'язки рівняння (31) є хвилями, які поширюються зі швидкістю a . З формулою (35) пов'язане відкриття електромагнітної природи світла і спеціальної теорії відносності.

Розглянемо задачу Коші: в просторі функцій $C^2(\mathbf{D} = (0, +\infty) \times \mathbf{E}_3)$ знайти розв'язок диференціального рівняння (31) при початкових умовах

$$u(0, M) = \varphi(M), \quad u_t(0, M) = \psi(M), \quad M \in \mathbf{E}_3, \quad (37)$$

де $\varphi(M) \in C^3(\mathbf{E}_3)$, $\psi(M) \in C^2(\mathbf{E}_3)$.

Як відомо, єдиний розв'язок задачі (15), (21) дається **формулою Кірхгофа**:

$$u(t, M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} ds + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}(x, y, z)} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t} ds, \quad (38)$$

де $S_{at}(x, y, z)$ – сфера радіуса at із центром у точці $M(x, y, z)$:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = (at)^2.$$

ПРИКЛАД 1. Знайти де $u(t, M) \equiv 0$ при значеннях $t=1, 2, 3, 4$, якщо $\varphi(M) = \psi(M) \equiv 0$ при $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 1$.

Розв'язання. Із формули (38) випливає: якщо сфера $S_{at}(x, y, z)$ не перетинається з областю $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq 1$, то $u(t, M) \equiv 0$. Ця умова еквівалентна тому, що $at + 1 > r$ (рис. 7а) або $at > r + 1$ (рис. 7б).

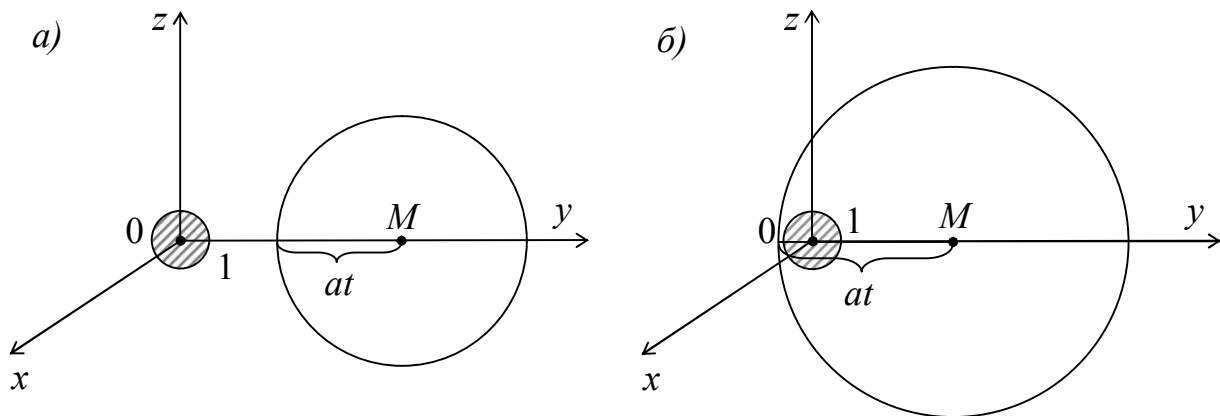


Рис. 7

Таким чином, маємо:

$$t=1 \Rightarrow r > a+1, \quad t=2 \Rightarrow r > 2a+1, \quad t=3 \Rightarrow r > 3a+1, \quad t=4 \Rightarrow r > 4a+1;$$

$$t=1 \Rightarrow r < a-1, \quad t=2 \Rightarrow r < 2a-1, \quad t=3 \Rightarrow r < 3a-1, \quad t=4 \Rightarrow r < 4a-1 \quad (a \geq 1).$$

З останніх нерівностей і формули Кірхгофа (38) випливає, що $u(t, M)$ має вигляд сферичної хвилі, яка зосереджена в кульовому шарі товщини 2 (рис. 8):

$$\begin{aligned} t=1 &\Rightarrow a-1 < r < a+1; & t=2 &\Rightarrow 2a-1 < r < 2a+1; \\ t=3 &\Rightarrow 3a-1 < r < 3a+1; & t=4 &\Rightarrow 4a-1 < r < 4a+1. \end{aligned} \quad (39)$$

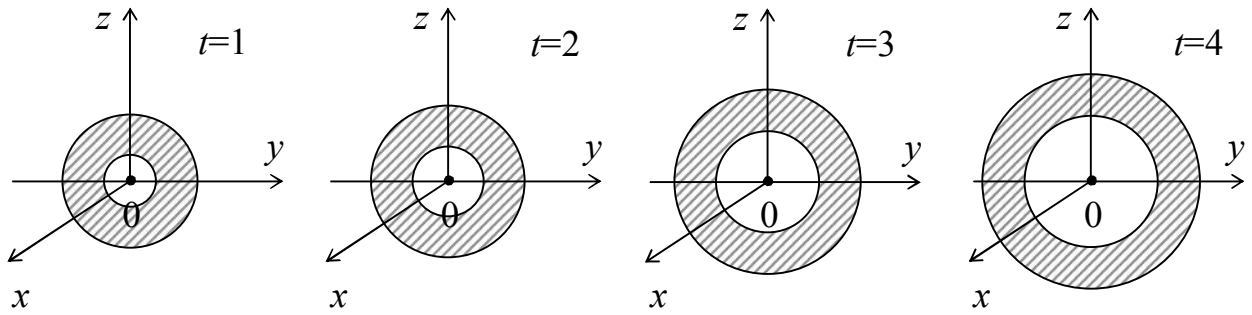


Рис. 8

Висновок:

1. Зовні кульових шарів (39) $u(t, M) \equiv 0$ (зрозуміло, що $u(t, M)$ може перетворюватися в нуль і всередині цих шарів).
2. Сферичні хвилі мають два фронти, які поширюються зі швидкістю a : передній $r = at + 1$ і задній $r = at - 1$.

ПРИКЛАД 2. Знайти де $u(t, M) \equiv 0$ при значеннях $t=1, 2, 3, 4, 5$, якщо $\varphi(M) = \psi(M) \equiv 0$ при $r < 2$ або $r > 4$.

Розв'язання. В даному випадку $u(t, M) \equiv 0$ при трьох можливих положеннях сфери $S_{at}(x, y, z)$, а саме, коли $4 + at < r$, $r + at < 2$, $4 + r < at$ (див. на рис. 9 випадки I, II, III відповідно).

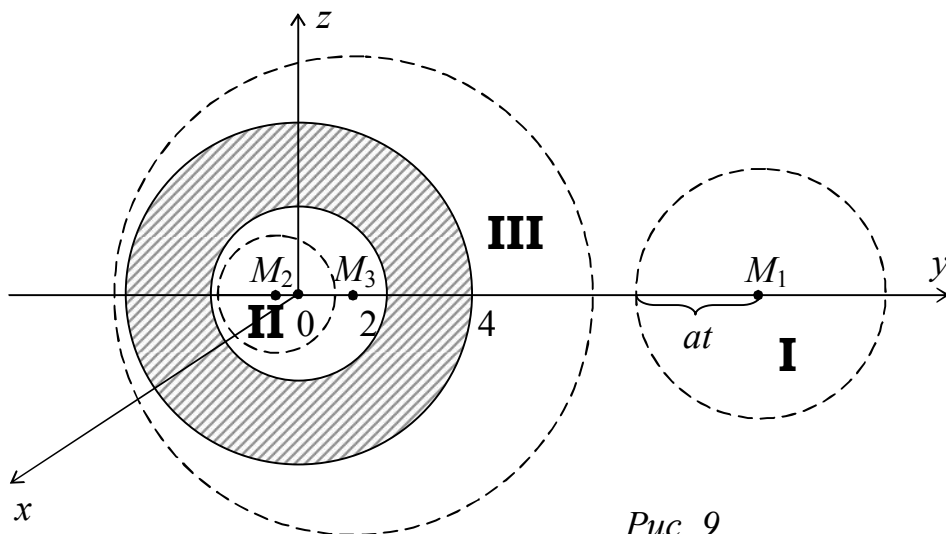


Рис. 9

При $t=1, a=1$ сфера $S_{at}(x, y, z)$ має радіус 1 і для неї можливі тільки випадки I і II. Внаслідок цього функція $u(1, M)$ зосереджена в кульовому шарі $1 \leq r \leq 5$ (рис. 10а).

При $t=2$ і $a=1$ радіус сфери інтегрування рівний 2, а отже, можливий тільки випадок I, тобто хвиля займає кулю $r \leq 6$ (рис.10б). Якщо $t=3, 4$ і $a=1$, то можливий також тільки випадок I, тобто хвиля займає кулі відповідно радіусів $r=7$ і $r=8$.

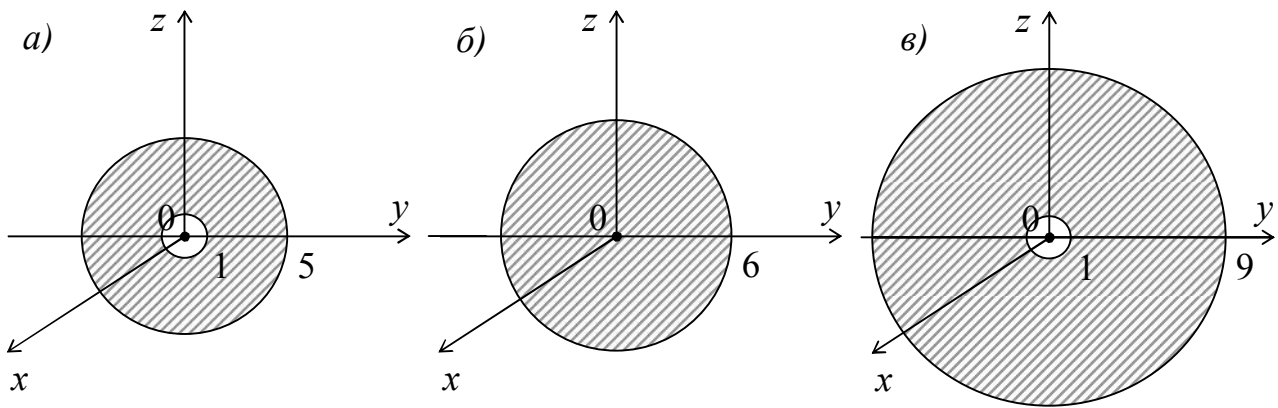


Рис. 10

При $t=5$ і $a=1$ можливі випадки I і III. Таким чином, функція $u(5, M)$ зосереджена в кульовому шарі $1 \leq r \leq 9$ (рис. 10в).

Як бачимо, $u(t, M)$ при $t > 4$ є сферичною хвилею, яка займає кульовий шар товщини 8.

Зауважимо, що у випадку двовимірного простору, тобто коли точка $M = M(x, y)$, розв'язок задачі Коші (31), (37) дається **формулою Пуассона**

$$u(t, M) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathbf{K}_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\mathbf{K}_{at}(x, y)} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}, \quad (40)$$

де $\mathbf{K}_{at}(x, y)$ – круг: $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \leq (at)^2$.

Формулу Пуассона (40) можна одержати із формули Кірхгофа (38) за допомогою так званого **методу спуску** (використовуючи незалежність функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ від змінної z).

Застосовуючи принцип Дюгамеля, переконуємося, що розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, M) + f(t, M), \quad t > 0, \quad M = M(x, y, z) \in \mathbf{E}_3, \quad (41)$$

$$u(0, M) = 0, \quad u_t(0, M) = 0, \quad M \in \mathbf{E}_3,$$

де $f(t, M) \in C^2(\mathbf{D})$, подається у вигляді

$$u(t, M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{\mathbf{D}_{at}(M)} \frac{f\left(t - \frac{\rho}{a}, \alpha, \beta, \gamma\right)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma,$$

де $\rho = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}$, а $\mathbf{D}_{at}(M)$ – куля радіуса at із центром у точці $M(x, y, z)$.

Зауважимо, що у випадку двовимірного простору, тобто коли точка $M = M(x, y)$, розв'язок задачі Коші (41) дається формулою

$$u(t, M) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \iint_{\mathbf{K}_{a(t-\tau)}(M)} \frac{f(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} d\tau,$$

де $\mathbf{K}_{a(t-\tau)}(M)$ – круг радіуса $a(t-\tau)$ з центром у точці $M(x, y)$.

ПРИКЛАД 3. Розв'язати задачу Коші для двовимірного так званого *телеграфного рівняння*:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u + k^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{E}_2, \\ u(0, x, y) &= \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{E}_2, \end{aligned} \quad (42)$$

де $\varphi(M) \in C^3(\mathbf{E}_2)$, $\psi(M) \in C^2(\mathbf{E}_2)$, $f(t, x, y) \in C^2((0, +\infty) \times \mathbf{E}_2)$.

Розв'язання. Розв'язок задачі (42) будемо методом введення нової незалежної змінної. Справді, легко бачити: якщо $u(t, x, y)$ є розв'язком задачі (42), то функція $v(t, x, y, z) = e^{ka^{-1}z} \cdot u(t, x, y)$ повинна бути розв'язком задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 \Delta v(t, x, y, z) + e^{ka^{-1}z} \cdot f(t, x, y), \\ v(0, x, y, z) &= e^{ka^{-1}z} \cdot \varphi(x, y), \quad v_t(0, x, y, z) = e^{ka^{-1}z} \cdot \psi(x, y). \end{aligned} \quad (43)$$

Але задача Коші (43) має єдиний розв'язок

$$\begin{aligned} v(t, x, y, z) &= \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\mathbf{S}_{at}(x, y, z)} \frac{e^{ka^{-1}\zeta} \cdot \psi(\xi, \eta)}{t} ds + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathbf{S}_{at}(x, y, z)} \frac{e^{ka^{-1}\zeta} \cdot \varphi(\xi, \eta)}{t} ds + \\ &+ \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{\mathbf{D}_{at}(x, y, z)} \frac{e^{ka^{-1}\gamma} f\left(t - \frac{\rho}{a}, \alpha, \beta\right)}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma. \end{aligned}$$

Поділивши останню рівність на $e^{ka^{-1}z}$, дістанемо розв'язок задачі (42). Аналогічно можна побудувати розв'язок задачі Коші і у випадку одновимірного телеграфного рівняння.

❖ Розв'язати задачі:

88. Показати, що вказані функції описують процес поширення хвиль, і знайти швидкість хвилі:

а) $U(t, x, y, z) = \varphi(m_1 x + m_2 y + m_3 z + mt)$, де $m_1, m_2, m_3, m > 0$ – задані сталі;

б) $U(t, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 t^2$, де $b > 0$ – задана стала;

в) $U(t, x, y, z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t)^3$, де $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ – задані сталі.

89. Вивчити процес вільних коливань однорідної нескінченної мембрани, якщо:

а) в початковий момент часу швидкість точок мембрани була рівна нулеві, а їх відхилення було рівне $15x^3$;

б) в початковий момент часу швидкість її точок рівна $6y^2$, а початкове відхилення рівне нулеві;

- в) початкове відхилення точок мембрани рівне $x^2 y^2$, а їх початкова швидкість рівна нулеві;
 г) початкове відхилення точок мембрани рівне нулеві, а їх початкова швидкість рівна $x^2 + 2y$.

90. Вивчити процес вимушених коливань однорідної нескінченної мембрани, якщо початкові відхилення та швидкість її точок рівні нулеві, а інтенсивність зовнішніх сил рівна $4x$.

91. Вивчити процес поширення звукових хвиль (вільних коливань газу), якщо:

- а) початкове відхилення точок простору ($x \neq 0, x^2 \neq a^2 t^2$) рівне x^{-1} , а їх початкова швидкість рівна нулеві;
 б) в початковий момент часу відхилення точок простору рівне нулеві, а їх початкова швидкість рівна $3ux$;
 в) початкове відхилення точок простору рівне x^2 , їх початкова швидкість стала й рівна $2a$, а інтенсивність зовнішніх сил дорівнює $8a^3 t$ (a – стала, яка фігурує у відповідному хвильовому рівнянні).

92. За допомогою введення нової незалежної змінної (див. приклад 3) знайти розв'язок задачі Коші:

$$u_{tt} = u_{xx} - bu_t + cu(t, x) + f(t, x), \quad b, c = \text{const} \geq 0, \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

93. Розв'язати задачі Коші для тривимірного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x, y, z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in E_3,$$

з початковими умовами:

$$\text{а) } u(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad u_t(0, x, y, z) = 0;$$

$$\text{б) } u(0, x, y, z) = 0, \quad u_t(0, x, y, z) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases}$$

$$\text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_0 = \text{const} > 0.$$

94. Із розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 \Delta u \pm c^2 u(t, x, y) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in E_2,$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in E_2,$$

методом спуску одержати розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \pm c^2 u(t, x) + f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

95. Довести, що

а) для існування в рівнянні

$$u_{tt}(t, M) = a^2 \Delta u(t, M) + cu(t, M), \quad M = M(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (44)$$

плоских хвиль $u(t, M) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - bt\right)$, де $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, довільної форми, які

поширюються зі швидкістю a в довільних напрямках, необхідно й достатньо, щоб $c = 0$;

б) при $c \neq 0$ в рівнянні (44) існують плоскі хвилі довільних напрямків поширення і довільних швидкостей, не рівних a , однак їх форма не може бути довільною, а є розв'язком диференціального рівняння

$$(a^2 - b^2)f''(Q) + cf(Q) = 0, \quad Q = \sum_{i=1}^n a_i x_i - bt.$$

96. Шляхом суперпозиції плоских хвиль із фронтом, паралельним осі Oz , вигляду $f(at - \alpha x - \beta y)$, де α і β – напрямні косинуси нормалі до фронту хвилі, одержати циліндричні хвилі

$$\psi(t, r) = \int_{at-r}^{at+r} \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{r^2 - (at - \xi)^2}},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Знайти явний вираз для $\psi(t, r)$ при умові, що

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < -r_0, \\ u_0 = \text{const}, & -r_0 \leq \xi \leq r_0, \\ 0, & r_0 < \xi < +\infty. \end{cases}$$

Вказівка. Покласти $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$, і зінтегрувати по θ в межах від 0 до π , після чого зробити заміну змінної інтегрування.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ II

Варіант	Завдання №1	Завдання №2	Завдання №3
	Зінтегрувати ДРЧП:	Знайти розв'язок $u(x, y)$ задачі Коші:	Знайти закон вільних коливань однорідної нескінченної струни (записати формули, які описують профіль струни при $t > 0$ і закон руху точок струни з різними абсцисами) та побудувати на рисунку її профіль в різні моменти часу, якщо:
1	$u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + 2u_y(x, y) = 0.$	$y^2 u_{yy} - x^2 u_{xx} = 0,$ $u(x, 1) = 8\sqrt{x}, \quad u_y(x, 1) = 0.$	струна збуджена локальним початковим відхиленням, яке має форму параболи $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x > c, \\ h(1 - c^{-2}x^2), & x < c, \end{cases}$ де $c, h = const > 0$.
2	$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy}(x, y) = 0.$	$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2)u_{xy} - u_{yy} - 2y(1 + y^2)^{-1}(2u_x - u_y) = 0,$ $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x).$	початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > l, \\ 0,01a, & 0 \leq x \leq l, \\ -0,01a, & -l \leq x < 0. \end{cases}$ де $l = const > 0$.
3	$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y(x, y) = 0.$	$x^2 u_{xx} - 4xyu_{xy} + 3y^2 u_{yy} + 4xu_x = 0,$ $u(x, 1) = x^2, \quad u_y(x, 1) = 1.$	початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > l, \\ 0,01(l - x), & 0 \leq x \leq l, \\ 0,01(l + x), & -l \leq x < 0, \end{cases}$ де $l = const > 0$.

<p>4</p>	$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y(x, y) = 0.$	$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0,$ $u(0, y) = \varphi(y), \quad u_x(0, y) = \psi(y).$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 2, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$
<p>5</p>	$(x^2 + \cos y)u_{xy} + 2xu_y - \sin y u_x(x, y) = 0.$	$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} + u_x - u_y = 0,$ $u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 2.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни задається рівністю</p> $u(0, x) = h^2 x^{-1} \sin x, \quad h = \text{const} \neq 0.$
<p>6</p>	$3u_{xx} - 10u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x - 4u_y - \frac{5}{16}u(x, y).$	$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$ $u(x, \sin x) = x + \cos x,$ $u_y(x, \sin x) = \sin x.$	<p>початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [0; l]$, $l = \text{const} > 0$, де вона рівна $0,01a$.</p>
<p>7</p>	$e^y u_{xy} + u_{yy} + e^{2y} u_x + (e^y - 1)u_y(x, y) = 0.$	$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$ $u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 2x.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x \in [c; 2c]$, $c = \text{const} > 0$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(c; 0)$, $(1,5c; 2)$, $(2c; 0)$.</p>
<p>8</p>	$u_{xx} - (2x + 1)u_{yy} - 2xu_{xy} = (x + 1)^{-1}(u_x + u_y(x, y)), \quad x \neq -1.$	$u_{xy} + u_{yy} = 0,$ $u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 3x.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [-c; c]$, $c = \text{const} > 0$, де вона рівна 4.</p>
<p>9</p>	$3u_{xx} + 10u_{xy} + 3u_{yy} + u_x + u_y + \frac{1}{16}u(x, y) - 16xe^{\frac{x+y}{16}} = 0.$	$e^x u_{xy} + u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = -3.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x \in [-2c; -c] \cup [c; 2c]$, $c = \text{const} > 0$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках: $(-2c; 0)$, $(-1,5c; 2)$, $(-c; 0)$, $(c; 0)$, $(1,5c; 2)$, $(2c; 0)$.</p>

<p>10</p>	$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y(x, y) = 0.$	$2u_{xy} - u_{yy} = 0,$ $u(x, -x) = 5x, \quad u_y(x, -x) = e^{-x}.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0,5hc^{-2}x(2c-x), & c \leq x \leq 2c, \\ 0, & x \notin [c; 2c], \end{cases}$ <p>де $c, h = const > 0$.</p>
<p>11</p>	$e^y u_{xy} + u_{yy} - u_y(x, y) = 0.$	$3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0,$ $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x).$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни</p> $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 2, \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$
<p>12</p>	$u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y(x, y) = 4e^x.$	$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0,$ $u(x, 0) = -0,5x^2,$ $u_y(x, 0) = -\sin x.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 4, \\ 50^{-1}a, & 0 \leq x \leq 4, \\ -50^{-1}a, & -4 \leq x < 0. \end{cases}$
<p>13</p>	$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y(x, y) = 0.$	$u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0,$ $u\left(x, \frac{x}{2}\right) = 2 - x, \quad u_y\left(x, \frac{x}{2}\right) = 0.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення</p> $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > \frac{\pi}{2}, \\ 2 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$
<p>14</p>	$u_{xx} - 6u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 2u_y(x, y) + 4e^{5x+1,5y} = 0.$	$u_{xx} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - 2 \sin x u_{xy} - \cos x u_y = 0,$ $u(x, \cos x) = \sin x,$ $u_y(x, \cos x) = 0,5e^x.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість має стале значення ψ_0 на проміжку струни $x \in [x_1; x_2]$, і рівна нулеві зовні цього проміжку.</p>

<p>15</p>	$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 u_x) = x^2 u_{yy}(x, y).$	$4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - 2y(1 + y^2)^{-1}(2u_x - u_y) = 0,$ $u(x, 0) = 4x^3, \quad u_y(x, 0) = 0.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $x \in [0; \pi]$, де воно рівне $2 \sin x$.</p>
<p>16</p>	$u_{xx} - e^{2(x-y)} u_{yy} - u_x + e^{2(x-y)} u_y(x, y) + 8e^{2x+y} = 0.$	$3u_{xx} - 2u_{xy} - 5u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 1.$	<p>початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0,01a, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x \notin [0; l], \end{cases}$ <p>де $l = \text{const} > 0$.</p>
<p>17</p>	$u_{xx} - (3 + \sin^2 x) u_{yy} - 2 \cos x u_{xy} + u_x + (\sin x - \cos x - 2) \times u_y(x, y) = 0.$	$u_{xy} + u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 2.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями</p> $u(0, x) = \begin{cases} 2h \frac{x_1 - x}{x_1 + x_2}, & x_1 \leq x \leq \frac{x_1 - x_2}{2}, \\ 2h \frac{x_2 - x}{3x_2 - x_1}, & \frac{x_1 - x_2}{2} < x \leq x_2 < 0, \\ 0, & x \notin [x_1; x_2], \end{cases}$ <p>де $h = \text{const} > 0$.</p>
<p>18</p>	$(x - y) u_{xy} - u_x + u_y(x, y) = 0.$	$(1 + x^2) u_{xx} - (1 + y^2) u_{yy} + x u_x - y u_y = 0,$ $u(x, 0) = 2x^2, \quad u_y(x, 0) = x.$	<p>початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} v_0 = \text{const}, & -l \leq x \leq 0, \\ 0, & x \notin [-l; 0], \end{cases}$ <p>де $l = \text{const} > 0$.</p>
<p>19</p>	$e^y u_{xy} + \cos x u_{yy} - \cos x u_y(x, y) = 0.$	$u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = -3.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення точок струни задається рівністю</p> $u(0, x) = 4x^{-1} \sin x.$

<p>20</p>	$u_{xy} + yu_y + u(x, y) = 0.$	$u_{xx} + 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (\sin x + \cos x + 1)u_y = 0,$ $u(x, -\cos x) = 1 + 2 \sin x,$ $u_y(x, -\cos x) = \sin x.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > h, \\ 0,02, & 0 \leq x \leq h, \\ -0,02, & -h \leq x < 0, \end{cases}$ <p>де $h = const > 0$.</p>
<p>21</p>	$u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu(x, y) = 0.$	$yu_{xx} - (x + y)u_{xy} + xu_{yy} + \frac{x + y}{y - x}(u_x - u_y) = 0, \quad x \neq y,$ $u(x, 0) = x^3, \quad u_y(x, 0) = 0.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями</p> $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 0,01(1 - x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0,01(1 + x), & -1 \leq x < 0. \end{cases}$
<p>22</p>	$u_{xx} - e^{-2x}u_{yy} + u_x(x, y) = 0.$	$u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0,$ $u(x, \sin x) = \varphi_0(x),$ $u_y(x, \sin x) = \varphi_1(x).$	<p>початкове відхилення рівна нулеві, а початкова швидкість точок струни</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 2, \\ 4, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$
<p>23</p>	$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + 2u_x + 6u_y(x, y) = 0.$	$u_{xx} - (3 + \cos^2 x)u_{yy} - 2 \sin x u_{xy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x)u_y = 0.$ $u(x, \cos x) = 0,$ $u_y(x, \cos x) = e^{-0,5x} \cos x.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення задається рівностями</p> $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > l, \\ 2h(1 - l^{-2}x^2), & -l \leq x \leq l, \end{cases}$ <p>де $l, h = const > 0$.</p>
<p>24</p>	$u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y(x, y) = 0.$	$x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0,$ $u(x, 1) = 3x, \quad u_y(x, 1) = 6x^2.$	<p>початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [0; 2]$, де вона рівна 50^{-1}.</p>

<p>25</p>	$u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2u_{yy} - u_y(x, y) = 0, \quad x \neq 0.$	$u_{xy} + u_y = 0,$ $u(x, x) = \sin x, \quad u_y(x, x) = e^x.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки на проміжку $x \in [1;2]$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках $(1;0)$, $(1,5;4)$, $(2;0)$.</p>
<p>26</p>	$u_{xy} + xu_x + u(x, y) + \cos y = 0.$	$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0,$ $u(0, y) = 0, \quad u_x(0, y) = 3y.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість відмінна від нуля тільки на проміжку $x \in [-2;2]$, де вона рівна 3.</p>
<p>27</p>	$\operatorname{ch} xu_{xy} + (y \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)u_y = -\operatorname{ch} xu(x, y).$	$3u_{xx} - 2u_{xy} - 5u_{yy} = 0,$ $u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 2.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення відмінне від нуля тільки для значень $x \in [-2;-1] \cup [1;2]$, де воно має форму ламаної з вершинами в точках: $(-2;0)$, $(-1,5;1)$, $(-1;0)$, $(1;0)$, $(1,5;1)$, $(2;0)$.</p>
<p>28</p>	$u_{xy} + u_y + xu_x + xu(x, y) + x^2y = 0.$	$u_{xx} - yu_{yy} - 0,5u_y = 0, \quad y > 0,$ $u(x, 1) = \cos x, \quad u_y(x, 1) = 0.$	<p>початкове відхилення в усіх точках рівне нулеві, а початкова швидкість</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} xc^{-2}(2c - x), & c \leq x \leq 2c, \\ 0, & x \notin [c;2c], \end{cases}$ <p>де $c = \text{const} > 0$.</p>
<p>29</p>	$u_{xx} + xyu_{yy} + 0,5xu_y - (2x)^{-1}u_x(x, y) = 0,$ $x < 0, \quad y > 0.$	$u_{xy} + u_x = 0,$ $u(x, x) = e^{-x}, \quad u_y(x, x) = 0.$	<p>початкова швидкість рівна нулеві, а початкове відхилення</p> $u(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 2, \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$
<p>30</p>	$(e^x + e^y)u_{xy} + e^xu_y + e^yu_x(x, y) = 0.$	$u_{xy} + u_{yy} + u_y = 0,$ $u(x, 2x) = x, \quad u_y(x, 2x) = e^{-x}.$	<p>початкове відхилення рівне нулеві, а початкова швидкість задається рівностями</p> $u_t(0, x) = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 25^{-1}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -25^{-1}, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$

РОЗДІЛ ІІІ

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ. МЕТОДИ ХАРАКТЕРИСТИК ТА ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

§1. Постановка мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу

При дослідженні фізичних процесів різної природи, які відбуваються в об'єктах скінчених або напівнескінчених розмірів, необхідно враховувати відповідні режими на границі заданих об'єктів, оскільки вони суттєво впливають на розглядуваний процес.

Отже, при складанні математичних моделей, наприклад, хвильових процесів, які проходять в таких об'єктах, окрім хвильового рівняння та початкових умов, слід задати також умови (хвильові режими) на межі об'єкта (крайові умови), що приводить до мішаних задач для ДРЧП.

Для прикладу розглянемо наступну задачу: вивчити процес вільних коливань однорідної скінченої мембрани \mathbf{D} з краєм \mathbf{S} , якщо початкові відхилення точок мембрани рівні $\varphi(x, y)$, початкова їх швидкість рівна $\psi(x, y)$, а

- 1) край мембрани \mathbf{S} рухається згідно заданого закону $\mu(t, x, y)$;
- 2) на край мембрани діє сила $v(t, x, y)$;
- 3) край мембрани пружно закріплений.

Зауважимо, що у випадку $\mu(t, x, y) \equiv 0$ кажуть, що край мембрани *нерухомо (жорстко) закріплений*; якщо ж $v(t, x, y) \equiv 0$, то край називають *вільним*.

Відповідна математична модель: в області $\mathbf{V} = \{(t, x, y) | t > 0, (x, y) \in \mathbf{D}\}$ знайти розв'язок хвильового рівняння

$$U_{tt}(t, x, y) = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad (1)$$

який задовольняє початкові умови

$$U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad U_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{D} \cup \mathbf{S}, \quad (2)$$

та одну з відповідних крайових умов:

$$1) \quad U|_{\mathbf{S}} = \mu(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{S}, \quad (3)$$

$$2) \quad T \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{\mathbf{S}} = v(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{S}, \quad (4)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до \mathbf{S} , T – величина сили натягу,

$$3) \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + hU \right]_{\mathbf{S}} = h\gamma(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{S}, \quad (5)$$

де $h = \alpha T^{-1}$, $\alpha = const > 0$ – коефіцієнт жорсткості, $\gamma(t, x, y)$ – закон руху межі пружного закріплення.

Якщо початкові та крайові умови не суперечні, тобто, наприклад, у випадку першої крайової умови (3)

$$\mu(0, x, y) = \varphi(x, y)|_{(x, y) \in \mathbf{S}}, \quad \mu_t(0, x, y) = \psi(x, y)|_{(x, y) \in \mathbf{S}},$$

то кажуть, що початкові та крайові умови є *узгодженими*.

Таким чином, приходимо до однієї з трьох основних мішаних задач:

I. В просторі функцій $C^2(\mathbf{B}) \cap C^{(1,0,0)}(\overline{\mathbf{B}})$ знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (2), (3).

II. В просторі функцій $C^2(\mathbf{B}) \cap C^{(1,1,1)}(\overline{\mathbf{B}})$ знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (2), (4).

III. В просторі функцій $C^2(\mathbf{B}) \cap C^{(1,1,1)}(\overline{\mathbf{B}})$ знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (2), (5).

Задачі **I**, **II**, **III** називаються відповідно першою, другою та третьою основними мішаними задачами для рівняння (1).

Аналогічно ставляться мішані задачі для рівнянь гіперболічного типу і у випадку довільної вимірності простору.

❖ Навести постановку мішаних задач для заданих коливних процесів:

1. Скласти математичну модель процесу коливань однорідної струни довжини l з урахуванням узгодженості початкових і крайових умов, якщо:

а) коливання вільні, початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, їх початкова швидкість рівна нулеві, а кінці струни нерухомо закріплені;

б) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, x)$, в початковий момент часу струна перебувала в спокої, причому її точкам була надана швидкість $\psi(x)$, а кінці струни вільні;

в) коливання відбуваються тільки за рахунок збурень кінців струни: лівий кінець струни рухається за законом $\omega(t)$, а на правий діє сила $\nu(t)$;

г) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, x)$, початкове відхилення точок струни рівне $\varphi(x)$, їх початкова швидкість рівна $\psi(x)$, кінці струни пружно закріплені з однаковим коефіцієнтом жорсткості $\alpha = const > 0$, причому точка закріплення лівої пружини рухається згідно закону $\gamma(t)$, а точка закріплення правої пружини нерухома.

2. Скласти математичну модель процесу коливань однорідної прямокутної мембрани $\overline{\mathbf{D}} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq c\}$ з урахуванням узгодженості початкових і крайових умов, якщо:

а) коливання вільні, початкове відхилення точок мембрани рівне $\varphi(x, y)$, їх початкова швидкість рівна нулеві, а краї мембрани нерухомо закріплені;

б) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, x, y)$, в початковий момент часу мембрана перебувала в спокої, причому її точкам була надана швидкість $\psi(x, y)$, а краї мембрани вільні;

в) коливання відбуваються тільки за рахунок збурень країв мембрани: краї $x = 0$ та $y = c$ рухаються згідно законів $\omega_1(t, y)$ та $\omega_2(t, x)$ відповідно, а на краї $y = 0$ та $x = b$ діють сили $\nu_1(t, x)$ та $\nu_2(t, y)$ відповідно;

г) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, x, y)$, початкове відхилення точок мембрани рівне $\varphi(x, y)$, їх початкова швидкість рівна $\psi(x, y)$, краї мембрани

пружно закріплені з однаковим коефіцієнтом жорсткості $\alpha = \text{const} > 0$, причому точки закріплення пружин на краях $y = 0$ та $y = c$ рухаються згідно законів $\gamma_1(t, x)$ та $\gamma_2(t, x)$ відповідно, а точки закріплення пружин на краях $x = 0$ та $x = b$ – нерухомі.

3. Скласти математичну модель процесу коливань однорідної круглої мембрани $\bar{D} = \{(\rho, \varphi) | 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ з урахуванням узгодженості початкових і крайових умов, якщо:
- а) коливання вільні, початкове відхилення точок мембрани рівне $\Phi(\rho, \varphi)$, їх початкова швидкість рівна нулеві, а край мембрани нерухомо закріплений;
 - б) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, \rho, \varphi)$, в початковий момент часу мембрана перебувала в спокої, причому її точкам була надана швидкість $\Psi(\rho, \varphi)$, а край мембрани вільний;
 - в) коливання відбуваються тільки за рахунок збурення краю мембрани, який піддається дії сили $v(t, \varphi)$;
 - г) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, \rho, \varphi)$, початкове відхилення точок мембрани рівне $\Phi(\rho, \varphi)$, їх початкова швидкість рівна $\Psi(\rho, \varphi)$, а край мембрани пружно закріплений з коефіцієнтом $\alpha = 2$ при натязі $T = 1$, причому точка закріплення пружини – нерухома.

§2. Метод характеристик побудови розв'язку мішаних задач для напівнескінченої струни

Означення 1. Струна називається *напівнескінченою*, якщо один з її кінців розміщений в початку координат $x = 0$, а інший знаходиться на такій відстані від початку координат, яка значно перевищує величину at (t – час, a – стала, яка фігурує в рівнянні коливань струни).

Розглянемо спочатку наступну задачу: вивчити процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни, якщо початкове відхилення точок струни та їх початкова швидкість відповідно рівні $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а лівий кінець нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: в області $\mathbf{B} = \{(t, x) | 0 < t \leq T, x > 0\}$, де $T = \text{const} > 0$, знайти розв'язок ДРЧП

$$U_{tt}(t, x) = a^2 U_{xx}, \quad (6)$$

який справджує початкові умови

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \geq 0 \quad (7)$$

та крайову умову в точці $x = 0$:

$$U(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Для побудови розв'язку мішаної задачі (6)-(8) застосуємо метод характеристик. Як показано в §5 розділу II, загальний розв'язок рівняння (6) подається у вигляді суперпозиції прямої і зворотної хвиль

$$U(t, x) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (9)$$

де f_1 і f_2 – довільні функції, визначені при всіх дійсних значеннях своїх аргументів. Оскільки в нашому випадку функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені тільки при $x \geq 0$, то згідно з початковими умовами (7) при $x - at > 0$ маємо:

$$f_1(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(z) dz - C, \quad (10)$$

$$f_2(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(z) dz + C, \quad (11)$$

тобто

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, \quad x - at > 0. \quad (12)$$

Визначимо розв'язок мішаної задачі (6)-(8) при $x - at < 0$. При цьому зауважимо, що функція $f_2(x + at)$ визначена формулою (11) для всіх $x \geq 0$, $t \geq 0$. Знайдемо функцію $f_1(x - at)$ при $x - at < 0$. Для цього використаємо крайову умову (8). Підставивши (9) у (8), дістанемо

$$f_1(-at) + f_2(at) = 0, \quad t > 0. \quad (13)$$

Покладемо $-at = z$. Тоді на підставі (13)

$$f_1(z) = -f_2(-z), \quad z < 0.$$

Застосувавши формулу (11), визначаємо $f_1(x - at)$ при $x - at < 0$:

$$f_1(x - at) = -f_2(at - x) = -\frac{1}{2}\varphi(at - x) - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z) dz - C. \quad (14)$$

Підставивши (14) і (11) у (9), знаходимо розв'язок задачі (6)-(8) для значень $x - at < 0$:

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(z) dz, \quad x - at < 0. \quad (15)$$

Таким чином, розв'язок мішаної задачі (6)-(8) дається формулою Д'Аламбера (12) при $x - at > 0$ і формулою (15) при $x - at < 0$.

Геометрична інтерпретація побудови розв'язку задачі (6)-(8).

Шлях побудови розв'язку мішаної задачі складається з двох етапів.

1. Загальний розв'язок (9) ДРЧП (6) підставляємо в початкові умови (7) і знаходимо функції $f_1(x - at)$ та $f_2(x + at)$ в точках осі Ox .

Тепер функція $f_1(x - at)$ відома на всіх характеристиках $x - at = \text{const} > 0$, ос-

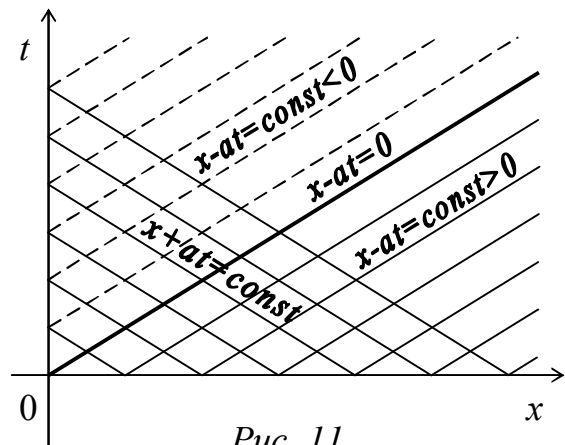


Рис. 11

кільки $f_1(x - at)$ є сталою вздовж таких характеристик (рис. 11). Ці характеристики заповнюють усю область $x - at > 0$.

З іншого боку, хвиля $f_2(x + at)$ відома для всіх $x \geq 0, t \geq 0$. Дійсно, вона є сталою на характеристиках $x - at = const$, а такі характеристики, випущені з точок осі Ox , покривають усю область $x \geq 0, t \geq 0$.

Отже, початкові умови дають можливість визначити розв'язок мішаної задачі (6)-(8) в тій частині області $x \geq 0, t \geq 0$, де на рис. 11 проходять характеристики $x - at = const > 0$ і $x + at = const$, тобто під головною характеристикою $x - at = 0$. Із рисунку бачимо, що над головною характеристикою $x - at = 0$ пряма хвиля $f_1(x - at)$ не відома, але відома зворотна хвиля $f_2(x + at)$.

2. Підставляємо загальний розв'язок (9) у крайову умову (8), яка задана в точках осі Ot . Хвиля $f_2(x + at)$ в цих точках визначена з початкових умов. Таким чином, крайова умова (8) дає можливість встановити співвідношення між прямою та зворотною хвилями в точках осі Ot , звідки визначаємо $f_1(x - at)$ в цих точках. Але тоді пряма хвиля $f_1(x - at)$ визначається і на характеристиках $x - at = const < 0$ (пунктирні лінії над головною характеристикою), тобто розв'язок мішаної задачі $U(t, x)$ побудований у всій області $x < at$.

Означення 2. В області $0 < x < at$ функція $f_2(x + at)$ називається хвилею, *падаючою* на лівий кінець струни $x = 0$, а $f_1(x - at)$ – *відображеною (відбитою)* хвилею від цього кінця.

У зв'язку з цим означенням розглянутий метод побудови розв'язків мішаних задач називають також методом падаючої та відбитої хвилі.

Умова неперервності розв'язку мішаної задачі (6)-(8) уздовж головної характеристики. Із викладеного вище випливає, що розв'язок мішаної задачі (6)-(8) подається формулою Д'Аламбера (12) при $x - at > 0$ і формулою (15) при $x - at < 0$. У зв'язку з цим уздовж головної характеристики цей розв'язок може бути розривним.

Знайдемо умову неперервності розв'язку мішаної задачі (6)-(8) уздовж лінії $x - at = 0$. Для цього відзначимо, що розрив довільного розв'язку рівняння (6) уздовж головної характеристики є величина стала. Дійсно, хвиля $f_2(x + at)$ неперервна при переході через головну характеристику, оскільки її лінії рівня $x + at = const$ перетинають пряму $x = at$, а хвиля $f_1(x - at)$ під і над головною характеристикою $x - at = 0$ має границі, рівні відповідно $f_1(0+)$ та $f_1(0-)$. Таким чином,

$$U|_{x-at=0+} - U|_{x-at=0-} = f_1(0+) - f_1(0-),$$

а отже, умова неперервності розв'язку мішаної задачі (6)-(8) на головній характеристиці має вигляд

$$f_1(0+) = f_1(0-),$$

або, беручи до уваги (10), (14), одержуємо:

$$f_1(0+) = 0,5\varphi(0) - C, \quad f_2(0-) = -0,5\varphi(0) + C,$$

тобто $0,5\varphi(0) = -0,5\varphi(0)$, звідки

$$\varphi(0) = 0. \quad (16)$$

Умова (16) є умовою узгодженості початкових (7) та крайової (8) умов (умова неперервності граничних значень розв'язку $U(t, x)$ в початку координат $x = 0, t = 0$).

Висновок. Умова (16) узгодженості початкових та крайової умов мішаної задачі (6)-(8) є необхідною і достатньою умовою неперервності розв'язку на всій головній характеристиці $x - at = 0$.

Напівнескінчена струна з вільним кінцем. Аналогічно будуються розв'язки мішаних задач для напівнескінченої струни і у випадку інших крайових умов. Наприклад, якщо кінець струни $x = 0$ вільний, то крайова умова запишеться у вигляді

$$U_x(t, 0) = 0. \quad (17)$$

Розв'яжемо мішану задачу (6),(7),(17).

Якщо $x > at$, то має силу формула Д'Аламбера (12). Визначимо $f_1(x - at)$ у випадку, коли $x - at < 0$. Для цього підставляємо загальний розв'язок (9) у крайову умову (17). Маємо:

$$f_1'(-at) + f_2'(at) = 0, \quad t > 0,$$

звідки, ввівши позначення $z = -at$, дістанемо

$$f_1'(z) + f_2'(-z) = 0, \quad z < 0.$$

Інтегруючи останню рівність по z , маємо:

$$f_1(z) - f_2(-z) = C_1 = const. \quad (18)$$

Беручи до уваги (11), із (18) одержуємо:

$$f_1(x - at) = f_2(at - x) + C_1 = -\frac{1}{2}\varphi(at - x) + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(z) dz + C_1 + C,$$

тобто при $x - at < 0$

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(z) dz + \int_0^{at-x} \psi(z) dz \right] + C_1 + 2C, \quad x - at < 0.$$

Із умови неперервності розв'язку мішаної задачі на головній характеристиці $x - at = 0$ маємо:

$$f_1(0+) = 0,5\varphi(0) - C, \quad f_2(0-) = 0,5\varphi(0) + C_1 + C,$$

тоді $0,5\varphi(0) - C = 0,5\varphi(0) + C_1 + C$, звідки $C_1 + C = 0$. Отже,

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz, & x - at > 0, \\ \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(z) dz + \int_0^{at-x} \psi(z) dz \right], & x - at < 0. \end{cases}$$

Зауваження. Для розглянутих задач ми будували тільки неперервні розв'язки, оскільки розривні розв'язки для мішаних задач у випадку коливань

струни або стержня не мають фізичного змісту (розрив розв'язку означає розрив струни або стержня). Однак у теорії акустики чи газовій динаміці розривні розв'язки мають фізичний зміст і називаються ударними хвилями.

❖ Розв'язати задачі:

4. Знайти неперервний розв'язок $U(t, x)$ мішаної задачі:

$$\begin{aligned} \text{а) } U_{tt} &= 9U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= e^{-x}, \quad U_t(0, x) = \cos 5x, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) + U(t, 0) &= t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U_{tt} &= U_{xx} + 2, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= x, \quad U_t(0, x) = 1, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= 1, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } U_{tt} &= a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= 4, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= 4 \cos^3 t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } U_{tt} &= 4U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= x, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= \cos t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } U_{tt} &= 4U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= e^x, \quad U_t(0, x) = -1, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) - U(t, 0) &= t - t^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

5. По пружному напівнескінченному стержню при $t < 0$ поширюється хвиля деформації, яка рухається вліво:

$$U(t, x) = \begin{cases} \sin(x + 3t), & x > -3t, \\ 0, & x \in (0; -3t), \end{cases} \quad t < 0.$$

Лівий кінець стержня $x = 0$ пружно закріплений, причому точка закріплення пружини рухається згідно закону $\gamma(t) = 3t - 1$. Знайти закон поздовжніх коливань стержня.

Вказівка. Із умови задачі за вимоги узгодженості початкових і крайової умов випливає, що

$$\begin{aligned} U_{tt} &= 9U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= \sin x, \quad U_t(0, x) = 3 \cos x, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) - U(t, 0) &= 1 - 3t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

6. Методом характеристик знайти розв'язок мішаної задачі:

$$\begin{aligned} \text{а) } U_{tt} &= a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \geq 0, \\ U(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U_{tt} &= a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= v(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } U_{tt} &= a^2 U_{xx} + t, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\ U(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } U_{tt} &= U_{xx} - 6x, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\ U(t, 0) &= 2t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

§3. Геометричне зображення процесу вільних коливань напівнескінченої струни

Для геометричного зображення процесу вільних коливань напівнескінченої струни, окрім викладеного вище загального методу характеристик, іноді зручно застосувати також методи парного та непарного продовження. Проілюструємо дані методи на прикладах.

Метод непарного продовження. Нехай потрібно геометрично зобразити розв'язок змішаної задачі (6)-(8) для значень $t = 1, 2, 3, 4, 5$, якщо $a = 1$, а в початкових умовах (7)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 3) \cup [5; +\infty), \\ x - 3, & 3 \leq x < 4, \\ 5 - x, & 4 \leq x < 5, \end{cases} \quad \psi(x) \equiv 0. \quad (7a)$$

Розглянемо розв'язок $Z(t, x)$ задачі Коші

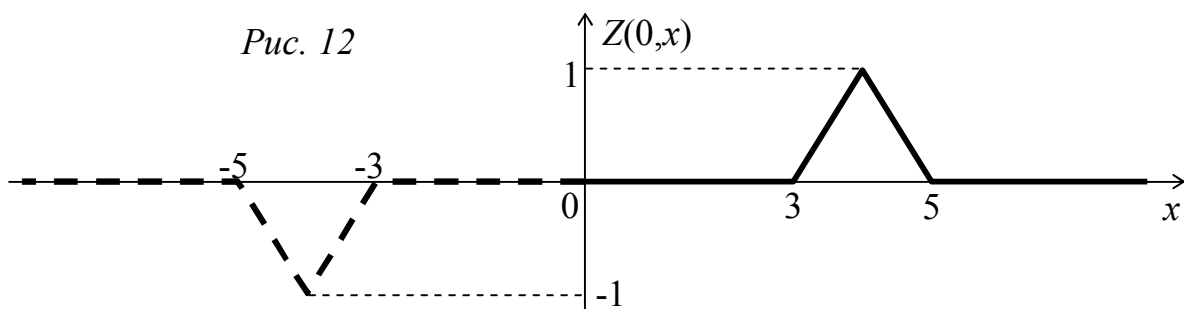
$$\begin{aligned} Z_{tt} &= Z_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ Z(0, x) &= \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad Z_t(0, x) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Покладемо

$$U(t, x) = Z(t, x)|_{x \geq 0}.$$

Тоді очевидно, що функція $U(t, x)$ задовольнятиме рівняння (6) і початкові умови (7). Далі покажемо, що в силу непарності функції $Z(t, x)$ по змінній x $U(t, x)$ справджує і крайову умову (8).

Зобразимо графічно розв'язок задачі Коші (19) для $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (див. §5 розділу II).



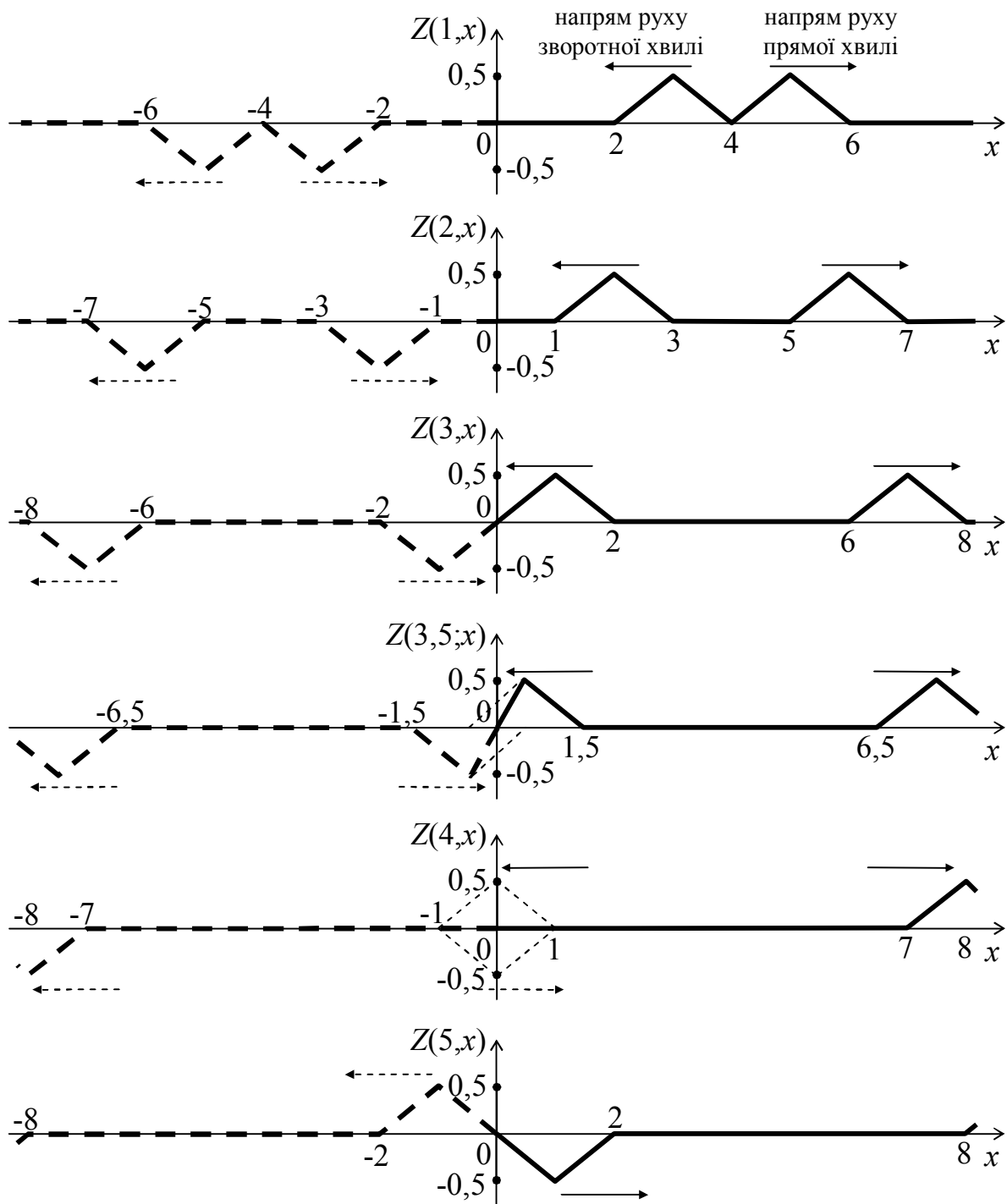


Рис. 13

Як бачимо з графіків на рис. 12 і рис. 13, крайова умова (8) виконується для всіх $t \geq 0$, оскільки функція $Z(t,x)$ є непарною по змінній x . Суцільною лінією зображено функцію $U(t,x)$; область $x < 0$ будемо називати **фіктивною**.

Аналогічно можна графічно зобразити процес вільних коливань напівнескінченної струни, які здійснюються тільки за рахунок початкової швидкості, тобто коли в мішаній задачі (6)-(8) $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \neq 0$.

Для прикладу розглянемо коливання напівнескінченної однорідної струни ($a=1$) із закріпленим кінцем, які здійснюються внаслідок удару по ній моло-

точком (коливання струни рояля). Такий процес приводить до відшукування розв'язку мішаної задачі (6)-(8), де $\varphi(x) \equiv 0$, а початкова швидкість має вигляд, зображений на рис. 14а.

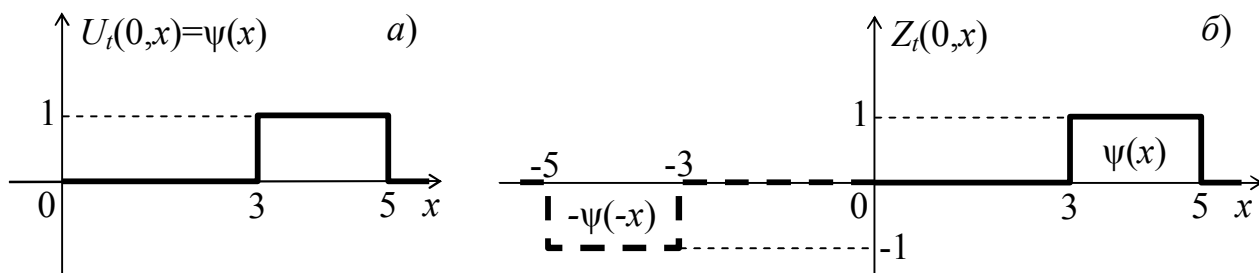


Рис. 14

Зобразимо профіль струни при $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Для цього в задачі Коші (19) покладемо

$$Z(0,x) = 0, \quad Z_t(0,x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

(рис. 14б). У нашому випадку (див. розділ II) $Z(t,x) = \Psi(x+t) - \Psi(x-t)$, де

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x Z_t(0,\xi) d\xi.$$

Маємо (рис. 15):

$$\Psi(x) = \begin{cases} -0,5(x+5), & -5 \leq x < -3, \\ -1, & -3 \leq x < 3, \\ 0,5(x-5), & 3 \leq x < 5, \\ 0, & |x| > 5 \end{cases}$$

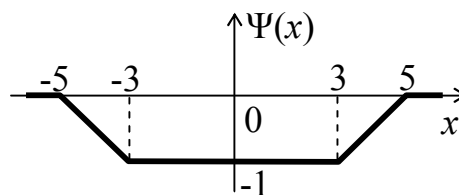


Рис. 15

Покажемо, що і в цьому випадку $U(t,x) = Z(t,x)|_{x \geq 0}$.

Дійсно, функція $U(t,x)$ задовольняє рівняння (6) і початкові умови (7). Зобразимо графічно профіль струни в різні моменти часу (рис.16, 17) і переконаємося, що крайова умова (8) також виконується.

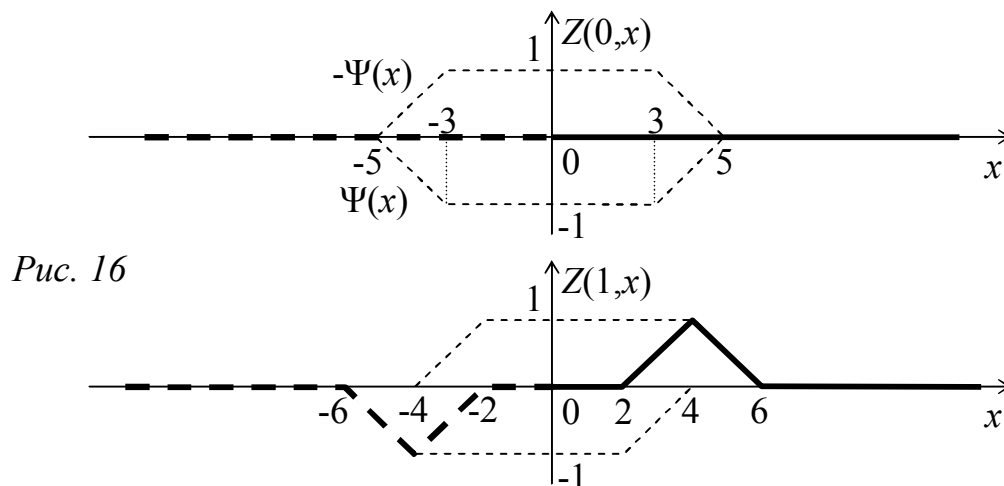


Рис. 16

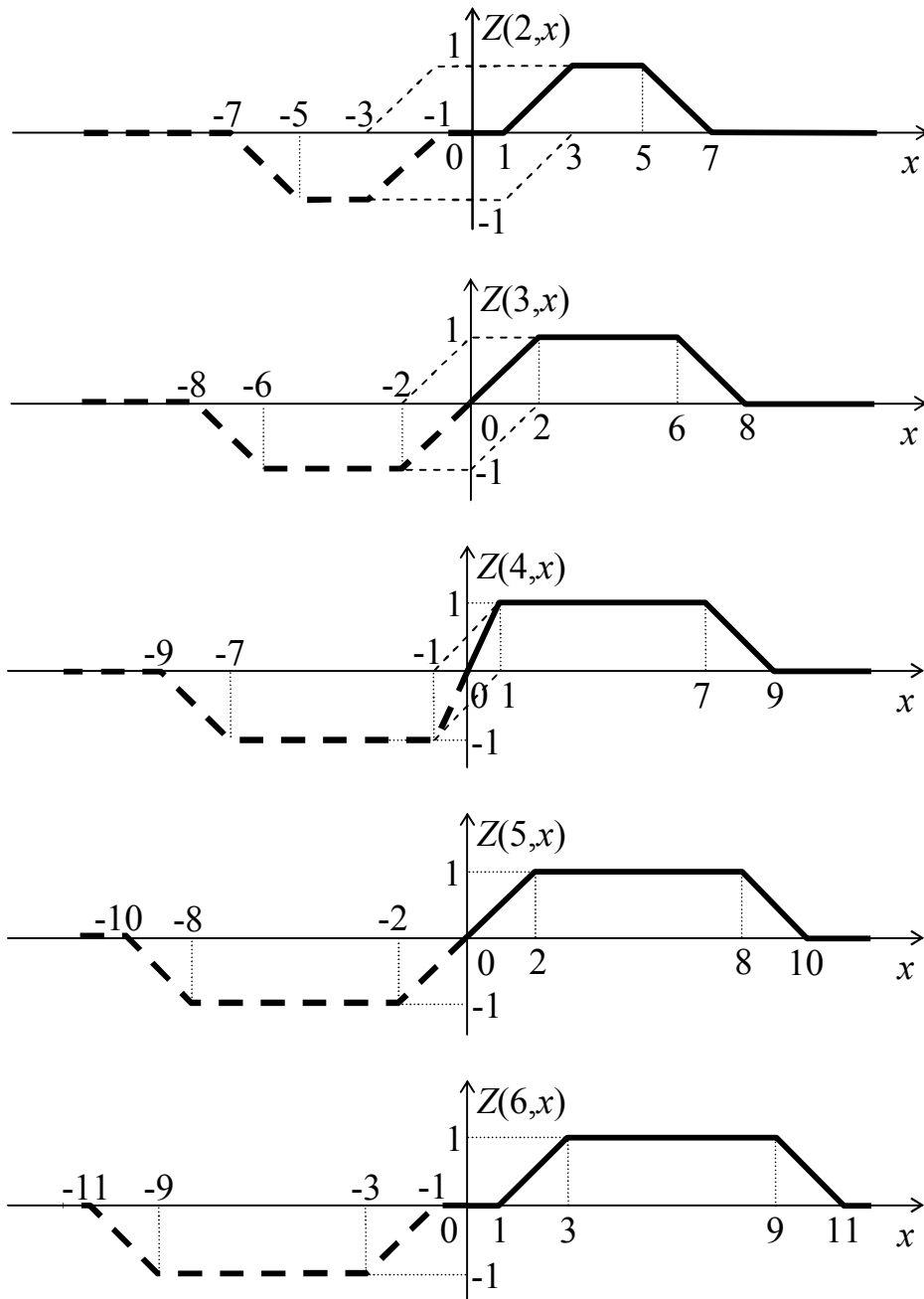


Рис. 17

Далі з ростом часу t трапеція рухатиметься в напрямку осі Ox , а у фіктивній області – у зворотному напрямку. Крайова умова (8), очевидно, виконується для довільного t .

Метод парного продовження. Для ілюстрації методу парного продовження зобразимо графічно розв'язок задачі (6),(7),(17) при $t = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$, якщо $a = 1$, а початкові функції в (7) визначаються згідно з формулами (7a).

Розглядаємо задачу Коші

$$Z_{tt} = Z_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$Z(0, x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \quad Z_t(0, x) = 0. \quad (19a)$$

Маємо:

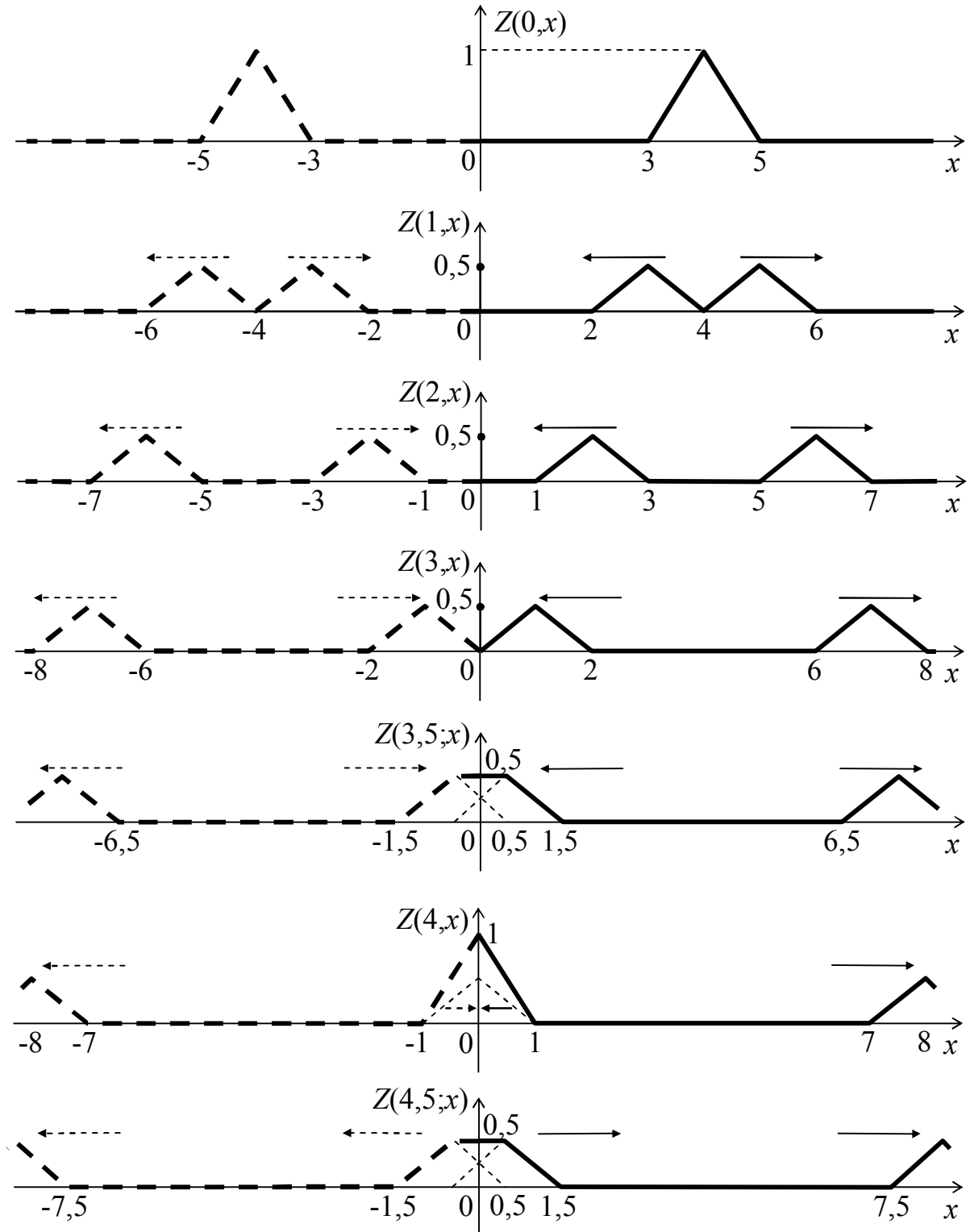


Рис. 18

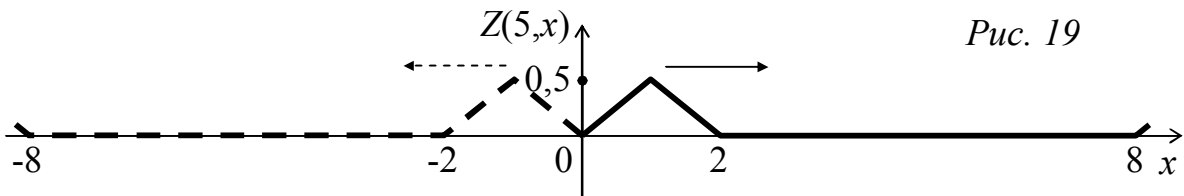


Рис. 19

Із наведених графіків (рис. 18, 19) бачимо, що функція $U(t,x) = Z(t,x)|_{x \geq 0}$ (на графіках зображена суцільною лінією) є розв'язком поставленої мішаної задачі (6),(7),(17), де $a=1$, а початкові функції визначаються формулами (7а). Стрілками показано напрям руху хвиль.

Зауважимо, що кінець струни вільний, тобто, на відміну від розглянутих раніше випадків (рис. 12-13, 16-17), він рухається уздовж осі ординат.

❖ Виконати завдання:

7. Зобразити профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з а) нерухомо закріпленим і б) вільним кінцем при $t=1, 2, 3, 4$, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення точок струни, яке рівне

$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in [5; +\infty), \\ x, & 0 \leq x < 4, \\ 20 - 4x, & 4 \leq x < 5. \end{cases}$$

8. Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни з а) нерухомо закріпленим і б) вільним кінцем, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення точок струни, яке рівне

$$U(0,x) = \begin{cases} 2 - 2(x-1)^2, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

Записати розв'язок задачі за допомогою фазової площини.

9. Зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t=1, 2, 3, 4, 5, 6$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 20.

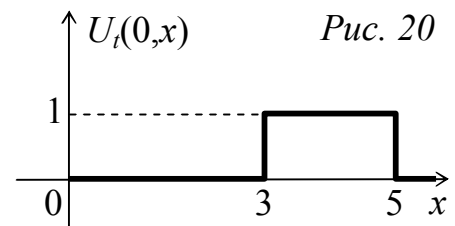


Рис. 20

10. Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни з а) нерухомо закріпленим і б) вільним кінцем, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкової швидкості точок струни

$$U_t(0,x) = \begin{cases} 4a, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \in [0;1) \cup (2; +\infty). \end{cases}$$

Записати розв'язок задачі за допомогою фазової площини.

§4. Метод характеристик побудови розв'язку мішаних задач для скінченної струни

Процес вільних коливань однорідної струни довжини l з нерухомо закріпленими кінцями, який здійснюється за рахунок початкового відхилення $\varphi(x)$ та початкової швидкості $\psi(x)$, зводиться до мішаної задачі:

в області $\mathbf{B} = \{(t, x) \mid t > 0, x \in (0; l)\}$ знайти розв'язок диференціального рівняння (6), який задовольняє початкові умови (7) при $x \in [0; l]$, а також крайові умови

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8a)$$

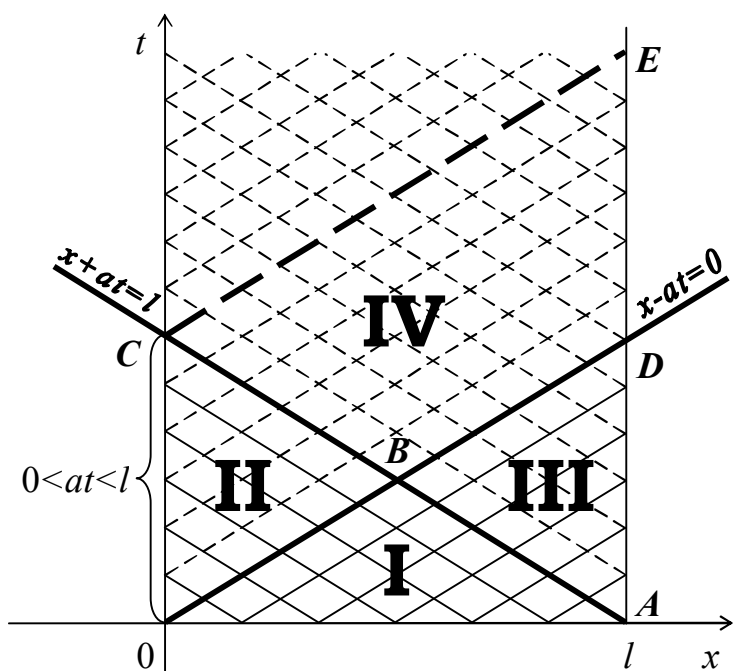


Рис. 21

Для побудови розв'язку мішаної задачі (6),(7),(8a) застосуємо метод характеристик (див. рис. 21).

Загальний розв'язок диференціального рівняння (6) подається у вигляді (9). Оскільки початкові умови в нашому випадку задані в точках $t=0, x \in [0; l]$, то на підставі (7) розв'язок мішаної задачі (6),(7),(8a) при $0 \leq x \pm at \leq l$ подається формулою Д'Аламбера (на рисунку область I).

Підставляючи загальний розв'язок (9) у крайову умову $U(t, 0) = 0$, знаходимо відобра-

жену хвилю $f_1(x - at)$ за відомою падаючою хвилею $f_2(x + at)$ в точках відрізка OC . Це дає можливість побудувати розв'язок розглядуваної мішаної задачі в області II (трикутник OBC).

Використовуючи другу крайову умову $U(t, l) = 0$, знаходимо відображену хвилю $f_2(x + at)$ за відомою падаючою хвилею $f_1(x - at)$ в точках відрізка AE . Це дає можливість знайти шуканий розв'язок в областях III і IV (трикутник ACE). Повторюючи наведені вище міркування, можна побудувати розв'язок мішаної задачі (6),(7),(8a) у всій області B.

Таким же чином будуються розв'язки мішаних задач для рівняння вільних коливань струни у випадку крайових умов більш складного вигляду за (8a).

Геометричне зображення процесу вільних коливань скінченної струни. Розглянемо задачу: зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) струни довжини $l=6$ з нерухомо закріпленими кінцями при $t=1,12$, якщо коливання струни здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;3] \cup [5;6], \\ x-3, & 3 < x \leq 4, \\ 5-x, & 4 < x < 5. \end{cases}$$

Визначити період T коливань струни.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі в області $\mathbf{B} = \{(t,x) \mid t > 0, x \in (0;6)\}$ потрібно знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$U_{tt}(t,x) = U_{xx}, \quad (20)$$

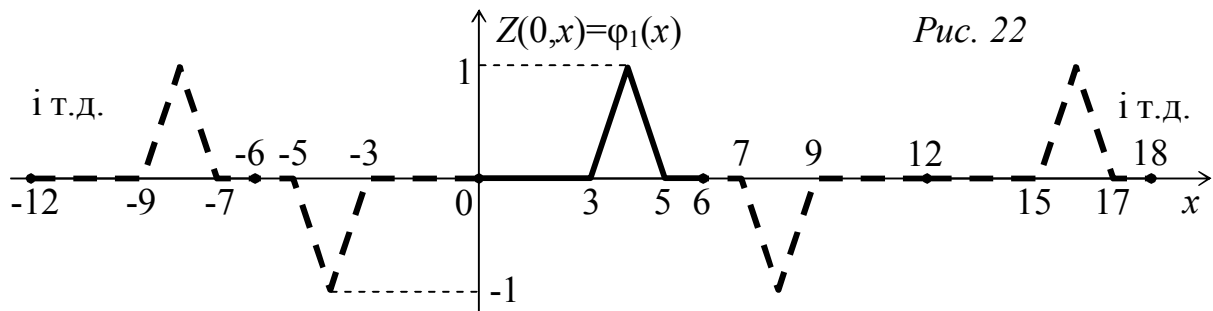
який справджує початкові

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;6], \quad (21)$$

та крайові умови

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,6) = 0, \quad t \geq 0. \quad (22)$$

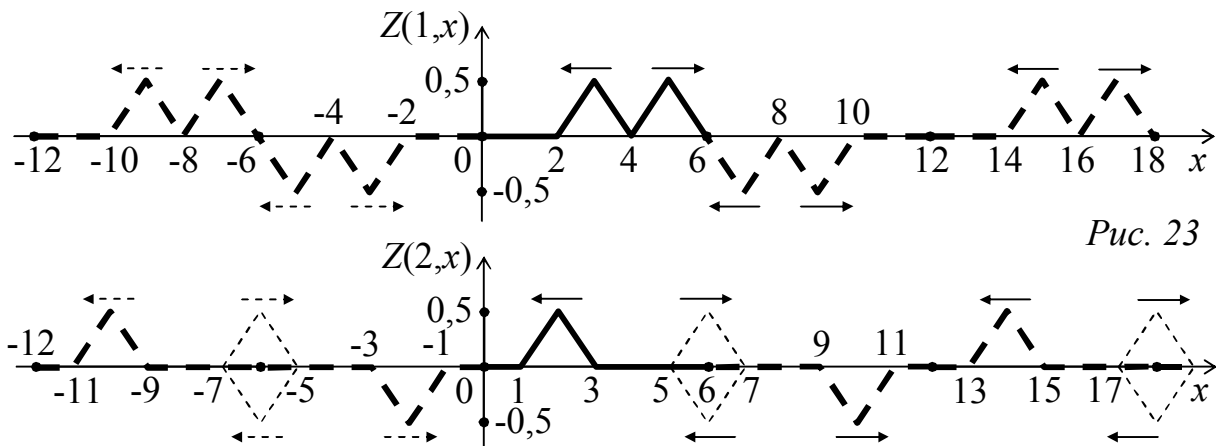
Для зображення розв'язку мішаної задачі (20)-(22) розглянемо задачу Коші (19), де $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0;6]$, а на проміжках $(-\infty;0)$ і $(6;+\infty)$ будемо її наступним способом: продовжуємо функцію $\varphi(x)$ на відрізок $[6;12]$ непарним чином відносно прямої $x=6$, а тоді одержаний на відрізку $[6;12]$ графік продовжуємо непарним чином відносно прямої $x=12$ на відрізок $[12;18]$ тощо. Аналогічно будується функція $\varphi_1(x)$ і на проміжку $(-\infty;0)$ (рис. 22).



Покажемо, що функція

$$U(t,x) = Z(t,x)|_{x \in [0;6]} \quad (23)$$

є розв'язком мішаної задачі (20)-(22). Дійсно, функція $U(t,x)$, визначена згідно (23), задовольняє рівняння (20) і початкові умови (21). При $t = \overline{1,12}$ маємо:



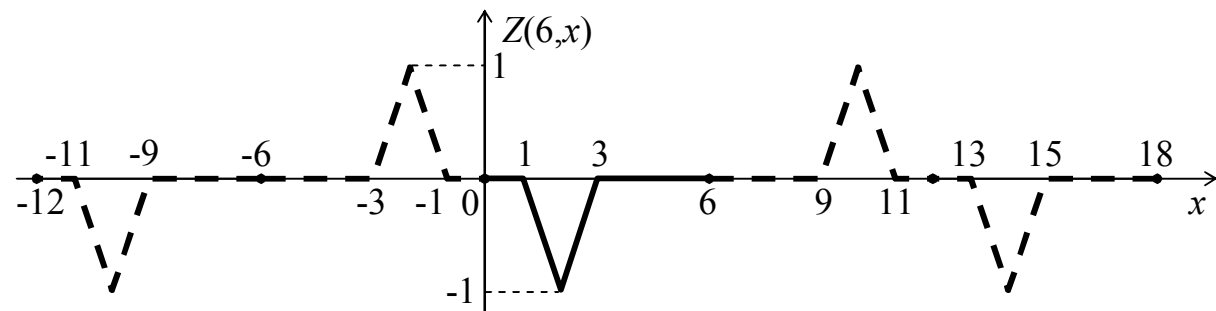
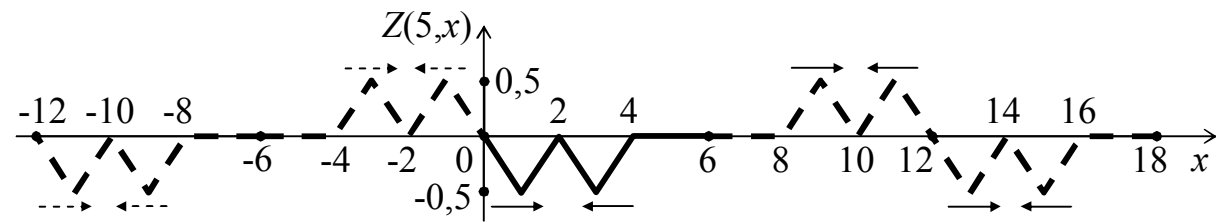
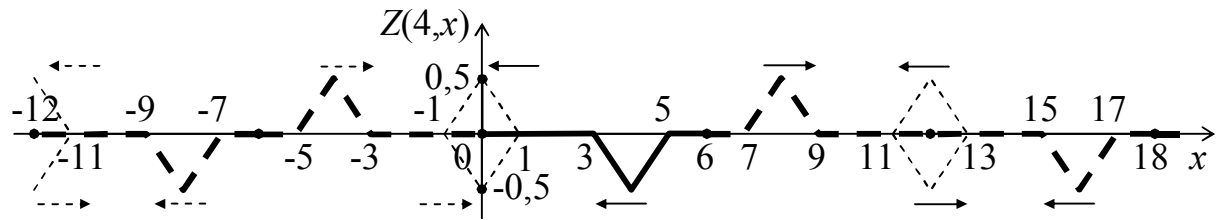
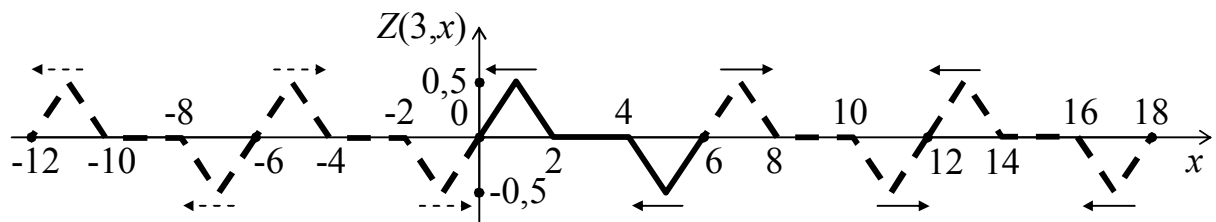
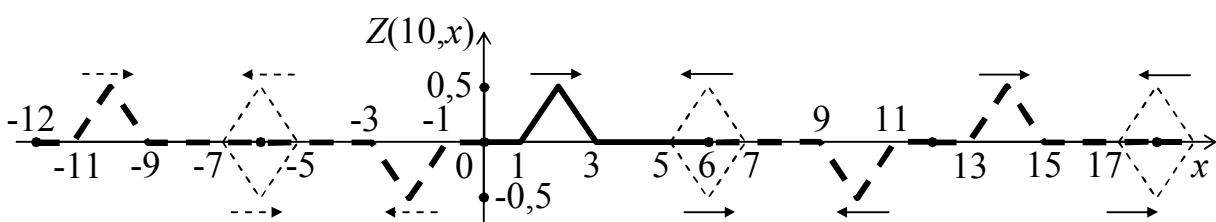
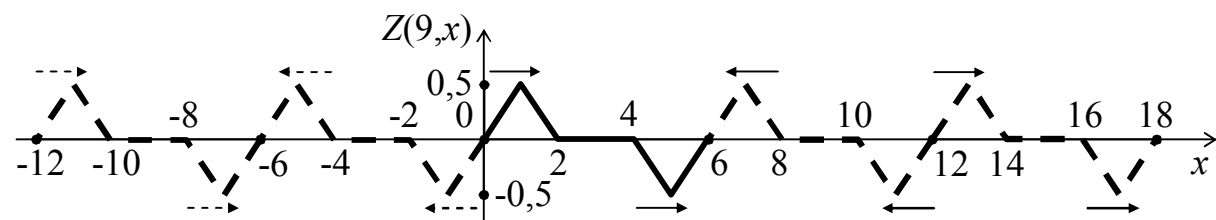
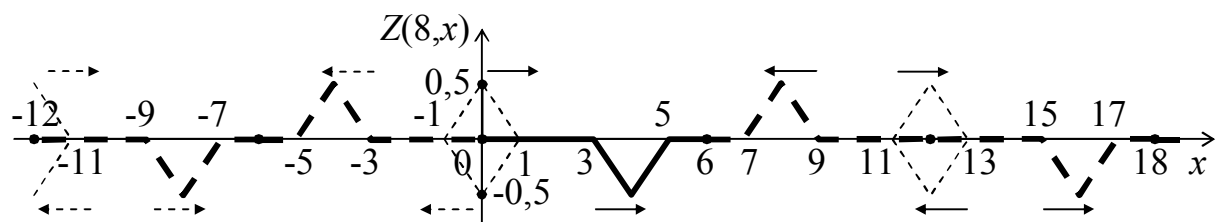
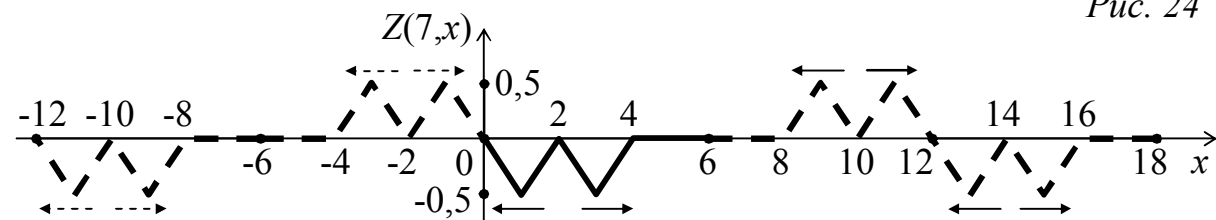


Рис. 24



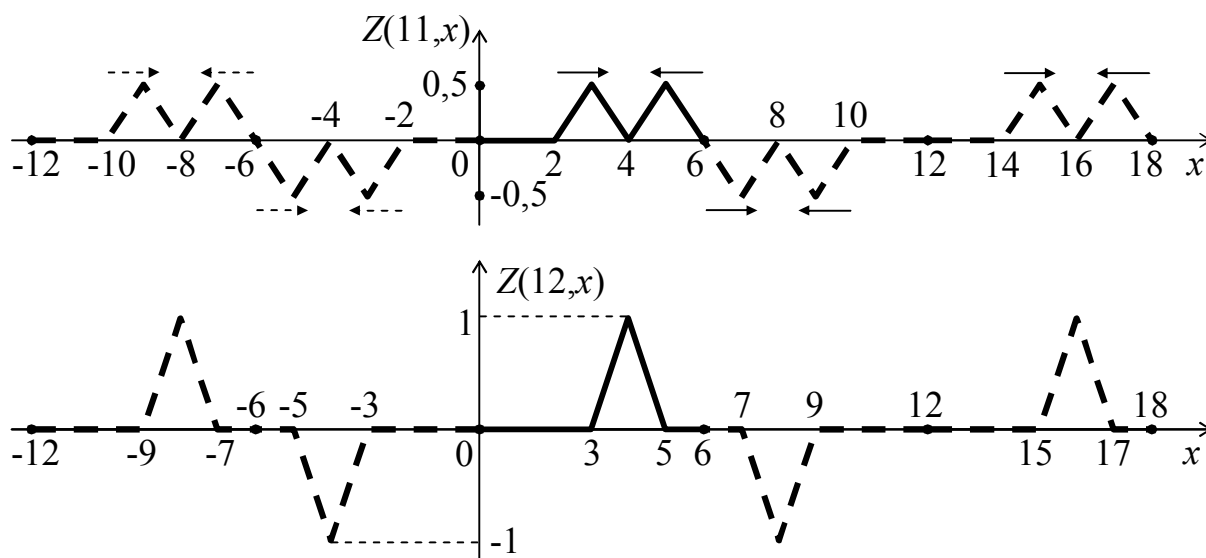


Рис.25

Таким чином, за час $t = 12$ цикл замкнувся, отже, період коливань струни $T = 12 = 2la^{-1}$. Із графіків на рис. 23-25 видно, що функція $U(t,x)$, визначена згідно з формулою (23), справджує і крайові умови (22), тобто вона є розв'язком мішаної задачі (20)-(22).

Розглянутий метод побудови профілю струни називається **методом непарних відображень**. У випадку, коли кінці струни вільні, тобто крайові умови мають вигляд $U_x(t,0) = U_x(t,l) = 0$, для побудови профілю струни в довільний момент часу застосовують **метод парних відображень** (здійснюють парне продовження графіків функцій). Якщо ж один із кінців струни вільний, а інший – нерухомо закріплений, то для графічного зображення доводиться комбінувати методи парного та непарного відображень. Зокрема, якщо крайові умови мають вигляд $U_x(t,0) = U(t,l) = 0$, то початкові функції продовжують парно відносно прямої $x = 0$ і непарно – відносно прямої $x = l$.

❖ Виконати завдання:

11. Зобразити графічно розв'язок $U(t,x)$ мішаної задачі

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0;6),$$

$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;3) \cup [5;6], \\ x-3, & 3 \leq x < 4, \\ 5-x, & 4 \leq x < 5. \end{cases} \quad U_t(0,x) = 0,$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,6) = 0$$

при $t = 1, 2, 3, \dots$. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі.

12. Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної ($a = 3$) скінченної струни довжини $l = 3$ і знайти період коливань T , якщо в початковий момент

часу струні була надана форма $\varphi(x)$ (рис. 26), після чого вона була відпущена без початкової швидкості. Розглянути випадки, якщо:

- а) кінці струни нерухомо закріплені;
- б) кінці струни вільні;
- в) лівий кінець струни нерухомо закріплений, а правий вільний;
- г) правий кінець струни нерухомо закріплений, а лівий вільний.

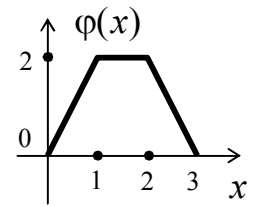


Рис. 26

13. Зобразити графічно процес вільних коливань однорідної ($a = 2$) скінченної струни довжини $l = 3$ і знайти період коливань T , якщо в початковий момент часу струна перебувала в спокої, а її точкам була надана початкова швидкість

$$\psi(x) = \begin{cases} 4, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Розглянути випадки, якщо:

- а) кінці струни нерухомо закріплені;
- б) кінці струни вільні;
- в) лівий кінець струни нерухомо закріплений, а правий вільний;
- г) правий кінець струни нерухомо закріплений, а лівий вільний.

§5. Метод відокремлення змінних

Одним з найпоширеніших методів інтегрування мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є **метод відокремлення змінних**, або **метод Фур'є**. На жаль, цей метод не є універсальним. Його можна застосовувати тільки до лінійних рівнянь деякого спеціального вигляду.

а) Лінійні однорідні рівняння з однорідними крайовими умовами. Викладемо схему методу Фур'є для наступної мішаної задачі: в області $\mathbf{D} = \{(t, x) \mid t \in (0; T), x \in (0; l)\}$ знайти розв'язок $U(t, x)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)U_x) - q(x)U \right], \quad (24)$$

де $a(t), b(t), c(t) \in C_{[0; T]}$, $r(x), q(x) \in C_{[0; l]}$, $p(x) \in C_{[0; l]}^1$, причому $a(t) \geq a_0 > 0$, $r(x) \geq r_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$, який справджує початкові умови

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \quad (25)$$

а також крайові умови

$$\alpha_0 U(t, 0) + \alpha_1 U_x(t, 0) = 0, \quad \beta_0 U(t, l) + \beta_1 U_x(t, l) = 0, \quad t \in [0; T], \quad (26)$$

де сталі $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ такі, що $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Перший етап. Спочатку шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (24), який справджує крайові умови (26), у вигляді

$$U(t, x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (27)$$

Підставивши (27) у рівняння (24) і відокремивши змінні, одержимо:

$$\frac{a(t)Y''(t) + b(t)Y'(t) + c(t)Y(t)}{Y(t)} = \frac{\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)] - q(x)X(x)}{r(x)X(x)}. \quad (28)$$

Оскільки ліва частина рівності (28) є функцією тільки аргументу t , а права – тільки аргументу x , то рівність (28) можлива тоді й тільки тоді, коли ліва і права її частини рівні одній і тій самій сталій. Позначимо цю сталу через $-\lambda$. Тоді маємо

$$a(t)Y''(t) + b(t)Y'(t) + [c(t) + \lambda]Y(t) = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)] + [\lambda r(x) - q(x)]X(x) = 0. \quad (30)$$

Підставивши (27) у крайові умови (26), після скорочення на $Y(t) \neq 0$ маємо

$$\alpha_0 X(0) + \alpha_1 X'(0) = 0, \quad \beta_0 X(l) + \beta_1 X'(l) = 0. \quad (31)$$

Таким чином, для визначення функції $X(x)$ ми прийшли до наступної **задачі Штурма-Ліувілля**: знайти ті значення параметра λ (**власні значення**), при яких існують нетривіальні розв'язки (**власні функції**) крайової задачі (30),(31), а також знайти ці розв'язки.

Мають силу наступні твердження:

1. Задача Штурма-Ліувілля (30),(31) має зліченну множину власних значень $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$, причому всі вони є дійсними. Якщо в крайових умовах (31) $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, а $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то всі $\lambda_k > 0$; якщо ж $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 \leq 0$, $\beta_1 \geq 0$, то всі $\lambda_k \geq 0$.
2. Кожному власному значенню λ_k відповідає єдина (з точністю до сталого множника) власна функція $X_k(x)$. Вся сукупність власних функцій утворює послідовність $X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x), \dots$
3. Послідовність власних функцій $\{X_k(x)\}$ є ортогональною системою з вагою $r(x)$ на відрізку $x \in [0; l]$, тобто для всіх $i, j \in \mathbb{N}$

$$\int_0^l r(x) X_i(x) X_j(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

4. **Теорема Стеклова.** Всяка функція $f(x) \in C_{[0; l]}^2$, яка справджує крайові умови (31), розкладається в ряд Фур'є за системою $\{X_k(x)\}$ власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (30),(31):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x), \quad \text{де} \quad f_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) f(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx},$$

який збігається абсолютно і рівномірно на відрізку $x \in [0; l]$.

Нехай задача Штурма-Ліувілля (30),(31) розв'язана, тобто знайдені власні значення λ_k і відповідні власні функції $X_k(x)$, $k \in \mathbf{N}$.

Розглянемо рівняння (29) при $\lambda = \lambda_k$. Через те, що $a(t), b(t), c(t) \in C_{[0; T]}$ і $a(t) \geq a_0 > 0$, то завжди існує фундаментальна система $Y_{k,1}(t)$, $Y_{k,2}(t)$ частинних розв'язків рівняння (29). Тоді загальний розв'язок рівняння (29) є

$$Y(t) = A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t), \quad (32)$$

де A_k і B_k – довільні сталі.

Підставимо знайдені власні функції $X_k(x)$ і (32) в (27). Маємо:

$$U_k(t, x) = [A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t)] X_k(x), \quad k \in \mathbf{N}. \quad (33)$$

Складемо ряд із розв'язків (33):

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t)] X_k(x). \quad (34)$$

Якщо ряд (34) і ряди, що одержуються з нього двократним почленним диференціюванням по x і t , збігаються рівномірно, то сума цього ряду задовольнятиме рівняння (24) і крайові умови (26).

Другий етап. Вибираємо довільні сталі A_k і B_k таким чином, щоб ряд (34) справджував і початкові умови (25). Для цього підставляємо (34) в (25), після чого дістанемо рівності вигляду

$$U(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \varphi(x), \quad (35)$$

$$U_t(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x) = \psi(x), \quad (36)$$

де

$$\varphi_k = A_k Y_{k,1}(0) + B_k Y_{k,2}(0), \quad \psi_k = A_k Y'_{k,1}(0) + B_k Y'_{k,2}(0). \quad (37)$$

Вважаємо, що для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ виконані умови теореми Стеклова. Тоді ці функції можна подати у вигляді (35), (36), якщо покласти

$$\varphi_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) \varphi(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}, \quad \psi_k = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) \psi(x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}. \quad (38)$$

Підставивши знайдені згідно формул (38) значення φ_k і ψ_k в (37), визначаємо A_k і B_k (ці сталі визначаються однозначно, тому що визначник системи (37) відмінний від нуля). Визначивши A_k і B_k із (37) і підставивши знайдені значення в ряд (34), одержимо розв'язок поставленої мішаної задачі (24)-(26) (обґрунтування методу Фур'є див. [11], с. 148-159).

б) Інтегрування мішаної задачі у випадку неоднорідного рівняння. Розглянемо мішану задачу: в області D знайти розв'язок $U(t, x)$ рівняння

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + c(t)U = \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)U_x) - q(x)U \right] + f(t, x), \quad (24a)$$

який справджує умови (25), (26).

Розв'язок задачі (24a), (25), (26) шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = Z(t, x) + V(t, x), \quad (39)$$

де $Z(t, x)$ є розв'язком мішаної задачі (24)-(26), а $V(t, x)$ – розв'язок рівняння (24a), який справджує крайові умови (26) і однорідні початкові умови

$$V(0, x) = 0, \quad V_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l]. \quad (25a)$$

Згідно викладеного вище $Z(t, x)$ визначається за формулою (34). Функцію $V(t, x)$ шукаємо у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) X_k(x), \quad (40)$$

де $X_k(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (30), (31). Очевидно, що ряд (40) справджує крайові умови (26). Функції $Y_k(t)$ визначаємо таким чином, щоб ряд (40) задовольняв рівняння (24a) і початкові умови (25a). Надалі вважати-мемо, що для $f(t, x)$, як функції змінної x , виконані умови теореми Стеклова. Отже,

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \quad \text{де} \quad f_k(t) = \frac{\int_0^l r(x) X_k(x) f(t, x) dx}{\int_0^l r(x) X_k^2(x) dx}.$$

Підставивши (40) в рівняння (24a) і початкові умови (25a), дістанемо

$$\begin{aligned} a(t)Y_k''(t) + b(t)Y_k'(t) + [c(t) + \lambda_k]Y_k(t) &= f_k(t), \\ Y_k(0) = 0, \quad Y_k'(0) = 0, \quad k \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким чином, функції $Y_k(t)$ повинні бути розв'язками задач Коші (41). На підставі умов, накладених на коефіцієнти рівняння (24), для довільного фіксованого $k \in \mathbf{N}$ задача (41) завжди має єдиний розв'язок $Y_k(t)$. Підставивши знайдені $Y_k(t)$ в (40), а (40) в (39), одержимо шуканий розв'язок

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k Y_{k,1}(t) + B_k Y_{k,2}(t)] X_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(t) X_k(x).$$

в) Загальна мішана задача. Розглянемо мішану задачу: в області D знайти розв'язок $U(t, x)$ рівняння (24a), який справджує початкові умови (25) і крайові умови

$$\alpha_0 U(t, 0) + \alpha_1 U_x(t, 0) = \omega_1(t), \quad \beta_0 U(t, l) + \beta_1 U_x(t, l) = \omega_2(t), \quad t \in [0; T]. \quad (26a)$$

Розв'язок задачі (24a), (25), (26a) шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = W(t, x) + \omega(t, x), \quad (42)$$

де $\omega(t, x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна функція, для якої виконуються крайові умови (26а). Наприклад, якщо $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, то за $\omega(t, x)$ можна взяти функцію

$$\omega(t, x) = \omega_1(t) + xl^{-1}[\omega_2(t) - \omega_1(t)].$$

Підставивши (42) у (24а), (25) і (26а), приходимо до задачі визначення функції $W(t, x)$:

$$\begin{aligned} a(t)W_{tt} + b(t)W_t + c(t)W &= \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)W_x) - q(x)W \right] + f_1(t, x), \\ W(0, x) &= \varphi_1(x), \quad W_t(0, x) = \psi_1(x), \quad x \in [0; l], \\ \alpha_0 W(t, 0) + \alpha_1 W_x(t, 0) &= 0, \quad \beta_0 W(t, l) + \beta_1 W_x(t, l) = 0, \quad t \in [0; T], \end{aligned} \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= f(t, x) + \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)\omega_x) - q(x)\omega \right] - a(t)\omega_{tt} - b(t)\omega_t - c(t)\omega(t, x), \\ \varphi_1(x) &= \varphi(x) - \omega(0, x), \quad \psi_1(x) = \psi(x) - \omega_t(0, x). \end{aligned}$$

Задача (43) інтегрується аналогічно до мішаної задачі (24а),(25),(26) (див. вище "Інтегрування мішаної задачі у випадку неоднорідного рівняння").

г) Мішані задачі зі стаціонарними неоднорідностями. Мішана задача вигляду

$$a(t)U_{tt} + b(t)U_t + cU = \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)U_x) - q(x)U \right] + f(x), \quad (24б)$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \quad (25)$$

$$\alpha_0 U(t, 0) + \alpha_1 U_x(t, 0) = \gamma_1, \quad \beta_0 U(t, l) + \beta_1 U_x(t, l) = \gamma_2, \quad t \in [0; T], \quad (26б)$$

де c , γ_1 , γ_2 – задані сталі, називається *мішаною задачею зі стаціонарними неоднорідностями*; вона є частинним випадком загальної мішаної задачі. Розв'язок задачі (24б),(25),(26б) шукаємо у вигляді

$$U(t, x) = W(t, x) + \omega(x), \quad (44)$$

де функція $\omega(x)$ (статичний прогин) визначається з крайової задачі

$$c\omega(x) = \frac{1}{r(x)} \left[\frac{d}{dx} (p(x)\omega'(x)) - q(x)\omega(x) \right] + f(x), \quad (45)$$

$$\alpha_0 \omega(0) + \alpha_1 \omega'(0) = \gamma_1, \quad \beta_0 \omega(l) + \beta_1 \omega'(l) = \gamma_2.$$

Якщо розв'язок крайової задачі (45) існує, то для знаходження функції $W(t, x)$ дістанемо задачу

$$\begin{aligned} a(t)W_{tt} + b(t)W_t + cW &= \frac{1}{r(x)} \left[\frac{\partial}{\partial x} (p(x)W_x) - q(x)W \right], \\ W(0, x) &= \varphi(x) - \omega(x), \quad W_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l], \\ \alpha_0 W(t, 0) + \alpha_1 W_x(t, 0) &= 0, \quad \beta_0 W(t, l) + \beta_1 W_x(t, l) = 0, \quad t \in [0; T], \end{aligned}$$

аналогічну до мішаної задачі (24)-(26) (див. "Лінійні однорідні рівняння з однорідними крайовими умовами"). Якщо ж крайова задача (45) не має розв'язку, то задачу (24б),(25),(26б) слід інтегрувати як загальну мішану задачу (див. вище).

ПРИКЛАД 1. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковий момент часу вона мала форму $U(0,x) = \varphi(x)$, а початкова швидкість точок струни рівна $\psi(x)$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

Розв'язання. Описаний процес коливань однорідної струни приводить до наступної мішаної задачі: в області $\mathbf{D} = \{(t,x) \mid t \in (0;T), x \in (0;l)\}$ знайти розв'язок $U(t,x)$ рівняння

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad (46)$$

при початкових умовах (25) і крайових умовах

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \in [0;T]. \quad (47)$$

Рівняння і крайові умови однорідні. Отже, маємо випадок **а**).

Перший етап. Шукаємо нетривіальний розв'язок рівняння (46), який задовольняє крайові умови (47), у вигляді (27):

$$U(t,x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0.$$

Підставимо (27) у рівняння (46) та крайові умови (47). Одержимо:

$$Y''(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = const; \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (49).

1. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок рівняння з (49) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Підставивши його в крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Оскільки при $\lambda < 0$ визначник цієї системи $\Delta = -2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} l \neq 0$, то $C_1 = C_2 = 0$, а отже, $X(x) \equiv 0$ і $\lambda < 0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3 = 0, \\ C_3 l + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння з (49) можна подати у вигляді $X(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x$. Крайові умови дають:

$$\begin{cases} C_5 = 0, \\ C_6 \sin \sqrt{\lambda}l + C_5 \cos \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Отже, щоб одержати нетривіальний розв'язок задачі (49), слід знайти ті значення параметру λ , при яких $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$, тобто

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,$$

де n – довільне натуральне (адже $\sqrt{\lambda}l > 0$) число. Цим власним значенням відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені значення λ_n у рівняння (48) і зінтегрувавши його, одержимо:

$$Y_n(t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + \beta_n \sin \frac{\pi n a}{l} t, \quad n \in \mathbb{N},$$

де A, B – довільні сталі. Підставляємо знайдені функції $X_n(x)$ і $Y_n(t)$ в (27):

$$U_n(t, x) = \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad A_n = \alpha_n C_n, \quad B_n = \beta_n C_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу лінійності й однорідності рівняння (46) сума частинних розв'язків

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (50)$$

також буде розв'язком рівняння (46) і справджуватиме крайові умови (47).

Другий етап. Визначаємо сталі A_n і B_n так, щоб для ряду (50) виконувалися початкові умови (25)

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; l].$$

При цьому вважаємо, що $\varphi(x)$ неперервна разом з похідними до третього порядку включно і $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0$, а $\psi(x)$ – неперервна разом з похідними до другого порядку включно і $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Маємо:

$$U(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x), \quad U_t(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \psi(x).$$

З останніх рівностей випливає, що

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (50), одержимо шуканий розв'язок мішаної задачі (46),(25),(47).

Фізична інтерпретація розв'язку. Покладемо $\gamma_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{A_n}{B_n}$.

Тоді (див. [11], с. 135-137)

$$U_n(t, x) = \gamma_n \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \left(\frac{\pi n a}{l} t + \theta_n\right). \quad (51)$$

Із формули (51) видно, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією й тією ж частотою $\omega_n = \pi n a l^{-1}$ і фазою θ_n . Амплітуда коливань залежить від абсциси x точки струни й рівна $\gamma_n \sin \frac{\pi n}{l} x$. При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги. Такі коливання струни називаються **стоячими хвилями**.

Стояча хвиля $U_n(t, x)$ матиме стільки нерухомих на протязі всього процесу точок, скільки коренів має рівняння $\sin \frac{\pi m}{l} x = 0$ на проміжку $x \in [0; l]$. Таких точок буде $n + 1$: $x = \frac{ml}{n}$, $m = \overline{0, n}$. Нерухомі точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Посередині між вузлами розташовуються точки, в яких відхилення досягають максимуму; такі точки називаються **пучностями**.

Кожна струна може мати власні коливання лише строго визначених частот $\omega_n = \pi n a l^{-1}$. Ці частоти називаються **власними частотами** струни.

Висота тону звучання струни залежить від частоти коливань. Частота $\omega_1 = \pi l^{-1} \sqrt{T\rho^{-1}}$ (T – сила натягу, ρ – густина, $T\rho^{-1} = a^2$) називається частотою основного тону. Інші тони, які відповідають частотам, кратним ω_1 , називаються **обертонами**.

Розв'язок (51) є суперпозицією стоячих хвиль. При цьому характер звучання струни (тон, сила звуку, тембр) залежатиме від співвідношення між амплітудами окремих обертонів.

Зауваження. При розв'язуванні задач типу **а)-г)** слід звертати особливу увагу на коректність постановки (узгодженість початкових і крайових умов), а в задачах типу **а)** та **б)** враховувати виконання умов теореми Стеклова для початкових функцій та вільного члена в рівнянні. Адже невиконання зазначених умов означає, що для заданої мішаної задачі метод Фур'є незастосовний (див. [11] теореми обґрунтування методу Фур'є для рівнянь гіперболічного типу).

ПРИКЛАД 2. За допомогою методу Фур'є розв'язати мішану задачу:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} - \frac{\pi a}{l} U_t + 2t(x^2 - lx + 1 - l^{-1}x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (52)$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = x(x - l), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (53)$$

$$U(t, 0) = \mu(t), \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (54)$$

Розв'язання. Рівняння (52) і крайові умови (54) неоднорідні, отже, маємо загальну мішану задачу. Шукаємо розв'язок у вигляді (42):

$$U(t, x) = W(t, x) + \omega(t, x),$$

де

$$\omega(t, x) = \mu(t) + xl^{-1}[0 - \mu(t)] = (1 - xl^{-1})\mu(t). \quad (55)$$

Підставивши (42) у (51), (52) і (53), з урахуванням (54) дістанемо

$$W_{tt} = a^2 W_{xx} - \frac{\pi a}{l} W_t + 2tx(x - l) - (1 - xl^{-1})(\mu''(t) + \frac{\pi a}{l} \mu'(t) - 2t), \quad (52a)$$

$$W(0, x) = (xl^{-1} - 1)\mu(0), \quad W_t(0, x) = (xl^{-1} - 1)\mu'(0) + x(x - l), \quad (53a)$$

$$W(t, 0) = 0, \quad W(t, l) = 0. \quad (54a)$$

Крайові умови (54a) і початкові умови (53a) будуть узгодженими тільки при $\mu(0) = \mu'(0) = 0$. Вільний член рівняння (52a) задовольнятиме умови теореми Стеклова, якщо $\mu''(t) + \frac{\pi a}{l} \mu'(t) - 2t = 0$. Отже, до задачі (52a)-(54a) метод Фур'є застосовний лише в тому випадку, коли $\mu(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$\mu''(t) + \frac{\pi a}{l} \mu'(t) - 2t = 0, \quad \mu(0) = \mu'(0) = 0,$$

звідки

$$\mu(t) = \frac{2l^3}{(\pi a)^3} \left(e^{-\frac{\pi a}{l} t} - 1 \right) - \frac{lt^2}{\pi a} + \frac{2l^2 t}{(\pi a)^2}. \quad (56)$$

Тоді задача для $W(t, x)$ набуде вигляду

$$W_{tt} = a^2 W_{xx} - \frac{\pi a}{l} W_t + 2tx(x-l), \quad (52б)$$

$$W(0, x) = 0, \quad W_t(0, x) = x(x-l), \quad (53б)$$

$$W(t, 0) = 0, \quad W(t, l) = 0. \quad (54б)$$

Рівняння (52б) неоднорідне, а крайові умови (54б) однорідні, отже, маємо випадок **б**). Розв'язок задачі (52б)-(54б) шукаємо згідно формули (39):

$$W(t, x) = Z(t, x) + V(t, x),$$

де

$$Z(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Y_{n,1}(t) + B_n Y_{n,2}(t)] X_n(x),$$

а $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля (49).

Функції $Y_{n,1}(t)$ і $Y_{n,2}(t)$ визначаємо з рівняння

$$Y_n''(t) + \frac{\pi a}{l} Y_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 Y_n(t) = 0.$$

Його характеристичне рівняння

$$r^2 + \frac{\pi a}{l} r + \left(\frac{\pi n a}{l} \right)^2 = 0$$

має корені $r_{1,2} = -\frac{\pi a}{2l} \pm \sqrt{\left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{4} - n^2 \right)} = -\frac{\pi a}{2l} \pm i q_n$, де $q_n = \frac{\pi a}{l} \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}$. Тому

$Y_{n,1}(t) = e^{-\frac{\pi a}{2l} t} \cos q_n t$, $Y_{n,2}(t) = e^{-\frac{\pi a}{2l} t} \sin q_n t$, а

$$Z(t, x) = e^{-\frac{\pi a}{2l} t} \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos q_n t + B_n \sin q_n t] \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (57)$$

Шукаємо коефіцієнти A_n і B_n так, щоб ряд (57) задовольняв і початкові умови (53б). При $t = 0$ маємо

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad x(x-l) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\pi a}{2l} A_n + q_n B_n \right] \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

а отже, $A_n = 0$, $n = \overline{1, \infty}$; $q_n B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(\xi-l) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \frac{4l^2}{(\pi n)^3} [(-1)^n - 1]$, або

$$B_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{8l^2}{(\pi n)^3 q_n}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Отже,

$$Z(t, x) = -e^{-\frac{\pi a}{2l} t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8l^2}{[\pi(2k-1)]^3 q_{2k-1}} \sin q_{2k-1} t \sin \frac{\pi(2k-1)}{l} x. \quad (58)$$

Функцію $V(t, x)$ шукаємо у вигляді

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (59)$$

де функції $Y_n(t)$ є розв'язками задач Коші

$$\left. \begin{aligned} Y_n''(t) + \frac{\pi a}{l} Y_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 Y_n(t) &= f_n(t), \\ Y_n(0) = 0, \quad Y_n'(0) &= 0, \quad n \in \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

причому

$$f_n(t) = \frac{4t}{l} \int_0^l (\xi^2 - l\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{16tl^2}{(\pi n)^3}, & n = 2k-1, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

Зінтегрувавши задачі Коші (60) і підставивши знайдені функції $Y_n(t)$ в (59), а потім, згідно з (39), вирази (58), (59) і (55) в формулу (42), одержимо розв'язок вихідної мішаної задачі (52)-(54)

$$U(t, x) = (1 - xl^{-1})\mu(t) - e^{-\frac{\pi a}{2l}t} \sum_{\substack{k=1 \\ n=2k-1}}^{\infty} \frac{8l^2}{[\pi n]^3 q_n} \sin q_n t \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де $\mu(t)$ визначається формулою (56).

ПРИКЛАД 3. Знайти розв'язок мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + 2x + 3, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (61)$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (62)$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

Розв'язання. Рівняння (61) неоднорідне, однак вільний член $f(x) = 2x + 3$ не залежить від часу. Отже, мішана задача (61)-(63) є задачею зі стаціонарними неоднорідностями – маємо випадок **г**). Шукаємо розв'язок $U(t, x)$ у вигляді (44)

$$U(t, x) = W(t, x) + \omega(x),$$

де $\omega(x)$ є розв'язком крайової задачі

$$a^2 \omega''(x) + 2x + 3 = 0, \quad 0 < x < l, \quad (64)$$

$$\omega'(0) = 0, \quad \omega(l) = 0, \quad (65)$$

а для визначення $W(t, x)$ одержуємо мішану задачу

$$W_{tt} = a^2 W_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (61a)$$

$$W(0, x) = -\omega(x), \quad W_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (62a)$$

$$W_x(t, 0) = 0, \quad W(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (63a)$$

Знаходимо розв'язок крайової задачі (64),(65). Маємо:

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{6a^2}(2x + 9) + C_1 x + C_2.$$

Підставивши знайдений загальний розв'язок рівняння (64) у крайові умови (65) і визначивши сталі C_1 і C_2 , одержимо

$$\omega(x) = -\frac{x^2}{6a^2}(2x+9) + \frac{l^2}{6a^2}(2l+9). \quad (66)$$

Розв'язок мішаної задачі (61а)-(63а) шукаємо за допомогою методу Фур'є у вигляді (27):

$$W(t, x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0.$$

Підставивши (27) у рівняння (61а) та крайові умови (63а) і відокремивши змінні, одержимо:

$$Y''(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}, \quad (67)$$

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ X'(0) &= 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Дослідивши задачу Штурма-Ліувілля (68), дістанемо власні значення та власні функції у вигляді

$$\lambda_n = \left[\frac{2n-1}{2l} \pi \right]^2, \quad X_n(x) = C_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x, \quad C_n = \text{const}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (69)$$

Підставивши знайдені власні значення у рівняння (67) і зінтегрувавши його, дістанемо

$$Y_n(t) = \alpha_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t + \beta_n \sin \frac{2n-1}{2l} \pi a t, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (70)$$

де α_n, β_n – довільні сталі. Підставимо (69) та (70) в (27) і просумуємо. Тоді

$$W(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t + B_n \sin \frac{2n-1}{2l} \pi a t \right) \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x, \quad (71)$$

де $A_n = \alpha_n C_n, B_n = \beta_n C_n$.

Коефіцієнти A_n і B_n визначаємо з початкових умов (62а):

$$W(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x = \frac{x^2}{6a^2}(2x+9) - \frac{l^2}{6a^2}(2l+9),$$

$$W_t(0, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2l} \pi a B_n \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x = 0,$$

звідки $B_n = 0$, а

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\frac{\xi^2}{6a^2}(2\xi+9) - \frac{l^2}{6a^2}(2l+9) \right] \cos \frac{2n-1}{2l} \pi \xi d\xi = \frac{16l^2 [4l + (-1)^n (3+2l)(2n-1)\pi]}{[(2n-1)\pi]^4 a^2}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (71), а потім (71) і (66) – у формулу (44), одержуємо розв'язок поставленої мішаної задачі (61)-(63):

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \frac{l^2}{6a^2}(2l+9) - \frac{x^2}{6a^2}(2x+9) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16l^2 [4l + (-1)^n (3+2l)(2n-1)\pi]}{[(2n-1)\pi]^4 a^2} \cos \frac{2n-1}{2l} \pi a t \cos \frac{2n-1}{2l} \pi x. \end{aligned}$$

Зауваження. Метод відокремлення змінних в окремих випадках може бути використаний і при побудові розв'язків мішаних задач для хвильових рівнянь у багатовимірному просторі (коливання мембрани тощо).

❖ Розв'язати задачі:

14. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини $l=2$, лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=2$ нерухомо закріплений, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок рівна $\psi(x) = 4 - x^2$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

15. Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини l , у якої лівий кінець вільний, а правий пружно закріплений ($h = \alpha \Gamma^{-1} = 1$), якщо в початковий момент часу відхилення точок струни задане функцією

$$\varphi(x) = x^3(2-l) - x^2(3l-l^2),$$

а їх швидкість рівна нулеві.

16. Дослідити процес коливань однорідної струни довжини l з вільними кінцями, якщо на струну діє неперервно розподілена зовнішня сила інтенсивності $A \sin t$, де $A = const$. Початкові відхилення та швидкості відсутні.

17. Знайти закон коливань однорідної ($a=2$) струни довжини l , яка піддається дії неперервно розподіленої сили інтенсивності $f(t,x) = -A \cos t$, $A = const$, якщо лівий кінець струни рухається по закону $\mu(t) = A \cos t$, а правий кінець вільний. У початковий момент часу $t=0$ зміщення точок струни описується функцією $\varphi(x) = x^2 - 2lx + A$, а їх початкова швидкість рівна нулеві.

18. В області $D = \{(t,x) | t > 0, x \in (0;1)\}$ знайти розв'язок рівняння

$$U_{tt} = 0,25U_{xx} + 3x$$

при початкових і крайових умовах

$$U(0,x) = q_0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U(t,0) = U(t,1) = q_0, \quad t \geq 0 \quad (q_0 = const).$$

19. Дати фізичну інтерпретацію та знайти розв'язки наступних мішаних задач:

а) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + A e^{-t} \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad t > 0, \quad x \in (0;l), \quad A = const,$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l],$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \geq 0;$$

б) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + \sin 2t, \quad t > 0, \quad x \in (0;l),$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = -2 \cos \frac{2}{a} x, \quad x \in [0;l],$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t, \quad t \geq 0;$$

в) $U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x), \quad t > 0, \quad x \in (0;l),$

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad U_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0;l],$$

$$U_x(t,0) - hU(t,0) = \alpha, \quad U(t,l) = \beta, \quad t \geq 0, \quad h, \alpha, \beta = const, \quad h > 0;$$

$$\text{г) } U_{tt} = 16U_{xx} + \sin \frac{7\pi}{10} x, \quad t > 0, \quad x \in (0;5),$$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;5],$$

$$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,5) = 0, \quad t \geq 0.$$

20. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ з нерухомо закріпленим краєм, якщо

а) мембрана коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне $\sin \frac{\pi}{b} x \cdot \sin \frac{\pi}{c} y$;

б) коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною силою з густиною $f(t,x,y) = e^{-t} x(x-b) \sin \frac{2\pi}{c} y$.

21. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + f(t,x,y), \quad t > 0, \quad x \in (0;b), \quad y \in (0;c),$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad U_t(0,x,y) = 0, \quad x \in [0;b], \quad y \in [0;c],$$

$$U(t,0,y) = U(t,b,y) = U(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = tx(x-b) \sin t, \quad t \geq 0,$$

$$\text{де } f(t,x,y) = 2xy(x-b)[1 - (y-c)^2] \cos t - ty(x^2 - bx + 2) \sin t.$$

$$\text{б) } U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + \cos 2x \sin \pi y, \quad t > 0, \quad x \in (0;\pi), \quad y \in (0;1),$$

$$U(0,x,y) = A(y^2 + 1), \quad U_t(0,x,y) = 0, \quad x \in [0;\pi], \quad y \in [0;1],$$

$$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,\pi,y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;1],$$

$$U(t,x,0) = A, \quad U(t,x,1) = 2A, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;\pi], \quad A = \text{const.}$$

$$\text{в) } U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + 2At(x^2 - 4x - 1), \quad t > 0, \quad x \in (0;4), \quad y \in (0;\pi),$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad U_t(0,x,y) = Ax^2 + \sin \pi x \cos y, \quad x \in [0;4], \quad y \in [0;\pi],$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,\pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;4],$$

$$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,4,y) = 16At, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;\pi], \quad A = \text{const.}$$

22. Вивчити радіальні коливання пружного газу в сферичному резонаторі, стінки якого є ідеально відображаючими (тобто $\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S = 0$), якщо задані початкові значення потенціалу швидкостей і його похідної по часу:

$$U(0,r) = \varphi(r), \quad U_t(0,r) = 0, \quad r \in [0;R].$$

23. Кругла однорідна мембрана радіуса R , закріплена на краї, знаходиться в стані рівноваги при натязі T . В момент часу $t = 0$ до мембрани прикладений нормальний тиск P на одиницю площі. Знайти закон коливань мембрани.

24. Вивчити власні коливання однорідної кругової мембрани радіуса R , яка нерухомо закріплена на краї, якщо в початковий момент часу вона має форму параболоїда обертання $U(0,r) = A(1 - r^2 R^{-2})$, де $A = \text{const}$, а початкові швидкості її точок рівні нулеві.

Вказівка. Метод Фур'є для задач типу №№22-24 див. у [15], розділ V, §3.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ III

Варіант 1.

1. Зобразити графічно розв'язок $U(t, x)$ мішаної задачі

$$U_{tt} = U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0; 6),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0; 6],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 6) = 0 \quad t \geq 0$$

при $t = 1, 2, 3, \dots$, якщо функція $\psi(x)$ має вигляд, зображений на рис. 27. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі.

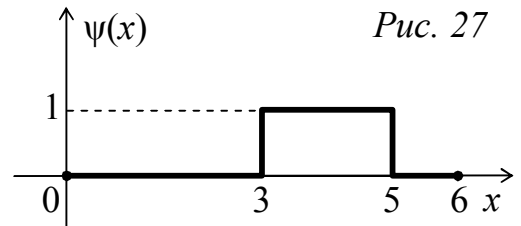


Рис. 27

2. Однорідна струна, кінці якої нерухомо закріплені в точках $x = 0$ і $x = l$, відтягнута в початковий момент часу в точці $x = c$, $0 < c < l$, на величину h і відпущена без початкової швидкості. Визначити зміщення $U(t, x)$ довільної точки струни та дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = \Delta U(t, x, y) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad x \in (0; 1), \quad y \in (0; 1),$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1],$$

$$U(t, 0, y) = t^2 y(y - 1), \quad U(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0; 1],$$

$$U(t, x, 0) = t^2 x(x - 1), \quad U(t, x, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; 1],$$

$$\text{де } f(t, x, y) = 2t^2(x + y - 2) + 2(xy + x + y)(1 - x)(y - 1).$$

Варіант 2.

1. Зобразити графічно профіль однорідної ($a = 1$) напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t = 3,25$ та $t = 4,25$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 3) \cup [5; +\infty), \\ x - 3, & 3 \leq x < 4, \\ 5 - x, & 4 \leq x < 5. \end{cases}$$

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} - \frac{\pi}{3} U_t(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0; 3),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 2, \quad x \in [0; 3],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, 3) = 2t, \quad t \geq 0.$$

3. В прямокутній мембрані $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$ краї $x = 0$ і $y = c$ вільні, а інші – жорстко закріплені. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання мембрани, викликані початковим відхиленням

$$\varphi(x, y) = Ax^2(x - b) \sin \frac{9\pi}{2c} y, \quad A = \text{const.}$$

Варіант 3.

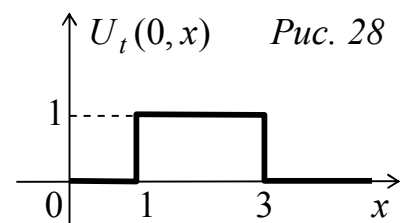


Рис. 28

1. Зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t=3,5$ і $t=4,5$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 28.
2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = 0,25U_{xx} - U(t, x) + \sin x, \quad t > 0, \quad x \in (0;1),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0;1],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Знайти закон коливань однорідної ($a=b$) прямокутної мембрани $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$, якщо краї $x=0$ і $x=b$ нерухомо закріплені, а на двох інших краях $U(t, x, 0) = U(t, x, c) = h \sin \frac{\pi}{b} x$, $h = const$. В початковий момент часу мембрана мала форму $U(0, x, y) = h \sin \frac{\pi}{b} x$, а швидкість усіх її точок задавалася функцією $v_0 \sin \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{c} y$, $v_0 = const$. Інтенсивність зовнішніх сил рівна

$$f(t, x, y) = (y^2 - cy + \pi^2 h) \sin \frac{\pi}{b} x.$$

Варіант 4.

1. Зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з вільним кінцем при $t=3,5$ та $t=4,5$, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;3) \cup [5;+\infty), \\ x-3, & 3 \leq x < 4, \\ 5-x, & 4 \leq x < 5. \end{cases}$$

2. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$, якщо в початковий момент часу струна знаходилася в спокої, а її точкам на проміжку $(\alpha; \beta) \subset (0; l)$ надана стала початкова швидкість v_0 . Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + 2t \operatorname{sh} y \operatorname{sh}(y-1), \quad t > 0, \quad x \in (0;1), \quad y \in (0;1),$$

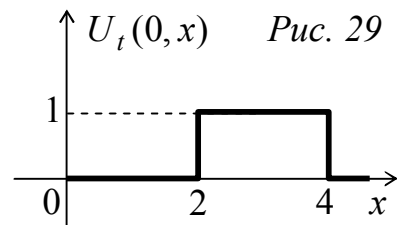
$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0;1], \quad y \in [0;1],$$

$$U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;1],$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;1].$$

Варіант 5.

1. Зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з вільним кінцем при



$t = 3,5$ і $t = 4,5$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка зображена на рис. 29.

2. Знайти розв'язок мішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx} + 4(x+1)^{-1}U_x + 2(x+1)^{-2}U(t,x), \quad t > 0, \quad x \in (0;2),$$

$$U(0,x) = x(2-x), \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;2],$$

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,2) = 0, \quad t \geq 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $U(t,x) = (x+1)^{-2}Z(t,x)$.

3. Вивчити поперечні коливання прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ із нерухомо закріпленим краєм, які викликані неперервно розподіленою по мембрані і перпендикулярною до її поверхні зовнішньою силою з густиною $f(t,x,y) = \rho \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(x-b) \sin \frac{2\pi}{c} y \sin \omega t$, $t > 0$, $\omega = \operatorname{const}$, де ρ – поверхнева густина маси мембрани, вважаючи, що реакцією навколишнього середовища можна нехтувати.

Варіант 6.

1. Напівнескінчена однорідна ($a=1$) струна коливається тільки внаслідок дії на кінець $x=0$ сили, рівної $\sin^2 \pi t$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу t . Зобразити профіль струни при $t = 1, 2, 3, 4$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = U_{xx} - U(t,x) + 2tx(x-l)^2, \quad t > 0, \quad x \in (0;l),$$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l],$$

$$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу $t=0$ має форму $Axy(b-x)(b-y)$, де $A = \operatorname{const}$, b – довжина сторони мембрани, почала коливатися без початкової швидкості. Дослідити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру.

Варіант 7.

1. Вивчити процес вільних коливань однорідної ($a=1$) скінченої струни довжини $l=6$ з нерухомо закріпленими кінцями (зобразити графічно профіль струни при $t = 1, 2, 3, \dots$ і знайти період коливань), якщо в початковий момент часу вона займала прямолінійне положення, а початкова швидкість точок струни має вигляд, зображений на рис. 30.

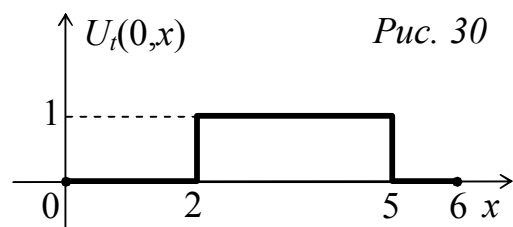


Рис. 30

2. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x=0$, а на кінці $x=l$ піддається дії збуджуючої гармонічної сили, що викликає зміщення, рівне $A \sin \omega t$, $A, \omega = \operatorname{const}$. Початкове відхилення точок струни рівне нулеві, їх початкова швидкість рівна $Ax\omega l^{-1}$, а сумарна інтен-

сивність зовнішніх сил описується функцією $-x^2\omega^2l^{-2}\sin\omega t$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = 0,25(U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad x \in (0;1), \quad y \in (0;2),$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad U_t(0,x,y) = x(2-x)\cos\frac{9\pi}{4}y, \quad x \in [0;1], \quad y \in [0;2],$$

$$U(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,1,y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;2],$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,2) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;1].$$

Варіант 8.

1. Напівнескінчена однорідна ($a=1$) струна коливається тільки внаслідок дії сили на кінець $x=0$, яка викликає його зміщення, рівне $\sin^2 \pi t$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу t . Зобразити профіль струни при $t=1, 2, 3, 4$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x) - 6, \quad t > 0, \quad x \in (0;l),$$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;l],$$

$$U_x(t,0) - 0,5U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, закріпленої нерухомо по контуру, які викликані початковою швидкістю $U_t(0,x,y) = Axy(b-x)(c-y)$, де $A = const$. Опором навколишнього середовища нехтувати.

Варіант 9.

1. Зобразити графічно профіль однорідної ($a=1$) напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем при $t=1, 2, 3, 4, 5$, якщо струна коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне

$$U(0,x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;2) \cup (4;+\infty), \\ 2 - 2(x-3)^2, & x \in [2;4]. \end{cases}$$

2. Знайти розв'язок $U(t,x)$ мішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx} + \pi n \operatorname{th} \frac{\pi n}{2} x U_x + \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi n}{2} x, \quad t > 0, \quad x \in (0;2),$$

$$U(0,x) = 0, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \in [0;2],$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad t \geq 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $Z(t,x) = \operatorname{ch} \frac{\pi n}{2} x \cdot U(t,x)$.

3. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ із закріпленим краєм, які викликані неперервно розподіленою по мембрані й перпендикулярною до її поверхні силою з густиною

$$f(t, x, y) = \rho xy(x - b)(y - c) \cos \omega t, \quad t > 0, \quad \omega = \text{const},$$

де ρ – поверхнева густина маси мембрани, вважаючи, що реакцією навколишнього середовища можна нехтувати.

Варіант 10.

1. Напівнескінчена однорідна струна з нерухомо закріпленим кінцем коливається тільки за рахунок початкового відхилення, яке рівне

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; c) \cup [3c; +\infty), \\ hc^{-1}(x - c), & c \leq x < 2c, \\ hc^{-1}(3c - x), & 2c \leq x < 3c, \end{cases}$$

де $h, c = \text{const} > 0$. Зобразити профіль струни в моменти часу: $t = \frac{c}{a}$, $t = \frac{3c}{2a}$, $t = \frac{2c}{a}$, $t = \frac{7c}{2a}$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx}(t, x) + (x^2 - l^2)t^2, \quad t > 0, \quad x \in (0; l), \\ U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l], \\ U_x(t, 0) &= 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; 1]$, $y \in [0; \pi]$, краї $x = 0$ і $x = 1$ якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, під дією неперервно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності $P_0 = \text{const}$, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна $y^2 - \pi y$.

Варіант 11.

1. Напівнескінчена однорідна струна з нерухомо закріпленим кінцем $x = 0$ знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. В момент часу $t = 0$ вона ударяється молоточком, який має ширину h , на відстані $c = \text{const}$ від точки закріплення. Головка молоточка сконструйована таким чином, що початкова швидкість, надана струні, буде максимальною біля центру головки і рівна нулеві біля її країв; крива початкової швидкості цієї частини струни має вигляд: $U_t(0, x) = v_0 \cos \frac{\pi}{h}(x - c)$ при $|x - c| \leq \frac{h}{2}$, де $v_0 = \text{const}$, $h = \text{const} < 2c$. Визначити форму струни при $t > 0$.

2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx}(t, x) + lx(x - l), \quad t > 0, \quad x \in (0; l), \\ U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l], \\ U(t, 0) &= 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

3. Дослідити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 2]$, краї $x = 0$ і $y = 0$ якої вільні, а інші – нерухомо закріплені,

якщо коливання відбуваються тільки внаслідок початкового відхилення її точок, яке рівне $U(0, x, y) = x^2 y^2 (1 - x)(2 - y)$.

Варіант 12.

1. По пружному напівнескінченному стержню при $t < 0$ поширюється хвиля деформації, яка рухається вліво:

$$U(t, x) = \begin{cases} \sin(x + 3t), & x > -3t, \\ 0, & x \in (0; -3t), \end{cases} \quad t < 0.$$

Кінець стержня $x = 0$ пружно закріплений: $U_x(t, 0) - \frac{2}{3}U(t, 0) = e^{-2t}$, $t \geq 0$.

Вивчити процес поздовжних коливань даного стержня при $t > 0$.

Вказівка. Із умови задачі випливає, що при $t > 0$ потрібно знайти розв'язок мішаної задачі:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= 9U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= \sin x, \quad U_t(0, x) = 3 \cos x, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) - \frac{2}{3}U(t, 0) &= e^{-2t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

2. Вивчити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$ і $x = l$, без початкових зміщень і швидкостей, якщо на струну діє рівномірно розподілена сила з густиною $A = \text{const}$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx} + U_{yy} + x(x-1)^2 \sin \frac{3\pi}{2} y \sin \omega t, \quad t > 0, \quad x, y \in (0; 1), \quad \omega = \text{const}, \\ U(0, x, y) &= 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1], \\ U|_{x=0} &= U_x|_{x=1} = U|_{y=0} = U_y|_{y=1} = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Варіант 13.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\ U(0, x) &= \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{2}(x-1), & x \in [1; 3], \\ 0, & x \in [0; 1] \cup (3; +\infty), \end{cases} \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\ U_x(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

і зобразити графічно її розв'язок в моменти часу $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Вивчити вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінці $x = l$ і вільної на кінці $x = 0$, на яку в момент часу $t = 0$ починає діяти стала сила ρg , ρ – лінійна густина струни. Початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + \frac{4}{3}x^2, \quad t > 0, \quad x \in (0; 1), \quad y \in (0; 1),$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1],$$

$$U|_{x=0} = U_y|_{y=0} = U_y|_{y=1} = 0, \quad (U_x + U)|_{x=1} = 2t^2, \quad t \geq 0.$$

Варіант 14.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі:

$$U_{tt} = U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = \begin{cases} -2 \cos \frac{\pi}{2}(x-2), & x \in [1; 3], \\ 0, & x \in [0; 1] \cup (3; +\infty), \end{cases} \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

і зобразити графічно її розв'язок в моменти часу $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Вивчити процес коливань однорідної струни довжини l , правий кінець $x = l$ якої вільний, а лівий $x = 0$ закріплений, якщо вона коливається тільки внаслідок дії неперервно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(t, x) = t \sin \frac{7\pi}{2l} x$.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy} - 2t^2x) + 0,5x^2y(y-2), \quad t > 0, \quad x \in (0; 2), \quad y \in (0; 2),$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; 2], \quad y \in [0; 2],$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 2, y) = t^2y(y-2), \quad t \geq 0, \quad y \in [0; 2],$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 2) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; 2].$$

Варіант 15.

1. Однорідна напівнескінчена струна з вільним кінцем $x = 0$ знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. В початковий момент часу по струні в точці $x = c$ б'є молоточок, який надає точкам струни початкову швидкість

$$U_t(0, x) = \begin{cases} v_0 = const, & |x - c| \leq \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases} \quad \text{де } h = const, \quad \frac{\pi}{h} - \text{ширина молоточка.}$$

Зобразити графічно профіль струни в моменти часу $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

2. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l , правий кінець $x = l$ якої вільний, а лівий $x = 0$ закріплений, якщо в початковий момент часу струні було надано форму кривої $\varphi(x) = 0,01l \sin \frac{\pi}{2l} x$, після чого струна була відпущена без початкової швидкості.

3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + x^2y(2x-3)(y-1)^2, \quad t > 0, \quad x \in (0; 1), \quad y \in (0; 1),$$

$$\begin{aligned}
U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; 1], \quad y \in [0; 1], \\
U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0; 1], \\
U(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, 1) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; 1].
\end{aligned}$$

Варіант 16.

1. Методом характеристик знайти розв'язок $U(t, x)$ мішаної задачі

$$\begin{aligned}
U_{tt} = 4U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0, \\
U(0, x) = \operatorname{ch} x, \quad U_t(0, x) = \cos 2x, \quad x \geq 0, \\
U_x(t, 0) - U(t, 0) = -t - 1, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

та дати її фізичну інтерпретацію.

2. Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = -l$, $x = l$, якщо в початковий момент часу струна мала форму параболи, симетричної відносно центра струни, причому максимальне початкове зміщення струни рівне h , а початкова швидкість її точок рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.
3. Дослідити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; 2]$, $y \in [0; 1]$, два краї якої $x = 0$ і $x = 2$ вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання мембрани здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок $U(0, x, y) = \cos \frac{\pi}{2} x \sin \pi y$.

Варіант 17.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з нерухомо закріпленим кінцем, якщо неперервно розподілена вздовж струни зовнішня сила рівна $f(t, x) = \rho(2e^{-x} + t)$, де ρ – лінійна густина струни, а початкові відхилення та швидкість точок струни рівні нулеві.
2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned}
U_{tt} = a^2 U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x \in (0; l), \\
U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l], \\
U_x(t, 0) - 0,25U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.
\end{aligned}$$

3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$, два краї $x = 0$ і $y = 0$ якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо коливання відбуваються тільки за рахунок неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини $f(t, x, y) = e^{-t}(x^2 - b^2) \cos \frac{\pi}{2c} y$.

Варіант 18.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з вільним кінцем, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок дії неперервно розподіленої вздовж струни поперечної сили інтенсивності $f(t, x) = 3t \cos x$.
2. Дослідити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$, $x = 2$, якщо початкова форма струни задається функцією $\varphi(x) = A \sin \frac{\pi m}{2} x$, де $A = \text{const}$, $m \in \mathbf{N}$, а початкова швидкість її точок рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$\begin{aligned}
 U_{tt} &= U_{xx} + U_{yy} - 3x(x-1), \quad t > 0, \quad x \in (0;1), \quad y \in (0;2), \\
 U(0, x, y) &= 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0;1], \quad y \in [0;2], \\
 U(t, 0, y) &= 0, \quad U(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad y \in [0;2], \\
 U_y(t, x, 0) &= 0, \quad U_y(t, x, 2) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0;1].
 \end{aligned}$$

Варіант 19.

1. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв'язати мішану задачу:

$$\begin{aligned}
 U_{tt} &= a^2 U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\
 U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\
 U(t, 0) &= 0,5t^2, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

2. Вивчити вільні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$, $x = l$, якщо в початковий момент часу точки струни знаходилися у стані спокою, а надана їм швидкість була рівна

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ v_0 \cos \frac{\pi(x-x_0)}{2\delta}, & x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \\ 0, & x_0 - \delta < x \leq l, \end{cases}$$

де $v_0, x_0, \delta - \text{const}$, причому $\delta < x_0 < l - \delta$. Дати фізичну інтерпретацію одержаного розв'язку.

3. Дослідити коливання однорідної квадратної мембрани з нерухомо закріпленим краєм, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок неперервно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили густини

$$f(t, x, y) = 3ty(y-b) \sin \frac{6\pi}{b} x,$$

де b – довжина сторони мембрани.

Варіант 20.

1. Поширюючи збурення кінця за допомогою прямої хвилі, розв'язати мішану задачу:

$$\begin{aligned}
 U_{tt} &= a^2 U_{xx}(t, x), \quad t > 0, \quad x > 0, \\
 U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\
 U_x(t, 0) &= \sin t - t, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

- Вивчити процес вільних коливань однорідної струни довжини l , лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=l$ пружно закріплений, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкової швидкості точок струни, яка рівна $2x^2(x-l)^2$.
- Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною b , якщо коливання викликані дією неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили густини $f(t, x, y) = e^{-t} \cos \frac{2\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{b} x$. Краї $x=0$ і $x=b$ нерухомо закріплені, а інші – вільні.

Варіант 21.

- Дослідити процес вільних коливань однорідної напівнескінченої струни з пружно закріпленим кінцем, якщо точка закріплення пружини зміщується згідно закону $\gamma(t) = 3t^2$, а початкові відхилення та швидкість точок струни відсутні.
- За допомогою заміни $Z(t, x) = xU(t, x)$ зінтегрувати мішану задачу:

$$\begin{aligned}
 xU_{xx} + 2U_x - xa^{-2}U_{tt} &= -q, \quad t > 0, \quad x \in (1;3), \quad q = \text{const}, \\
 U(0, x) &= 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [1;3], \\
 U(t, 1) &= 0, \quad U(t, 3) = 0, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$
- Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;2]$, $y \in [0;1]$, два краї $y=0$ і $y=1$ якої вільні, а інші два – нерухомо закріплені, якщо в початковий момент часу мембрана мала форму $U(0, x, y) = A \cos \pi y \sin \frac{\pi}{2} x$, $A = \text{const}$, і почала колитися без початкової швидкості. Реакцією навколишнього середовища нехтувати.

Варіант 22.

- Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та зінтегрувати її:

$$\begin{aligned}
 U_{tt} &= a^2 U_{xx}(t, x) + e^{-(t+x)}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a^2 \neq 1, \\
 U(0, x) &= \cos x, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0, \\
 U_x(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

- Однорідна струна довжини l , закріплена на обох кінцях, знаходиться в прямолінійному положенні рівноваги. Знайти відхилення $U(t, x)$ струни для довільного моменту часу, якщо вона збуджується початковою швидкістю

$$\psi(x) = \begin{cases} v_0 = \text{const}, & |x - c| \leq \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases} \quad \text{де } \left[c - \frac{\pi}{2h}; c + \frac{\pi}{2h} \right] \subset (0; l).$$

Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.

3. Однорідна квадратна мембрана зі стороною b , край $y = b$ якої вільний, а три інші краї нерухомо закріплені, коливається внаслідок дії неперервно розподіленої по всій її поверхні поперечної сили густини

$$f(t, x, y) = t^2 x(x - b) \sin \frac{5\pi}{2b} y.$$

Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу t .

Варіант 23.

1. Однорідна напівнескінчена струна з нерухомо закріпленим кінцем коливається тільки внаслідок дії неперервно розподіленої вздовж струни поперечної сили $f(t, x) = te^{-x}$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t .

2. В області $\mathbf{B} = \{(t, x) | t > 0, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок мішаної задачі:

$$U_{xx} - a^2 U_{tt} - 2hU_t - b^2 U(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbf{B},$$

$$U(0, x) = A, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U(t, 0) = A, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

де $a, h, b, A - const$.

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; b]$, $y \in [0; c]$, два краї $x = 0$ і $y = 0$ якої нерухомо закріплені, а інші два вільні, якщо в початковий момент часу точки мембрани знаходилися у спокої, а їх швидкість була рівна $U_t(0, x) = y(y - c)^2 \sin \frac{3\pi}{2b} x$.

Варіант 24.

1. Однорідна напівнескінчена струна з вільним кінцем коливається тільки внаслідок початкової швидкості її точок $U_t(0, x) = 0,5x^2 + 3$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t .

2. В області $\mathbf{B} = \{(t, x) | t > 0, 1 < x < l\}$ знайти розв'язок мішаної задачі:

$$xU_{xx} + 2U_x - xa^{-2}U_{tt} = -PT^{-1}, \quad (t, x) \in \mathbf{B}, \quad PT^{-1} = const,$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [1; l],$$

$$U(t, 1) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$$

Вказівка. Ввести заміну: $Z(t, x) = xU(t, x)$.

3. Однорідна квадратна мембрана зі стороною $b = 2$ з нерухомо закріпленим краєм піддається дії неперервно розподіленої по її поверхні поперечної сили $f(t, x, y) = e^{-t} y(y - 2)(2 - x) \operatorname{sh} x$. В початковий момент часу відхилення і швидкості точок мембрани були відсутні. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок мембрани в довільний момент часу t .

Варіант 25.

1. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t, x) + e^{-x}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a^2 \neq 1,$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U_x(t, 0) = t^2, \quad t \geq 0.$$

2. Знайти закон вільних коливань однорідної струни, лівий кінець $x=0$ якої вільний, а правий $x=l$ закріплений, якщо початкове відхилення точок струни $U(0, x) = -0,01x^2(x-l)$, а їх початкова швидкість рівна нулеві. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; s]$, $y \in [0; p]$, краї $x=0$ і $y=p$ якої нерухомо закріплені, а інші вільні, якщо коливання викликані неперервно розподіленою по мембрані поперечною сили густини

$$f(t, x, y) = e^{-t} x(x-s)^2 \cos \frac{\pi}{2p} y.$$

Варіант 26.

1. Однорідна напівнескінчена струна, кінець якої підданий дії сили $v(t) = -e^{-t}$, в початковий момент часу займала прямолінійне положення, а початкова швидкість її точок була рівна $U_t(0, x) = e^{-x}$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t .
2. Вивчити вільні коливання однорідної струни довжини l , закріпленої на кінцях $x=0$ та $x=l$, якщо в початковий момент часу струні була надана форма кривої $U(0, x) = (8l)^{-1}(l-x)x$, а потім вона була відпущена без початкової швидкості. Дати фізичну інтерпретацію одержаного результату.
3. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad x \in (0; b), \quad y \in (0; c),$$

$$U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad U_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad x \in [0; b], \quad y \in [0; c],$$

$$U(t, 0, y) = \mu_1(y), \quad U(t, b, y) = \mu_2(y), \quad t \geq 0, \quad y \in [0; c],$$

$$U(t, x, 0) = \nu_1(x), \quad U(t, x, c) = \nu_2(x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0; b].$$

Вказівка. Вважати, що для функцій $\mu_i(y)$, $\nu_i(x)$, $i=1,2$, виконуються умови узгодженості: $\mu_i(0) = \mu_i(c) = \nu_i(0) = \nu_i(b) = 0$, $i=1,2$.

Варіант 27.

1. Вивчити процес коливань однорідної напівнескінченої струни з вільним кінцем, якщо коливання здійснюються лише за рахунок неперервно розподіленої по струні сили інтенсивності $x^2 e^{-t}$.

2. Зінтегрувати мішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0;3),$$

$$U(0,x) = x^2 - 3,75x, \quad U_t(0,x) = 4 - x, \quad x \in [0;3],$$

$$U(t,0) = 4t, \quad U_x(t,3) + U(t,3) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$ з вільними краями під дією неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили $f(t,x,y) = \rho \left(1 + \cos \frac{\pi}{c} y\right)$, де ρ – лінійна густина мембрани, якщо початкове відхилення точок мембрани задане функцією $\cos \frac{\pi}{b} x$, а їх початкова швидкість рівна нулеві.

Варіант 28.

1. Зінтегрувати мішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0,x) = -4, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U_x(t,0) - hU(t,0) = 4h, \quad t \geq 0, \quad h = const > 0.$$

2. Однорідна струна довжини $l = \frac{1}{4}$, лівий кінець якої закріплений пружно ($h = \frac{3\pi}{4l}$), а правий – жорстко, коливається під дією неперервно розподіленої по струні поперечної сили інтенсивності $x^2(x-1)e^{-t}$. Визначити положення точок струни в довільний момент часу $t > 0$, якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, а швидкість її точок була рівна $\psi(x) = v_0 \left(\sin \frac{3\pi}{4l} x + \cos \frac{3\pi}{4l} x\right)$, де $v_0 = const$.

3. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани $x \in [0;b]$, $y \in [0;c]$, якщо початкове відхилення її точок задане функцією $8y(y-c)\sin \frac{\pi}{b} x$, а їх початкова швидкість рівна xy . На краях $x=b$ та $y=c$ відхилення задається функціями відповідно bty та ctx , а інші два краї нерухомо закріплені.

Варіант 29.

1. Зінтегрувати мішану задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$U_{tt} = 9U_{xx}(t,x) - 12, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0,x) = x, \quad U_t(0,x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(t,0) = \sin^2 t, \quad t \geq 0.$$

2. Дослідити коливання однорідної ($a=1$) струни довжини l , до кінців $x=0$ і $x=l$ якої прикладені сили $-T\sin t$ та $T\sin t$ відповідно ($T=const$ – величина натягу) якщо в початковий момент часу струна займала прямолінійне положення, початкова швидкість її точок була рівна $\psi(x) = x$, а інтенсивність зовнішніх сил $f(t,x) = (2x^3 - 3x^2l - x)\sin t$.

3. Вивчити вільні коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною $b = 4$, край $y = 4$ якої закріплений пружно, а інші три краї – нерухомо, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їх початкова швидкість рівна $v_0 y(y - 4)^2 \sin \pi x$, де $v_0 = \text{const}$.

Варіант 30.

1. Однорідна напівнескінчена струна із пружно закріпленим ($h = 1$) кінцем коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка рівна $v_0 = \text{const}$, і зміщення точки закріплення пружини $\gamma(t) = -v_0 t$. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, визначити положення точок струни в довільний момент часу t .
2. Дати фізичну інтерпретацію поставленої мішаної задачі та знайти її розв'язок:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}(t, x) + 2x, \quad t > 0, \quad x \in (0; 2),$$

$$U(0, x) = x^2, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; 2],$$

$$U_x(t, 0) = t^2, \quad U_x(t, 2) = t^2 + 4, \quad t \geq 0.$$

3. Вивчити процес вільних коливань однорідної прямокутної мембрани $x \in [0; \frac{1}{2}]$, $y \in [0; 1]$ з закріпленим краєм, якщо в початковий момент часу відхилення точок мембрани задавалося функцією $\sin 6\pi x \sin 6\pi y$, а їх швидкість була рівна $y(y - 1) \operatorname{sh} x \operatorname{sh}(x - \frac{1}{2})$.

РОЗДІЛ IV РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

§1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь параболічного типу. Постановка мішаних задач

При дослідженні фізичних процесів різної природи часто зустрічаються ДРЧП параболічного типу. Так, наприклад, рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(t, x, y, z)$$

описує процеси:

а) поширення тепла в однорідному ізотропному тілі. Тоді $U(t, x, y, z)$ є температурою точок тіла в різні моменти часу, $a^2 = k(c\rho)^{-1}$ ($k > 0$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла, c – його питома теплоємність, ρ – густина), $f(t, x, y, z) = F(c\rho)^{-1}$, де $F(t, x, y, z)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла;

б) дифузії рідини або газу в однорідному середовищі. Тоді $U(t, x, y, z)$ є концентрацією речовини в точках середовища в різні моменти часу, $a^2 = Dc^{-1}$ (D – коефіцієнт дифузії, c – коефіцієнт пористості середовища), $f(t, x, y, z) = Fc^{-1}$, де $F(t, x, y, z)$ – інтенсивність внутрішніх джерел речовини.

При складанні математичних моделей фізичних процесів, які відбуваються в об'єктах скінчених або напівнескінчених розмірів, окрім рівняння та початкової умови, необхідно задавати режими на межі об'єкта (крайові умови), що приводить до мішаних задач для ДРЧП.

Для прикладу розглянемо наступну задачу: дослідити процес поширення тепла в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна $\varphi(x)$, а на кінцях

1) задані закони зміни температури $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$;

2) задані теплові потоки $v_1(t)$ і $v_2(t)$, які поступають у стержень через відповідні поперечні перерізи σ ;

3) відбувається теплообмін із довкіллям, температура якого рівна $\gamma(t)$, з коефіцієнтом $\alpha > 0$ (коефіцієнт зовнішньої теплопровідності).

Відповідна математична модель: в області $\mathbf{V} = \{(t, x) \mid 0 < t < T, 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$U_t(t, x) = a^2 U_{xx}(t, x), \quad a^2 = k(c\rho)^{-1}, \quad (1)$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

та відповідні крайові умови:

1) $U(t, 0) = \mu_1(t)$, $U(t, l) = \mu_2(t)$, $0 \leq t < T$ (перша мішана задача);

2) $-k\sigma U_x(t, 0) = v_1(t)$, $k\sigma U_x(t, l) = v_2(t)$, $0 \leq t < T$ (друга мішана задача);

$$3) \begin{cases} U_x(t,0) - h[U(t,0) - \gamma(t)] = 0, \\ U_x(t,l) + h[U(t,l) - \gamma(t)] = 0, \end{cases} \quad 0 \leq t < T, \quad h = \alpha k^{-1} \text{ (третя мішана задача).}$$

Якщо $\mu_1(t) \equiv 0$, $\mu_2(t) \equiv 0$, $0 \leq t < T$, то кажуть, що на кінцях стержня підтримується нульова температура. Якщо ж $\nu_1(t) \equiv 0$, $\nu_2(t) \equiv 0$, $0 \leq t < T$, то кінці стержня є теплоізолюваними.

Аналогічно ставляться мішані задачі для рівнянь параболічного типу і у випадку довільної вимірності простору. Нехай, наприклад, потрібно визначити температуру однорідного ізотропного тіла \mathbf{V} в довільний момент часу $t > 0$, якщо початкова температура точок тіла задана функцією $\varphi(x, y, z)$, усередині тіла є джерела тепла інтенсивності $F(t, x, y, z)$, а на його досить гладкій поверхні \mathbf{S} заданий один із наступних теплових режимів:

- 1) задана температура $\mu(t, x, y, z)$;
- 2) заданий тепловий потік $\nu(t, x, y, z)$;
- 3) проходить теплообмін із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\gamma(t, x, y, z)$.

Математична модель поставленої задачі матиме наступний вигляд: в області $\mathbf{V} = \{(t, x, y, z) \mid t > 0, (x, y, z) \in \mathbf{V}\}$ знайти розв'язок ДРЧП

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + f(t, x, y, z), \quad f(t, x, y, z) = F(\text{ср})^{-1},$$

який справджує початкову умову

$$U(0, x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{V} \cup \mathbf{S} = \bar{\mathbf{V}},$$

та одну з крайових умов:

- 1) $U(t, x, y, z)|_{(x, y, z) \in \mathbf{S}} = \mu(t, x, y, z), \quad t \geq 0, (x, y, z) \in \mathbf{S};$
- 2) $-k \frac{\partial U(t, x, y, z)}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x, y, z) \in \mathbf{S}} = \nu(t, x, y, z), \quad t \geq 0, (x, y, z) \in \mathbf{S};$
- 3) $\frac{\partial U(t, x, y, z)}{\partial \vec{n}} \Big|_{(x, y, z) \in \mathbf{S}} + h[U(t, x, y, z) - \gamma(t, x, y, z)] \Big|_{(x, y, z) \in \mathbf{S}} = 0, \quad t \geq 0,$

де $h = \alpha k^{-1}$.

Примітка. Рівняння (1) описує процес поширення температури у стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею. Якщо ж через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із довкіллям, температура якого рівна $U_0(t, x)$, то згідно закону Ньютона кількість тепла, яка пройде через бічну поверхню стержня, пропорційна різниці температур стержня і навколишнього середовища, тому рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$U_t(t, x) = a^2 U_{xx}(t, x) - b[U(t, x) - U_0(t, x)], \quad (2)$$

де $b = \alpha \varpi(\text{ср}\sigma)^{-1}$ (ϖ – периметр поперечного перерізу стержня).

Рівняння (2) можна спростити, ввівши підстановку

$$U(t, x) = e^{-bt} \cdot V(t, x).$$

Тоді для нової невідомої функції $V(t, x)$ одержимо рівняння

$$V_t(t, x) = a^2 V_{xx}(t, x) + be^{bt} \cdot U_0(t, x).$$

Проте при розв'язуванні конкретних задач дана підстановка не завжди доцільна. Зокрема, у випадку задач зі стаціонарними неоднорідностями після такої підстановки одержуємо складнішу нестационарну задачу.

❖ Виконати завдання:

1. Скласти математичну модель розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з урахуванням узгодженості початкової і крайових умов, якщо:
 - а) теплообмін вільний, початкова температура точок стержня рівна $\varphi(x)$, кінці стержня підтримуються при нульовій температурі, а через бічну поверхню відбувається теплообмін із довкіллям нульової температури;
 - б) інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $f(t, x)$, кінці стержня та його бічна поверхня теплоізовані, а в початковий момент часу стержень мав нульову температуру;
 - в) при відсутності внутрішніх джерел тепла через бічну поверхню стержня відбувається теплообмін із довкіллям, температура якого $\theta(t, x)$, початкова температура стержня рівна нулеві, лівий кінець стержня підтримується при температурі $\omega(t)$, а на правому задано тепловий потік $\nu(t)$;
 - г) інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $f(t, x)$, початкова температура стержня рівна $\varphi(x)$, бічна поверхня стержня теплоізована, а через кінці відбувається теплообмін із довкіллям різної природи з однаковим коефіцієнтом $\alpha = const > 0$, причому температура довкілля на лівому кінці рівна $\gamma(t)$, а на правому – рівна нулеві.
2. Скласти математичну модель процесу поширення тепла в однорідній ізотропній прямокутній пластинці $\bar{D} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\}$ з урахуванням узгодженості початкових і крайових умов, якщо:
 - а) теплообмін вільний, початкова температура пластинки рівна $\varphi(x, y)$, а край пластинки підтримується при нульовій температурі;
 - б) інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $f(t, x, y)$, в початковий момент часу пластинка мала нульову температуру, а край пластинки теплоізований;
 - в) внутрішні джерела тепла відсутні, початкова температура пластинки рівна нулеві, краї $x = 0$ та $y = 4$ підтримуються при температурі $\omega_1(t, y)$ та $\omega_2(t, x)$ відповідно, а на краях $y = 0$ та $x = 1$ задані теплові потоки $\nu_1(t, x)$ та $\nu_2(t, y)$ відповідно;
 - г) інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $f(t, x, y)$, початкова температура пластинки рівна $\varphi(x, y)$, а через краї пластинки відбувається теплообмін із довкіллям різної природи з однаковим коефіцієнтом $\alpha = const > 0$, причому температура довкілля на краях $y = 0$ та $y = 4$ рівна $\gamma_1(t, x)$ та $\gamma_2(t, x)$ відповідно, а на краях $x = 0$ та $x = 1$ – рівна нулеві.

3. Скласти математичну модель процесу розподілу температури в однорідній кулі $\bar{D} = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ з урахуванням узгодженості початкових і крайових умов, якщо:
- а) теплообмін вільний, початкова температура кулі рівна $\Phi(r)$, а на межі кулі підтримується нульова температура;
 - б) інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $f(t, r)$, в початковий момент часу куля мала нульову температуру, а її межа теплоізолювана;
 - в) внутрішні джерела тепла відсутні, початкова температура кулі рівна нулеві, а тепловий потік на межі рівний $v(t, \varphi)$;
 - г) інтенсивність зовнішніх сил рівна $f(t, r, \theta, \varphi)$, початкова температура кулі рівна $\Phi(r, \theta, \varphi)$, а через межу відбувається теплообмін із довкіллям нульової температури з коефіцієнтом $\alpha = const > 0$ таким, що $h = \alpha k^{-1} = 4$.
4. Записати математичну модель при умовах задачі 1в) для стержня змінного поперечного перерізу $S(x)$.
5. Вивести рівняння дифузії в нерухомому середовищі, припускаючи, що поверхнями рівної концентрації в довільний момент часу $t \in$ площини, перпендикулярні до осі x . Записати крайові умови, вважаючи, що дифузія відбувається в плоскому шарі $0 \leq x \leq l$; розглянути випадки, коли:
- а) на граничних площинах концентрація дифундуючої речовини підтримується рівною нулеві;
 - б) граничні площини є непроникними;
 - в) граничні площини напівпроникні, причому дифузія через ці площини проходить згідно з законом, аналогічним до закону Ньютона для конвективного теплообміну.
6. Вивести рівняння дифузії в середовищі, яке рухається зі сталою швидкістю в напрямку осі x , якщо поверхнями рівної концентрації в довільний момент часу $t \in$ площини, перпендикулярні до осі x .
7. Вивести рівняння дифузії для речовини, частинки якої:
- а) розпадаються (наприклад, нестійкий газ, радон), причому швидкість розпаду дифундуючої речовини в кожній точці простору пропорційна концентрації;
 - б) розмножуються (наприклад, дифузія нейтронів), причому швидкість розмноження дифундуючої речовини в кожній точці простору пропорційна концентрації.
8. Поставити мішану задачу про рух шару в'язкої рідини між двома паралельними площинами, якщо одна з них у момент часу $t = 0$ розпочинає рухатися паралельно до іншої з заданою швидкістю в одному напрямі. Дією сили тяжіння нехтувати.
9. Вивести рівняння для процесу поширення плоского електромагнітного поля в провідному середовищі. (Середовище називається провідним, якщо струмами зміщення можна знехтувати в порівнянні зі струмами провідності.)
10. Вивести рівняння для процесу поширення електромагнітного поля в необмеженому просторі, заповненому провідним середовищем з діелектричною сталою $\varepsilon = const$, провідністю $\lambda = const$ і магнітною проникністю $\mu = const$.

§2. Метод відокремлення змінних (метод Фур'є) побудови розв'язків мішаних задач для рівнянь параболічного типу

Схема інтегрування мішаних задач для рівнянь параболічного типу є аналогічною схемі розв'язування мішаних задач для рівнянь гіперболічного типу (розділ III). Наведемо основні ідеї методу відокремлення змінних побудови розв'язків мішаних задач на прикладі першої мішаної задачі для рівняння поширення тепла в однорідному ізотропному стержні:

$$\begin{aligned}U_t &= a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\U(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l; \\U(t, 0) &= \mu_1(t), \quad U(t, l) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t < T.\end{aligned}$$

Будемо вважати, що початкова та крайові умови є узгодженими, тобто виконуються рівності $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$.

Можна вирізнити чотири типи задач.

1. Задача для однорідного рівняння з однорідними крайовими умовами ($f(t, x) \equiv 0$, $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$). Розв'язок шукається у вигляді добутку:

$$U(t, x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0,$$

де $X(x)$ – власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля, а $Y(t)$ визначаються з однорідного рівняння та початкової умови.

2. Задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами ($f(t, x) \neq 0$, $\mu_1(t) = \mu_2(t) \equiv 0$). Будемо вважати, що $f(t, x)$ як функція змінної x задовольняє крайові умови. Тоді згідно з методом Фур'є розв'язок шукається у вигляді ряду

$$U(t, x) = \sum_n Y_n(t) X_n(x),$$

де $X_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі, а $Y_n(t)$ визначаються підстановкою ряду для $U(t, x)$ у неоднорідне рівняння та в початкову умову.

3. Загальна мішана задача: $\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) \neq 0$, тобто хоча б одна з крайових умов неоднорідна. Тоді для застосування методу відокремлення змінних необхідно спершу звести крайові умови до однорідних. Розв'язок шукаємо у вигляді суми

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(t, x),$$

причому допоміжну функцію $\omega(t, x)$ підбираємо таким чином, щоб для неї виконувалися крайові умови. Зокрема, у випадку поставленої вище задачі слід вимагати виконання умов $\omega(t, 0) = \mu_1(t)$, $\omega(t, l) = \mu_2(t)$. Тоді для нової невідомої функції $V(t, x)$ одержимо мішану задачу типу **1** або типу **2**, до якої за умови її коректної постановки можна застосувати метод Фур'є.

Зауваження. Допоміжну функцію $\omega(t, x)$ зручно шукати в стандартному лінійному вигляді $\omega(t, x) = a(t)x + b(t)$, де коефіцієнти $a(t)$ і $b(t)$ визначаються з крайових умов. Зокрема, якщо обидві крайові умови першого роду, то одержи-

мо: $\omega(t, x) = \mu_1(t) + xl^{-1}(\mu_2(t) - \mu_1(t))$. Винятком є друга мішана задача: якщо обидві крайові умови другого роду, тобто мають вигляд $U_x(t, 0) = v_1(t)$, $U_x(t, l) = v_2(t)$, то допоміжна функція в лінійному вигляді не визначається однозначно, зате її можна шукати у вигляді $\omega(t, x) = (a(t)x + b(t))x$. У цьому випадку будемо мати $\omega(t, x) = xv_1(t) + 0,5x^2l^{-1}(v_2(t) - v_1(t))$. Проте такі прості прийоми не завжди є ефективними. Зокрема, якщо в одержаній для $V(t, x)$ мішаній задачі з однорідними крайовими умовами вільний член у рівнянні не задовольняє крайові умови відносно незалежної змінної x , то інтегрувати таку задачу методом Фур'є не можна (за винятком випадку задачі зі стаціонарними неоднорідностями, поданого нижче), а отже, слід шукати інші способи побудови допоміжної функції.

4. Задача зі стаціонарними неоднорідностями: вільний член у рівнянні та крайові умови не залежать від часу, тобто $f(t, x) \equiv f(x)$, $\mu_1(t) \equiv \mu_1 = const$, $\mu_2(t) \equiv \mu_2 = const$. Цю задачу можна розв'язувати як загальну мішану задачу (вона є частинним випадком загальної задачі), проте в даному випадку це нерационально. Найзручніше шукати розв'язок у вигляді

$$U(t, x) = V(t, x) + \omega(x),$$

де допоміжна функція $\omega(x)$ (стаціонарна температура) повинна задовольняти не лише крайові умови, а й рівняння. Зокрема, для поставленої вище мішаної задачі $\omega(x)$ повинна бути розв'язком наступної крайової задачі:

$$a^2 \omega''(x) + f(x) = 0;$$

$$\omega(0) = \mu_1, \quad \omega(l) = \mu_2.$$

Тоді для функції $V(t, x)$ одержимо мішану задачу типу **1** (однорідне рівняння та однорідні крайові умови), до якої безумовно застосовний метод Фур'є.

Винятком тут знову є друга мішана задача. Крайова задача

$$a^2 \omega''(x) + f(x) = 0;$$

$$\omega'(0) = v_1, \quad \omega'(l) = v_2$$

має розв'язок, якщо виконується умова $\int_0^l f(\xi) d\xi = a^2(v_1 - v_2)$. Якщо ж ця умова

не виконується, то задану другу мішану задачу слід інтегрувати як задачу типу **2** при $v_1 = v_2 = 0$, або як загальну мішану задачу у випадку неоднорідних крайових умов.

ПРИКЛАД 1. Зінтегрувати мішану задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1; \quad (3)$$

$$U(0, x) = 1 + x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$U_x(t, 0) - U(t, 0) = 0, \quad U(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T. \quad (5)$$

Фізична інтерпретація: знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини $l = 1$ із теплоізолюваною бічною поверхнею,

якщо початкова температура точок стержня рівна $\varphi(x) = 1 + x - 2x^2$, на правому кінці підтримується нульова температура, а на лівому відбувається теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури.

Розв'язання. Рівняння та крайові умови однорідні (задача типу **1**). Початкова та крайові умови узгоджені, отже, можемо застосувати метод відокремлення змінних. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку:

$$U(t, x) = Y(t) \cdot X(x) \neq 0. \quad (6)$$

Підставивши (6) у рівняння (3) та крайові умови (5), одержимо:

$$Y'(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \quad \lambda = \text{const}; \quad (7)$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X'(0) - X(0) = 0, \quad X(1) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Дослідимо задачу Штурма-Ліувілля (8).

1. Нехай $\lambda < 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння з (8) запишеться у вигляді $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Підставивши цей розв'язок у крайові умови, одержимо лінійну однорідну систему відносно невідомих сталих C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1(\sqrt{-\lambda} - 1) + C_2(-\sqrt{-\lambda} - 1) = 0; \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta = 2(\sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} + \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}) \neq 0$, оскільки $\sqrt{-\lambda} > 0$. Отже, $C_1 = C_2 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda < 0$ не є власним значенням.

2. Нехай $\lambda = 0$. Тоді $X(x) = C_3 x + C_4$ і з крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_3 - C_4 = 0; \\ C_3 + C_4 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_3 = C_4 = 0$, а тому $X(x) \equiv 0$ і $\lambda = 0$ також не є власним значенням.

3. При $\lambda > 0$ загальний розв'язок рівняння з (8) запишеться у вигляді $X(x) = C_5 \cos \sqrt{\lambda}x + C_6 \sin \sqrt{\lambda}x$. Із крайових умов одержимо:

$$\begin{cases} C_6 \sqrt{\lambda} - C_5 = 0; \\ C_6 \sin \sqrt{\lambda} + C_5 \cos \sqrt{\lambda} = 0, \end{cases}$$

звідки $C_5 = C_6 \sqrt{\lambda}$ і $C_6(\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}) = 0$. Отже, нетривіальний розв'язок задачі (8) існує тільки для тих значень параметру λ , які є розв'язками трансцендентного рівняння $\sin \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$ або

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}. \quad (9)$$

Рівняння (9) має зліченну множину коренів λ_k , $k \in \mathbb{N}$, причому всі корені є дійсними (див. с. 79). Введемо позначення $\sqrt{\lambda_k} = \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді відповідні власні функції матимуть вигляд (беремо для визначеності $C_6 = 1$)

$$X_k(x) = \mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x, \quad k \in \mathbb{N},$$

де μ_k – додатні корені рівняння $\operatorname{tg} \mu_k = -\mu_k$.

Підставивши знайдені власні значення $\lambda_k = \mu_k^2$ у рівняння (7) та зінтегрувавши його, одержимо:

$$Y_k(t) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де A_k – довільні сталі. Тоді згідно (6) будь-який частинний розв'язок рівняння (3), який задовольняє крайові умови (5), запишеться у вигляді

$$U_k(t, x) = A_k e^{-(a\mu_k)^2 t} (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В силу лінійності й однорідності рівняння (3) сума частинних розв'язків

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(a\mu_k)^2 t} (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) \quad (10)$$

також буде розв'язком рівняння (3) і задовольнятиме крайові умови (5). Сталі A_k визначаємо підстановкою ряду (10) у початкову умову (4). Маємо:

$$U(0, x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) = 1 + x - 2x^2.$$

Домножимо на $X_k(x) = \mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x$ ліву і праву частини останньої рівності і зінтегруємо по змінній x на проміжку $[0; 1]$. Тоді, врахувавши властивість ортогональності власних функцій, які відповідають різним власним значенням, одержимо:

$$A_k = \frac{\int_0^1 (1 + x - 2x^2) (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x) dx}{\int_0^1 (\mu_k \cos \mu_k x + \sin \mu_k x)^2 dx} = \frac{8 \operatorname{tg} \frac{\mu_k}{2} \cos^2 \mu_k}{\mu_k^2 (1 + \cos^2 \mu_k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (10), одержимо розв'язок мішаної задачі (3)-(5).

ПРИКЛАД 2. Знайти закон зміни температури всередині однорідного ізотропного ($c\rho = 1$) стержня довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо в лівому кінці стержня температура змінюється згідно з законом $U_0 \sin \omega t$, де U_0 , ω – задані сталі, а в правому підтримується нульова температура. Всередині стержня є джерела та поглиначі тепла: їх інтенсивність рівна $U_0 \omega (l - x) l^{-1} \cos \omega t$. Початкова температура точок стержня задана функцією $U_0 l^{-2} x(l - x)$.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$U_t = a^2 U_{xx} + U_0 \omega (l - x) l^{-1} \cos \omega t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0, x) = U_0 l^{-2} x(l - x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(t, 0) = U_0 \sin \omega t, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Крайові умови неоднорідні (задача типу **3**), тому для застосування методу Фур'є спершу слід звести вихідну задачу до задачі з однорідними крайовими умовами. Покладемо $U(t, x) = V(t, x) + W(t, x)$, де $V(t, x)$ – нова невідома функція,

а $W(t, x)$ – допоміжна функція, котра задовольняє неоднорідні крайові умови. Згідно викладеного вище

$$W(t, x) = \mu_1(t) + xl^{-1}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = (1 - xl^{-1})U_0 \sin \omega t.$$

Тоді для знаходження функції $V(t, x)$ одержимо мішану задачу

$$\begin{aligned} V_t &= a^2 V_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\ V(0, x) &= U_0 l^{-2} x(l - x), \quad 0 \leq x \leq l; \\ V(t, 0) &= 0, \quad V(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Початкова та крайові умови є узгодженими, отже до одержаної задачі застосовний метод Фур'є. Шукаючи розв'язок аналогічно до прикладу 1, знаходимо

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l U_0 x l^{-2} (l - x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 8U_0 (\pi n)^{-3}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Отже,

$$U(t, x) = U_0 (1 - xl^{-1}) \sin \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8U_0}{\pi^3 (2k - 1)^3} e^{-\left[\frac{(2k-1)\pi}{l}\right]^2 t} \sin \frac{(2k-1)\pi}{l} x.$$

ПРИКЛАД 3. Знайти розподіл температури в однорідній ($c_p = 1$) ізотропній кулі радіуса R із центром у початку координат, якщо в початковий момент часу температура кулі була рівна $U_0 = const > 0$, на поверхні кулі підтримується температура $U_0 e^{-t}$, а всередині кулі діють поглиначі тепла інтенсивності $-rR^{-1}U_0 e^{-t}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язання. Для запису математичної моделі задачі необхідно перейти до сферичних координат $\{r, \theta, \varphi\}$. Але, оскільки вихідні дані в умові задачі не залежать від кутів θ та φ , то на підставі симетричності кулі будемо мати $U(t, r, \theta, \varphi) \equiv U(t, r)$, тобто для довільного фіксованого $t > 0$ температура точок кулі залежатиме тільки від відстані до центра кулі (радіальний розподіл). Врахувавши це, запишемо математичну модель задачі:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) - rR^{-1}U_0 e^{-t}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R; \\ U(0, r) &= U_0, \quad 0 \leq r \leq R; \\ U(t, R) &= U_0 e^{-t}, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Перейдемо до нової невідомої функції $V(t, r) = rU(t, r)$ (стандартна підстановка в задачах на радіальний розподіл температури в кулі). Одержимо наступну мішану задачу:

$$V_t = a^2 V_{rr} - r^2 R^{-1} U_0 e^{-t}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R;$$

$$V(0,r) = U_0 r, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$V(t,R) = RU_0 e^{-t}, \quad V(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Остання крайова умова є наслідком обмеженості температури в центрі кулі. Справді, оскільки всі вихідні дані в умові задачі є обмеженими функціями в розглядуваній області, то $V(t,0) = 0 \cdot U(t,0) = 0$.

Крайові умови неоднорідні, отже, маємо задачу типу **3** (загальна мішана задача). Тому розв'язок шукаємо у вигляді $V(t,r) = Z(t,r) + \omega(t,r)$, причому для $Z(t,r)$ крайові умови повинні бути однорідними, отже, для допоміжної функції $\omega(t,r)$ повинні виконуватися умови

$$\omega(t,0) = 0, \quad \omega(t,R) = RU_0 e^{-t}.$$

Шукаємо допоміжну функцію у вигляді $\omega(t,r) = a(t)r + b(t)$. Із крайових умов одержуємо: $b(t) = 0$, $Ra(t) + b(t) = RU_0 e^{-t}$, звідки $\omega(t,r) = rU_0 e^{-t}$.

Підставивши $V(t,r) = Z(t,r) + rU_0 e^{-t}$ у мішану задачу для $V(t,r)$, дістанемо мішану задачу для нової невідомої функції $Z(t,r)$:

$$Z_t = a^2 Z_{rr} + (r - r^2 R^{-1}) U_0 e^{-t}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R; \quad (11)$$

$$Z(0,r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (12)$$

$$Z(t,0) = 0, \quad Z(t,R) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Це задача для неоднорідного рівняння з однорідними крайовими умовами (задача типу **2**), до якої застосовний метод Фур'є, оскільки вільний член у рівнянні справджує крайові умови по змінній r . Розв'язування такої задачі проводиться у два етапи.

Перший етап. Для відповідної однорідної задачі

$$W_t = a^2 W_{rr}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R;$$

$$W(t,0) = 0, \quad W(t,R) = 0, \quad 0 \leq t < T$$

класичним методом відокремлення змінних ($W(t,r) = Q(t)X(r) \neq 0$) знаходимо власні функції відповідної задачі Штурма-Ліувілля (початкову умову тут поки що не враховуємо). Одержимо:

$$X_n(r) = \sin \frac{\pi n}{R} r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Другий етап. Функцію $Z(t,r)$ шукаємо у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій:

$$Z(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t) \sin \frac{\pi n}{R} r. \quad (13)$$

Для визначення функцій $Y_n(t)$ підставимо ряд (13) у рівняння (11) та в початкову умову (12). Одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n'(t) \sin \frac{\pi n}{R} r = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2 Y_n(t) \sin \frac{\pi n}{R} r + (r - r^2 R^{-1}) U_0 e^{-t};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(0) \sin \frac{\pi n}{R} r = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} Y_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{R}\right)^2 Y_n(t) &= f_n e^{-t}, \quad n \in \mathbb{N}; \\ Y_n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

де коефіцієнт Фур'є

$$f_n = \frac{2}{R} \int_0^R (r - r^2 R^{-1}) U_0 \sin \frac{\pi n}{R} r dr = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 8RU_0(\pi n)^{-3}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Розв'язками задач Коші (14) будуть функції

$$Y_n(t) = \frac{R^2 f_n \left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{a\pi n}{R}\right)^2 t} \right)}{(a\pi n)^2 - R^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Підставивши (15) у ряд (13), одержимо функцію $Z(t, r)$. А тоді

$$U(t, r) = r^{-1} V(t, r) = r^{-1} Z(t, r) + U_0 e^{-t}.$$

ПРИКЛАД 4. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному ($a=1$, $k\sigma=1$) стержні довжини l , лівий кінець якого теплоізолюваний, а до правого підводиться сталий тепловий потік $v_0 = const$, якщо початкова температура точок стержня задана функцією $\varphi(x) = 0,5v_0 l^{-1} x^2$, а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із коефіцієнтом $\alpha = c\rho\sigma\varpi^{-1}$ (див. позначення в §1) з навколишнім середовищем нульової температури.

Розв'язання. $v_0 = const$, отже, маємо задачу типу **4** (задача зі стаціонарними неоднорідностями):

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} - U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\ U(0, x) &= 0,5v_0 l^{-1} x^2, \quad 0 \leq x \leq l; \\ U_x(t, 0) &= 0, \quad U_x(t, l) = v_0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $U(t, x) = V(t, x) + \omega(x)$, де стаціонарна температура $\omega(x)$ визначається з крайової задачі

$$\begin{aligned} \omega''(x) - \omega(x) &= 0; \\ \omega'(0) &= 0, \quad \omega'(l) = v_0. \end{aligned}$$

Зінтегрувавши крайову задачу, одержимо $\omega(x) = v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x$. Тоді після заміни $U(t, x) = V(t, x) + v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x$ для нової невідомої функції $V(t, x)$ дістанемо мішану задачу

$$\begin{aligned} V_t &= V_{xx} - V, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l; \\ V(0, x) &= 0,5v_0 l^{-1} x^2 - v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq l; \\ V_x(t, 0) &= 0, \quad V_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Оскільки крайові умови однорідні, то для спрощення рівняння зручно ввести підстановку $V(t, x) = e^{-t} \cdot W(t, x)$. Тоді для $W(t, x)$ матимемо задачу

$$W_t = W_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$W(0,x) = 0,5v_0 l^{-1} x^2 - v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$W_x(t,0) = 0, \quad W_x(t,l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Розв'язок одержаної однорідної мішаної задачі (типу **1**) знаходимо методом відокремлення змінних аналогічно до прикладу 1. Будемо мати

$$W(t,x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k}{l} x,$$

де

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{v_0 x^2}{2l} - \frac{v_0 \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} l} \right) \cos \frac{\pi k}{l} x dx = \begin{cases} v_0 l^{-1} (l^2 - 2), & k = 0; \\ 2l^3 v_0 (\pi k)^{-2} [l^2 + (\pi k)^2]^{-1} \cdot (-1)^k, & k > 0. \end{cases}$$

А тоді

$$U(t,x) = e^{-t} W(t,x) + v_0 \operatorname{sh}^{-1} l \operatorname{ch} x.$$

ПРИКЛАД 5 (двовимірна мішана задача). Знайти розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq c$, якщо початкова її температура рівна нулеві, край $y=0$ теплоізолюваний, а на краях $x=0$, $x=b$ та $y=c$ задані закони зміни температури – відповідно 0 , bt і tx . Інтенсивність джерел тепла, розміщених усередині пластинки, рівна $c\rho x \left[1 - \frac{1}{4}(b-x) \cos \frac{3\pi}{2c} y \right]$, де c – питома теплоємність, ρ – густина маси пластинки.

Розв'язання. Схема інтегрування двовимірної мішаної задачі для рівняння теплопровідності аналогічна схемі розв'язування мішаної задачі для рівняння коливань прямокутної мембрани (див. [11], с. 163-174).

Відповідна математична модель:

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + x \left[1 - 0,25(b-x) \cos \frac{3\pi}{2c} y \right], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,b,y) = bt, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = tx, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Перший етап. Крайові умови неоднорідні, тому зводимо їх до однорідних підстановкою $U(t,x,y) = V(t,x,y) + tx$ (допоміжна функція, котра повинна задовольняти чотири крайові умови, визначається підбором). Тоді для $V(t,x,y)$ одержимо мішану задачу:

$$V_t = a^2 (V_{xx} + V_{yy}) - 0,25x(b-x) \cos \frac{3\pi}{2c} y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \quad (16)$$

$$V(0,x,y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \quad (17)$$

$$V(t,0,y) = 0, \quad V(t,b,y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$V_y(t,x,0) = 0, \quad V(t,x,c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

Оскільки вільний член у рівнянні задовольняє крайові умови, то для знаходження розв'язку застосовний метод Фур'є.

Другий етап. В одержаній мішаній задачі крайові умови однорідні, але рівняння неоднорідне (задача типу **2**). Отже, спершу (див. приклад 2) потрібно знайти власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі:

$$\begin{aligned} W_t &= a^2(W_{xx} + W_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \\ W(t, 0, y) &= 0, \quad W(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c; \\ W_y(t, x, 0) &= 0, \quad W(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

Поклавши $W(t, x, y) = Q(t) \cdot Z(x, y) \neq 0$, а потім в одержаній двовимірній задачі на власні значення власну функцію $Z(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ і розв'язавши дві одновимірні задачі Штурма-Ліувілля, знаходимо

$$Z_{n,k}(x, y) = \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Третій етап. Функцію $V(t, x, y)$ шукаємо у вигляді ряду по знайденій системі власних функцій:

$$V(t, x, y) = \sum_{n,k=1}^{\infty} R_{n,k}(t) \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y. \quad (18)$$

Коефіцієнти $R_{n,k}(t)$ знаходимо шляхом підстановки ряду (18) у рівняння (16) та початкову умову (17). Зінтегрувавши одержані задачі Коші, матимемо:

$$R_{n,k}(t) = \frac{f_{n,k}}{a^2 \lambda_{n,k}} \left(1 - e^{-a^2 \lambda_{n,k} t} \right), \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

де

$$\lambda_{n,k} = \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k-1)\pi}{2c} \right)^2,$$

$$f_{n,k} = \frac{0,25 \int_0^b \int_0^c (x-b) \cos \frac{3\pi}{2c} y \sin \frac{\pi n}{b} x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2c} y dy dx}{\int_0^b \int_0^c \sin^2 \frac{\pi n}{b} x \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{2c} y dy dx} = \begin{cases} 0, & k \neq 2, \quad n = 2m; \\ 2b^2 (\pi n)^{-3}, & k = 2, \quad n = 2m - 1. \end{cases}$$

Підставивши (19) у ряд (18), дістанемо функцію $V(t, x, y)$. А тоді

$$U(t, x, y) = V(t, x, y) + tx.$$

❖ Розв'язати задачі:

11. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні одиничної довжини з теплоізолюваними кінцями та бічною поверхнею, якщо початкова температура точок стержня задається функцією $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$.
12. Дано тонкий однорідний стержень довжини l , початкова температура якого рівна $b \cos \frac{3\pi}{2l} x$. Лівий кінець стержня теплоізолюваний, а правий підтримується при нульовій температурі. Через бічну поверхню стержня проходить

теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.

13. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l , якщо лівий кінець та бічна поверхня стержня теплоізолювані, а на його правому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури зі сталим коефіцієнтом α таким, що $h = \frac{\alpha}{k} = 0,25\pi l^{-1}$.

Початкова температура стержня рівна $A \cos \frac{\pi}{4l} x$, де $A = const$.

14. В однорідному ізотропному стержні довжини l правий кінець теплоізолюваний, а лівий підтримується при нульовій температурі. Початкова температура точок стержня задається функцією $\varphi(x) = 9 \sin \frac{9\pi}{2l} x$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$, якщо його бічна поверхня теплоізолювана, а всередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $e^{-t}(x^2 - 2lx)$.

15. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею, лівий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на правому проходить теплообмін по закону Ньютона з довкіллям нульової температури. Початкова температура стержня рівна нулеві, а всередині його діють джерела тепла, інтенсивність яких рівна

$$f(t, x) = t \left(lx - \frac{(hl + 2)x^2}{hl + 1} \right), \text{ де } h = \alpha k^{-1}, \alpha = const > 0 \text{ – коефіцієнт теплообміну.}$$

16. В однорідному ізотропному ($a = 1$) стержні одиничної довжини обидва кінці теплоізолювані, а через бічну поверхню проходить теплообмін із довкіллям, температура якого рівна $U_0 = const$. Початкова температура стержня рівна $U_1 = const$. Визначити розподіл температури у стержні при $t > 0$.

17. Дано тонкий однорідний ($a = 1, k\sigma = 1$) стержень одиничної довжини, лівий кінець та бічна поверхня якого теплоізолювані, а до правого кінця підводиться сталий тепловий потік $v_0 = const$. Початкова температура стержня задається функцією $\varphi(x) = 1 + 0,5v_0 x^2$, а всередині його діють джерела тепла сталої інтенсивності $f(t, x) = -c\rho v_0$, де c – питома теплоємність, ρ – густина мас. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

18. Знайти радіальний розподіл температури в однорідній ($a = 1, c\rho = 2$) одиничній кулі з центром у початку координат, якщо початкова температура кулі рівна $A = const$, на поверхні проходить теплообмін (із коефіцієнтом $\alpha = 2$) з навколишнім середовищем, температура якого задана функцією $A \cos t$, а всередині кулі діють джерела тепла інтенсивності $f(t, r) = -Ar \sin t$.

19. Дано однорідну ($a = 1, c\rho = 1$) кулю одиничного радіуса з центром у початку координат, усередині якої діють джерела тепла інтенсивності $-\sin t$, а на поверхні проходить теплообмін (із коефіцієнтом $\alpha = 2$) із довкіллям, темпе-

ратура якого рівна $\cos t$. Початкова температура кулі рівна $r = 0,5$. Знайти розподіл температури в кулі при $t > 0$.

20. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$а) U_t = a^2 U_{xx} - b[U - (x-l)e^{-2bt} \sin x], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (b = \text{const} > 0).$$

$$б) U_t = 0,5\Delta U - 1, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 1 \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$$

$$U(0, r) = 1, \quad 0 \leq r \leq 1;$$

$$U_r(t, 1) + U(t, 1) = 1, \quad 0 \leq t < T.$$

$$в) U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) - 4t \sin 6\pi x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$U(0, x, y) = Ax \quad (A = \text{const}), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, 1, y) = A, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$г) U_t = U_{xx} + U_{yy} + 2x[y + (x-1)\cos t \sin 4\pi y], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, 1, y) = 2ty, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 2) = 4tx, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$д) U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + 3\cos y + 2\cos 6x \cos 3y, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x, y < \pi;$$

$$U(0, x, y) = 10, \quad 0 \leq x, y \leq \pi;$$

$$U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, \pi, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, \pi) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

§3. Задача Коші для одновимірного рівняння теплопровідності

1. Випадок однорідного рівняння. Постановка задачі: у фазовій площині $\Pi = \{(t, x) | t > 0, \quad x \in \mathbb{R}\}$ знайти обмежений розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$U_t(t, x) = a^2 U_{xx}(t, x), \quad (20)$$

який справджує початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

де $\varphi(x)$ – відома неперервна й обмежена на всій осі функція. Якщо розв'язок задачі Коші (20),(21) існує, то він є єдиним і дається формулою Пуассона

$$U(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(t, x, \xi) d\xi, \quad (22)$$

де

$$G(t, x, \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}}$$

– фундаментальний розв’язок рівняння теплопровідності. Інтеграл (22) в окремих випадках можна обчислити зведенням до відомого інтегралу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}$$

або до так званого інтегралу імовірностей

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

таблиці значень якого відомі (див. [3], с. 680).

ПРИКЛАДИ. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченному стержні при вільному теплообміні (відсутні внутрішні джерела тепла), якщо початкова температура точок стержня задана функцією:

а) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{4a^2}};$

б) $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ U_0 = const, & |x| \leq l. \end{cases}$

Розв’язання. Маємо задачу Коші (20),(21), розв’язок якої дається формулою (22). Застосуємо її до прикладу а):

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t} - \frac{\xi^2}{4a^2}\right) d\xi.$$

Виділимо в показнику степеня під інтегралом повний квадрат відносно змінної ξ . Одержимо:

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{[\xi(t+1)-x]^2}{4a^2 t(t+1)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}\right) d\xi.$$

Введемо підстановку $\alpha = \frac{\xi(t+1)-x}{2a\sqrt{t(t+1)}}$, $d\xi = \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} d\alpha$. Тоді

$$U(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{(t+1)}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t+1)}}.$$

Застосуємо тепер формулу (22) до прикладу б):

$$U(t, x) = \frac{U_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-l}^l \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

Підстановка $\alpha = \frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, $d\xi = 2a\sqrt{t} d\alpha$ дає:

$$U(t, x) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_0^{-\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \right).$$

Виразивши інтеграли в дужках через інтеграл імовірностей $\Phi(z)$ і врахувавши непарність цієї функції, одержимо остаточно:

$$U(t, x) = \frac{U_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

2. Випадок неоднорідного рівняння. Якщо в однорідному ізотропному нескінченному стержні діють джерела тепла інтенсивності $F(t, x)$, то температура $U(t, x)$ повинна бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$U_t(t, x) = a^2 U_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad f(t, x) = (c\rho)^{-1} F(t, x). \quad (23)$$

Розв'язок задачі Коші (23), (21), якщо функції $f(t, x)$ і $\varphi(x)$ є неперервними і обмеженими відповідно в Ω та на осі $x \in \mathbb{R}$, шукається у вигляді суми $U(t, x) = V(t, x) + Z(t, x)$, де функції $V(t, x)$ і $Z(t, x)$ – розв'язки наступних задач Коші:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad Z_t = a^2 Z_{xx}, & (t, x) \in \mathbf{III} \\ \quad Z(0, x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) \quad V_t = a^2 V_{xx} + f(t, x), & (t, x) \in \mathbf{III} \\ \quad V(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Розв'язок першої задачі дається формулою Пуассона (22):

$$Z(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi.$$

Згідно принципу Дюгамеля функцію $V(t, x)$ шукаємо у вигляді інтеграла:

$$V(t, x) = \int_0^t W(t-\tau, x) d\tau, \quad \text{де } W(t-\tau, x) \text{ визначається із задачі Коші}$$

$$\begin{array}{l} W_t(t-\tau, x) = a^2 W_{xx}(t-\tau, x), \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}; \\ W(0, x) = f(\tau, x), \quad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

і дається формулою Пуассона

$$W(t-\tau, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, \xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (23), (21) матиме вигляд

$$U(t, x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau, \xi)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\xi d\tau. \quad (24)$$

❖ Розв'язати задачі:

21. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному нескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при вільному теплообміні, якщо в початковий момент часу температура була рівна:

а) $\varphi(x) = e^{-x^2}$;

б) $\varphi(x) = \begin{cases} T, & x \geq 0; \\ -T, & x < 0 \end{cases} \quad (T = \text{const} > 0).$

22. Через бічну поверхню однорідного ізотропного нескінченного стержня проходить теплообмін по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стержня рівна $A = \text{const}$. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.

23. Знайти обмежений розв'язок задач Коші:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - U, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = \sin x - \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$

б) $U_t = 4U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-0,5x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$

24. Знайти розподіл температури в однорідному ($a=1, c\rho=1$) ізотропному нескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють джерела тепла інтенсивності $f(t) \cdot e^{-0,25x^2}$, якщо початкова температура задається функцією

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| > l; \\ U_0 = \text{const}, & 0 \leq x \leq l; \\ -U_0, & -l \leq x < 0 \end{cases} \quad (l = \text{const} > 0).$$

25. Зінтегрувати задачі Коші:

а) $U_t = 4U_{xx} + 2e^{-t} \cos t, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = 4, \quad x \in \mathbb{R}.$

б) $U_t = a^2 U_{xx} + 2a \cos x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

в) $U_t = 4U_{xx} - 2U + \sin 2x, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

г) $U_t = a^2 U_{xx} + A, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
 $U(0, x) = B, \quad x \in \mathbb{R} \quad (A, B = \text{const}).$

§4. Мішані задачі для напівнескінченного стержня з теплоізолюваною бічною поверхнею

При дослідженні процесів поширення тепла в однорідному ізотропному напівнескінченному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, кінець якого розміщений у початку координат, приходимо до однієї з наступних мішаних задач:

в області $\Pi = \{(t, x) | t > 0, \quad x > 0\}$ знайти розв'язок рівняння

$$U_t(t, x) = a^2 U_{xx}(t, x) + f(t, x), \quad (25)$$

який задовольняє початкову умову

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (26)$$

та одну з крайових умов на кінці стержня:

$$1) \quad U(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \geq 0 \quad (\text{задана температура}); \quad (27)$$

$$2) \quad -k\sigma U_x(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \geq 0 \quad (\text{заданий тепловий потік}); \quad (28)$$

3) $U_x(t, 0) - h(U(t, 0) - \mu_3(t)) = 0, \quad t \geq 0$ (на кінці стержня відбувається теплообмін по закону Ньютона з довкіллям, температура якого рівна $\mu_3(t)$).

Універсальним методом інтегрування мішаних задач такого вигляду є метод інтегрального перетворення Фур'є (див. [3], с. 263-265, 312-316, а також [4], с. 182-205). Проте в деяких частинних випадках вдається знайти розв'язок за допомогою простіших методів (при цьому функції $f(t, x)$, $\varphi(x)$ і $\mu_i(t)$, $i = \overline{1, 3}$ вважаємо обмеженими і неперервними відповідно в областях Ω , $x \geq 0$ та $t \geq 0$). Зокрема, це стосується випадків, коли кінець стержня теплоізований ($\mu_2(t) \equiv 0$) або підтримується при нульовій температурі ($\mu_1(t) \equiv 0$).

1. Метод непарного продовження. Мішана задача

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad t \geq 0$$

(кінець стержня підтримується при нульовій температурі) при $x \geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$V(0, x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

(задаємо непарне продовження початкової функції). Тоді розв'язок мішаної задачі $U(t, x) = V(t, x)|_{x \geq 0}$, де $V(t, x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (22).

2. Метод парного продовження. Мішана задача

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0;$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0$$

(кінець стержня теплоізований) при $x \geq 0$ еквівалентна задачі Коші

$$V_t = a^2 V_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$V(0, x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0; \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

(задаємо парне продовження початкової функції). Тоді знову розв'язок мішаної задачі $U(t, x) = V(t, x)|_{x \geq 0}$, де $V(t, x)$ знаходиться за допомогою формули Пуассона (22).

Зауваження 1. Якщо в мішаній задачі (25)-(27) $\mu_1(t) \equiv 0$ (або в мішаній задачі (25),(26),(28) $\mu_2(t) \equiv 0$), то розв'язок можна знайти, застосувавши прин-

цип Дюгамеля аналогічно до задач Коші. Інший спосіб – задати парне (непарне) продовження не тільки початкової функції, а й інтенсивності джерел тепла: тоді розв’язок еквівалентної задачі Коші знаходиться за допомогою формули (24).

Зауваження 2. Якщо в мішаній задачі для напівнескінченного стержня крайова умова є неоднорідною, то її завжди можна звести до однорідної, підібравши деяку обмежену допоміжну функцію, котра задовольняє цю крайову умову. Зокрема, підстановкою $U(t, x) = V(t, x) + \mu_1(t)$ зводиться до однорідної крайова умова (27), а підстановкою $U(t, x) = V(t, x) - e^{-x} \mu_2(t)$ – крайова умова (28).

ПРИКЛАД. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному ($a = 0,5$) напівнескінченому стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура стержня рівна $A(1 - \cos x)$, де $A = const$, а інтенсивність внутрішніх джерел тепла $6A\rho c e^{-t} \sin x$, де c – питома теплоємність, ρ – густина маси стержня.

Розв’язання. Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} U_t &= 0,25U_{xx} + 6Ae^{-t} \sin x, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ U(0, x) &= A(1 - \cos x), \quad x \geq 0; \\ U(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Розв’язок шукаємо у вигляді суми $U(t, x) = V(t, x) + Z(t, x)$, де

$$\begin{aligned} V_t &= 0,25V_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0; & Z_t &= 0,25Z_{xx} + 6Ae^{-t} \sin x, \quad t > 0, \quad x > 0; \\ 1) \quad V(0, x) &= A(1 - \cos x), \quad x \geq 0; & 2) \quad Z(0, x) &= 0, \quad x \geq 0; \\ V(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0; & Z(t, 0) &= 0, \quad t \geq 0; \end{aligned}$$

До першої мішаної задачі застосуємо метод непарного продовження: $V(t, x) = W(t, x)|_{x \geq 0}$, де

$$\begin{aligned} W_t &= 0,25W_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \\ W(0, x) &= \psi(x) = \begin{cases} A(1 - \cos x), & x \geq 0; \\ A(\cos x - 1), & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Згідно з формулою Пуассона (22)

$$W(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} d\xi = A\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{A}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \cos \xi \left(e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}} - e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} \right) d\xi,$$

де $\Phi(z)$ – інтеграл імовірностей.

Згідно з принципом Дюгамеля розв’язок другої мішаної задачі будемо шукати у вигляді інтеграла $Z(t, x) = \int_0^t R(t - \tau, x) d\tau$, де

$$R_t(t - \tau, x) = 0,25R_{xx}(t - \tau, x), \quad t > \tau, \quad x > 0;$$

$$R(0, x) = 6Ae^{-\tau} \sin x, \quad x \geq 0;$$

$$R(t - \tau, 0) = 0, \quad t \geq \tau.$$

Початкова функція є непарною, тому можна одразу застосувати формулу (22). Одержимо:

$$R(t - \tau, x) = 8Ae^{-\tau} \sin x; \quad Z(t, x) = \int_0^t R(t - \tau, x) d\tau = 8A \sin x (1 - e^{-t})$$

Тоді розв'язок вихідної мішаної задачі буде (для всіх $t \geq 0, x \geq 0$):

$$U(t, x) = 8A \sin x (1 - e^{-t}) + A \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{A}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \cos \xi \left(e^{-\frac{(\xi+x)^2}{t}} - e^{-\frac{(\xi-x)^2}{t}} \right) d\xi.$$

❖ Розв'язати задачі:

26. Дано однорідний ізотропний напівнескінчений стержень із теплоізолюваною бічною поверхнею, кінець якого підтримується при нульовій температурі. Початкова температура стержня рівна нулеві, а всередині його діють джерела тепла інтенсивності $e^{-t} - 1$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

27. Початковий розподіл температури в однорідному ізотропному ($a = 0,5$) напівнескінченому стержні заданий рівністю $U(0, x) = e^{-x} (1 - e^{-x^2})$. Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін (із коефіцієнтом $b = 0,25$) по закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури. Кінець стержня теплоізолюваний. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$.

28. Однорідний ізотропний напівнескінчений стержень без внутрішніх джерел тепла має в початковий момент часу нульову температуру. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$, якщо:

а) через бічну поверхню стержня проходить теплообмін згідно закону Ньютона з навколишнім середовищем нульової температури, а кінець стержня підтримується при температурі $\mu(t)$;

б) бічна поверхня стержня теплоізолювана, а на кінці стержня заданий тепловий потік $v(t)$.

29. В однорідному ізотропному ($cr = 1$) напівнескінченому стержні діють внутрішні джерела тепла інтенсивності $f(t)$. Початкова температура стержня рівна $\varphi(x)$, а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін з коефіцієнтом $\alpha = const > 0$ згідно закону Ньютона з довкіллям нульової температури. Знайти закон зміни температури в стержні при $t > 0$, якщо:

а) кінець стержня підтримується при нульовій температурі;

б) кінець стержня теплоізолюваний.

Розглянути випадок, коли $\varphi(x) = 0$, $f(t) = Ae^{-\beta t}$, де $A = const$,

$\beta = \alpha \varpi (c\rho\sigma)^{-1}$ (див. позначення в §1).

30. Зінтегрувати мішані задачі:

$$U_t = 0,25U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U_t = U_{xx} - 2U, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

а) $U(0,x) = e^{-x}, \quad x \geq 0,$

б) $U(0,x) = e^{-x^2} - 1, \quad x \geq 0,$

$$U_x(t,0) = -1, \quad t \geq 0.$$

$$U(t,0) = 0, \quad t \geq 0.$$

$$U_t = U_{xx} - 2e^{-t}(e^{-x} + 1), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

в) $U(0,x) = e^{-x}, \quad x \geq 0,$

$$U_x(t,0) = -e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

$$U_t = a^2U_{xx} + 2a \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right), \quad t > 0, \quad x > 0,$$

г) $U(0,x) = 0, \quad x \geq 0,$

$$U(t,0) = 0, \quad t \geq 0.$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ IV

Варіант 1.

1. Дано тонкий однорідний ($k = 1$) стержень довжини l , початкова температура якого задана функцією $\varphi(x) = x^2 - lx - 1$. На обох кінцях стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом $\alpha = l$) з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$

$$U(0,x) = 0,5U_0x^2, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,1) = U_0, \quad 0 \leq t < T \quad (U_0 = const).$$

б) $U_t = U_{xx} + U_{yy}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 4;$

$$U(0,x,y) = 6 \sin \pi x \sin \pi y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$U(t,0,y) = 0, \quad U(t,1,y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$U(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,4) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

в) $U_t = a^2U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0,x) = A, \quad x \geq 0;$$

$$U(t,0) = Ae^{-t}, \quad 0 \leq t < T \quad (A = const).$$

Варіант 2.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. На правому кінці стержня підтримується нульова температура, а на лівому кінці температура зростає пропорційно до часу: $U(t,0) = At$, де $A = \text{const}$. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx}$, $0 < t < T$, $0 < x < 2$;

$$U(0,x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,2) + 2U(t,2) = 10, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + A \sin \frac{3\pi}{2b} x \cos \frac{\pi}{2c} y$, $0 < t < T$, $0 < x < b$, $0 < y < c$;

$$U(0,x,y) = B \sin \frac{\pi}{2b} x \cos \frac{3\pi}{2c} y, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,b,y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U(t,x,c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b \quad (A, B - \text{const}).$$

в) $U_t = U_{xx} - U$, $0 < t < T$, $x > 0$;

$$U(0,x) = A, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

Варіант 3.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня задана рівністю: $U(0,x) = U_0 x^2 l^{-2}$, де $U_0 = \text{const}$; бічна поверхня стержня та його лівий кінець теплоізолювані, а на правому кінці підтримується стала температура U_0 .

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 2xt(l-x)$, $0 < t < T$, $0 < x < l$;

$$U(0,x) = 3 \sin \frac{7\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy})$, $0 < t < T$, $0 < x < b$, $0 < y < c$;

$$U(0,x,y) = x^2(x-b)^2, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,b,y) + hU(t,b,y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b \quad (h = \text{const} > 0).$$

в) $U_t = \frac{1}{16} U_{xx} - 2U + Ae^{-2t}$, $0 < t < T$, $x > 0$;

$$U(0,x) = e^{-8x^2}, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

Варіант 4.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізовані, а початкова температура стержня стала й рівна U_0 . Теплообмін вільний. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + x + tx^2, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 1) = t, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$$U(0, x, y) = y(y - c)(x^2 - b^2), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_x(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = A \sin t, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

Варіант 5.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l при вільному теплообміні, якщо початкова температура точок стержня рівна $x(x - l)^2$, бічна поверхня стержня та його правий кінець теплоізовані, а на лівому кінці підтримується нульова температура.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U + 4x^3 - 6x^2, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$

$$U(0, x) = 3, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$$U(0, x, y) = \left(3 \sin \frac{\pi}{b} x + 2 \sin \frac{6\pi}{b} x\right) \sin \frac{2\pi}{c} y, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U(t, 0) = A \sin t, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

Варіант 6.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l , початкова температура якого рівна $U_0 + xl^{-1}(U_1 - U_0)$, де $U_0, U_1 = \text{const}$. На лівому кінці стержня температура змінюється згідно з законом $U_0 e^{-t}$, а на правому – по закону $U_1 e^{-t}$. Через бічну поверхню стержня проходить теплообмін – із коефіцієнтом $\alpha > 0$

таким, що $b = \alpha \varpi (c\rho\sigma)^{-1} = 1$, – із навколишнім середовищем нульової температури. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 6, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$

$$U(0, x) = 3x^2(3 - x)^2, \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 3) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 \Delta U + trR^{-2}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$

$$U(0, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U(t, R) = 0,5t^2, \quad 0 \leq t < T.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (\text{розглянути випадок } f(t, x) \equiv U_0 = \text{const}).$$

Варіант 7.

1. Дано тонкий однорідний ($k = c\rho = 1$) стержень довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна Axl^{-1} , де $A = \text{const}$. На правому кінці стержня температура змінюється згідно з законом Ae^{-t} , а лівий кінець підтримується при нульовій температурі. Інтенсивність внутрішніх джерел тепла всередині стержня рівна $f(t, x) = -Ae^{-t}x^2l^{-2}$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - U - \cos \frac{5\pi}{2l}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$$U(0, x) = x^2 - l^2, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$

$$U(0, x, y) = \left(5 + \cos \frac{3\pi}{c}y\right) \sin \frac{3\pi}{b}x, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + 2a \cos t, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$

$$U(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Варіант 8.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l , початкова температура якого рівна $U_0(lx + 1)(l^2 + 1)^{-1}$, де $U_0 = \text{const}$. На правому кінці стержня температура змінюється згідно з законом U_0e^{-lt} , а на лівому кінці стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін – із коефіцієнтом $\alpha > 0$ таким, що

$b = \alpha \varpi (c\rho\sigma)^{-1} = l$, – з навколишнім середовищем, температура якого рівна нулеві. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} + 0,5(2-x)(\omega \cos \omega t - x \sin \omega t)$, $0 < t < T$, $0 < x < 2$;

$$U(0, x) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$U(t, 0) = \sin \omega t, \quad U(t, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (\omega = \text{const}).$$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + A \sin \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{2c} y$, $0 < t < T$, $0 < x < b$, $0 < y < c$;

$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b \quad (A = \text{const}).$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + Q$, $0 < t < T$, $x \in \mathbb{R}$;

$$U(0, x) = a e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (Q = \text{const}).$$

Варіант 9.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, лівий кінець якого підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура точок стержня описується функцією $(1 + hl)x^2 - (2l + hl^2)x$, де $h = \alpha k^{-1}$, $\alpha = \text{const} > 0$ – коефіцієнт теплообміну. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = 36U_{xx} + \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{4} x$, $0 < t < T$, $0 < x < 2$;

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + y e^{-t} \left[(2-y) \sin \frac{3\pi}{2} x - 1 \right]$, $0 < t < T$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$;

$$U(0, x, y) = y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, 0, y) = y e^{-t}, \quad U_x(t, 1, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 2) = 2e^{-t}, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - bU$, $0 < t < T$, $x > 0$;

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0; \quad U(t, 0) = 2e^{-bt} (\cos t - 1), \quad 0 \leq t < T \quad (b = \text{const} > 0).$$

Варіант 10.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному ($k = c\rho = 2$) стержні довжини $l = 0,5$ із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві, якщо на лівому кінці стержня підтримується нульова температура, на правому кінці температура змінюється згідно з законом $A \sin 4t$, де $A = \text{const}$, а інтенсивність джерел тепла всередині стержня рівна $32Ax^2 \cos 4t$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - \alpha^2 U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$$U(0, x) = -36,6 \cos^2 \frac{\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (\alpha = \text{const} > 0).$$

б) $U_t = a^2 \Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$

$$U(0, r) = U_0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U_r(t, R) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (U_0 = \text{const}).$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - 2U + f(t), \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T$$

(розглянути випадок $f(t, x) \equiv Ae^{-2t}$, $A = \text{const}$).

Варіант 11.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ($k = c\rho = 1$) ізотропному стержні довжини $l = 0,5$ з теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві, якщо на лівому кінці стержня температура змінюється згідно з законом $A(1 - e^{-\gamma t})$, де $A, \gamma = \text{const}$, а на правому кінці проходить теплообмін (із коефіцієнтом $\alpha = 4$) з навколишнім середовищем нульової температури. У середині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $Ae^{-\gamma t}(\gamma - 2x^2)$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - U + U_0 e^{-t}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$$U(0, x) = x(l - x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (U_0 = \text{const}).$$

б) $U_t = a^2 \Delta U + 2t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$

$$U(0, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U_r(t, R) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ U_0 = \text{const} \neq 0, & |x| \leq 1. \end{cases}$$

Варіант 12.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l обидва кінці та бічна поверхня теплоізолювані, а початкова температура стержня рівна

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2U_0 x^2 l^{-1}, & 0 \leq x \leq 0,5l; \\ 2U_0 (l - x)^2 l^{-1}, & 0,5l \leq x \leq l \end{cases} \quad (U_0 = \text{const}).$$

Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = U_{xx} - (2x - x^2) \sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2;$

$$U(0, x) = 3 \sin 3\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 \Delta U - \beta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$

$$U(0, r) = ArR^{-1}, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U(t, R) = Ae^{-\beta t}, \quad 0 \leq t < T \quad (\beta > 0, A - const).$$

в) $U_t = U_{xx} - 2U, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = e^{-x} - 1, \quad x \geq 0;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Варіант 13.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею та правим кінцем, якщо початкова температура стержня рівна нулеві, а в лівому його кінці підтримується нульова температура. Усередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $xl^{-1}(x-l)^2 \cos \omega t$, де $\omega = const$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 5;$

$$U(0, x) = 0,4x(5-x), \quad 0 \leq x \leq 5;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 5) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2 \Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$

$$U(0, r) = Qr^2, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U_r(t, R) + R^{-1}U(t, R) = 3QR, \quad 0 \leq t < T \quad (Q = const).$$

в) $U_t = U_{xx} + Q, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 2Q(e^{-t} - 1), \quad 0 \leq t < T \quad (Q = const).$$

Варіант 14.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна $Bxl^{-2}(l-x)$, де $B = const$. Кінці стержня підтримуються при нульовій температурі. Визначити температуру стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} + (x^2 - l^2) \sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$$U(0, x) = 4 \cos \frac{3\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{б) } U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$U(0, x, y) = 2 \sin \frac{5\pi}{4} y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 1, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$\text{в) } U_t = U_{xx} - bU, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 2e^{-bt}(\cos bt - 1), \quad 0 \leq t < T \quad (b = \text{const} > 0).$$

Варіант 15.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l бічна поверхня теплоізолювана, а початкова температура стержня рівна

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 0,5l; \\ (l-x)^2, & 0,5l \leq x \leq l. \end{cases}$$

На обох кінцях стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = U_{xx} - 4U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3;$$

$$U(0, x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 3) = 6, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{б) } U_t = a^2 \Delta U - QR^{-1}r^2 \sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$$

$$U(0, r) = Q, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U(t, R) = Q \cos t, \quad 0 \leq t < T \quad (Q = \text{const}).$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$U(0, x) = e^{-x}, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = -1, \quad 0 \leq t < T.$$

Варіант 16.

1. Дано тонкий однорідний ($c\rho = 2$, $k = \sigma = 1$) стержень довжини l із тепло-ізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Правий кінець стержня теплоізолюваний, а до лівого кінця підводиться потік тепла $-A \sin \omega t$, де $A, \omega = \text{const}$. У середині стержня діють джерела тепла, інтенсивність яких рівна $A\omega l^{-1}(2lx - x^2) \cos \omega t$. Знайти закон зміни температури всередині стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = U_{xx} - 9U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0, x) = x^2 - l^2, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U_t &= a^2(U_{xx} + U_{yy}) - \left(3 - 3\cos\frac{\pi x}{b}\right)\sin\frac{4\pi}{c}y\sin t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \\ U(0, x, y) &= 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \\ U_x(t, 0, y) &= 0, \quad U_x(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c; \\ U(t, x, 0) &= 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx} - 0,5U, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0, x) = \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Варіант 17.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l , лівий кінець якого теплоізований, а правий підтримується при нульовій температурі, якщо початкова температура точок стержня рівна нулеві, а через бічну поверхню стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури U_0 .

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 4;$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4;$$

$$U_x(t, 0) - U(t, 0) = 5t, \quad U(t, 4) = 5t, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{б) } U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$U(0, x, y) = 0,5x^2 - bx, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$\text{в) } U_t = U_{xx} + \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0, x) = \begin{cases} U_0, & x < 0; \\ -U_0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (U_0 = \text{const}).$$

Варіант 18.

1. В однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізованою бічною поверхнею правий кінець підтримується при сталій температурі B , а на лівому температурі змінюється за законом $A(e^{-\alpha t} - 1)$, де $A, \alpha = \text{const}$. Знайти розподіл температури в стержні при $t > 0$, якщо його початкова температура рівна Bxl^{-1} , а всередині стержня діють джерела тепла, інтенсивність яких рівна $A\alpha\rho e^{-\alpha t}(x^2 l^{-2} - 1)$, де c – питома теплоємність, ρ – густина маси стержня.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0,x) = q_0 x^3 \cdot (3l^2)^{-1}, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = q_0, \quad 0 \leq t < T \quad (q_0 = \text{const}).$$

$$\text{б) } U_t = 4\Delta U - Q_0, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 2 \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$$

$$U(0,r) = \pi(r-2), \quad 0 \leq r \leq 2;$$

$$U(t,2) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (Q_0 = \text{const}).$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx} - 4(U - U_0 e^{-6t}), \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (U_0 = \text{const}).$$

Варіант 19.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l , початкова температура якого рівна $U_0 = \text{const}$. Обидва кінці стержня теплоізовані, а через його бічну поверхню проходить теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури U_1 . Знайти закон зміни температури всередині стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = a^2 U_{xx} - 6 \sin 3\pi x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 8;$$

$$U(0,x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8;$$

$$U(t,0) = 0, \quad U(t,8) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{б) } U_t = 4(U_{xx} + U_{yy}) - ye^{-t} [1 - x^2(y - 2c)(x - b)^2], \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$U(0,x,y) = y, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_x(t,0,y) = 0, \quad U_x(t,b,y) + U(t,b,y) = ye^{-t}, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,c) = e^{-t}, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$U(0,x) = e^{-x^2} - 1, \quad x \geq 0;$$

$$U(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Варіант 20.

1. Дано тонкий однорідний стержень довжини l із теплоізованою бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві. Правий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а лівий – теплоізований. Усередині стержня є джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $(x^2 - l^2) \cdot l^{-1} \sin \alpha t$, де $\alpha = \text{const}$. Визначити температуру точок стержня в довільний момент часу $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = lU_{xx} + \frac{x^2}{2l}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0,x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) = t, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U_t &= \Delta U - 2U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2), \\ U(0, r) &= A \sin \frac{3\pi}{R} r, \quad 0 \leq r \leq R; \\ U(t, R) &= 0, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } U_t &= a^2 U_{xx} - bU, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}; \\ U(0, x) &= \begin{cases} U_0, & |x| > l; \\ 0, & |x| \leq l \end{cases} \quad (U_0, b, l = \text{const} > 0). \end{aligned}$$

Варіант 21.

1. Дано тонкий однорідний ($k = \sigma = 1$) стержень довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого $\varphi(x) = -q_0 e^{-x}$, де $q_0 = \text{const}$. До лівого кінця стержня підводиться сталий тепловий потік $-q_0$, а на правому проходить теплообмін (із коефіцієнтом $\alpha = 1$) з навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } U_t &= 4U_{xx} - 2(U - t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2; \\ U(0, x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 2; \\ U_x(t, 0) &= 0, \quad U_x(t, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } U_t &= a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c; \\ U(0, x, y) &= xy(b - x)(y - c), \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c; \\ U(t, 0, y) &= 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c; \\ U(t, x, 0) &= 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } U_t &= 0,25U_{xx} - U + U_0 e^{-2t}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R}; \\ U(0, x) &= 0,5e^{-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (U_0 = \text{const}). \end{aligned}$$

Варіант 22.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею та правим кінцем, якщо початкова температура стержня задана функцією $A_0 \sin \frac{9\pi}{2l} x$ ($A_0 = \text{const}$), лівий кінець підтримується при нульовій температурі, а всередині стержня діють джерела тепла інтенсивності A_0 .

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } U_t &= 9U_{xx} - \beta \left[U - t \left(2 + \frac{x^2}{3} \right) \right] + 2 + x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 3; \\ U(0, x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 3; \end{aligned}$$

$$U(t,0)=2t, \quad U(t,3)=5t, \quad 0 \leq t < T \quad (\beta = \text{const} > 0).$$

$$\text{б) } U_t = a^2 \Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < 4 \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

$$U(0,r) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq r \leq 2; \\ 0, & 2 < r \leq 4 \end{cases} \quad (U_0 = \text{const} > 0);$$

$$U_r(t,4) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{в) } U_t = \frac{1}{16} U_{xx} - bU + e^{-x-3bt}, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$U(0,x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (b = \text{const} > 0).$$

Варіант 23.

1. В однорідному ізотропному ($k\sigma = 1$) стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею правий кінець підтримується при нульовій температурі, а до лівого кінця підводиться тепловий потік $q_0 t$, де $q_0 = \text{const}$. Початкова температура стержня рівна нулеві. Знайти закон зміни температури всередині стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = a^2 U_{xx} - \beta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1;$$

$$U(0,x) = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U_x(t,0) - 2U(t,0) = 3, \quad U(t,1) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (\beta = \text{const} > 0).$$

$$\text{б) } U_t = 16(U_{xx} + U_{yy}) - (3t^2 + 2)\cos\frac{3\pi}{4}x, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3;$$

$$U(0,x,y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3;$$

$$U_x(t,0,y) = 0, \quad U(t,2,y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 3;$$

$$U_y(t,x,0) = 0, \quad U_y(t,x,3) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx} + A, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$$

$$U(0,x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t,0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

Варіант 24.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l , якщо його початкова температура рівна нулеві, обидва кінці та бічна поверхня теплоізолювані, а всередині стержня діють джерела та поглиначі тепла сумарної інтенсивності $A_0 \left(1 - \cos\frac{4\pi}{l}x\right) \cos \omega t$, де $A_0, \omega = \text{const}$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = U_{xx} - 6U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$$

$$U(0,x) = 1 - \cos\frac{2\pi}{l}x, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U(t,0) = 0, \quad U_x(t,l) + hU(t,l) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (h = \text{const} > 0).$$

$$\text{б) } U_t = a^2 \Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

$$U(0,r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U(t, R) = At, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx} - b[U - f(t)], \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(розглянути випадок $f(t) = f_0 e^{-bt}$, де $f_0 = \text{const}$).

Варіант 25.

1. Дано тонкий однорідний ($k=1$) стержень довжини l із теплоізолюваним правим кінцем, початкова температура якого рівна $x^2 - 2l(x+1)$. На лівому кінці стержня та через бічну поверхню проходить теплообмін (із однаковим коефіцієнтом $\alpha=1$) з навколишнім середовищем нульової температури. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = U_{xx} + A(t + x - 4 \operatorname{sh} t \cos 2\pi x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 8;$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 8;$$

$$U_x(t, 0) = At, \quad U_x(t, 8) = At, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

$$\text{б) } U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) - Ae^{-t} (x^2 - b^2)(y^2 - cy), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < b, \quad 0 < y < c;$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U_x(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

$$\text{в) } U_t = a^2 U_{xx} - bU + 3e^{-bt} \sin t, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (b = \text{const} > 0).$$

Варіант 26.

1. Знайти розподіл температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого задається функцією $A \sin \frac{\pi}{l} x$, де $A = \text{const}$, якщо лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці температура зростає з бігом часу: $U(t, l) = Bt$, $B = \text{const}$.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\text{а) } U_t = a^2 U_{xx} - 4U + t(2 - \cos 7\pi x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 6;$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 6) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

$$\text{б) } U_t = 4\Delta U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$$

$$U(0, r) = A(R - r)^2, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U_r(t, R) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (A = \text{const}).$$

$$\text{в) } U_t = U_{xx} + \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right), \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$U(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Варіант 27.

1. Дано тонкий однорідний ($k=1$, $c\rho = \frac{1}{2}$) стержень довжини l , правий кінець та бічна поверхня якого теплоізолювані. Початкова температура стержня рівна нулеві, а на його лівому кінці температура зростає згідно з законом At^2 , де $A = \text{const}$. Усередині стержня діють джерела тепла, інтенсивність яких рівна $At(x^2 - 2lx + 1)$. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 25U$, $0 < t < T$, $0 < x < l$;

$$U(0, x) = 2A \cos Ax + \sin Ax, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) - 0,5U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T$$

($A > 0$ – стала, яка справджує рівність $\operatorname{tg} Al = -2A$).

б) $U_t = 4(U_{xx} + U_{yy}) - \cos t \sin \frac{\pi}{2}x$, $0 < t < T$, $0 < x < 6$, $0 < y < 2$;

$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, 6, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, 2) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 6.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} - U + 25e^{-2t}$, $0 < t < T$, $x > 0$;

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Варіант 28.

1. Дано однорідний ($a=1$) ізотропний стержень довжини l , правий кінець та бічна поверхня якого теплоізолювані. Початкова температура стержня рівна $A(1 + x - 0,5x^2l^{-1})$, де $A = \text{const}$, а на його лівому кінці температура змінюється згідно з законом Ae^{-t} . Усередині стержня діють джерела тепла інтенсивності $A\rho(l^{-1} - e^{-t})$, де c – питома теплоємність, ρ – густина маси стержня. Знайти розподіл температури уздовж стержня при $t > 0$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 2U$, $0 < t < T$, $0 < x < 9$;

$$U(0, x) = 8(1 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq 9;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 9) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) - ty(x^2 - 2bx)(y - c)^2$, $0 < t < T$, $0 < x < b$, $0 < y < c$;

$$U(0, x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, b, y) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq c;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) + U(t, x, c) = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq b.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + 2a \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right)$, $0 < t < T$, $x > 0$;

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0;$$

$$U(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

Варіант 29.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l , якщо правий кінець та бічна поверхня стержня теплоізолювані, а на його лівому кінці проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури зі сталим коефіцієнтом $\alpha > 0$. Початкова температура стержня рівна $U_0(hx^2 - 2lhx - 2l)$, де $h = \alpha k^{-1}$, $U_0 = const$.

2. Зінтегрувати мішані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - 5U + \operatorname{sh} t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 5;$

$$U(0, x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 5;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 5) = 0, \quad 0 \leq t < T.$$

б) $U_t = 4(U_{xx} + U_{yy}) - y(8 - x \cos \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{4} y \cos \frac{\pi}{8} t), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$

$$U(0, x, y) = x^2 y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, 1, y) = y, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 2) = 2x^2, \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

в) $U_t = a^2 U_{xx} + Q, \quad 0 < t < T, \quad x > 0;$

$$U(0, x) = \sin x, \quad x \geq 0;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (Q = const).$$

Варіант 30.

1. Знайти закон зміни температури в однорідному ізотропному стержні довжини l з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо в його лівому кінці підтримується стала температура m_1 , у правому – стала температура $m_2 \neq m_1$, а початкова температура стержня рівна $\varphi(x) = m_1 + (m_2 - m_1)xl^{-1}$. Теплообмін вільний.

2. Зінтегрувати вказані задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $U_t = a^2 U_{xx} - \alpha^2 U + t, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l;$

$$U(0, x) = x^2(x - 1,5l), \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad 0 \leq t < T \quad (\alpha = const).$$

б) $U_t = a^2 \Delta U + Q, \quad 0 < t < T, \quad 0 < r < R \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2);$

$$U(0, r) = A, \quad 0 \leq r \leq R;$$

$$U(t, R) = A, \quad 0 \leq t < T \quad (A, Q = const).$$

в) $U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < t < T, \quad x \in \mathbb{R};$

$$U(0, x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ A(e^{-\alpha x} - 1), & x > 0 \end{cases} \quad (A, \alpha = const > 0).$$

РОЗДІЛ V

РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ. ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛУ

§1. Фізичні процеси, які приводять до рівнянь еліптичного типу. Постановка крайових задач

До рівнянь еліптичного типу приводять дослідження стаціонарних процесів різної фізичної природи (теплопровідність, дифузія, рівновага, задачі електростатики, магнітостатики, гідродинаміки тощо). Одним із найпростіших рівнянь еліптичного типу є *рівняння Лапласа*

$$\Delta U(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} = 0.$$

Означення. Функція $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається гармонічною в обмеженій області \mathbf{D} , якщо вона в цій області двічі неперервно диференційовна по всіх аргументах і задовольняє рівняння Лапласа.

Функція $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається гармонічною в необмеженій області \mathbf{D}^* , якщо в кожній точці цієї області, що знаходиться на скінченій віддалі від початку координат, функція двічі неперервно диференційовна по всіх аргументах, задовольняє рівняння Лапласа і для досить великих $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ виконується нерівність (*умова регулярності на нескінченості*)

$$|U(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq Cr^{2-n}, \quad C = \text{const}.$$

У випадку двовимірного простору умова регулярності на нескінченості набуває вигляду $|U(x, y)| \leq C$, $C = \text{const}$, тобто є умовою обмеженості функції для досить великих $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Рівняння $\Delta U(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *рівнянням Пуассона*.

Теорема 1 (принцип мінімакса для гармонічних функцій). Гармонічна в обмеженій області \mathbf{D} і неперервна в замиканні $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \cup \mathbf{S}$ функція $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ досягає свого найбільшого і найменшого значення на границі \mathbf{S} області \mathbf{D} .

Наведемо постановку основних крайових задач для рівняння Лапласа.

1. Внутрішня (зовнішня) задача Діріхле: знайти гармонічну в \mathbf{D} (\mathbf{D}^*) і неперервну в $\bar{\mathbf{D}}$ ($\bar{\mathbf{D}}^*$) функцію $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка на границі \mathbf{S} області набуває заданих значень: $U(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{\mathbf{S}} = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – задана неперервна на \mathbf{S} функція.

2. Внутрішня (зовнішня) задача Неймана: знайти гармонічну в D (D^*) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в \bar{D} (\bar{D}^*) функцію $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка на границі S області справджує умову

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right|_S = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до S , а $\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – задана неперервна на S функція, причому для коректності постановки задачі повинна виконуватися рівність

$$\iint_S \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) ds = 0.$$

(умова стаціонарності теплового поля).

3. Третя внутрішня (зовнішня) крайова задача: знайти гармонічну в D (D^*) і неперервну разом із частинними похідними першого порядку в \bar{D} (\bar{D}^*) функцію $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка на границі S області справджує умову

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} + \varphi_3(x_1, x_2, \dots, x_n) U \right]_S = \varphi_4(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де $\varphi_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\varphi_4(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – задані неперервні на S функції.

Аналогічно ставляться крайові задачі і для рівняння Пуассона.

Теорема 2. Як внутрішня, так і зовнішня задачі Діріхле для рівняння Пуассона мають не більш, ніж один розв'язок у розглядуваній області (тобто: якщо розв'язок задачі Діріхле існує, то він є єдиним).

Теорема 3. У двовимірному просторі довільні два розв'язки задачі Неймана (внутрішньої чи зовнішньої), які мають неперервні аж до S частинні похідні першого порядку, відрізняються на сталий доданок.

Зауваження. У випадку трьох і більше незалежних змінних твердження теореми 3 справджується для внутрішньої задачі Неймана. Розв'язок зовнішньої задачі Неймана є єдиним.

Окрім сформульованих трьох основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу, на практиці зустрічаються складніші задачі з крайовими умовами різного роду на частинах границі S .

❖ Вивести рівняння, які описують наступні стаціонарні процеси:

- 1. Стаціонарне температурне поле.** Вивести рівняння, яке справджує температура стаціонарного теплового поля в однорідному середовищі, враховуючи наявність розподілених джерел тепла, котрі не змінюються з часом.
- 2. Рівняння стаціонарної дифузії.** Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі при відсутності джерел дифундуючої речовини.
- 3. Рівняння електростатики.** Виходячи з рівнянь Максвелла (див. додаток у кінці книги), показати, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, пропорційною об'ємній густині зарядів $\rho(x, y, z)$.

4. **Рівняння магнітостатики.** Вивести рівняння для потенціалу стаціонарного магнітного поля при відсутності електричних струмів.
 5. **Поле постійного електричного струму.** Вивести рівняння для потенціалу електричного поля постійного електричного струму.
 6. **Потенційний рух нестисливої рідини.** Вивести рівняння, яке справджує потенціал швидкостей стаціонарного потоку нестисливої рідини, враховуючи наявність джерел рідини, інтенсивність яких не змінюється з часом.
- ❖ Скласти математичні моделі наступних задач:
7. Знайти положення рівноваги однорідної прямокутної мембрани $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, якщо:
 - а) мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили густини $f(x, y)$, а її краї нерухомо закріплені;
 - б) мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили інтенсивності $f(x, y)$, а її краї вільні;
 - в) на краях $x = 0$ та $x = a$ задані відхилення $\mu_1(y)$ і $\mu_2(y)$ відповідно, а на краї $y = 0$ та $y = b$ діють сили $v_1(x)$ і $v_2(x)$ відповідно;
 - г) краї мембрани пружно закріплені з коефіцієнтом жорсткості α , причому точки закріплення пружин країв $x = 0$ та $y = b$ нерухомі, а країв $x = a$ та $y = 0$ рухаються згідно законів $\theta_1(y)$ і $\theta_2(x)$ відповідно.
 8. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині нескінченного кругового циліндра $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, якщо:
 - а) електричні заряди всередині циліндра відсутні, а на його поверхні потенціал рівний $f(\varphi)$;
 - б) циліндр поміщений у нескінчене середовище з діелектричною сталою ε і заземлений, а густина зарядів усередині нього рівна $F(\rho, \varphi)$;
 - в) циліндр поміщений у нескінчене середовище з діелектричною сталою ε , усередині циліндра заряд розподілений з густиною $F(\rho, \varphi, z)$, а потенціал на його поверхні рівний $f(\varphi, z)$;
 - г) циліндр поміщений у вакуум і заземлений, а густина зарядів усередині нього рівна $F(\rho)$.
 9. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної (коефіцієнт внутрішньої теплопровідності $k = const$) пластинки, яка має форму кругового сектора $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$, якщо:
 - а) інтенсивність джерел тепла всередині пластинки рівна $F(\rho)$, а краї пластинки теплоізовані;
 - б) інтенсивність джерел тепла всередині пластинки рівна $F(\rho, \varphi)$, прямолінійні краї підтримуються при нульовій температурі, а на дузі температура рівна $\mu(\varphi)$;

в) внутрішні джерела тепла відсутні, до країв $\varphi=0$ та $\varphi=\alpha$ підводяться теплові потоки $v_1(\rho)$ і $v_2(\rho)$ відповідно, а на краї $\rho=R$ відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури;
 г) внутрішні джерела тепла відсутні, на краї $\varphi=0$ проходить теплообмін із довкіллям температури $\theta(\rho)$, край $\varphi=\alpha$ підтримується при температурі $\mu(\rho)$, а до краю $\rho=R$ підводиться тепловий потік $v(\varphi)$.

§2. Крайові задачі для прямокутних областей. Метод Фур'є. Метод власних функцій

I. Метод Фур'є.

Крайові задачі для рівняння Лапласа у випадку прямокутних областей розв'язуються за допомогою методу відокремлення змінних (методу Фур'є) аналогічно до мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів (див. розділи III, IV).

ПРИКЛАД 1. Знайти розподіл потенціалу $U(x, y)$ електростатичного поля всередині прямокутника $OACB$ зі сторонами $OA=a$, $OB=b$ (рис. 31), якщо уздовж сторони OB потенціал розподілений згідно з законом $U_0 y(b-y)$, де $U_0 = const$, а три інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

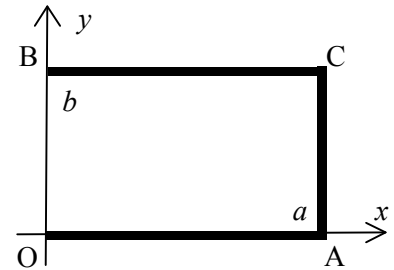


Рис. 31

Розв'язання. Складаємо математичну модель задачі:

$$\begin{aligned} \Delta U(x, y) &\equiv U_{xx} + U_{yy} = 0, & 0 < x < a, & \quad 0 < y < b; \\ U(0, y) &= U_0 y(b-y), & U(a, y) &= 0, & \quad 0 \leq y \leq b; \\ U(x, 0) &= 0, & U(x, b) &= 0, & \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Шукаючи розв'язок цієї задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді $U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, з рівняння Лапласа матимемо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = const,$$

звідки одержимо диференціальне рівняння для функції $X(x)$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,$$

а з урахуванням однорідних крайових умов на сторонах OA та BC – задачу Штурма-Ліувілля для функції $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0; \\ Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останню задачу, одержимо:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = C_n \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n \in \mathbf{N}$$

(для визначеності можна покласти $C_n = 1$). Підставимо знайдені власні значення λ_n у рівняння для функції $X(x)$. Загальний розв'язок одержаного рівняння $X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$ запишеться у вигляді

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тоді

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x} \right) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Із крайових умов на сторонах OB та AC одержимо систему для визначення невідомих коефіцієнтів A_n і B_n :

$$\begin{cases} A_n + B_n = \psi_n; \\ A_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + B_n e^{-\frac{n\pi}{b}a} = 0, \end{cases}$$

де

$$\psi_n = \frac{2U_0}{b} \int_0^b y(b-y) \sin \frac{n\pi}{b} y dy = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{8U_0 b^2}{(\pi n)^3}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже, для парних n $A_n = B_n = 0$, а для непарних –

$$A_n = -\frac{4U_0 b^2 e^{-\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b}, \quad B_n = \frac{4U_0 b^2 e^{\frac{n\pi}{b}a}}{(\pi n)^3 \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} b}.$$

Підставивши ці значення у ряд для розв'язку $U(x, y)$ і врахувавши непарність n , одержимо

$$U(x, y) = \frac{8U_0 b^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{b}(a-x)}{(2k-1)^3 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{b} a} \sin \frac{(2k-1)\pi}{b} y.$$

Зауваження 1. Загальний розв'язок рівняння $X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0$ часто зручніше записати у вигляді

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} x + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi}{b} x.$$

Зауваження 2. У наведеному прикладі ми будували задачу Штурма-Ліувілля для функції $Y(y)$, оскільки крайові умови на сторонах $y = 0$ та $y = b$ були однорідними. Якщо ж крайові умови неоднорідні по обох змінних, то таку задачу можна за певних умов звести до двох задач, аналогічних до прикладу 1. Наприклад, розв'язок крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$U(0, y) = \mu_1(y), \quad U(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U(x, 0) = \nu_1(x), \quad U(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

можна шукати у вигляді $U(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$, де $V(x, y)$ – розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\
V(0, y) &= 0, \quad V(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\
V(x, 0) &= v_1(x), \quad V(x, b) = v_2(x), \quad 0 \leq x \leq a,
\end{aligned}$$

а $W(x, y)$ – розв’язок задачі

$$\begin{aligned}
W_{xx} + W_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\
W(0, y) &= \mu_1(y), \quad W(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\
W(x, 0) &= 0, \quad W(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.
\end{aligned}$$

Проте тут слід пам’ятати, що такий спосіб відшукування розв’язку застосовний лише у випадку узгодженості крайових умов не тільки у вихідній, але й у двох дочірніх крайових задачах.

Іноді область, у якій знаходять розв’язок, може бути нескінченною.

ПРИКЛАД 2. У півсмугі $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ (див. рис. 32) знайти розв’язок $U(x, y)$ рівняння Лапласа, який справджує наступні крайові умови:

$$U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad y \geq 0;$$

$$U(x, 0) = -\sin \frac{8\pi}{a} y, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} U(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

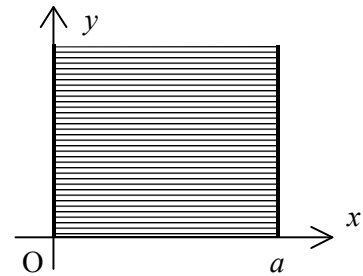


Рис. 32

Розв’язання. Шукаємо розв’язок задачі методом відокремлення змінних (крайові умови є узгодженими) у вигляді $U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$ аналогічно до прикладу 1. Зауважимо, що задачу Штурма-Ліувілля (ЗШЛ) цього разу слід будувати для функції $X(x)$, оскільки однорідними є крайові умови на сторонах $x=0$ та $x=a$. Маємо:

$$\begin{cases}
Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \\
X''(x) - \lambda X(x) = 0; \\
X(0) = 0, \quad X(a) = 0.
\end{cases}$$

Розв’язавши наведену вище ЗШЛ та зінтегрувавши відповідне рівняння для функції $Y(y)$, одержимо:

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y}, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$U_n(x, y) = \left(A_n e^{\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \right) \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Враховуючи умову обмеженості розв’язку при $y \rightarrow \infty$, беремо $A_n = 0$. Тоді

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} \sin \frac{n\pi}{a} x.$$

Для визначення коефіцієнтів B_n використаємо крайову умову при $y = 0$:

$$U(x,0) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x = -\sin \frac{8\pi}{a} x, \text{ звідки } B_n = \begin{cases} -1, & n = 8; \\ 0, & n \neq 8. \end{cases}$$

Отже, розв'язок крайової задачі є

$$U(x,y) = -e^{-\frac{8\pi}{a}y} \sin \frac{8\pi}{a} x.$$

II. Метод власних функцій.

Розглянемо задачу: в області $\{(x,y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta U(x,y) = f(x,y), \quad (1)$$

який справджує крайові умови

$$U(0,y) = 0, \quad U(a,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \quad (2)$$

$$U(x,0) = 0, \quad U(x,b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (3)$$

Розв'язок цієї задачі у випадку, коли функція $f(x,y)$ сама справджує всі чотири крайові умови, можна знайти за допомогою методу власних функцій. Для цього спочатку розв'язуємо відповідну задачу на власні значення вигляду

$$\Delta V(x,y) - \lambda V(x,y) = 0;$$

$$V(0,y) = V(a,y) = 0, \quad V(x,0) = V(x,b) = 0.$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді $V(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, одержуємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{const},$$

звідки

$$\left. \begin{aligned} X''(x) - \alpha X(x) &= 0; \\ X(0) &= 0, \quad X(a) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{a} x, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\left. \begin{aligned} Y''(y) - \beta Y(y) &= 0; \\ Y(0) &= 0, \quad Y(b) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta_m = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad Y_m(y) = C_m \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad m \in \mathbf{N};$$

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad V_{n,m}(x,y) = C_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \quad C_{n,m} = C_n \cdot C_m.$$

Покладемо для визначеності $C_{n,m} = 1$. Тепер розв'язок задачі (1)-(3) можна знайти у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$U(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} V_{n,m}(x,y). \quad (4)$$

Вважаємо, що ряд (4) рівномірно збігається і його можна почленно диференціювати двічі по x і по y . Для визначення невідомих коефіцієнтів $A_{n,m}$ розкладемо функцію $f(x,y)$ в подвійний ряд Фур'є по системі власних функцій $V_{n,m}(x,y)$:

$$f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y), \quad \varphi_{n,m} = \frac{\int_0^a \int_0^b f(x, y) V_{n,m}(x, y) dy dx}{\int_0^a \int_0^b V_{n,m}^2(x, y) dy dx}. \quad (5)$$

Підставивши (4) і (5) у рівняння (1), одержимо:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \Delta V_{n,m}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Але

$$\Delta V_{n,m}(x, y) = \lambda_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Отже,

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{n,m} A_{n,m} V_{n,m}(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Звідси $A_{n,m} = \varphi_{n,m} \lambda_{n,m}^{-1}$ і згідно (4) розв'язок задачі (1)-(3) буде

$$U(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} V_{n,m}(x, y).$$

Зауваження. Розв'язок задачі (1)-(3) можна шукати у вигляді ряду (4), оскільки він справджує однорідні крайові умови. У випадку неоднорідних крайових умов, наприклад для задачі

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ U(0, y) &= \mu_1(y), \quad U(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ U(x, 0) &= \nu_1(x), \quad U(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (6)$$

розв'язок при виконанні певних умов (див. попередні приклади) можна шукати у вигляді $U(x, y) = V(x, y) + W(x, y)$, де $V(x, y)$ – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ V(0, y) &= \mu_1(y), \quad V(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ V(x, 0) &= \nu_1(x), \quad V(x, b) = \nu_2(x), \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (7)$$

а $W(x, y)$ – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} W_{xx} + W_{yy} &= f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ W(0, y) &= 0, \quad W(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ W(x, 0) &= 0, \quad W(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (8)$$

Метод розв'язування задачі (7) поданий у зауваженні 2 до прикладу 1. Задача (8) аналогічна задачі (1)-(3) й інтегрується за допомогою методу власних функцій.

Проте не завжди наведені вище методи є раціональними. У деяких частинних випадках можливе застосування більш простих способів.

ПРИКЛАД 3. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $2x(a-x)$, якщо коефіцієнт внутрішньої теплопровідності $k=1$, краї $x=0$ та $x=a$ пластинки підтримуються при нульовій температурі, а інші два краї теплоізовані.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$\begin{aligned} U_{xx} + U_{yy} &= 2x(a-x), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ U(0, y) &= 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b; \\ U_y(x, 0) &= 0, \quad U_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

1 спосіб (метод власних функцій). Вільний член у рівнянні справджує усі чотири крайові умови, тому для знаходження розв'язку застосовний метод власних функцій аналогічно до задачі (1)-(3). Отже, спочатку розв'яжемо відпо-відну задачу на власні значення вигляду

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) - \lambda V(x, y) &= 0; \\ V(0, y) &= V(a, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = V_y(x, b) = 0. \end{aligned}$$

Шукаючи власні функції наведеної задачі методом відокремлення змінних у вигляді $V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \neq 0$, знаходимо:

$$\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), \quad V_{n,m}(x, y) = C_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Покладемо для визначеності $C_{n,m} = 1$. Тепер розв'язок поставленої задачі можна шукати у вигляді ряду по системі знайдених власних функцій

$$U(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Підставивши цей ряд у рівняння, одержимо:

$$\sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} \Delta V_{n,m}(x, y) = 2x(a-x).$$

Розкладемо функцію $2x(a-x)$ в подвійний ряд Фур'є по системі знайдених власних функцій $V_{n,m}(x, y)$: $2x(a-x) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \varphi_{n,m} \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y$, де

$$\varphi_{n,m} = \frac{\int_0^a \int_0^b 2x(a-x) \sin \frac{n\pi}{a} x \cos \frac{m\pi}{b} y dy dx}{\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \cos^2 \frac{m\pi}{b} y dy dx} = \begin{cases} 0, & m > 0; \\ \frac{8a^2}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n], & m = 0. \end{cases}$$

Так як

$$\Delta V_{n,m}(x, y) = \lambda_{n,m} V_{n,m}(x, y),$$

то

$$\sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \lambda_{n,m} A_{n,m} V_{n,m}(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \varphi_{n,m} V_{n,m}(x, y).$$

Звідси $A_{n,m} = \varphi_{n,m} \lambda_{n,m}^{-1}$ і розв'язок задачі матиме вигляд

$$U(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} \frac{\varphi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} V_{n,m}(x, y).$$

Врахувавши, що коефіцієнти Фур'є $\varphi_{n,m}$ відмінні від нуля тільки при $m=0$ і $n=2k-1$ (непарних) і підставивши всі знайдені величини у ряд для $U(x, y)$, остаточно одержимо:

$$U(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16a^4}{\pi^5 (2k-1)^5} \sin \frac{\pi(2k-1)}{a} x.$$

Другий спосіб (зведення неоднорідного рівняння до однорідного). Оскільки вільний член у рівнянні є функцією тільки змінної x , а умови на краях $x=0$ та $x=a$ не залежать від змінної y , то наведену крайову задачу можна розглядати як аналог задачі зі стаціонарними неоднорідностями для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Отже, шукаємо розв'язок у вигляді

$$U(x, y) = V(x, y) + \omega(x),$$

де допоміжна функція $\omega(x)$ повинна справджувати неоднорідне рівняння та умови на краях $x=0$ та $x=a$, тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\omega''(x) = 2x(a-x);$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(a) = 0.$$

Зінтегрувавши цю задачу, одержимо $\omega(x) = \frac{1}{6}(2ax^3 - x^4 - a^3x)$, а для нової невідомої функції $V(x, y)$ – однорідну задачу

$$V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$V(0, y) = 0, \quad V(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$V_y(x, 0) = 0, \quad V_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

звідки очевидно, що $V(x, y) \equiv 0$ (оскільки рівняння і всі крайові умови є однорідними, а сама задача не є задачею Неймана). Отже, розв'язок вихідної крайової задачі є

$$U(x, y) \equiv \omega(x) = \frac{1}{6}(2ax^3 - x^4 - a^3x)$$

Зауваження. Якщо в задачі для нової невідомої функції $V(x, y)$ крайові умови неоднорідні, то її розв'язок знаходиться за допомогою методу Фур'є (див. зауваження 2 до прикладу 1). При цьому за вірного підбору допоміжної функції $\omega(x)$ або $\omega(y)$ умови застосовності методу Фур'є виконуватимуться автоматично.

Вправа. Перевірити тотожність двох одержаних розв'язків крайової задачі для прикладу 3.

ПРИКЛАД 4. Зінтегрувати задачу та дати її фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(x, y) = 6y(y-1)^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$U_x(0, y) = 0, \quad U_x(1, y) = 3y - 2y^2, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U(x, 0) = 1, \quad U_y(x, 1) + U(x, 1) = 4 \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Фізична інтерпретація:

а) знайти положення рівноваги однорідної квадратної мембрани, яка піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили з густиною $-6Ty(y-1)^2$, де T величина натягу, якщо край $y=0$ мембрани зміщений на сталу величину, край $x=0$ вільний, до краю $x=1$ прикладена сила $T(3y-2y^2)$, а край $y=1$ пружно закріплений з коефіцієнтом жорсткості $\alpha=T$, причому точки закріплення пружин рухаються за законом $4 \cos \pi x$; – або:

б) знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній квадратній пластинці, всередині якої діють джерела тепла інтенсивності $-6ky(y-1)^2$, де k коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, якщо край $y=0$ пластинки підтримується при сталій температурі, край $x=0$ теплоізолюваний, до краю $x=1$ площею σ підводиться тепловий потік $k\sigma(2y^2-3y)$, а на краї $y=1$ проходить теплообмін з коефіцієнтом $\alpha=k$ з навколишнім середовищем, температура якого рівна $4 \cos \pi x$.

Розв'язання. Покладемо $U(x, y) = V(x, y) + W(x, y) + Z(x, y)$, де нові невідомі функції є розв'язками наступних крайових задач:

$$\Delta V(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$V_x(0, y) = 0, \quad V_x(1, y) = 3y - 2y^2, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (9)$$

$$V(x, 0) = 0, \quad V_y(x, 1) + V(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\Delta W(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$W_x(0, y) = 0, \quad W_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (10)$$

$$W(x, 0) = 1, \quad W_y(x, 1) + W(x, 1) = 4 \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\Delta Z(x, y) = 6y(y-1)^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$Z_x(0, y) = 0, \quad Z_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (11)$$

$$Z(x, 0) = 0, \quad Z_y(x, 1) + Z(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Крайові умови в (9) і (10) є узгодженими, тому для відшукування розв'язків цих задач застосовний метод Фур'є.

Отже, $V(x, y) = X_1(x) \cdot Y_1(y) \neq 0$, причому ЗШЛ будемо для функції $Y_1(y)$. Одержимо:

$$\begin{cases} X_1''(x) + \lambda X_1(x) = 0, \\ Y_1''(y) - \lambda Y_1(y) = 0; \\ Y_1(0) = 0, \quad Y_1'(1) + Y_1(1) = 0. \end{cases}$$

Звідси $\lambda_n = -\mu_n^2$, де μ_n – додатні корені рівняння $\mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n$ (ці корені можна визначити лише наближеними методами), а $Y_{1,n}(y) = \sin \mu_n y$, $n \in \mathbf{N}$. Відповідні функції $X_{1,n}(x)$ запишемо для зручності через гіперболічні функції у вигляді $X_{1,n}(x) = A_n \operatorname{sh} \mu_n x + B_n \operatorname{ch} \mu_n x$. Тоді

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{sh} \mu_n x + B_n \operatorname{ch} \mu_n x) \sin \mu_n y. \quad (12)$$

Коефіцієнти A_n і B_n визначаємо з умов на краях $x = 0$ і $x = 1$:

$$V_x(0, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n A_n \sin \mu_n y = 0;$$

$$V_x(1, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (A_n \operatorname{ch} \mu_n + B_n \operatorname{sh} \mu_n) \sin \mu_n y = 3y - 2y^2.$$

Із першої рівності маємо $A_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Розклавши праву частину другої рівності в ряд Фур'є по системі власних функцій $\{\sin \mu_n y\}$, одержимо:

$$\mu_n B_n \operatorname{sh} \mu_n = \frac{\int_0^1 (3y - y^2) \sin \mu_n y dy}{\int_0^1 \sin^2 \mu_n y dy} = \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^3 (1 + \cos^2 \mu_n)}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (12), одержимо розв'язок задачі (9) у вигляді

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4 \operatorname{sh} \mu_n (1 + \cos^2 \mu_n)} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y, \quad \mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n.$$

Аналогічно розв'язується й задача (10): $W(x, y) = X_2(x) \cdot Y_2(y) \neq 0$, проте цього разу ЗШЛ будуємо для функції $X_2(x)$. Одержимо:

$$\begin{cases} Y_2''(y) + \nu Y_2(y) = 0, \\ X_2''(x) - \lambda X_2(x) = 0; \\ X_2'(0) = 0, \quad X_2'(1) = 0. \end{cases}$$

Звідси $\nu_m = -(\pi m)^2$, $X_{2,m}(x) = \cos \pi m x$, $m = \overline{0, \infty}$ (нуль теж є власним значенням). Відповідні функції $Y_{2,m}(y)$ будуть

$$Y_{2,m}(y) = \begin{cases} A_0 y + B_0, & m = 0; \\ A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y, & m > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$W(x, y) = A_0 y + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} \pi m y + B_m \operatorname{ch} \pi m y) \cos \pi m x. \quad (13)$$

Коефіцієнти A_m і B_m визначаємо з умов на краях $y = 0$ і $y = 1$:

$$W(x,0) \equiv B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \pi m x = 1;$$

$$W_y(x,1) + W(x,1) \equiv 2A_0 + B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} [(A_m + \pi m B_m) \operatorname{sh} \pi m + (B_m + \pi m A_m) \operatorname{ch} \pi m] \cos \pi m x = 4 \cos \pi x.$$

У правих частинах одержаних рівностей фігурують тільки власні функції (маємо резонансний випадок), тому можна, не використовуючи розклад у ряд Фур'є, одразу прирівняти коефіцієнти при однакових власних функціях. Тоді з першої рівності будемо мати $B_0 = 1$; $B_m = 0$, $m > 0$. З урахуванням знайдених коефіцієнтів B_m із другої рівності одержимо: $A_0 = -0,5$; $A_1 = 4(\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi)^{-1}$; а для всіх інших значень m $A_m = 0$.

Підставивши знайдені коефіцієнти у ряд (13), одержимо розв'язок задачі (10) у вигляді

$$W(x,y) = 1 - 0,5y + \frac{4 \operatorname{sh} \pi y}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi} \cos \pi x.$$

Оскільки вільний член у рівнянні задачі (11) задовольняє всі чотири крайові умови, то розв'язок цієї задачі можна було б шукати за допомогою методу власних функцій у вигляді ряду

$$Z(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} Y_{1,n}(y) X_{2,m}(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ m=0}}^{\infty} A_{n,m} \sin \mu_n y \cos \pi m x, \quad \mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n.$$

Проте, зваживши на простий вигляд вільного члена у рівнянні, легко побачити, що задача (11) аналогічна до прикладу 3 і інтегрується шляхом зведення неоднорідного рівняння до однорідного підстановкою

$$Z(x,y) = Q(x,y) + \omega(y),$$

де допоміжна функція $\omega(y)$ повинна задовольняти неоднорідне рівняння та умови на краях $y = 0$ та $y = 1$, тобто повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned} \omega''(y) &= 6y(y-1)^2; \\ \omega(0) &= 0, \quad \omega'(1) + \omega(1) = 0. \end{aligned}$$

Зінтегрувавши цю задачу, одержимо $\omega(y) = \frac{1}{4}(y - 4y^3 + 2y^4)$, а для нової невідомої функції $Q(x,y)$ дістанемо однорідну задачу

$$\begin{aligned} Q_{xx} + Q_{yy} &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ Q_x(0,y) &= 0, \quad Q_x(1,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ Q(x,0) &= 0, \quad Q_y(x,1) + Q(x,1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

звідки очевидно, що $Q(x,y) \equiv 0$ (див. приклад 3). Отже, розв'язок задачі (11) буде

$$Z(x,y) \equiv \omega(y) = \frac{1}{4}(y - 4y^3 + 2y^4)$$

Додавши знайдені розв'язки задач (9), (10) і (11), одержимо шуканий розв'язок вихідної крайової задачі:

$$U(x, y) = \frac{1}{4}(2y^4 - y - 4y^3) + 1 + \frac{4 \operatorname{sh} \pi y}{\pi \operatorname{ch} \pi + \operatorname{sh} \pi} \cos \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\mu_n}{2}}{\mu_n^4 \operatorname{sh} \mu_n (1 + \cos^2 \mu_n)} \operatorname{ch} \mu_n x \sin \mu_n y,$$

де $\mu_n = -\operatorname{tg} \mu_n$.

Іноді без застосування методу Фур'є вдається зінтегрувати й більш складні за (11) крайові задачі.

ПРИКЛАД 5. Зінтегрувати крайову задачу:

$$\Delta U(x, y) = 6y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$U_x(0, y) = 1, \quad U_x(1, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U(x, 0) = x - 1, \quad U_y(x, 1) + U(x, 1) = x - 1, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Розв'язання. На вигляд задача аналогічна до прикладу 4, проте шукати її розв'язок вищенаведеним способом не можна, оскільки в дочірніх задачах крайові умови стануть неузгодженими. Отже, застосуємо інший спосіб (див. приклад 3): покладемо

$$U(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y),$$

де $\omega(x, y)$ – деякий частинний розв'язок рівняння

$$\omega_{xx} + \omega_{yy} = 6y, \quad (14)$$

котрий потрібно підібрати таким чином, щоб до одержаної задачі для $V(x, y)$ був застосовний метод Фур'є. При цьому бажано, щоб одержана нова задача була максимально простою.

Спробуємо виконати ці умови для нашого прикладу. Очевидно, що довільна функція вигляду $\omega(x, y) = y^3 + Ay + Bx + C$, де A, B, C – довільні сталі, є розв'язком рівняння (14). Виберемо тепер сталі A, B, C таким чином, щоб виконувалися хоча б деякі з чотирьох крайових умов. Маємо:

$$\omega_x(0, y) \equiv B = 1, \quad \omega_x(1, y) \equiv B = 1,$$

$$\omega(x, 0) \equiv Bx + C = x - 1, \quad \omega_y(x, 1) + \omega(x, 1) \equiv Bx + C + 2A + 4 = x - 1.$$

Легко бачити, що при $B = 1, C = -1$ та $A = -2$ виконуються усі чотири крайові умови. Отже, беремо $\omega(x, y) = y^3 - 2y + x - 1$. Тоді для $V(x, y)$ одержимо задачу:

$$\Delta V(x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$V_x(0, y) = 0, \quad V_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$V(x, 0) = 0, \quad V_y(x, 1) + V(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

звідки $V(x, y) \equiv 0$, а тому

$$U(x, y) \equiv \omega(x, y) = y^3 - 2y + x - 1.$$

Розглянемо задачу Неймана для рівняння Лапласа у прямокутнику $\{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$:

$$\begin{aligned}\Delta U(x, y) &= 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ U_x(0, y) &= \varphi_1(y), \quad U_x(a, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq b; \\ U_y(x, 0) &= \psi_1(x), \quad U_y(x, b) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq a.\end{aligned}$$

Умова стаціонарності теплового поля для такої задачі має вигляд

$$\int_0^b \varphi_1(y) dy = \int_0^b \varphi_2(y) dy, \quad \int_0^a \psi_1(x) dx = \int_0^a \psi_2(x) dx.$$

При невиконанні хоча б однієї з цих умов задача розв'язку не має. Проте у випадку задачі Неймана для рівняння Пуассона іноді вдається підібрати частинний розв'язок рівняння таким чином, щоб крайові умови стали узгодженими.

ПРИКЛАД 6. Зінтегрувати крайову задачу

$$\begin{aligned}\Delta U(x, y) &= 2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ U_x(0, y) &= y - 1, \quad U_x(1, y) = y + 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ U_y(x, 0) &= x, \quad U_y(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Розв'язання. Очевидно, що умова стаціонарності теплового поля тут не виконується, оскільки $\int_0^1 (y - 1) dy \neq \int_0^1 (y + 1) dy$. Тому розв'язок потрібно шукати у вигляді $U(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y)$, де $\omega(x, y)$ – деякий частинний розв'язок рівняння $\Delta \omega = 2$, причому для $V(x, y)$ крайові умови повинні стати узгодженими. Шляхом підбору знаходимо, наприклад, $\omega(x, y) = x^2 - x$; тоді для $V(x, y)$ одержимо задачу

$$\begin{aligned}\Delta V(x, y) &= 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1; \\ V_x(0, y) &= y, \quad V_x(1, y) = y, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ V_y(x, 0) &= x, \quad V_y(x, 1) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.\end{aligned}$$

Тут крайові умови є узгодженими, і задача має очевидний розв'язок

$$V(x, y) = xy + C, \quad C = \text{const}$$

(як відомо, розв'язок внутрішньої задачі Неймана завжди визначається з точністю до сталого доданка). А тоді

$$U(x, y) = V(x, y) + \omega(x, y) = xy + x^2 - x + C.$$

❖ Розв'язати задачі:

10. Знайти функцію $U = U(x, y)$, гармонічну всередині прямокутника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, яка на межі області справджує крайові умови:

а) $U(x, 0) = u_1$, $U(x, b) = u_2$, $U_x(0, y) = 0$, $U_x(a, y) = 0$;

б) $U(0, y) = u_1$, $U_x(a, y) + U(a, y) = u_2$, $U_y(x, 0) = 0$, $U_y(x, b) = 0$;

в) $U_x(0, y) = A$, $U_x(a, y) = B$, $U_y(x, 0) = C$, $U_y(x, b) = D$;

г) $U_x(0,y) = A$, $U_x(a,y) = y^3 - 1,5by^2$, $U_y(x,0) = 0$, $U_y(x,b) = 0$.

У задачах Неймана врахувати умову існування розв'язку.

11. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta U(x,y) = Q$, де $Q = const$, який на межі прямокутника $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ справджує крайові умови:

а) $U(x,0) = u_1$, $U(x,b) = u_2$, $U_x(0,y) = 0$, $U_x(a,y) = 0$;

б) $U(0,y) = u_1$, $U_x(a,y) + U(a,y) = u_2$, $U_y(x,0) = 0$, $U_y(x,b) = 0$;

в) $U_x(0,y) = A$, $U_x(a,y) = B$, $U_y(x,0) = C$, $U_y(x,b) = D$;

г) $U_x(0,y) = A$, $U_x(a,y) = \cos \frac{\pi}{b} y$, $U_y(x,0) = 0$, $U_y(x,b) = 0$.

Врахувати існування розв'язку поставлених задач.

12. Знайти положення рівноваги прямокутної мембрани $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq a$, край $x=0$ якої нерухомо закріплений, на краях $x=\pi$ та $y=0$ діють сили відповідно $v_1(y) = 3T$ та $v_2(y) = -6T \sin \frac{x}{2}$, де $T = const$ – величина натягу, а край $y=a$ пружно закріплений (коефіцієнт жорсткості $\alpha = T$), причому край закріплення пружини зміщується за законом $\gamma(x) = 3x$.

13. Знайти стаціонарний розподіл температури у прямокутній пластинці $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2\pi$, на краї $y=2\pi$ якої підтримується стала температура $\mu(x) = A$, краї $x=1$ та $y=0$ теплоізовані, а на краї $x=0$ проходить теплообмін із коефіцієнтом α , рівним коефіцієнту внутрішньої теплопровідності, із навколишнім середовищем, температура якого рівна $\gamma(y) = A(1 - \cos 0,75y)$.

14. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, якщо на сторонах $x=0$ та $y=2$ потенціал рівний відповідно $A \sin \pi y$ та $B \sin 4\pi x$, а дві інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

15. Визначити форму прогину прямокутної мембрани $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ під дією неперервно розподіленої зовнішньої сили густини $-18Txy$, де $T = const$ – величина натягу, якщо краї $x=0$ та $x=a$ мембрани нерухомо закріплені, а інші вільні.

16. Визначити стаціонарний розподіл температури у прямокутній пластинці $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, два краї $y=0$ та $x=a$ якої підтримуються при нульовій температурі, а інші теплоізовані. Усередині пластинки діє джерело тепла інтенсивності $(a^2 - x^2) \sin \frac{5\pi y}{2b} - 2y$. Коефіцієнт внутрішньої теплопровідності $k = \frac{1}{6}$.

17. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля в квадраті $0 \leq x, y \leq \pi$, сторони якого заземлені, якщо електричні заряди всередині квадрата розподілені з густиною $f(x) \sin 3y$, де $f(0) = f(\pi) = 0$.

18. У півсмузі $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$ знайти розв'язок $U(x,y)$ рівняння Лапласа, який справджує наступні крайові умови:

$$U_y(x,0)=0, \quad U(x,b)=0, \quad x \geq 0;$$

$$U(0,y) = A(y^2 - b^2), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U(x,y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

19. Знайти функцію $U(x, y, z)$, гармонічну всередині шару, обмеженого площинами $z = 0$ та $z = h$, якщо $U|_{z=0} = u_1$, $U|_{z=h} = u_2$.

20. Зінтегрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 18xy, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U_x(0, y) = 0, \quad U_x(a, y) = 9a^2 y + \cos \frac{2\pi}{b} y, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U_y(x, 0) = U_y(x, b) = 1 + 3x^3, \quad 0 \leq x \leq a.$$

б) $\Delta U(x, y) = 6x + 12y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \frac{1}{2};$

$$U_x(0, y) = U_x(2, y) = 1 + 3y^2, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2};$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, \frac{1}{2}) = 3x + 1,5 + 2 \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

§3. Крайові задачі для кругових областей. Метод відокремлення змінних

На відміну від прямокутних областей, для запису математичних моделей стаціонарних процесів у кругових областях (внутрішність або зовнішність круга, кільце, круговий сектор, криволінійний прямокутник) використовують полярні координати. Проте методи інтегрування крайових задач для рівнянь еліптичного типу у випадку кругових областей аналогічні методам знаходження розв'язків мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів (при цьому роль початкових умов відіграють крайові умови на криволінійних краях, тобто при $\rho = const$. У внутрішніх задачах для круга та сектора необхідно враховувати додатково умову визначеності розв'язку в нулі: $\lim_{\rho \rightarrow 0} U(\rho, \varphi) \neq \pm\infty$, а

у зовнішніх задачах – умову регулярності на нескінченості на площині: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} U(\rho, \varphi) \neq \pm\infty$. Крім того, для круга та кільця розв'язок повинен бути періодичною функцією з періодом 2π .

ПРИКЛАД 1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині пластинки, яка має форму кругового сектора $\{(\rho, \varphi) | 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi\}$, якщо прямолінійні краї пластинки теплоізовані, а на дузі підтримується температура $A \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi$, $A = const$.

Розв'язання. Маємо наступну задачу:

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha; \quad (15)$$

$$U(R, \varphi) = A \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha; \quad (16)$$

$$U_\varphi(\rho, 0) = 0, \quad U_\varphi(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (17)$$

Крайові умови узгоджені, тому для знаходження розв'язку однорідного рівняння (15) застосовний метод відокремлення змінних (метод Фур'є). Отже, шукаємо $U(\rho, \varphi)$ у вигляді

$$U(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0.$$

Відокремивши змінні у рівнянні (15) та у крайових умовах (17), одержимо:

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) + \lambda X(\rho) = 0; \quad (18)$$

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) = 0; \\ \Phi'(0) = 0, \quad \Phi'(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Із ЗШЛ (19) маємо:

$$\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi, \quad n = \overline{0, \infty}$$

(нуль теж є власним значенням). Підставимо знайдені λ_n у (18) і визначимо $X_n(\rho)$, врахувавши умову визначеності розв'язку в нулі. Одержимо:

$$X_n(\rho) = B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Таким чином, розв'язок рівняння Лапласа (15) матиме вигляд

$$U(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi. \quad (20)$$

Сталі B_n визначаємо підстановкою ряду (20) у крайову умову (16). Маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{\frac{\pi n}{\alpha}} \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi = A \cos \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Звідси

$$B_n = \begin{cases} AR^{-\frac{\pi}{\alpha}}, & n = 1; \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі (15)-(17) буде функція

$$U(\rho, \varphi) = A \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi.$$

Зауваження. Рівняння Ейлера (18) заміною незалежної змінної $\rho = e^t$ зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. У випадку однорідного рівняння Ейлера можна застосовувати і простішу підстановку $X_n(\rho) = \rho^k$, де k – невідома стала.

ПРИКЛАД 2. Зінтегрувати крайову задачу та дати фізичну інтерпретацію:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 18\rho, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U_\rho(1, \varphi) - U(1, \varphi) = 1, \quad U(4, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Фізична інтерпретація:

а) знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = 1$ та $\rho = 4$, зовнішній край якої закріплений нерухомо, а внутрішній – пружно, причому край закріплення пружини зміщений; мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили з густиною $-18T\rho$, де $T = const$ – величина натягу; – або:

б) знайти стаціонарний розподіл температури всередині однорідної пластинки, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = 1$ та $\rho = 4$, зовнішній край якої підтримується при нульовій температурі, якщо інтенсивність внутрішніх джерел тепла рівна $-18k\rho$, де $k = const$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, а на внутрішньому краї проходить теплообмін з коефіцієнтом $\alpha = k$ із навколишнім середовищем сталої температури $\theta = -1$.

Розв’язання.

Перший спосіб (метод відокремлення змінних). Спочатку для спрощення задачі зведемо рівняння до однорідного підстановкою

$$U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi),$$

де $V(\rho, \varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho, \varphi)$ – деякий частинний розв’язок рівняння

$$\Delta \omega \equiv \omega_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \omega_\rho + \frac{1}{\rho^2} \omega_{\varphi\varphi} = 18\rho.$$

Шукаємо допоміжну функцію у вигляді $\omega(\rho, \varphi) = A\rho^3$, тоді з останнього рівняння визначаємо $A = 2$. Отже, взявши $U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + 2\rho^3$, для нової невідомої функції $V(\rho, \varphi)$ одержуємо наступну крайову задачу:

$$\Delta V(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$V_\rho(1, \varphi) - V(1, \varphi) = -3, \quad V(4, \varphi) = -128, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв’язок у вигляді $V(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$, одержимо загальний розв’язок рівняння Лапласа у вигляді (див. [11], с. 244-247):

$$V(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \right] \quad (21)$$

Підставивши ряд (21) у крайові умови для $V(\rho, \varphi)$, одержимо:

$$A_0 - B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n(n-1) + B_n(n-1)) \cos n\varphi + (C_n(n-1) + D_n(n-1)) \sin n\varphi] = -3;$$

$$A_0 \ln 4 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \cdot 4^n + B_n \cdot 4^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \cdot 4^n + D_n \cdot 4^{-n}) \sin n\varphi] = -128.$$

Звідси

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, \quad n > 0;$$

$$A_0 - B_0 = -3, \quad A_0 \ln 4 + B_0 = -128.$$

Із останньої системи $A_0 = -131(1 + \ln 4)^{-1}$, $B_0 = (3 \ln 4 - 128)(1 + \ln 4)^{-1}$; отже,

$$U(\rho, \varphi) = 2\rho^3 + \frac{3 \ln 4 - 128 - 131 \ln \rho}{\ln 4 + 1}. \quad (22)$$

Другий спосіб (метод спуску). Оскільки вільний член у рівнянні Пуассона і крайові умови не залежать від полярного кута, то можна покласти $U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho)$. Тоді для визначення розв'язку матимемо крайову задачу для звичайного диференціального рівняння:

$$U''(\rho) + \frac{1}{\rho} U'(\rho) = 18\rho, \quad 1 < \rho < 4;$$

$$U'(1) - U(1) = 1, \quad U(4) = 0.$$

Зінтегрувавши рівняння за допомогою підстановки $U'(\rho) = Z(\rho)$ або шляхом виділення повної похідної, одержимо загальний розв'язок

$$U(\rho) = 2\rho^3 + C_1 \ln \rho + C_2.$$

Визначивши сталі C_1, C_2 з крайових умов, дістанемо розв'язок крайової задачі у вигляді (22).

ПРИКЛАД 3. Побудувати розв'язок крайової задачі:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 4\rho^{-2} (\sin^2 2\varphi - \cos \varphi), \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2};$$

$$U_\rho(1, \varphi) = 0, \quad U_\rho(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$U(\rho, 0) = 4, \quad U(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

Розв'язання. Якщо проводити аналогію з мішаними задачами для рівнянь параболічного типу, то можна було б сказати, що маємо задачу типу 3 (крайові умови на прямолінійних краях заданого кільцевого сектора неоднорідні). Тому й етапи знаходження розв'язку в цих задачах аналогічні.

Перший етап. Зводимо до однорідних крайові умови на прямолінійних краях підстановкою $U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi)$, де $V(\rho, \varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho, \varphi)$ – допоміжна функція, котра повинна справджувати крайові умови

$$\omega(\rho, 0) = 4, \quad \omega(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0.$$

Будемо шукати допоміжну функцію $\omega(\rho, \varphi)$ в періодичному вигляді

$$\omega(\rho, \varphi) = A(\rho) \sin \beta \varphi + B(\rho) \cos \beta \varphi,$$

де невідомі функції $A(\rho), B(\rho)$ та стала β визначаються з крайових умов:

$$\omega(\rho, 0) \equiv A(\rho) \cdot 0 + B(\rho) \cdot 1 = 4 \Rightarrow B(\rho) = 4;$$

$$\omega(\rho, \frac{\pi}{2}) \equiv A(\rho) \sin \frac{\beta \pi}{2} + B(\rho) \cos \frac{\beta \pi}{2} = 0.$$

Остання умова виконується, наприклад, при $A(\rho) \equiv 0$, $\beta=1$. Отже, беремо $\omega(\rho, \varphi) = 4 \cos \varphi$. Тоді $U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + 4 \cos \varphi$, а для $V(\rho, \varphi)$ матимемо наступну крайову задачу:

$$\Delta V(\rho, \varphi) \equiv V_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} V_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} V_{\varphi\varphi} = 4\rho^{-2} \sin^2 2\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2};$$

$$V_{\rho}(1, \varphi) = 0, \quad V_{\rho}(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$V(\rho, 0) = 0, \quad V\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 1 \leq \rho \leq 2.$$

Другий етап. Шукаємо власні функції задачі Штурма-Ліувілля для відповідної однорідної задачі. Поклавши $V(\rho, \varphi) = Q(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$ і відокремивши змінні у відповідному однорідному рівнянні та у крайових умовах на прямолінійних краях, одержимо ЗШЛ

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) - \lambda \Phi(\varphi) = 0; \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

звідки $\Phi_n(\varphi) = \sin 2n\varphi$, $n \in \mathbf{N}$.

Третій етап. Розв'язок неоднорідної задачі шукаємо у вигляді ряду по знайдених власних функціях:

$$V(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\rho) \cdot \Phi_n(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\rho) \sin 2n\varphi.$$

Невідомі коефіцієнти $X_n(\rho)$ знаходимо підстановкою цього ряду в неоднорідне рівняння та у крайові умови на дугах. Одержимо:

$$\begin{aligned} \rho^2 X_n''(\rho) + \rho X_n'(\rho) - 4n^2 X_n(\rho) &= f_n; \\ X_n'(1) = 0, \quad X_n'(2) &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

де коефіцієнт Фур'є

$$f_n = \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi \sin 2n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k \neq 1; \\ 4\pi^{-1}, & n = 2; \\ \frac{32}{\pi n(4 - n^2)}, & n = 2k - 1. \end{cases}$$

Ввівши підстановку $\rho = e^t$ у рівняння Ейлера (23) і зінтегрувавши його, дістанемо:

$$X_n(\rho) = A_n \rho^{2n} + B_n \rho^{-2n} - 0,25n^{-2} f_n.$$

Із крайових умов $A_n = B_n = 0$, отже,

$$U(\rho, \varphi) \equiv U(\varphi) = 4 \cos \varphi - \frac{1}{4\pi} \sin 4\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3 [4 - (2k-1)^2]} \sin(4k-2)\varphi.$$

Вправа. Розв'язати крайову задачу прикладу 3, використовуючи метод спуску (див. приклад 2).

ПРИКЛАД 4. Знайти положення рівноваги однорідної мембрани, яка має форму кільця, обмеженого колами $\rho = a$ та $\rho = b$ ($0 < a < b$), внутрішній край якої жорстко закріплений, а зовнішній вільний, якщо мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили з густиною $12T(y^2 - x^2)$, де $T = const$ – величина натягу. Початок координат знаходиться у центрі кільця.

Розв'язання. Математична модель задачі (у полярній системі координат):

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} U_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} U_{\varphi\varphi} = 12\rho^2 \cos 2\varphi, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(a, \varphi) = 0, \quad U_{\rho}(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді $U(\rho, \varphi) = V(\rho, \varphi) + \omega(\rho, \varphi)$, де $V(\rho, \varphi)$ – нова невідома функція, а $\omega(\rho, \varphi)$ – деякий розв'язок заданого рівняння Пуассона. Зокрема, в даному випадку $\omega(\rho, \varphi)$ можна шукати у вигляді $\omega(\rho, \varphi) = A\rho^4 \cos 2\varphi$, тоді з рівняння визначаємо $A = 1$. Отже,

$$\omega(\rho, \varphi) = \rho^4 \cos 2\varphi.$$

Тоді для $V(\rho, \varphi)$ одержуємо крайову задачу (зادля зручності домножимо рівняння на ρ^2):

$$\rho^2 V_{\rho\rho} + \rho V_{\rho} + V_{\varphi\varphi} = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$V(a, \varphi) = -a^4 \cos 2\varphi, \quad V_{\rho}(b, \varphi) = -4b^3 \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Застосовуючи до цієї задачі класичний метод відокремлення змінних, тобто шукаючи розв'язок у вигляді $V(\rho, \varphi) = X(\rho) \cdot \Phi(\varphi) \neq 0$, одержимо загальний розв'язок рівняння Лапласа (див. приклад 2):

$$V(\rho, \varphi) = A_0 \ln \rho + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cos n\varphi + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \sin n\varphi \right]$$

Коефіцієнти ряду слід визначати підстановкою ряду в крайові умови на колах, подаючи при цьому праві частини рівностей у вигляді ряду Фур'є. Проте в даному випадку функції крайових умов уже подані у вигляді розкладу в ряд Фур'є (резонансний випадок). Тому, одразу прирівнявши коефіцієнти при однакових власних функціях, одержимо: $A_0 = B_0 = 0$; $C_n = D_n = 0$ для всіх n ; а $A_n = B_n = 0$ для всіх n , окрім $n=2$. При $n=2$ матимемо систему для визначення A_2 та B_2 :

$$\begin{cases} A_2 a^4 + B_2 = -a^6; \\ A_2 b^4 - B_2 = -2b^6 \end{cases} \Rightarrow A_2 = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4}, \quad B_2 = \frac{2b^6 - a^6}{a^4 + b^4}.$$

Отже, шуканий розв'язок крайової задачі запишеться у вигляді:

$$U(\rho, \varphi) = \rho^4 \cos 2\varphi + \left[(2b^6 - a^6) a^4 b^4 \rho^{-2} - (a^6 + 2b^6) \rho^2 \right] \frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

Інтеграл Пуассона. Розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі радіуса R із центром у початку координат

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(R, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

дається інтегралом Пуассона

$$U(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Для відповідної зовнішньої задачі ($R \leq \rho < +\infty$)

$$U(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi.$$

Вираз

$$K(\rho, \varphi, R, \psi) = \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)}$$

називається ядром Пуассона.

Задача Неймана. Умова стаціонарності теплового поля у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа в кругових областях має вигляд:

а) для внутрішності ($0 \leq \rho \leq R$) або зовнішності ($R \leq \rho < +\infty$) круга

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, \varphi) &= 0; \\ U_\rho(R, \varphi) &= f(\varphi) \end{aligned} \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

Для кругового сектора ($0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде $\int_0^\alpha f(\varphi) d\varphi = 0$.

б) для кільця ($a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$)

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, \varphi) &= 0; \\ U_\rho(a, \varphi) &= f_1(\varphi); \\ U_\rho(b, \varphi) &= f_2(\varphi) \end{aligned} \Rightarrow a \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi.$$

Для криволінійного прямокутника чи кільцевого сектора ($a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$), якщо крайові умови на прямолінійних краях однорідні, буде

$$a \int_0^\alpha f_1(\varphi) d\varphi = b \int_0^\alpha f_2(\varphi) d\varphi.$$

Якщо наведені вище умови виконуються, то задача Неймана буде мати розв'язок, який визначається з точністю до сталого доданка. Якщо ж рівняння неоднорідне або ж при $0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi$ маємо неоднорідні крайові умови на прямолінійних краях, то можна спробувати звести задачу до однорідної з урахуванням умов узгодженості аналогічно до прямокутних областей (див. приклад 6 з §3).

❖ Розв'язати задачі:

21. Розглянемо круг радіуса a з центром у початку координат. Нехай (ρ, φ) – полярні, а (x, y) – декартові координати. Знайти розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа, якщо задані наступні крайові умови:

а) $U|_{\rho=a} = A$;

б) $U|_{\rho=a} = A + By$;

в) $U|_{\rho=a} = Axy$;

г) $U|_{\rho=a} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi$.

22. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta U = 1$ всередині круга радіуса a з центром у початку координат, якщо $U|_{\rho=a} = 0$.

23. Розв'язати внутрішню задачу Неймана для рівняння Лапласа в крузі радіуса a з центром у початку координат, якщо на межі круга задані наступні умови:

а) $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = A$;

б) $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = A(x^2 - y^2)$;

в) $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = A \cos \varphi + B$;

г) $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = A \sin \varphi + B \sin^3 \varphi$,

де A, B – деякі сталі, відмінні від нуля, \vec{n} – вектор зовнішньої нормалі. Відзначити некоректно поставлені задачі.

24. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta U = A$ всередині круга радіуса a з центром у початку координат за крайової умови $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = B$ (константу B вибрати таким чином, щоб задача мала розв'язок).

25. Знайти функції $U(\rho, \varphi)$, гармонічні зовні круга радіуса a з центром у початку координат, які справджують крайові умови а) – г) задачі 21 (зовнішня задача Діріхле для круга).

26. Знайти функції $U(\rho, \varphi)$, гармонічні зовні круга радіуса a з центром у початку координат, які справджують крайові умови а) – г) задачі 23 (зовнішня задача Неймана для круга).

27. Знайти функцію $U(\rho, \varphi)$, гармонічну всередині кільця $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, яка на межах кільця набуває сталих значень: $U(a, \varphi) = u_1$, $U(b, \varphi) = u_2$.

28. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta U = A$ всередині кільця $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ за наступних крайових умов:

а) $U(a, \varphi) = u_1$, $U(b, \varphi) = u_2$;

б) $U|_{\rho=a} = u_1$, $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=b} = C$;

в) $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=a} = B$, $\frac{\partial U}{\partial \vec{n}}|_{\rho=b} = C$.

29. До краю кругової пластинки одиничного радіуса підводиться тепловий потік $-40k\sigma \cos 2\varphi \sin 3\varphi$, де k коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, а σ – площа бічної поверхні пластинки. Знайти стаціонарний розподіл температури зовні пластинки.

30. У середині нескінченного кругового циліндра радіуса R проходить рух нестисливої рідини. Вважаючи рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон цього руху, якщо проекція швидкості \vec{V} на зовнішню нормаль циліндра у кожній точці задається формулою:

$$\text{пр}_{\vec{n}} \vec{V} = V_0 \cos 4\varphi \quad (V_0 = \text{const}).$$

Зауваження. Якщо в області G , обмеженій замкненою поверхнею S , проходить стаціонарний потенціальний рух нестисливої однорідної рідини, то для визначення закону цього руху достатньо знайти потенціал $U(x, y, z)$ поля швидкостей \vec{V} , який є розв'язком задачі:

$$\Delta U(x, y, z) = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right|_S = f(x, y, z),$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні S , а $f(x, y, z)$ – задана на S функція, рівна проекції швидкості в точках цієї поверхні на зовнішню нормаль. Якщо потенціал $U(x, y, z)$ знайдений, то поле швидкостей $\vec{V} = -\text{grad}U$.

Якщо область G обмежена циліндричною поверхнею з твірною, паралельною до осі Oz , а вектор швидкості не залежить від z , тоді $U(x, y, z) \equiv U(x, y)$ і є розв'язком задачі:

$$\Delta U(x, y) = 0; \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \right|_S = f(x, y).$$

Тому наведена вище задача зводиться до наступної задачі Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta U(\rho, \varphi) &= 0, \quad 0 \leq \rho \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ U_\rho(R, \varphi) &= V_0 \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

31. Знайти форму прогину мембрани, яка має вигляд кільця $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, при натязі величини $T = \text{const}$, якщо:

а) на внутрішній край мембрани діє сила $-39T \cos 3\varphi$, а на зовнішньому задане відхилення $A \sin \varphi$;

б) на внутрішньому краї мембрани задане відхилення $A \cos 3\varphi$, а на зовнішній діє сила $T \sin \varphi$ ($A = \text{const}$).

32. Знайти електростатичне поле нескінченного провідного циліндра радіуса a , зарядженого до потенціалу $u_0 = \text{const}$ і оточеного діелектричною обкладкою, обмеженою циліндричною поверхнею радіуса b , на якій підтримується нульовий потенціал.

33. У середині круглої пластинки радіуса a діють джерела тепла інтенсивності $-8k \cos 4\varphi$, де $k = \text{const}$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, а її край підтримується при нульовій температурі. Знайти стаціонарний розподіл температури в пластинці.

34. Визначити прогин мембрани, яка має форму кільця $1 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, при натязі величини $T = const$, якщо:
- а) мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили густини $-68T \cos 2\varphi$, на внутрішньому краї відхилення рівне $10 \sin \varphi + 1$, а зовнішній край вільний;
- б) мембрана піддається дії неперервно розподіленої зовнішньої сили густини $-A \sin 2\varphi$, внутрішній край нерухомо закріплений, а на зовнішньому краї діє стала сила $A = const$.
35. Зінтегрувати крайові задачі та дати фізичну інтерпретацію:
- а) $\Delta U(\rho, \varphi) = \rho$, $0 < \rho < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U(a, \varphi) \equiv C = const$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0$, $1 < \rho < 2$, $0 < \varphi < \pi/2$;
 $U(1, \varphi) = 0$, $U(2, \varphi) = \cos 2\varphi + 1$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = U(\rho, \pi/2) = 0$, $1 \leq \rho \leq 2$.
- в) $\Delta U(\rho, \varphi) = -\frac{15}{4} \sin \frac{3\varphi}{2}$, $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < \pi$;
 $U(1, \varphi) = \sin \frac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$;
 $U(\rho, 0) = 0$, $U(\rho, \pi) = \rho^2$, $0 \leq \rho \leq 1$.
- г) $\Delta U(\rho, \varphi) = A\varphi \cos 2\varphi$, $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < \pi/4$;
 $U(1, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$;
 $U(\rho, 0) = U(\rho, \pi/4) = 0$, $0 \leq \rho \leq 1$ ($A = const$).
- д) $\Delta U(\rho, \varphi) = 2$, $a < \rho < b$, $0 < \varphi < \pi/2$;
 $U_\rho(a, \varphi) = a$, $U_\rho(b, \varphi) = 2 \cos 2\varphi + b$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = U_\varphi(\rho, \pi/2) = 0$, $a \leq \rho \leq b$.
- е) $\Delta U(\rho, \varphi) = -5C \cos 3\varphi$, $1 < \rho < 2$, $0 < \varphi < \pi/6$;
 $U(1, \varphi) = C(\cos 3\varphi + 2 \cos 6\varphi)$, $U_\rho(2, \varphi) = 4C \cos 3\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/6$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = 0$, $U_\varphi(\rho, \pi/6) = -3C\rho^2$, $a \leq \rho \leq b$ ($C = const$).
36. Визначити функцію U , гармонічну а) всередині і б) зовні кулі радіуса $r = a$ з центром у початку координат, яка на відповідній сфері набуває значення $u_0 = const$.
37. Визначити стаціонарний розподіл температури у кульовому шарі $a \leq r \leq b$, якщо сфера $r = a$ підтримується при температурі u_1 , а сфера $r = b$ – при температурі u_2 .
38. Знайти розв'язки а) рівняння $\Delta U = 1$; б) рівняння $\Delta U = Ar + B$ всередині сфери $0 \leq r \leq a$, якщо на сфері виконується крайова умова $U|_{r=a} = 0$.
39. Знайти розв'язки а) рівняння $\Delta U = 1$; б) рівняння $\Delta U = A + Br^{-1}$ всередині кульового шару $a \leq r \leq b$, за виконання умов $U|_{r=a} = 0$, $U|_{r=b} = 0$.

§4. Функція Гріна оператора Лапласа

Нехай у тривимірному просторі задана обмежена поверхнею \mathbf{S} область \mathbf{D} . Припустимо, що функція $U(M)$, $M = M(x, y, z)$ гармонічна в \mathbf{D} і належить класу $C^1(\overline{\mathbf{D}})$.

Означення. Функція $G(P, M)$, $M \in \mathbf{D}$ називається функцією Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа, якщо для неї виконуються наступні умови:

1) $G(P, M)$ як функція точки $P(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{D}$ є гармонічною в області \mathbf{D} за винятком точки M , де вона перетворюється в нескінченність;

2) $G(P, M)$ як функція точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ справджує крайову умову

$$G(P, M)|_{P \in \mathbf{S}} = 0;$$

3) в області \mathbf{D} функція $G(P, M)$ допускає подання у вигляді

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_{PM}} + g(P, M), \quad r_{PM} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad (24)$$

де $g(P, M)$ – гармонічна всюди в області \mathbf{D} функція, яка визначається з задачі Діріхле

$$\Delta g(P, M) = 0, \quad P \in \mathbf{D};$$

$$g(P, M)|_{P \in \mathbf{S}} = -\frac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P \in \mathbf{S}, \quad M \in \mathbf{D}.$$

Основні властивості функції Гріна:

1) $G(P, M)$ невід'ємна в області \mathbf{D} ;

2) $G(P, M)$ є симетричною відносно точок P та M , тобто $G(P, M) = G(M, P)$;

3) якщо функція $G(P, M)$ відома, то розв'язок внутрішньої задачі Діріхле

$$\begin{aligned} \Delta U(M) &= 0, \quad M \in \mathbf{D}; \\ U(P)|_{\mathbf{S}} &= f(P), \quad P \in \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (25)$$

якщо він існує, дається формулою

$$U(M) = -\iint_{\mathbf{S}} f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} ds, \quad (26)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні \mathbf{S} у точці P .

Якщо маємо задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{aligned} \Delta U(M) &= F(M), \quad M \in \mathbf{D}; \\ U(P)|_{\mathbf{S}} &= f(P), \quad P \in \mathbf{S}, \end{aligned}$$

причому $U(M) \in C^2(\mathbf{D}) \cap C^1(\overline{\mathbf{D}})$, то

$$U(M) = -\iint_{\mathbf{S}} f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} ds - \iiint_{\mathbf{D}} F(P) G(P, M) dP.$$

Електростатична інтерпретація функції $G(P, M)$ очевидна: це є потенціал у точці M електростатичного поля, створюваного всередині об'єму \mathbf{D} зарядом

величини $e = \frac{1}{4\pi}$, зосередженим у точці P , якщо гранична поверхня S області D є ідеально провідною і підтримується при нульовому потенціалі, тобто заземлена; тут перший доданок у формулі (24) є потенціал заряду в необмеженому просторі, а другий доданок визначає потенціал поля, індукованого зарядами на поверхні S .

Для ряду простих областей (півпростір, сфера тощо) індуковане поле можна знайти за допомогою так званого *методу відображень*, суть якого полягає в тому, що зовні розглядуваної області згідно з певним законом розміщують заряди, які називають зображеннями, або "образами" вихідного заряду відносно заданої границі. У випадку плоскої границі "образи" є дзеркальними відображеннями оригіналу в площині або площинах, якщо область обмежена кількома площинами. У випадку сферичних границь для побудови зображення застосовують перетворення обернених радіусів (інверсія, див. [15], розділ IV, §4).

Зазвичай, окрім потенціалу поля, в задачах електростатики цікавляться поверхневою густиною σ зарядів, індукованих на провідниках, а також ємністю C провідників. Для їх визначення використовують формули:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_S, \quad e' = \iint_S \sigma ds, \quad C = \frac{e'}{V'}$$

де S поверхня провідника, \vec{n} – зовнішня нормаль до цієї поверхні, ε – діелектрична стала середовища, e' – повний заряд, розподілений по поверхні S , а V' – потенціал провідника.

Зауваження. У випадку площини функція Гріна задачі Діріхле має вигляд

$$G(P, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM}} + g(P, M), \quad r_{PM} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2},$$

а її регулярна частина $g(P, M)$ визначається з задачі:

$$\Delta g(P, M) = 0, \quad P \in D;$$

$$g(P, M) \Big|_{P \in S} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{PM}}, \quad P \in S, \quad M \in D,$$

де D – плоска область, а S – замкнена крива, яка обмежує цю область.

ПРИКЛАД 1. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле $\Delta U(x, y, z) = -4\pi\rho(x, y, z)$, $-\infty < x, y < +\infty$, $0 < U(x, y, 0) = 0$, $U(x, y, l) = 0$, $-\infty < x, y < +\infty$.

Розв'язання. Нехай заряд $e = \frac{1}{4\pi}$ розміщений в точці $P = P_0(\xi, \eta, \zeta)$ задаваної області, а

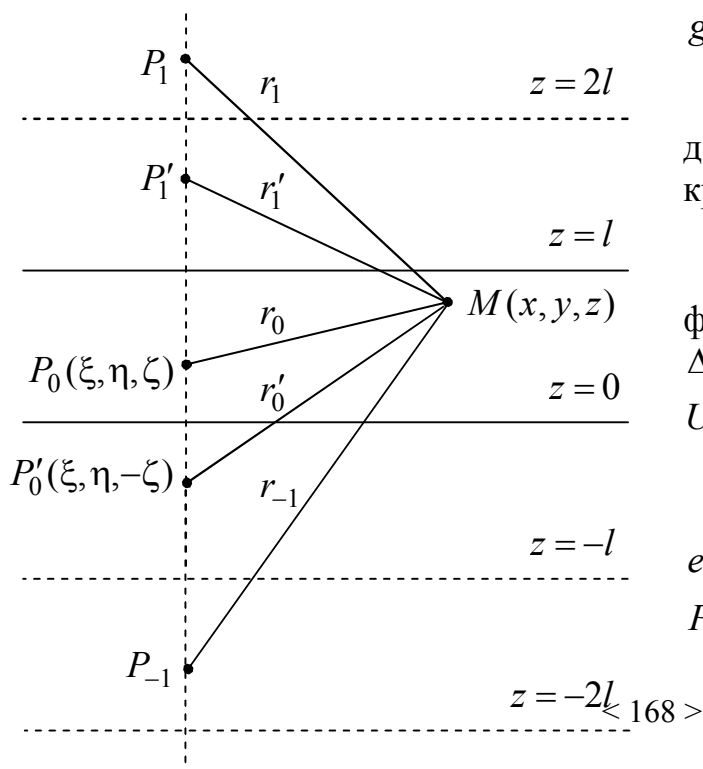


Рис. 33

$M(x, y, z)$ – точка спостереження (рис. 33). Для побудови функції Гріна слід виконувати послідовні відбиття в площинах $z=0$ і $z=l$ і знайти положення зображень – "джерел" і "стоків" (зауважимо, що при кожному відбитті заряд e переходить у заряд $e' = -e$ і навпаки). Виконавши відбиття в площині $z=0$, дістанемо функцію

$$G_0(P, M) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0} \right),$$

яка задовольняє крайову умову $G_0|_{z=0} = 0$, але при цьому $G_0|_{z=l} \neq 0$. Після наступного відбиття в площині $z=l$ одержимо:

$$G_1(P, M) = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right) \right],$$

причому $G_1|_{z=l} = 0$, але $G_1|_{z=0} \neq 0$. Продовжуючи цей процес почергових відбиттів в площинах $z=0$ і $z=l$ і сумуючи дію всіх зображень і реального заряду e в точці $P = P_0(\xi, \eta, \zeta)$, на підставі принципу суперпозиції дістанемо:

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right),$$

де

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2}, \quad r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2}.$$

Можна показати, що одержаний ряд збігається абсолютно й рівномірно в області $0 < z < l$ (див. [3], с. 358-359).

ПРИКЛАД 2. За допомогою функції Гріна знайти розв'язок задачі Діріхле (25), якщо область \mathbf{D} – куля радіуса R з центром у початку координат, а \mathbf{S} – відповідна сфера.

Розв'язання. Побудуємо функцію Гріна.

Нехай заряд $e = \frac{1}{4\pi}$ розміщений у точці кулі $M = M_0$, а P – точка спостереження (рис. 34). Завдання полягає у знаходженні функції, гармонічної у всіх точках кулі \mathbf{D} , за винятком точки $M = M_0$, в околі якої

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_0} + g(P, M),$$

де $g(P, M)$ – потенціал індукованого поля, причому $G(P, M)|_{P \in \mathbf{S}} = 0$.

Для відшукування $g(P, M)$ використаємо перетворення обернених радіусів:

$$OM_0 \cdot OM_1 = R^2. \quad (27)$$

Помістивши в точку M_1 зображення заряду e , маємо

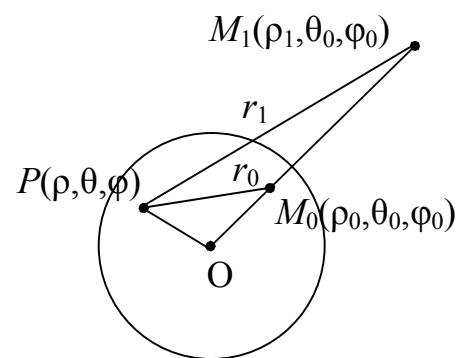


Рис. 34

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_0} + \frac{e_1}{r_1},$$

де e_1 – величина заряду в точці M_1 .

Якщо P є точкою сфери S , то на підставі (27) трикутники OPM_0 і OPM_1 є подібними, а тому (див. рис. 34)

$$\frac{OM_0}{OP} = \frac{OP}{OM_1} = \frac{PM_0}{PM_1} \Rightarrow \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}. \quad (28)$$

З урахуванням рівностей (28) крайова умова $G(P, M)|_{P \in S} = 0$ дає

$$e_1 = -\frac{r_1}{4\pi r_0} = -\frac{R}{4\pi \rho_0}.$$

Отже, функція Гріна для задачі Діріхле (25) в кулі D має вигляд

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0 r_1} \right). \quad (29)$$

Для знаходження розв'язку задачі Діріхле застосуємо формулу (26):

$$U(M) = -\iint_S f(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial \bar{n}} ds = -\frac{1}{4\pi} \iint_S f(P) \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0 r_1} \right) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(P) \left[\frac{R}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{1}{r_0} \right) \right].$$

Із трикутників OPM_0 і OPM_1 знаходимо:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial \bar{n}} = -\frac{1}{r_0^2} \cos(\vec{r}_0, \vec{n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1^2} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial \bar{n}} = -\frac{1}{r_1^2} \cos(\vec{r}_1, \vec{n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1^3},$$

а тоді з урахуванням (27) і (28) дістанемо шуканий розв'язок задачі у вигляді

$$U(M) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3} f(P) ds.$$

❖ Розв'язати задачі:

40. Знайти функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в півсмузі $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$.

41. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле:

а) в крузі $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;

б) всередині півкруга $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < \pi$;

в) всередині чвертини круга $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < \pi/2$;

г) у круговому секторі з розхилом $\alpha = \pi/n$: $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \pi/n$, де $n \in \mathbf{N}$.

42. Знайти потенціал електростатичного поля нескінченної циліндричної трубки кругового перерізу, якщо поле створюється зарядженою ниткою, паралельною осі циліндра, яка міститься:

а) всередині циліндричної трубки;

б) зовні циліндра.

43. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле в кільці $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Розглянути граничні випадки $a \rightarrow 0$ і $b \rightarrow \infty$ і порівняти одержані результати з розв'язками задачі 42.
44. Знайти потенціал поля точкового електричного заряду, поміщеного над ідеально провідною заземленою площиною $z = 0$, і розрахувати густину поверхневих індукованих зарядів. Записати розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півпросторі $z \geq 0$.
45. Знайти потенціал точкового заряду всередині "напівшару" $0 \leq z \leq l$, $x \geq 0$, обмеженого площинами $z = 0$, $z = l$ і $x = 0$, вважаючи, що стінки є ідеально провідними і мають нульовий потенціал.
46. Всередині двогранного кута величини $\alpha = \pi/n$, де $n \in \mathbf{N}$, обмеженого ідеально провідними стінками з нульовим потенціалом, розміщений точковий електричний заряд. Знайти електричне поле, породжуване цим зарядом.
47. Знайти потенціал електростатичного поля, створюваного точковим зарядом всередині нескінченної циліндричної трубки, вважаючи, що границя області є ідеально провідною і має нульовий потенціал, а перпендикулярний переріз трубки має форму прямокутника зі сторонами a і b .
48. Вивести формулу для потенціалу точкового заряду всередині прямокутного паралелепіпеда з ідеально провідними стінками, які підтримуються при нульовому потенціалі.
49. Знайти потенціал електростатичного поля, створюваного точковим зарядом, який знаходиться зовні заземленої сфери радіуса R з центром у початку координат. Розрахувати густину поверхневих зарядів на сфері.
50. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа:
а) всередині заземленої півкулі радіуса R ;
б) всередині четвертини кулі радіуса R .
51. Знайти потенціал поля, створюваного точковим зарядом e всередині сферичного шару, обмеженого двома концентричними провідними заземленими сферами радіусів a і b . Розглянути граничні випадки $a \rightarrow 0$ і $b \rightarrow \infty$.
52. Знайти поле точкового заряду e в необмеженому просторі за наявності провідної сфери, по якій розподілений заряд величини e_1 . Розрахувати густину поверхневих зарядів, індукованих на сфері.
53. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа:
а) в півплощині $y > 0$, якщо $U|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ v = const, & x \geq 0; \end{cases}$
б) всередині двогранного кута величини $\alpha = \pi/n$, де $n \in \mathbf{N}$, якщо на його сторонах задані крайові умови: $U|_{\varphi=\alpha} = 0$, $U|_{\varphi=0} = v = const$;
в) всередині і зовні круга $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
г) зовні сфери радіуса R з центром у початку координат.
54. Функція Гріна $G(P, M)$ задачі Неймана

$$\Delta U(M) = F(M), \quad M \in \mathbf{D};$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{n}} \Big|_{\mathbf{S}} = f(P), \quad P \in \mathbf{S}, \quad (30)$$

де \vec{n} вектор зовнішньої нормалі, визначається вимогами (див. [10], с. 33):

1) $G(P, M)$ як функція точки $P(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{D}$ є гармонічною в області \mathbf{D} за винятком точки M , в околі якої подається у вигляді (24);

2) $\left. \frac{\partial G(P, M)}{\partial \vec{n}} \right|_{P \in \mathbf{S}} = S_0^{-1}$, де S_0 – площа поверхні \mathbf{S} ;

3) $\int_{\mathbf{S}} G(P, M) ds = 0$.

Якщо задача Неймана (30) має розв'язок, тобто виконується умова

$\int_{\mathbf{S}} f(P) ds = \int_{\mathbf{D}} F(P) dP$, то через функцію Гріна він подається як

$$U(M) = - \iint_{\mathbf{S}} f(P) G(P, M) ds - \iiint_{\mathbf{D}} F(P) G(P, M) dP + const.$$

Побудувати функцію Гріна задачі Неймана, якщо область \mathbf{D} – куля радіуса R з центром у початку координат, а \mathbf{S} – відповідна сфера. Записати розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в кулі.

§5. Теорія потенціалу

Нехай у деякій точці $A(a, b, c)$ тривимірного простору розміщений електричний заряд q . На підставі закону Кулона можна показати (див. [11], с. 229-231), що точковий заряд величини q в довільній точці $M(x, y, z)$ простору створює потенціал

$$U(M) = \frac{q}{r_{AM}} = \frac{q}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Легко бачити, що $U(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$ (чим далі від джерела, тим слабша дія заряду).

Оскільки при наявності кількох точкових зарядів створювані ними потенціали сумуються, то загальний потенціал, створений рівномірно розподіленим зарядом, знаходиться як границя суми, тобто у вигляді інтеграла.

Розглянемо основні види потенціалів та їх властивості.

1. Об'ємний потенціал. Потенціал, створений зарядом, розподіленим по об'єму \mathbf{D} тривимірного простору з об'ємною густиною $f(M)$, рівний

$$V(M) = \iiint_{\mathbf{D}} \frac{f(P)}{r_{PM}} dP.$$

Тут $P(\xi, \eta, \zeta)$ – довільна (біжуча) точка об'єму \mathbf{D} , $M(x, y, z)$ – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

Потенціал об'єму є гармонічною функцією зовні області \mathbf{D} , тобто при $M \notin \mathbf{D}$ справджує рівняння Лапласа $\Delta V(M) = 0$.

Теорема 1. Якщо об'ємна густина $f(M)$ є обмеженою й інтегрованою в області \mathbf{D} функцією, то потенціал об'єму $V(M)$ і його частинні похідні першого порядку є неперервними у всьому просторі, причому ці похідні можуть бути одержані шляхом диференціювання під знаком інтеграла.

Теорема 2. Якщо об'ємна густина $f(M) \in C^1(\mathbf{D}) \cap C(\overline{\mathbf{D}})$, то потенціал об'єму $V(M)$ має неперервні похідні другого порядку в області \mathbf{D} і при $M \in \mathbf{D}$ справджує рівняння Пуассона $\Delta V(M) = -4\pi f(M)$.

Наслідок. Якщо об'ємна густина $f(M)$ справджує умови теореми 2, то рівняння $\Delta V(M) = -f(M)$ має частинний розв'язок

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbf{D}} \frac{f(P)}{r_{PM}} dP.$$

Зауваження. У випадку площини, якщо заряд розподілений у плоскій області \mathbf{D} з густиною $f(M)$, одержимо **логарифмічний потенціал** площі:

$$V(M) = \iint_{\mathbf{D}} f(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} ds,$$

де $P(\xi, \eta)$ – довільна (біжуча) точка області \mathbf{D} , $M(x, y)$ – деяка (фіксована) точка площини. Логарифмічний потенціал при $M \in \mathbf{D}$ справджує рівняння Пуассона $\Delta V(M) = -2\pi f(M)$, а рівняння $\Delta V(M) = -f(M)$ у випадку площини має частинний розв'язок

$$V(M) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbf{D}} f(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} ds.$$

2. Потенціал простого шару. Якщо заряд розподілений по поверхні \mathbf{S} із поверхневою густиною $\psi(M)$, то потенціал, створюваний цим зарядом, рівний

$$U(M) = \iint_{\mathbf{S}} \frac{\psi(P)}{r_{PM}} ds,$$

де $P(\xi, \eta, \zeta)$ – довільна (біжуча) точка на поверхні \mathbf{S} , $M(x, y, z)$ – деяка (фіксована) точка тривимірного простору.

У всіх точках $M(x, y, z)$ простору, які не належать поверхні \mathbf{S} , потенціал простого шару має похідні всіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому $U(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Потенціал простого шару з неперервною густиною є неперервною функцією у всьому просторі.

Похідна по напрямку \vec{n}_0 зовнішньої нормалі до поверхні \mathbf{S} у фіксованій точці $P_0 \in \mathbf{S}$ дається формулою

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} = \iint_{\mathbf{S}} \psi(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\frac{1}{r_{PM}} \right) ds = \iint_{\mathbf{S}} \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n}_0)}{r_{PM}} ds. \quad (31)$$

Позначимо $\left(\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i$ і $\left(\frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e$ границі похідної по напрямку \vec{n}_0 , коли $M \rightarrow P_0$ відповідно зсередини та ззовні поверхні S . Тоді мають силу формули:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \iint_S \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} ds + 2\pi\psi(P_0), \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \iint_S \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} ds - 2\pi\psi(P_0). \end{aligned} \quad (32)$$

Отже, у точках поверхні нормальна похідна потенціалу простого шару має стрибок:

$$\left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e = 4\pi\psi(P_0). \quad (33)$$

Зауваження. У випадку площини, якщо заряд розподілений по деякій замкненій кривій ℓ із лінійною густиною $\psi(M)$, одержимо **логарифмічний потенціал простого шару**:

$$U(M) = \int_{\ell} \psi(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} d\ell,$$

де $P(\xi, \eta)$ – довільна (біжуча) точка на кривій ℓ , $M(x, y)$ – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (31)-(33) для логарифмічного потенціалу простого шару матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(M)}{\partial \vec{n}_0} &= \int_{\ell} \psi(P) \frac{\partial}{\partial \vec{n}_0} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} \right) d\ell = \int_{\ell} \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n}_0)}{r_{PM}} d\ell, \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i &= \int_{\ell} \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} d\ell + \pi\psi(P_0), \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= \int_{\ell} \psi(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_0)}{r_{PP_0}} d\ell - \pi\psi(P_0), \\ \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_i - \left(\frac{\partial U(P_0)}{\partial \vec{n}_0}\right)_e &= 2\pi\psi(P_0), \end{aligned}$$

де P_0 – деяка фіксована точка кривої ℓ .

За допомогою потенціалів простого шару будуються розв'язки задач Неймана (друга крайова задача) для рівняння Лапласа.

3. Потенціал подвійного шару. Нехай S – орієнтована поверхня (тобто на ній вказані внутрішня та зовнішня сторони), по якій розподілений диполь із густиною моментів $\mu(M)$, причому в кожній точці напрям осі диполя співпадає з напрямом внутрішньої нормалі \vec{n}_i до поверхні S у точці P .

Потенціал, створюваний диполем, рівний

$$W(M) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{PM}, \vec{n}_i)}{r_{PM}^2} ds. \quad (34)$$

Формулу потенціалу подвійного шару (34) можна записати в іншому вигляді:

$$W(M) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}^2} ds.$$

Тут $M(x, y, z)$ – фіксована точка простору; \vec{n} – напрям зовнішньої нормалі до поверхні \mathbf{S} у точці P .

При $M \notin \mathbf{S}$ потенціал подвійного шару має похідні усіх порядків і справджує рівняння Лапласа, причому $W(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Потенціал подвійного шару (34) має границі при прямуванні точки M до фіксованої точки $P_0 \in \mathbf{S}$ ззовні або зсередини. Якщо границю значень $W(M)$ ззовні позначити через $W_e(P_0)$, а границю зсередини – через $W_i(P_0)$, то мають силу формули:

$$W_i(P_0) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds + 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) + 2\pi\mu(P_0), \quad (35)$$

$$W_e(P_0) = \iint_{\mathbf{S}} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds - 2\pi\mu(P_0) = W(P_0) - 2\pi\mu(P_0), \quad (36)$$

тобто величина стрибка функції $W(M)$ у довільній точці $P_0 \in \mathbf{S}$ буде

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = 4\pi\mu(P_0). \quad (37)$$

Інтеграл $W(P_0)$ називається прямим значенням потенціалу подвійного шару в точці $P_0 \in \mathbf{S}$.

Зауваження. У випадку площини, якщо диполь розподілений по деякій замкнутій орієнтованій кривій ℓ з густиною моментів $\mu(M)$, одержимо **логарифмічний потенціал подвійного шару**:

$$W(M) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}} d\ell,$$

де $P(\xi, \eta)$ – довільна (біжуча) точка на кривій ℓ , $M(x, y)$ – деяка (фіксована) точка площини.

Формули (35)-(37) для логарифмічного потенціалу подвійного шару матимуть вигляд:

$$W_i(P_0) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}} d\ell + \pi\mu(P_0),$$

$$W_e(P_0) = \int_{\ell} \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}} d\ell - \pi\mu(P_0),$$

$$W_i(P_0) - W_e(P_0) = 2\pi\mu(P_0).$$

За допомогою потенціалів подвійного шару будуються розв'язки задач Діріхле (перша крайова задача) для рівняння Лапласа.

ПРИКЛАД 1. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка $0 \leq x \leq 1$ зі сталою густиною заряду $\psi(M) = q_0$.

Розв'язання. Згідно з означенням логарифмічний потенціал простого шару дається формулою

$$U(M) = \int_{\ell} \psi(P) \ln \frac{1}{r_{PM}} d\ell.$$

Тут: ℓ – відрізок $0 \leq x \leq 1$; $M(x, y)$ – фіксована точка площини; $P(\xi, 0)$ – точка відрізка ℓ ; $r_{PM} = |MP| = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}$. Отже,

$$\begin{aligned} U(x, y) &= q_0 \int_0^1 \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} d\xi = -0,5q_0 \int_0^1 \ln [(\xi - x)^2 + y^2] d\xi = \\ &= -0,5q_0 \ln [(1 - x)^2 + y^2] + q_0 \int_0^1 \frac{[(\xi - x)^2 + y^2] + x(\xi - x) - y^2}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \\ &= q_0 \left\{ 1 + (x - 1) \ln \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} - y \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 2. Користуючись поверхневими потенціалами, знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа у півпросторі:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0, \quad z > 0;$$

$$U(x, y, 0) = f(x, y).$$

Розв'язання. Розв'язок першої крайової задачі для рівняння Лапласа шукається у вигляді потенціалу подвійного шару:

$$U(x, y, z) \equiv W(M) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n})}{r_{PM}^2} ds.$$

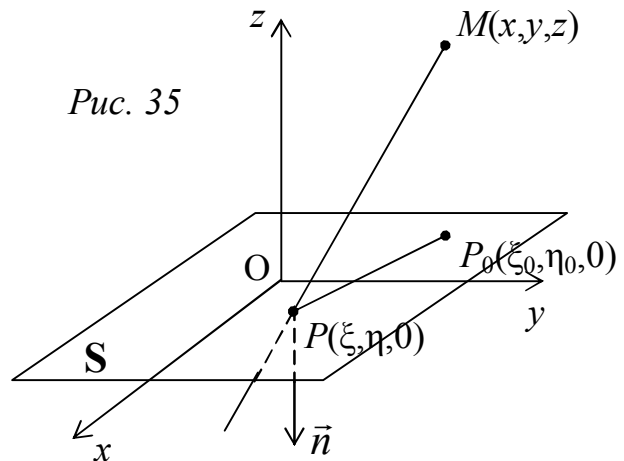


Рис. 35

Для даного прикладу (рис. 24): S – площина xOy ; $M(x, y, z)$ – фіксована точка простору; $P(\xi, \eta, 0)$ – точка площини xOy ;

$$r_{PM} = |PM| = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}; \quad \cos(\overrightarrow{MP}, \vec{n}) = \frac{z}{r_{PM}}.$$

Зауважимо, що зовнішня нормаль \vec{n} до площини xOy в точці P напрямлена протилежно до осі Oz , оскільки $z > 0$ – "внутрішня" сторона площини. Отже, маємо

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi, \eta) \frac{z}{r_{PM}^3} d\xi d\eta. \quad (38)$$

Невідому густину моментів $\mu(\xi, \eta)$ визначаємо із властивості стрибка потенціалу подвійного шару (35):

$$W_i(P_0) = \iint_S \mu(P) \frac{\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n})}{r_{PP_0}^2} ds + 2\pi\mu(P_0), \quad P_0 \in S.$$

Звідси, враховуючи, що $W_i(P_0) = f(P_0)$, а $\cos(\overrightarrow{P_0P}, \vec{n}) = 0$ (нормаль \vec{n} перпендикулярна до площини xOy), одержимо $f(P_0) = 2\pi\mu(P_0)$, тобто для довільної точки $P \in S$ $\mu(P) = \frac{f(P)}{2\pi}$. А тоді згідно з формулою (38)

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta.$$

❖ Розв'язати задачі:

55. Знайти об'ємний потенціал $V(M)$ кулі радіуса R з центром у початку координат при сталій густині заряду $f(M) \equiv f_0$:
 - а) поставивши крайову задачу для $V(M)$ і розв'язавши її;
 - б) шляхом прямого обчислення об'ємного інтегралу.
56. Знайти об'ємний потенціал:
 - а) мас, розподілених зі сталою густиною $f(M) \equiv f_0$ у сферичному шарі $a \leq r \leq b$;
 - б) мас, розподілених усередині кулі радіуса a зі сталою густиною f_1 і у сферичному шарі $a < b \leq r \leq c$ зі сталою густиною f_2 ;
 - в) мас, розподілених усередині кулі радіуса c зі змінною густиною $f(r)$.
57. Розрахувати потенціал простого шару, розподілений зі сталою густиною $\psi(M) \equiv \psi_0$ на сфері радіуса R з центром у початку координат.
58. Знайти електростатичне поле об'ємних зарядів, рівномірно розподілених усередині кулі, розміщеної над ідеально провідною площиною $z = 0$.
59. Знайти логарифмічний потенціал круга радіуса R з центром у початку координат зі сталою густиною заряду $f(M) \equiv f_0$.
60. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка $-a \leq x \leq a$ зі сталою густиною заряду ψ_0 .
61. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0 \leq x \leq a$ зі сталою густиною моментів μ_0 .
62. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати а) внутрішню і б) зовнішню задачі Діріхле для круга радіуса R з центром у початку координат за крайової умови $U(R, \varphi) = f(\varphi)$.
63. Користуючись потенціалом простого шару, знайти розв'язок задачі Неймана для круга радіуса R з центром у початку координат:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$U_\rho(R, \varphi) \equiv f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

64. Розв'язати другу крайову задачу для рівняння Лапласа у півпросторі $z \geq 0$

$$\Delta U(x, y, z) = 0, \quad z > 0,$$

$$U_z(x, y, 0) = f(x, y),$$

користуючись потенціалом простого шару.

65. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad y > 0,$$

$$U(x, 0) = f(x).$$

Розглянути випадок $f(x) \equiv C = \text{const}$.

66. Об'ємний потенціал мас, розподілених в області \mathbf{D} тривимірного простору, рівний

$$V(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 1.$$

Знайти а) густину мас $f(x, y, z)$; б) масу M , що заповнює об'єм кулі радіуса R з центром у початку координат, яка лежить в області \mathbf{D} .

67. Знайти частинний розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta U = F\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^n a_k = A \neq 0.$$

68. Потенціал об'ємних мас, розподілених у плоскій області \mathbf{D} , рівний

$$V(x, y) = x^2 + y^2.$$

Знайти масу M , що заповнює квадрат $-1 \leq x, y \leq 1$, який лежить всередині області \mathbf{D} .

69. Потенціал $V(x, y)$ мас, розподілених у крузі одиничного радіуса з центром у початку координат, всередині цього круга подається формулою

$$V(x, y) = \frac{1}{4} \pi x (3 - x^2 - y^2).$$

Знайти а) густину мас $f(x, y)$; б) значення потенціалу $V(x, y)$ зовні заданого круга.

70. Потенціал $V(x, y)$ мас, розподілених у крузі одиничного радіуса з центром у початку координат, всередині цього круга подається формулою

$$V(x, y) = \frac{1}{8} \pi (1 - r^4), \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Знайти масу M , яка заповнює кругове кільце $\frac{1}{4} \leq r^2 \leq \frac{1}{2}$.

71. Для гармонічних у півплощині $y > 0$ функцій $U(x, y)$ знайти розв'язок задачі Неймана з крайовою умовою

$$U_y(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

72. Розрахувати потенціал простого шару $U(x, y)$ мас, розподілених по колу $x^2 + y^2 = R^2$ з густиною $\psi(x, y) \equiv 1$.

73. Розрахувати потенціал подвійного шару $W(x, y)$ мас, розподілених по колу $x^2 + y^2 = 1$ з густиною а) $\mu(x, y) \equiv 1$; б) $\mu(x, y) = x$.

74. Знайти гармонічну зовні круга $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ функцію $U(\rho, \varphi)$, яка справджує крайову умову:

$$U(1, \varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

75. Знайти розв'язок задачі Діріхле для гармонічних функцій зовні кулі одиничного радіуса з центром у початку координат за крайової умови:

а) $U(x, y, z) = x^2 - y^2 - 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

б) $U(x, y, z) = z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

76. Функція

$$U(x, y) = -\frac{y}{2\rho^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$

є зовнішнім потенціалом простого шару мас, розподілених по колу $\rho^2 = 1$.

Знайти значення цього потенціалу в крузі $\rho^2 \leq 1$.

77. Потенціал простого шару мас, розподілених по колу $x^2 + y^2 = 1$, зовні круга $x^2 + y^2 \leq 1$ подається формулою

$$U(x, y) = \frac{x}{\rho^2} \left(1 + \frac{2y}{\rho^2} \right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

Знайти густину мас $\psi(x, y)$.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ V

Варіант 1.

1. Знайти форму рівноваги прямокутної мембрани зі сторонами $2a$ та $2c$ (початок координат вибраний у центрі мембрани), яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження $P = const$, якщо краї мембрани нерухомо закріплені. Обчислити прогин центру мембрани, рахуючи відношення $c:a=2$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(2, \varphi) = A \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad U_\rho(4, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (A = const).$$

б) $\Delta U(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$

$$U_x(0, y) = e^y - \cos \pi y, \quad U_x(2, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U_y(x, 0) = x, \quad U_y(x, 1) = ex, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 у сферичному шарі $a \leq r \leq b$, де $0 < a < b$.

Варіант 2.

1. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині нескінченного кругового циліндра радіуса R , якщо на його поверхні підтримується температура $U_0 \sin \varphi$ ($U_0 = \text{const}$). Розв'язок знайти у формі ряду та у формі інтегралу Пуассона.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - а) $\Delta U(x, y) = 2x$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;
 $U(0, y) = 0$, $U(a, y) = 0$, $0 \leq y \leq b$;
 $U(x, 0) = 0$, $U_y(x, b) = 0$, $0 \leq x \leq a$.
 - б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 9$, $1 < \rho < 3$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(1, \varphi) = 2 \cos 2\varphi$, $U(3, \varphi) = \cos 4\varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0 \leq x \leq l$ з густиною моментів $\mu(M) = Ax + B$, де A, B – задані сталі.

Варіант 3.

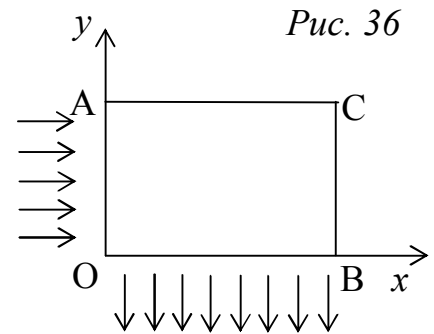
1. Дано прямокутну пластинку $OACB$ (рис. 36) зі сторонами $OA = a$, $OB = b$. Через край OA підводиться потік тепла $q = \text{const} > 0$ на одиницю площі перерізу, через край OB тепловий потік такої ж величини на одиницю площі відводиться (коефіцієнт внутрішньої теплопровідності $k = 1$), а на краях AC та BC температура змінюється за законом відповідно $q(b - x)$ та $q(y - a)$. Визначити стаціонарну температуру внутрішніх точок мембрани.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - а) $\Delta U(\rho, \varphi) = \sin 8\varphi$, $0 < \rho < 2$, $0 < \varphi < \pi/4$;
 $U(2, \varphi) = A \sin 4\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ ($A = \text{const}$);
 $U(\rho, 0) = 0$, $U(\rho, \pi/4) = 0$, $0 \leq \rho \leq 2$.
 - б) $\Delta U(x, y) = 5 \cos 6\pi y - \cos \pi x$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$;
 $U_x(0, y) = 2$, $U_x(1, y) = 2$, $0 \leq y \leq 2$;
 $U_y(x, 0) = 0$, $U_y(x, 2) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати зовнішню задачу Діріхле:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 1 < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(1, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Варіант 4.

1. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму півкруга радіуса a і знаходиться під дією навантаження, розподіленого згідно закону $q\varphi(\varphi - \pi)$, де $q = \text{const}$. Краї мембрани нерухомо закріплені.



2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U_x(0,y)=0, \quad U_x(a,y)=0, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U(x,0)=A, \quad U(x,b)=A, \quad 0 \leq x \leq a \quad (A = \text{const}).$$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U_\rho(R,\varphi) - hU(R,\varphi) = \sin 3\varphi + \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (h = \text{const} > 0).$$

3. За допомогою потенціалу простого шару розв'язати задачу Неймана для півплощини:

$$\Delta U(x,y)=0, \quad y > 0;$$

$$U_y(x,0)=\Phi(x).$$

Варіант 5.

1. Дано прямокутну пластинку ОАСВ (див. рис. 36) зі сторонами $OA=a, OB=b$. Сторони АС та ВС покриті тепловою ізоляцією, а на двох інших підтримується нульова температура. Знайти стаціонарний розподіл температури при умові, що в пластинці виділяється тепло зі сталою інтенсивністю $Q = \text{const}$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho,\varphi)=0, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < \pi;$

$$U(a,\varphi)=5 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi;$$

$$U(\rho,0)=0, \quad U(\rho,\pi)=0, \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

б) $\Delta U(x,y)=20x^3, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U_x(0,y)=4 \cos \frac{\pi}{b} y, \quad U_x(a,y)=5a^4, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U_y(x,0)=0, \quad U_y(x,b)=\cos \frac{\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a.$$

3. Знайти логарифмічний потенціал простого шару кола радіуса a зі сталою густиною заряду $\psi_0 = \text{const}$.

Варіант 6.

1. Визначити стаціонарний розподіл температури в мембрані, яка має форму криволінійного прямокутника, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл $\rho = a$ та $\rho = b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi/2$. На краї $\rho = b$ температура змінюється за законом $T_0 \cos^2(2\varphi + \pi/2)$, де $T_0 = \text{const}$, а інші три краї підтримуються при нульовій температурі.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x,y)=Ay, \quad 0 < x < 4, \quad 0 < y < 2;$

$$U(0,y)=0, \quad U_x(4,y)=0, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$U(x,0)=0, \quad U_y(x,2)=0, \quad 0 \leq x \leq 4 \quad (A = \text{const}).$$

б) $\Delta U(\rho,\varphi)=0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(a,\varphi)=T + B \cos \varphi, \quad U_\rho(b,\varphi) + hU(b,\varphi)=0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (h > 0, T, B - \text{const}).$$

3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad x > 0;$$

$$U(0, y) = y.$$

Варіант 7.

1. Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в прямокутник зі сторонами $x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = m$; відхилення точок контура від площини xOy задається рівностями: $U(0, y) = U(l, y) = U(x, 0) = 0$, $U(x, m) = A \sin \frac{\pi}{l} x$, де $A = const$. Визначити форму поверхні, по якій розміститься плівка.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = -4$, $0 < \rho < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;

$$U(a, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

б) $\Delta U(x, y) = 12xy$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$;

$$U_x(0, y) = y^3 + 5 \cos 6\pi y, \quad U_x(1, y) = 3y + y^3, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U_y(x, 0) = x^3, \quad U_y(x, 1) = 3x + x^3 + \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа зовні кулі одиничного радіуса з центром у початку координат по крайовій умові:

$$U(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(скористатися потенціалом подвійного шару).

Варіант 8.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині нескінченного кругового циліндра радіуса R , якщо на поверхні циліндра підтримується стала температура:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 0, & \alpha < \varphi < 2\pi; \\ 2\pi U_0 \alpha^{-1}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \end{cases}$$

де U_0 , α – задані сталі. Розглянути випадок, коли α досить мале.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = \sin x \cdot \sin y$, $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$;

$$U(0, y) = 0, \quad U(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi;$$

$$U(x, 0) = \sin x, \quad U(x, \pi) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0$, $0 < \rho < R$, $0 < \varphi < \alpha < \pi$;

$$U_\rho(R, \varphi) + \gamma U(R, \varphi) = Q \sin^2 \frac{\pi}{\alpha} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha;$$

$$U(\rho, 0) = 0, \quad U_\varphi(\rho, \alpha) + h U(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (\gamma, Q, h = const > 0).$$

3. Знайти логарифмічний потенціал простого шару відрізка $-a \leq x \leq a$ з густиною заряду $\psi(M) = Ax + B$, де A, B – задані сталі.

Варіант 9.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури всередині прямокутної пластинки, два протилежні краї якої ($x = \pm a$) випромінюють тепло по закону Ньютона в навколишнє середовище нульової температури (коефіцієнт теплообміну α рівний коефіцієнту внутрішньої теплопровідності), якщо край $y = 0$ підтримується при нульовій температурі, а на краї $y = b$ температура змінюється згідно закону $T_0(x^2 - 2a - a^2)$, де $T_0 = \text{const}$.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 12\rho^2$, $a < \rho < b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U(a, \varphi) = 0$, $U_\rho(b, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
 - б) $\Delta U(x, y) = ye^x$, $0 < x < \ln 2$, $0 < y < 1$;
 $U_x(0, y) = y$, $U_x(\ln 2, y) = 2y - \sin^2 \frac{3\pi}{2} y$, $0 \leq y \leq 1$;
 $U(x, 0) = 0$, $U_y(x, 1) = e^x$, $0 \leq x \leq \ln 2$.
3. Знайти потенціал подвійного шару мас, розподілених по колу одиничного радіуса з центром у початку координат із густиною моментів $\mu(x, y) = x$.

Варіант 10.

1. Тонка плівка натягнута на дротяний каркас, який проектується на площину xOy в круговий сектор $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$). На плівку діє навантаження, розподілене згідно закону $q\varphi(\varphi - \alpha)^2$, де $q = \text{const}$. Краї $\rho = R$ та $\varphi = 0$ нерухомо закріплені, а край $\varphi = \alpha$ вільний. Визначити форму поверхні, по якій розміститься плівка.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - а) $\Delta U(x, y) = 0$, $0 < x < \infty$, $0 < y < b$;
 $U(0, y) = A(y^2 - 2b - b^2)$, $U(\infty, y) = 0$, $0 \leq y \leq b$;
 $U_y(x, 0) = 0$, $U_y(x, b) + U(x, b) = 0$, $0 \leq x < \infty$ ($A = \text{const}$).
 - б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 2 \cos \varphi - 8 \sin \varphi$, $1 < \rho < 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(1, \varphi) = 4$, $U_\rho(2, \varphi) + 4U(2, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Користуючись поверхневими потенціалами, розв'язати задачу Діріхле для півпростору:

$$\Delta U(x, y, z) = 0, \quad x > 0;$$

$$U(0, y, z) = yz.$$

Варіант 11.

1. Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a та b , якщо три сторони $x = a$, $y = 0$, $y = b$ вільні, а на четвертій задане відхилення $U(0, y) = y^2(y - b)^2$.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta U(x, y) &= 8\pi^2 \sin \pi y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < 1; \\ U_x(0, y) &= 0, \quad U_x(a, y) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ U_y(x, 0) &= 0, \quad U_y(x, 1) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{a} x, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Вказівка. Визначити значення сталої a , при якому дана задача Неймана буде коректно поставленою.

$$\begin{aligned} \text{б) } \Delta U(\rho, \varphi) &= 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ U(a, \varphi) &= 0, \quad U_\rho(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

3. Побудувати функцію Гріна для задачі Діріхле в круговому секторі $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Варіант 12.

2. Напівкругла мембрана радіуса a нерухомо закріплена на півколі й вільна на прямолінійному краї. Знайти форму прогину мембрани під дією рівномірно розподіленого навантаження $p = \text{const}$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta U(x, y) &= 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < l; \\ U(0, y) &= \cos \frac{\pi}{7} y, \quad U(\infty, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq l; \\ U_y(x, 0) &= 0, \quad U_y(x, l) = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \Delta U(\rho, \varphi) &= 9 \cos 3\varphi, \quad 1 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ U_\rho(1, \varphi) - h_1 U(1, \varphi) &= 1, \quad U_\rho(4, \varphi) + h_2 U(4, \varphi) = 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (h_1, h_2 = \text{const} > 0). \end{aligned}$$

3. Побудувати функцію Гріна для задачі Діріхле в шарі $0 \leq z \leq l$, $l = \text{const} > 0$ (частина простору, обмежена площинами $z = 0$ і $z = l$).

Варіант 13.

1. Усередині нескінченного кругового циліндра радіуса l проходить рух нестисливої рідини. Вважаючи цей рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості \vec{v} на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці задається формулою:

$$\text{пр}_{\vec{n}} \vec{v} = v_0 \sin 2\varphi, \quad v_0 = \text{const}.$$

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta U(x, y) &= -2, \quad 0 < x < a, \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}; \\ U(0, y) &= 0, \quad U(a, y) = 0, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}; \\ U(x, -\frac{b}{2}) &= 0, \quad U(x, \frac{b}{2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \Delta U(\rho, \varphi) &= -12, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ U_\rho(1, \varphi) - U(1, \varphi) &= 2 \cos^2 \varphi, \quad U_\rho(2, \varphi) + 2U(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле для півплощини:

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad x > 0;$$

$$U(0, y) = Q = \text{const.}$$

Варіант 14.

1. У середині нескінченного кругового циліндра радіуса l проходить рух нестисливої рідини. Вважаючи цей рух сталим, потенціальним і плоскопаралельним, знайти закон руху, якщо проекція швидкості \vec{v} на зовнішню нормаль циліндра в кожній точці задається формулою:

$$\text{пр}_{\vec{n}} \vec{v} = \begin{cases} -v_0, & 0 < \varphi \leq \pi, \\ v_0, & -\pi \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (v_0 = \text{const}).$$

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 6y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U_\rho(a, \varphi) - U(a, \varphi) = 1 + 2\cos \varphi, \quad U_\rho(b, \varphi) + U(b, \varphi) = 3\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

3. За допомогою потенціалу простого шару розв'язати задачу Неймана для півплощини:

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad x > 0;$$

$$U_x(0, y) = Q = \text{const.}$$

Варіант 15.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$, яка підігрівається джерелом тепла, яке виділяє на одиницю площі кількість теплоти $Q = \text{const}$, якщо через сторони пластинки тепловіддача в навколишнє середовище нульової температури проходить згідно з законом Ньютона.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U_\rho(a, \varphi) = A \cos \varphi, \quad U(b, \varphi) = B \sin 2\varphi + Q, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (A, B, Q = \text{const}).$$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = -5\rho \sin 2\varphi, \quad 0 < \rho < 2, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{4};$

$$U(2, \varphi) = 4 + 4\cos \varphi - 8\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};$$

$$U_\varphi(\rho, 0) = -2\rho^3, \quad U_\varphi\left(\rho, \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R.$$

3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 в кубі зі стороною a .

Варіант 16.

1. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля всередині прямокутника ОАСВ (див. рис. 36) зі сторонами ОА= a , ОВ= b , якщо всі сторони прямокут-

ника заземлені, а густина електричних зарядів, розподілених по прямокутнику, рівна $4x - y$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(R, \varphi) = T_0 \sin 10\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (T_0 = \text{const}).$$

б) $\Delta U(x, y) = 9 \cos \pi x \cos 3\pi y, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < y < 1;$

$$U_x(0, y) = 1, \quad U_x\left(\frac{1}{2}, y\right) = 1 + \cos 4\pi y, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

3. Знайти розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа зовні одиничної сфери з центром у початку координат по крайовій умові

$$U(x, y, z) = z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(використати потенціал подвійного шару).

Варіант 17.

1. Знайти закон стаціонарного розподілу температури всередині однорідного нескінченного кругового циліндра радіуса $R = 4$, якщо на його поверхні підтримується температура

$$U(4, \varphi) = \begin{cases} 4 \sin^2 \varphi, & 0 \leq \varphi < \pi, \\ 0, & \pi \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Розв'язок знайти у формі ряду та у формі інтегралу Пуассона.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 8, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$

$$U(0, y) = 0, \quad U_x(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a.$$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 1, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(2, \varphi) = 1, \quad U_\rho(4, \varphi) = 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару мас, розподілених зі сталою густиною по сторонах прямокутника ОАСВ (ОА=а, ОВ=б; див. рис. 36).

Варіант 18.

1. Дано прямокутну пластинку ОАСВ (ОА=а, ОВ=б). На стороні АС ($x = a$) підтримується температура Ty , на стороні ВС ($y = b$) – температура $\frac{b}{a}Tx$ ($T = \text{const}$), а на двох інших сторонах – нульова температура. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок пластинки.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U_\rho(R, \varphi) = 0,5 \sin \varphi \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

б) $\Delta U(x, y) = 12xy^2, \quad 0 < x < 12, \quad 0 < y < 1;$

$$U(0, y) = 0, \quad U(12, y) = 12y^4 + 2y^3 - 3y^2, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U_y(x, 0) = 8 \sin 24\pi x, \quad U_y(x, 1) = 4x, \quad 0 \leq x \leq 12.$$

3. Знайти розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в крузі радіуса R , користуючись потенціалом простого шару.

Варіант 19.

1. Знайти положення рівноваги мембрани, яка має форму кругового сектора $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, якщо вона знаходиться під навантаженням, розподіленим згідно закону $Q\varphi^2\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, де $Q = const$. Краї $\rho = 1$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нерухомо закріплені, край $\varphi = 0$ вільний.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
- а) $\Delta U(x, y) = 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;
 $U(0, y) = q_1(y^2 - b^2)$, $U_x(a, y) = 0$, $0 \leq y \leq b$;
 $U_y(x, 0) = q_2 \sin \frac{5\pi}{2b}x$, $U_y(x, b) = 0$, $0 \leq x \leq a$ ($q_1, q_2 = const$).
- б) $\Delta U(\rho, \varphi) = -6 \sin \varphi$, $a < \rho < b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(a, \varphi) = 4a \cos 4\varphi$, $U_\rho(b, \varphi) = 2b \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару відрізка $0 \leq x \leq l$ із густиною моментів $\mu(M) = x$.

Варіант 20.

1. Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани ОАСВ (див. рис. 36) зі сторонами $OA = a$, $OB = b$, закріпленої по краях, якщо до мембрани прикладений нормальний тиск $P = const$ на одиницю площі.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
- а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0$, $0 < \rho < R$, $0 < \varphi < \alpha < \pi$;
 $U(R, \varphi) = A \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha} \cos \frac{3\pi\varphi}{2\alpha}$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = 0$, $U_\varphi(\rho, \alpha) = 0$, $0 \leq \rho \leq R$ ($A, \alpha = const$).
- б) $\Delta U(x, y) = 6y^2$, $0 < x < a$, $0 < y < b$;
 $U_x(0, y) = 0$, $U_x(a, y) = 8 \cos \frac{3\pi}{b}y$, $0 \leq y \leq b$;
 $U_y(x, 0) = 0$, $U_y(x, b) = 2b^3 + \cos \frac{\pi}{a}x$, $0 \leq x \leq a$.
3. Знайти потенціал простого шару мас, розподілених по сфері $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ із густиною заряду $\psi(M) \equiv 1$.

Варіант 21.

1. Визначити стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму криволінійного прямокутника – півкільця, дві сторони якого утворені дугами концентричних кіл радіусів $\rho = a$ та $\rho = b$, а дві інші – відрізками радіусів $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$. Уздовж грані $\rho = a$ температура змінюється згідно за-

кону $A \sin 9\varphi$, де $A = \text{const}$, грань $\rho = b$ теплоізолювана, а інші підтримуться при нульовій температурі.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad R < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(R, \varphi) = U_0 \cos \varphi \cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (U_0 = \text{const}).$$

б) $\Delta U(x, y) = B \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1;$

$$U(0, y) = 0, \quad U_x(\pi, y) + hU(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (B, h = \text{const} > 0).$$

3. Користуючись поверхневими потенціалами, розв'язати другу крайову задачу для рівняння Лапласа в півпросторі:

$$\Delta U(x, y, z) = 0, \quad y > 0;$$

$$U_y(x, 0, z) = U_0 = \text{const}.$$

Варіант 22.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 4$, сторони $x = 0$ та $x = 1$ якої теплоізолювані, якщо на інших сторонах температура задається рівностями (A, B – задані сталі):

$$U(x, 0) = A, \quad U(x, 4) = B(2x^3 - 3x^2).$$

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U = -xy, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

$$U(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

б) $\Delta U(x, y) = 12(x + y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 4;$

$$U_x(0, y) = \cos \pi y, \quad U_x(1, y) = 6, \quad 0 \leq y \leq 4;$$

$$U_y(x, 0) = 2 \cos \pi x, \quad U_y(x, 4) = 2 \cos^2 \pi x + 95, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Знайти сумарний об'ємний потенціал мас, розподілених усередині кулі радіуса a з центром у початку координат зі сталою густиною ρ_1 та у сферичному шарі $a < b \leq r \leq c$ ($a, b, c = \text{const}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) зі сталою густиною ρ_2 .

Варіант 23.

1. Визначити форму прогину однорідної круглої мембрани радіуса R , якщо відхилення точок краю мембрани задане функцією $f(\varphi) = A \sin \varphi \sin 3\varphi$, де $A = \text{const}$.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

а) $\Delta U(x, y) = 4(y^2 - 4\pi^2) \sin 2y, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$

$$U_x(0, y) = 0, \quad U(2\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2};$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U(x, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha < \pi;$

$$U_\rho(R, \varphi) = B \cos \frac{2\pi}{\alpha} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha;$$

$$U_{\varphi}(\rho, 0) = 0, \quad U_{\varphi}(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R \quad (B, \alpha - \text{const}).$$

3. Знайти логарифмічний потенціал простого шару мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 по сторонах квадрата $0 \leq x, y \leq 1$.

Варіант 24.

1. Знайти форму рівноваги однорідної прямокутної мембрани $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, край $x = a$ якої вільний, якщо на інших краях відхилення задане рівностями: $U(x, 0) = A \sin \frac{5\pi}{2a} x$, $U(x, b) = Bx(a - x)^2$, $U(0, y) = 0$; $A, B = \text{const}$.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
- а) $\Delta U = 12(x^2 - y^2)$, $a < \rho < b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U(a, \varphi) = 0$, $U_{\rho}(b, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- б) $\Delta U(x, y) = 8\pi^2 \cos \pi x$, $0 < x < 1$, $0 < y < 2$;
 $U(0, y) = 2$, $U_x(1, y) = 0$, $0 \leq y \leq 2$;
 $U_y(x, 0) = \sin \frac{3\pi}{2} x$, $U_y(x, 2) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару кола радіуса R із центром у початку координат зі сталою густиною моментів μ_0 .

Варіант 25.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, якщо прямолінійні сторони пластинки підтримуються при нульовій температурі, на дузі проходить теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури, а всередині пластинки діють джерела тепла інтенсивності $Q\varphi(\frac{\pi}{4} - \varphi)$, де $Q = \text{const}$.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
- а) $\Delta U(x, y) = 0$, $0 < x < \infty$, $0 < y < l$;
 $U(0, y) = \text{ch}(l - x) - \text{ch} l$, $U(\infty, y) = 0$, $0 \leq y \leq l$;
 $U(x, 0) = 0$, $U_y(x, l) = 0$, $0 \leq x < \infty$.
- б) $\Delta U(\rho, \varphi) = 6 \cos 3\varphi \sin 3\varphi$, $1 < \rho < 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_{\rho}(1, \varphi) = 2 + \sin 6\varphi$, $U_{\rho}(2, \varphi) = 1 + \cos \varphi - 4 \sin 6\varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених у кубі з ребром довжини $l = 2$ з густиною $f(x, y, z) = xyz$.

Варіант 26.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній прямокутній пластинці $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, сторона $x = 0$ якої теплоізольована, якщо сторони $x = a$ та $y = 0$ підтримуються при нульовій температурі, а до сторони $y = b$ підводиться тепловий потік $B(x^2 - a^2)$, де B – задана стала.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

- а) $\Delta U(x, y) = 6(x + 1)$, $0 < x < 1$, $0 < y < b$;
 $U(0, y) = 3$, $U_x(1, y) = 0$, $0 \leq y \leq b$;
 $U_y(x, 0) = 0$, $U_y(x, b) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
- б) $\Delta U = x^2 + y^2$, $a < \rho < b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U(a, \varphi) = U_\rho(b, \varphi) = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Функція $U(x, y) = -\frac{y}{2r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, є зовнішнім потенціалом простого шару мас, розподілених по колу $r^2 = 1$. Знайти значення цього потенціалу в крузі $r^2 \leq 1$.

Варіант 27.

1. У напівкруглій пластинці одиничного радіуса прямолінійний край теплоізований, а на півколі температура задається функцією $A \cos^2 2\varphi$, де $A = \text{const}$. Знайти стаціонарний розподіл температури, якщо в пластинці виділяється тепло з інтенсивністю $q = \text{const}$.
2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
а) $\Delta U(x, y) = 0$, $0 < x < \infty$, $0 < y < 4$;
 $U(0, y) = y^2(4 - y)$, $U(\infty, y) = 0$, $0 \leq y \leq 4$;
 $U_y(x, 0) - hU(x, 0) = 0$, $U(x, 4) = 0$, $0 \leq x < \infty$ ($h = \text{const} > 0$).
- б) $\Delta U(\rho, \varphi) = -4 \sin 2\varphi$, $a < \rho < b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(a, \varphi) = -2$, $U(b, \varphi) = b \cos 4\varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
3. Знайти об'ємний потенціал мас, розподілених зі сталою густиною ρ_0 в прямокутному паралелепіпеді $0 \leq x, y \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$.

Варіант 28.

1. Знайти стаціонарний розподіл температури в круглій пластинці радіуса R , якщо на краї пластинки проходить теплообмін по закону Ньютона із зовнішнім середовищем, температура якого задана функцією

$$h^{-1}(A + B \sin \varphi + C \cos 2\varphi),$$

де $h = \alpha k^{-1}$ (α – коефіцієнт теплообміну, k – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності), а A, B, C – задані сталі.

2. Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:

- а) $\Delta U(x, y) = 16e^{-2x}$, $0 < x < 1$, $0 < y < 1$;
 $U_x(0, y) = 0$, $U(1, y) = 0$, $0 \leq y \leq 1$;
 $U_y(x, 0) = 0$, $U(x, 1) = 0$, $0 \leq x \leq 1$.
- б) $\Delta U(\rho, \varphi) = \cos \varphi$, $0 < \rho < R$, $0 < \varphi < \pi$;
 $U_\rho(R, \varphi) + U(R, \varphi) = 2 + \cos \varphi(3 + 2 \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = U_\varphi(\rho, \pi) = 0$, $0 \leq \rho \leq R$.

3. Потенціал простого шару мас, розподілених по колу $x^2 + y^2 = 1$, зовні замкнутого круга $x^2 + y^2 \leq 1$ дається формулою: $U(x, y) = \frac{x}{r^2} \left(1 + \frac{2y}{r^2}\right)$, $r^2 = x^2 + y^2$. Знайти густину мас $\psi(x, y)$.

Варіант 29.

- Знайти стаціонарний розподіл температури в однорідній пластинці, яка має форму кругового сектора $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, якщо прямолінійні сторони пластинки підтримуються при нульовій температурі, на дузі проходить тепловіддача в навколишнє середовище, температура якого описується функцією $T_0 \sin 2\varphi \cos \varphi$, де $T_0 = \text{const}$, по закону Ньютона.
- Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - $\Delta U(x, y) = \sin x + \sin 2x$, $0 < x < \pi$, $0 < y < l$;
 $U(0, y) = 0$, $U(\pi, y) = 0$, $0 \leq y \leq l$;
 $U(x, 0) = 0$, $U_y(x, l) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
 - $\Delta U(\rho, \varphi) = 0$, $R < \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(R, \varphi) + U(R, \varphi) = 4 \sin^2 \frac{3\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Функція $U(x, y) = \frac{x}{r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$, є внутрішнім потенціалом простого шару мас, розподілених по колу $r^2 = 4$. Знайти значення цього потенціалу в крузі $r^2 \leq 4$.

Варіант 30.

- Визначити форму прогину однорідної прямокутної мембрани $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, до якої прикладений нормальний тиск $P = \text{const}$ на одиницю площі, якщо сторони мембрани $x = 0$ та $x = a$ вільні, а сторони $y = 0$ та $y = b$ пружно закріплені.
- Зінтегрувати крайові задачі та дати їх фізичну інтерпретацію:
 - $\Delta U(\rho, \varphi) = 0$, $R < \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$;
 $U_\rho(R, \varphi) + hU(R, \varphi) = 4 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ ($h = \text{const} > 0$).
 - $\Delta U(\rho, \varphi) = 6 \sin \varphi + 2 \cos 2\varphi$, $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < \pi$;
 $U_\rho(1, \varphi) = \cos \varphi + 4 \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$;
 $U_\varphi(\rho, 0) = 2\rho^2$, $U_\varphi(\rho, \pi) = -2\rho^2$, $0 \leq \rho \leq 1$.
- Побудувати функцію Гріна для задачі Діріхле в кільці $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ I

1. Не є ДРЧП.
2. Квазілінійне ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними.
3. Лінійне неоднорідне ДРЧП 5-го порядку з 3-ма незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.
4. Не є ДРЧП.
5. Нелінійне ДРЧП 3-го порядку з 3-ма незалежними змінними.
6. Лінійне однорідне ДРЧП 6-го порядку з 2-ма незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.
7. Не є ДРЧП.
8. Нелінійне ДРЧП 3-го порядку з 3-ма незалежними змінними.
9. Лінійне однорідне ДРЧП 2-го порядку з 2-ма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами.
10. Лінійне неоднорідне ДРЧП 8-го порядку з 3-ма незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.
11. Квазілінійне ДРЧП 5-го порядку з 2-ма незалежними змінними.
12. Не є ДРЧП.
13. Квазілінійне ДРЧП 5-го порядку з 3-ма незалежними змінними.
14. Не є ДРЧП.
15. Квазілінійне ДРЧП 4-го порядку з 3-ма незалежними змінними.
16. Лінійне неоднорідне ДРЧП 5-го порядку з 3-ма незалежними змінними зі сталими коефіцієнтами.
17. Квазілінійне ДРЧП 7-го порядку з 5-ма незалежними змінними.
18. Не є ДРЧП.
19. Лінійне однорідне ДРЧП 5-го порядку з 4-ма незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.
20. Нелінійне ДРЧП 3-го порядку з 3-ма незалежними змінними.
21. Не є ДРЧП.
22. Квазілінійне ДРЧП 4-го порядку з 3-ма незалежними змінними.

23. $\xi = xy, \quad \eta = x^{-1}y, \quad xy \neq 0, \quad U_{\xi\eta} = -(2\eta)^{-1}U_{\xi}.$
24. $\xi = x + y - \cos x, \quad \eta = x - y + \cos x, \quad U_{\xi\eta} = 0.$
25. $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \eta = y, \quad U_{\eta\eta} = 2\xi(\xi^2 + \eta^2)^{-1}U_{\xi}.$
26. $\xi = x^2, \quad \eta = y^2, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -(2\xi)^{-1}U_{\xi} - (2\eta)^{-1}U_{\eta}.$
27. $\xi = y - \int_0^x \sqrt{\ln(t^2 + 2)} dt, \quad \eta = x, \quad U_{\eta\eta} = 3\sqrt{\ln(\eta^2 + 2)}U_{\xi} - 3U_{\eta} - 4.$
28. $\xi = y, \quad \eta = \ln |\sin x|, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{U_{\eta}}{1 - e^{2\eta}} - \frac{3U_{\xi} - U(\xi, \eta) - 5 \arcsin e^{\eta}}{\sqrt{e^{-2\eta} - 1}}.$
29. $\xi = x - \cos y, \quad \eta = y, \quad U_{\eta\eta} = 5U_{\eta} + (5 \sin \eta - \cos \eta)U_{\xi} + U(\xi, \eta).$

30. $\xi = \ln y, \quad \eta = x, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = (1 - 2e^{-\xi})U_{\xi} - 3U(\xi, \eta).$
31. $\xi = \operatorname{Arsh} y, \quad \eta = \operatorname{Arsh} x, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \xi + \operatorname{sh}^2 \eta}.$
32. $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}, \quad \eta = x, \quad U_{\eta\eta} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\eta}} U_{\xi} - U_{\eta} \right) \cdot U(\xi, \eta) - \frac{\xi U_{\xi}}{4(\eta + \xi\sqrt{\eta})}.$
33. $\xi = y \sin x, \quad \eta = x, \quad U_{\eta\eta} = \ln 2 \operatorname{ctg}^2 \eta.$
34. $\xi = y + x + \frac{x^2}{2}, \quad \eta = y - x + \frac{x^2}{2}, \quad U_{\xi\eta} = \frac{4U_{\xi}}{2 - \xi + \eta} - 0,25 \operatorname{tg} \frac{(\xi - \eta)^2}{4}.$
35. $\xi = 2e^{-y} - x, \quad \eta = x, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0,5[U_{\eta} - (\xi + \eta + 1)U_{\xi}].$
36. $\xi = 4y - x^2, \quad \eta = x, \quad U_{\eta\eta} = 2U_{\xi} - \sin U(\xi, \eta).$
37. $\xi = y, \quad \eta = y - \operatorname{sh} x, \quad U_{\xi\eta} = -\frac{U_{\eta} \left(1 + \xi - \eta + 3\sqrt{1 + (\xi - \eta)^2} \right) + U_{\xi}}{1 + (\xi - \eta)^2}.$
38. При $x \leq 0, \quad y \geq 0$: $\xi = \sqrt{y}, \quad \eta = \sqrt{-x}, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -4e^{U(\xi, \eta)}.$
39. $\xi = 2y + x, \quad \eta = \frac{2}{3}y^3 - x, \quad U_{\xi\eta} = -0,25U(\xi, \eta).$
40. $\xi = y + 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}, \quad \eta = x, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\eta}{2} U_{\xi} - \operatorname{sh} \pi.$
41. $\xi = x, \quad \eta = x - y, \quad U_{\xi\eta} = (\eta - \xi)(U_{\xi} + U_{\eta}) - 5\xi U_{\eta} - \operatorname{tg}(\xi^2 - \eta\xi).$
42. $\xi = y - \sin x, \quad \eta = x, \quad U_{\eta\eta} = -\sin \eta U_{\xi} - (\xi + 2 \sin \eta) \cos \eta.$
43. $\xi = y - 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 18,25V = \eta e^{4\xi - 1,5\eta}.$
44. $\xi = x - y, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} - 5V_{\xi} = 0.$
45. $\xi = y - 6x, \quad \eta = y, \quad V_{\xi\eta} - \frac{7}{1296}V = -\frac{1}{12} \eta e^{-\frac{1}{36}(7\xi + \eta)}.$
46. $\xi = x + y, \quad \eta = 3x + y, \quad V_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0.$
47. $\xi = x, \quad \eta = x - 4y, \quad V_{\xi\eta} - \frac{53}{256}V = 0.$
48. $\xi = x + y, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} + V_{\xi} = 0.$
49. $\xi = 5y - 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 0,45V = 0.$
50. $\xi = x - y, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\eta} - 28V = 0.$
51. $\xi = x - y, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{37}{16}V = 0.$
52. $\xi = y - 3x, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} - 8V_{\xi} = 0.$
53. $\xi = y, \quad \eta = 3x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{217}{324}V = 0.$
54. $\xi = y - 6x, \quad \eta = y, \quad V_{\xi\eta} - \frac{89}{1296}V = 0.$
55. $\xi = x - y, \quad \eta = 2x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{17}{64}V = 0.$
56. $\xi = x - y, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} - 2V_{\xi} = 1.$

57. $\xi = x - y, \quad \eta = 2x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - \frac{49}{16}V = 3e^{-(\xi+1,75\eta)}$.
58. $\xi = x, \quad \eta = 2x - y, \quad V_{\xi\eta} - 5V = -\xi$.
59. $\xi = x + y, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} + V_{\xi} = \xi\eta e^{-6,25\xi+2,5\eta}$.
60. $\xi = y + 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 0,25V = (\xi^2 - 4\eta^2)e^{0,5(\xi+\eta)}$.
61. $\xi = y + x, \quad \eta = y, \quad V_{\xi\eta} + 2V = -\eta e^{2(\xi-\eta)}$.
62. $\xi = y - 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\eta\eta} - 7V_{\xi} = \eta e^{\frac{1}{28}\xi}$.
63. $\xi = y - 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 0,25V = (\xi - \eta)e^{0,5\eta}$.
64. $\xi = y - 2x, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\eta} + 30V = e^{16\eta}$.
65. $\xi = x - 2y, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - 2,5V = \eta^2$.
66. $\xi = 2x + y, \quad \eta = x, \quad V_{\xi\eta} - 6V = -e^{3\xi}$.
67. $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}y, \quad \eta = -\frac{1}{\sqrt{14}}y + \sqrt{\frac{2}{7}}z, \quad \zeta = x + y, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$.
68. $\xi = x, \quad \eta = y - 2x, \quad \zeta = z + x - 2y, \quad U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + U_{\zeta\zeta} = 0$.
69. $\xi = 0,5x, \quad \eta = -1,5x + 2y, \quad \zeta = 4x - 7y + z, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} + 2U(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
70. $\xi = x, \quad \eta = x + 2z, \quad \zeta = 0,2y, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - 0,5V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
71. $\xi = z, \quad \eta = 2y - z, \quad \zeta = 2x, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} + 2V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
72. $\xi = y, \quad \eta = y + 2z, \quad \zeta = 0,5x + y + 2z, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - \frac{9}{16}V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
73. $\xi = z, \quad \eta = x + z, \quad \zeta = x + 2y + z, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - 6,5V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
74. $\xi = x, \quad \eta = 2z, \quad \zeta = y + 2z, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - 1,25V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
75. $\xi = \frac{y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{y+4z}{\sqrt{2}}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{3} - y - 4z\right), \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - \frac{73}{72}V(\xi, \eta, \zeta) = 0$.
76. $\xi = z, \quad \eta = -2y - z, \quad \zeta = x + y, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + V(\xi, \eta, \zeta) = 1$.
77. $\xi = y, \quad \eta = z - y, \quad \zeta = x + 0,5z, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - 3U_{\zeta}(\xi, \eta, \zeta) = 2\zeta(\xi + \eta)$.
78. $\xi = y, \quad \eta = -\frac{x}{2} - y, \quad \zeta = \frac{x}{4} + z, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} + 0,25V(\xi, \eta, \zeta) = \xi e^{-0,5\zeta}$.
79. $\xi = y, \quad \eta = -\frac{2x}{3} - y, \quad \zeta = \frac{5x}{6} + \frac{y+3z}{2}, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} + \frac{25}{16}V(\xi, \eta, \zeta) = -3\xi\eta e^{0,75\zeta}$.
80. $\xi = z, \quad \eta = 2y - z, \quad \zeta = \frac{x}{\sqrt{5}}, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - 2,5V(\xi, \eta, \zeta) = e^{-1,5\eta}$.
81. $\xi = z, \quad \eta = 2y - z, \quad \zeta = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} = 2$.
82. $\xi = z, \quad \eta = -2x - z, \quad \zeta = \frac{5x+y}{\sqrt{3}}, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - U_{\zeta\zeta} = \eta^2 - \xi^2$.
83. $\xi = z, \quad \eta = x + z, \quad \zeta = x + 2y + z, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} = (\xi + \eta + \zeta)e^{-\zeta}$.
84. $\xi = z, \quad \eta = \frac{2}{3}y - z, \quad \zeta = x + \frac{1}{3}y, \quad U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} - U_{\zeta}(\xi, \eta, \zeta) = 2\zeta - \eta$.
85. $\xi = x, \quad \eta = -x - \frac{2y}{5}, \quad \zeta = x + \frac{2y}{5} + \frac{5z}{3}, \quad V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - \frac{V(\xi, \eta, \zeta)}{4} = e^{6,5(\xi+\eta+\zeta)}$.

86. $\xi = \frac{y}{2}, \quad \eta = \frac{y+2z}{4}, \quad \zeta = \frac{2x-3y-4z}{4}, \quad V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} + 3V = 2\xi(\xi - 2\eta)e^{2(\eta-\xi-\zeta)}.$
87. $\xi = x, \quad \eta = 0,5(x + y + z), \quad \zeta = 0,5(3x + y - z),$
 $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - U_{\zeta\zeta} - \xi(\eta + \zeta - 2\xi)(2U_{\xi} + U_{\eta} + 3U_{\zeta}) + 3\xi U = \xi(\eta - \zeta + \xi).$
88. $\xi = 0,5x + 0,4y, \quad \eta = 0,5x - 0,4y, \quad \zeta = z, \quad \tau = z + 2t,$
 $V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} - V_{\zeta\zeta} + V_{\tau\tau} = (\tau - \zeta)e^{0,2(\xi+\eta)}.$
89. $\xi = 0,5x + t, \quad \eta = 0,5x - t, \quad \zeta = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z, \quad \tau = \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z,$
 $V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + V_{\zeta\zeta} - V_{\tau\tau} = e^{1,5(\xi+\eta)}.$

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ II

- а) $\rho(x)u_{tt} = Tu_{xx} + F(x,t);$
 б) при $\rho(x) \equiv \rho = const$ $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, де $a^2 = \rho^{-1}T$, $f(x,t) = \rho^{-1}F(x,t);$
 в) $u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u_t + f(x,t)$, де $b^2 = \rho^{-1}k$, k – "коефіцієнт тертя", тобто коефіцієнт пропорційності у співвідношенні $\Phi = -ku_t$, яке визначає силу тертя, що діє на одиницю довжини струни.
- $\rho(x)S(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}[E(x)S(x)u_x];$ у випадку однорідного стержня сталого перерізу при $\rho(x) \equiv \rho = const$, $S(x) \equiv S = const$, $E(x) \equiv E = const$ буде $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, де $a^2 = \rho^{-1}E$.
- Якщо вісь Ox напрямлена по осі конуса (обеліска), то для визначення поздовжніх відхилень $u(x,t)$ точок стержня від положення рівноваги дістанемо рівняння

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right],$$

де $a^2 = \rho^{-1}E$ (див. задачу 3), а H – висота повного конуса (клину), частиною якого є заданий стержень, яка визначається формулою:

$$\text{а) } H = \frac{Rl}{R-r}, \quad \text{б) } H = \frac{h_2 l}{h_2 - h_1}.$$

- Якщо вісь Ox напрямити по поздовжній осі інерції циліндра, а через $\theta(t,x)$ позначити кут повороту поперечного перерізу з абсцисою x , то рівняння матиме вигляд: $\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx}$, $a^2 = GJK^{-1}$, де G – модуль зсуву, J – полярний (геометричний) момент інерції поперечного перерізу циліндра відносно точки, в якій вісь циліндра зустрічає цей переріз, K – осьовий момент інерції одиниці довжини циліндра (відносно тієї ж осі).

Вказівка. З'ясувати, що момент M пружних сил, прикладених до поперечного перерізу x циліндра, дається формулою $M = GJ\theta_x$.

- Рівняння для напруги $V(x,t)$ і сили струму $I(x,t)$ мають вигляд:

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV, \quad I_{xx} = CLI_{tt} + (CR + GL)I_t + GRI.$$

Вказівка. Скористатися системою телеграфних рівнянь

$$V_x + LI_t + RI = 0, \quad I_x + CV_t + GV = 0.$$

6. Для визначення відхилень $u(x, t)$ точок струни від положення рівноваги дістанемо рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{H}{c\rho} I(t),$$

де $a^2 = \rho^{-1}T$ (див. задачу 1), c – швидкість світла.

7. Густина ρ , тиск p , потенціал швидкостей φ , швидкість v частинок газу і поздовжнє зміщення u частинок газу задовольняють одне й те ж саме диференціальне рівняння $\omega_{tt} = a^2 \omega_{xx}$ з однією й тією ж константою $a^2 = kp_0 \rho_0^{-1}$, де $k = c_p c_v^{-1}$ – показник адіабати

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

рівний відношенню теплоємності при сталому тиску до теплоємності при сталому об'ємі, а ρ_0 і p_0 – тиск і густина в незбуреному газі. Константа a виражає швидкість поширення малих збурень у газі ("швидкість звуку").

Вказівка. При виведенні рівнянь скористатися основними законами гідродинаміки (див. додаток у кінці книги).

8. Нехай (x, y, z) – декартові координати частинки в незбуреному стані (лагранжеві координати), а ξ декартові координати в збуреному стані є

$$\xi = x + u^{(1)}(x, y, z, t), \quad \eta = y + u^{(2)}(x, y, z, t), \quad \zeta = z + u^{(3)}(x, y, z, t).$$

Вектор $\mathbf{u} = iu^{(1)} + ju^{(2)} + ku^{(3)}$ характеризує зміщення частинки з незбуреного стану (x, y, z) . Вектор швидкості частинки рівний

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = i\dot{u}^{(1)} + j\dot{u}^{(2)} + k\dot{u}^{(3)} = i\mathbf{v}^{(1)} + j\mathbf{v}^{(2)} + k\mathbf{v}^{(3)}.$$

Кожна з величин ρ , p , U , V , $u^{(i)}$, $v^{(i)}$, $i = \overline{1,3}$, задовольняє рівняння

$$\omega_{tt} = a^2 (\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz}),$$

де стала a^2 визначається аналогічно до задачі 7. Величини ρ , p , U , V , \mathbf{u} , \mathbf{v} пов'язані між собою співвідношеннями:

$$p + p_0 = a^2(\rho + \rho_0), \quad \rho_0 V_t + p + p_0 = 0, \quad \rho_0 U_{tt} + p + p_0 = 0,$$

$$\mathbf{v} = \text{grad} V, \quad \mathbf{u} = \text{grad} U, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Вказівка. Рівняння нерозривності в лагранжевих координатах можна дістати, розглядаючи деформацію елементарного об'єму $\Delta x \Delta y \Delta z$ і враховуючи, що його маса залишається незмінною. Інші співвідношення, які пов'язують між собою згадані величини, виводяться аналогічно до задачі 7.

9. Для визначення відхилень $u(x, y, t)$ точок мембрани від положення рівноваги дістанемо рівняння:

$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t)$, де $a^2 = \rho^{-1}T$, $f(x, y, t) = \rho^{-1}F(x, y, t)$, $T = const$ – величина сили натягу, $\rho = const$ – поверхнева густина мембрани.

Вказівка. Задача про коливання мембрани є двовимірним аналогом задачі про коливання струни (див. задачу 1).

10. Рівняння для визначення відхилень $u(x, y, t)$ точок мембрани від положення рівноваги має вигляд:

$$\text{а) } u_{tt} = a_1^2(u_{xx} + u_{yy}) - \frac{\rho_0 a_0^2}{\Omega_0 \rho_1} \iint_G u dx dy, \quad \text{б) } u_{tt} = a_1^2(u_{xx} + u_{yy}) - \frac{\rho_0}{\rho_1} u_t.$$

де a_1 – швидкість поширення поперечних хвиль у мембрані, ρ_1 – поверхнева густина мембрани, Ω_0 – об'єм посудини, ρ_0 – незбурена густина повітря, a_0 – швидкість поширення малих збурень у повітрі.

Вказівка. Якщо $a_0 \gg a_1$, то при підрахунку сил, які діють на елемент мембрани, можна вважати, що тиск повітря, яке міститься в посудині, не залежить від координат розглядуваного елемента мембрани, а визначається загальною зміною об'єму посудини за рахунок прогину мембрани.

Якщо ж швидкість поширення малих збурень у довкіллі значно менша за швидкість поширення збурень у мембрані, тобто $a_0 \ll a_1$, то реакція середовища на кожний елемент мембрани визначається станом середовища, яке безпосередньо прилягає до цього елемента.

11. $u(x, y) = x f_1(y) - \frac{1}{3} x^{-2} f_2(y)$.

12. $u(x, y) = (xy)^{-1} [f_1(x) + f_2(y)]$

13. $u(x, y) = (e^x + e^y)^{-1} [f_1(x) + f_2(y) + y^2 e^x]$.

14. $u(x, y) = e^{-y} f_1(x) + x^{-1} f_2(y) - 2x^2 (y - 1)$.

15. $u(x, y) = 0,2x^3 f_1(y) + x^{-2} f_2(y) + \frac{1}{7} x^5 \ln |y|$.

16. $u(x, y) = 0,5y f_1(x) + y^{-1} f_2(x) - 0,75xy^3$.

17. $u(x, y) = e^x f_1(y) + e^{-x} f_2(y) + x \operatorname{ch} x$.

18. $u(x, y) = \cos y f_1(x) + \sin y f_2(x) + y \sin y$.

19. $u(x, y) = e^{x+y} + e^{3x+2y} [f_1(x) + f_2(y)]$.

20. $u(x, y) = (y + \cos^2 x)^{-1} [f_1(x) + f_2(y) + 0,25x^2 y^2]$.

21. $u(x, y) = f_1(x - y) + f_2(5x - y)$.

22. $u(x, y) = e^{-\frac{1}{6}(x+y)} f_1(y - 5x) + f_2(x + y)$.

23. $u(x, y) = e^{-x} f_1(x + y) + f_2(x + y)$.

24. $u(x, y) = e^{y-x} f_1(y + 3x) + f_2(y - x)$.

25. $u(x, y) = f_1(y - \cos x - x) + f_2(y - \cos x + x)$.

26. $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}} f_1(xy) + f_2(yx^{-1})$.
27. $u(x, y) = f_1(xy) \ln |y| + f_2(xy)$.
28. $u(x, y) = f_1(y + x) + f_2(y + x^2 - x)$.
29. $u(x, y) = (x + 0,5x^2) f_1(2y + x^2) + f_2(2y + x^2)$.
30. $u(x, y) = y f_1(y - \cos x) + f_2(y - \cos x)$.
31. $u(x, y) = f_1(xy) + f_2(yx^3)$.
32. $u(x, y) = f_1(y - e^{-x}) + f_2(y + e^{-x})$.
33. $u(x, y) = e^{0,25(y - \cos x)} \left[e^{0,25x} f_1(y - \cos x - x) + e^{-0,25x} f_2(y - \cos x + x) \right]$.
34. $u(x, y) = 0,5y^2 f_1\left(\ln |y \operatorname{tg} \frac{x}{2}|\right) + f_2\left(\ln |y \operatorname{tg} \frac{x}{2}|\right)$.
35. $u(x, y) = \frac{2}{7}(2x + y) + f_1(x - 3y) + f_2(2x + y) e^{\frac{3y-x}{7}}$.
36. $u(x, y) = x^3(y + 3x) + x f_1(y + 3x) + f_2(y + 3x)$.
37. $u(x, y) = 2e^x + f_1(2y + 3x) + f_2(2y + 3x) e^{0,5x}$.
38. $u(x, y) = (y + x)(7x - y - 4) + f_1(y - 3x) + f_2(y + x) e^{0,5(y-3x)}$.
39. $u(x, y) = -e^{x+y}(3x + y + 1) + f_1(3x + y) + f_2(x + y) e^{3x+y}$.
40. $u(x, y) = 0,5e^{-2x} + f_1(e^{-x} + e^{-y}) + f_2(e^{-x} + e^{-y}) e^{-x}$.
41. $u(x, y) = 0,5x^2 - \frac{1}{12} \cos^4 y + x f_1(x + \cos y) + f_2(x + \cos y)$.
42. $u(x, y) = -72x^6 + f_1(2y - 5x^2) + f_2(2y + x^2)$.
43. $u(x, y) = 0,5(y - x)^2 + f_1(y) + \int_1^{y-x} e^{-y\xi^{-1}} f_2(\xi) d\xi$.
44. $u(x, y) = -0,5x + f_1(xy^{-1}) + yx^{-1} f_2(y)$.
45. $u(x, y) = \frac{4}{3}y^3 + f_1(y + \ln |\sin x|) + f_2(y - \ln |\sin x|)$.
46. $u(x, y) = 18 \sin \frac{x}{3} \cos y + \cos \frac{x}{3} \sin y$.
47. $u(x, y) = 3y^2 + 9x^2$.
48. $u(x, y) = \frac{2}{3} e^{2x} (e^y - e^{-2y})$.
49. $u(x, y) = x + y - 1$.
50. $u(x, y) = 2e^x - 4(y + e^{-x})^{-1}$.
51. $u(x, y) = -0,5y^2$.
52. $u(x, y) = x^2 - y - 1 + \sqrt{1 + 4y}$.
53. $u(x, y) = 2x$.
54. $u(x, y) = x^2 - 4(y + 1)$.
55. $u(x, y) = 6(y - 1)^2$.
56. $u(x, y) = 0,5[\varphi(x + \sin x - y) + \varphi(x - \sin x + y)] + 0,5 \int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y} \psi(s) ds$;
 $u(x, y) = x + \cos(\sin x + x - y)$.

$$57. u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) + 0,5 \int_{x - \frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \psi(s) ds; \quad u(x, y) = 4\left(x - \frac{2}{3}y^3\right)^3.$$

$$58. u(x, y) = e^y \left(e^{2x} - 2x - 1 \right) + \varphi(y) + 0,5 \int_y^{y+2x} \psi(s) ds;$$

$$u(x, y) = e^{y+2x} (2y + 4x - 1) - e^y (2y + 2x + 1).$$

$$59. u(x, y) = \frac{1}{2} \left[3e^{-y} \varphi(x+y) - \varphi(x+3y) + e^{-0,5(x+3y)} \int_{x+y}^{x+3y} \{ \psi(s) + 1,5\varphi(s) \} e^{0,5s} ds \right];$$

$$u(x, y) = e^{-y} - 1.$$

$$60. u(x, y) = \frac{5\varphi(y-x) + 3\varphi\left(y + \frac{5}{3}x\right)}{8} + \frac{3}{8} \int_{y-x}^{y+\frac{5}{3}x} \psi(s) ds; \quad u(x, y) = x + y.$$

$$61. u(x, y) = 0,5 \left[\varphi(xy) + y\varphi(xy^{-1}) \right] + 0,25 \sqrt{xy} \int_{xy}^{xy^{-1}} \{ \varphi(s) - 2\psi(s) \} s^{-\frac{3}{2}} ds;$$

$$u(x, y) = 3x + 2x^2 (y^2 - y^{-1}).$$

$$62. u(x, y) = 0,25(y + 3x)^2 + f(y-x) - f(0), \text{ де } f'(0) = 0.$$

$$63. u(x, y) = e^{-\frac{y+x}{6}} \left[5x - y + f(y+x) - f(0) \right], \text{ де } f'(0) = 1.$$

$$64. u(x, y) = 2(y-x) + f(x) - f(0), \text{ де } f'(0) = 4.$$

$$65. u(x, y) = 4y \sin x + f(x) + [1 - f(0)] \cos x, \text{ де } f'(0) = 0.$$

$$66. u(x, y) = f_1(xy) \ln |x| + f_2(xy), \text{ де } f_1(1) = f_1'(1) = 0, \quad f_2(1) = f_2'(1) = 1.$$

$$67. u(x, y) = x^2 y^3 + f(xy) - f(1), \text{ де } f'(1) = 0.$$

$$68. u(x, y) = e^{x-3y} [2y + 4x + f(3y-x) - f(0)], \text{ де } f'(0) = -36.$$

69. Функція Рімана $V(x, y; \xi, \eta) = (y-x)(y-\xi)^{-1}$. Розв'язок задачі Коші

$$u(x, y) = 4 \left(x - y + x \ln \frac{2y}{x} \right).$$

70. Функція Рімана $V(x, y; \xi, \eta) = e^{\alpha(\eta-y) + \beta(\xi-x)}$. Розв'язок задачі Коші

$$u(x, y) = \frac{\gamma}{\alpha\beta} + e^{\alpha(4x-y)} \left[\frac{\alpha\beta}{\beta + 4\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} \right] + e^{\beta(0,25y-x)} \cdot \frac{4\alpha^2}{\beta + 4\alpha}.$$

71. Функція Рімана $V \equiv 1$. Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

72. Якщо рівняння має вигляд $u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t)$, то функція Рімана

$$V(x, t; \xi, \tau) = J_0 \left(c \sqrt{(t - \tau)^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right),$$

де $J_0(z)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку (див. додаток у кінці книги), а розв’язок задачі Коші

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} - \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1 \left(c \sqrt{t^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right)}{\sqrt{t^2 - a^{-2}(x - \xi)^2}} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0 \left(c \sqrt{(t - \tau)^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Якщо ж рівняння має вигляд $u_{tt} = a^2 u_{xx} - c^2 u + f(x, t)$, то функція Рімана

$$V(x, t; \xi, \tau) = I_0 \left(c \sqrt{(t - \tau)^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right),$$

де $I_0(z) = J_0(iz)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку (див. додаток), а розв’язок задачі Коші

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right)}{\sqrt{t^2 - a^{-2}(x - \xi)^2}} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0 \left(c \sqrt{(t - \tau)^2 - a^{-2}(x - \xi)^2} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

73. Функція Рімана для канонічної форми рівняння має вигляд

$$V(\xi, \eta; \lambda, \mu) = F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(\xi - \lambda)(\eta - \mu)}{(\lambda - \mu)(\xi - \eta)} \right),$$

де

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)} x^2 + \dots$$

є гіпергеометричний ряд. Розв’язок задачі Коші

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\sqrt{l-x} - 0,5at}}{2^4 \sqrt{l-x}} \varphi \left(x + at\sqrt{l-x} - 0,25a^2 t^2 \right) + \\ + \frac{\sqrt{\sqrt{l-x} + 0,5at}}{2^4 \sqrt{l-x}} \varphi \left(x - at\sqrt{l-x} - 0,25a^2 t^2 \right) + \frac{1}{4\sqrt{l-x}} \int_{\sqrt{l-x}-0,5at}^{\sqrt{l-x}+0,5at} \Phi(x, t, z) dz,$$

де

$$\Phi(x, t, z) = \frac{\sqrt{z}}{a} \psi(l - z^2) \cdot F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(at)^2 - 4(z - \sqrt{l-x})^2}{16z\sqrt{l-x}} \right) + \\ + \frac{at}{8\sqrt{(l-x)z}} \varphi(l - z^2) \cdot F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(at)^2 - 4(z - \sqrt{l-x})^2}{16z\sqrt{l-x}} \right).$$

74. Функція Рімана для канонічної форми рівняння має вигляд

$$V(\xi, \eta; \lambda, \mu) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\sin(\xi - \lambda)\sin(\eta - \mu)}{\sin(\lambda - \mu)\sin(\xi - \eta)}\right),$$

де $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ – гіпергеометричний ряд (див. задачу 73). Розв'язок задачі Коші

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{\sin(\omega - y)}\varphi[l \cos(\omega - y)] + \sqrt{\sin(\omega + y)}\varphi[l \cos(\omega + y)]}{2\sqrt{\sin \omega}} + \frac{1}{2\sqrt{\sin \omega}} \int_{\omega - y}^{\omega + y} \Phi(\omega, y, z) dz, \quad \omega = \arccos \frac{x}{l},$$

де

$$\Phi(\omega, y, z) = \psi(l \cos z)\sqrt{\sin z} \cdot F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos y}{2 \sin \omega \sin z}\right) + \frac{\sin y}{2 \sin \omega \sqrt{\sin z}} \varphi(l \cos z) \cdot F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega - z) - \cos y}{2 \sin \omega \sin z}\right).$$

75. $u(x, y, z) = e^{-0,25(x+z)} f_1(x - z, y - z) + e^{-0,25(x-z)} f_2(x + z, y - z).$

76. $u(x, y, z) = f_1(y - z, x + 2z) + f_2(y + z, x + 2z).$

77. $u(x, y, z) = f_1(-z, x - z) + f_2(2y + 3z, x - z).$

78. $u(x, y, z) = e^{2x} f_1(y - 2x, z - 3x) + f_2(y - 2x, z - 3x).$

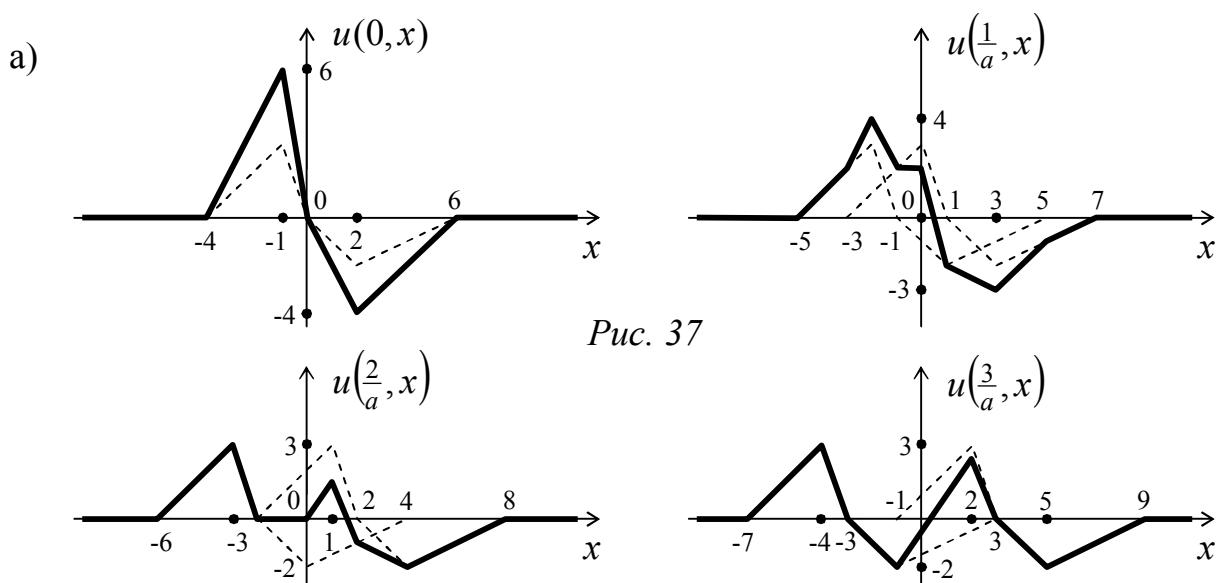
79. $u(x, y, z) = e^z f_1(x - z, y - z) + f_2(x - z, y - z).$

80. $u(x, y, z) = \frac{1}{3} z^3 + f_1(z + y, x - y) + f_2(z - y, x - y).$

81. $u(x, y, z) = \frac{8}{7} e^{2y+z} + f_1(y - \sqrt{2}z, x + 2z) + f_2(y + \sqrt{2}z, x + 2z).$

82. $u(x, y, z) = 0,25(z^2 - x^2) e^{y-2z} + f_1(z + x, y - 2z) + f_2(z - x, y - 2z).$

83. На рис. 37-40 зображені профілі струни в моменти часу $t_k = ka^{-1}$, $k = \overline{0,3}$.



б)

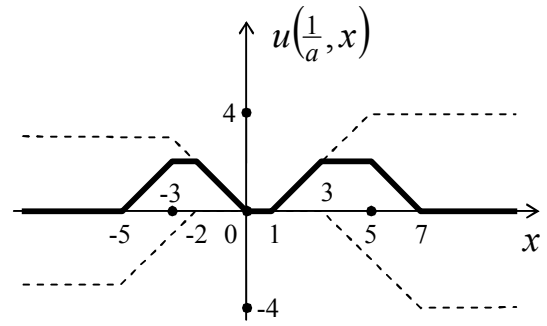
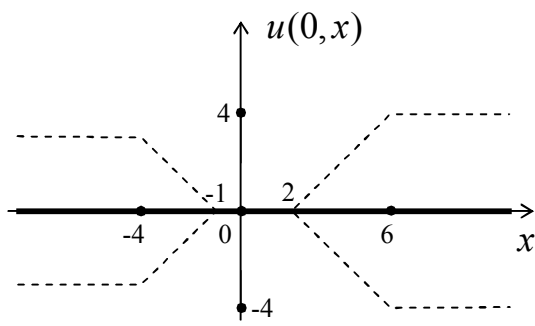
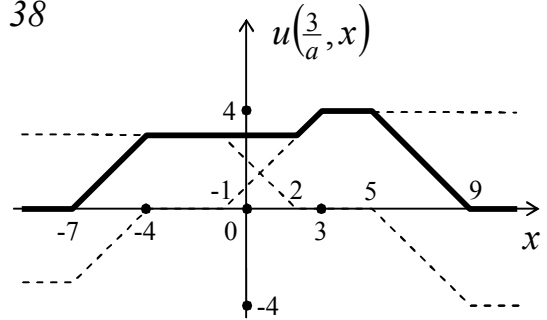
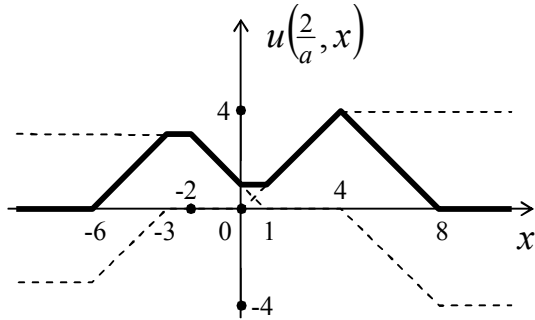


Рис. 38



в)

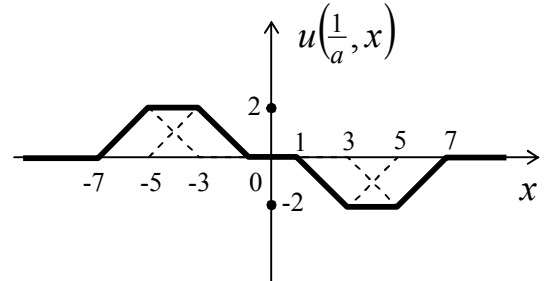
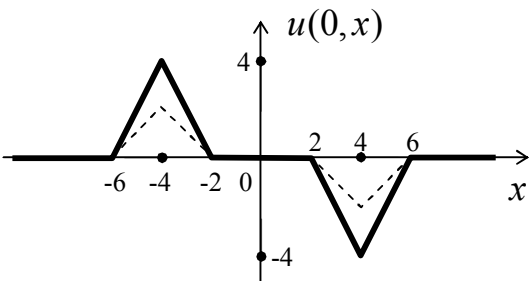
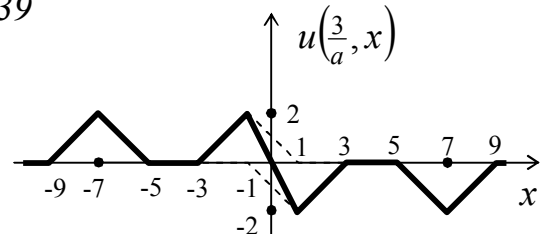
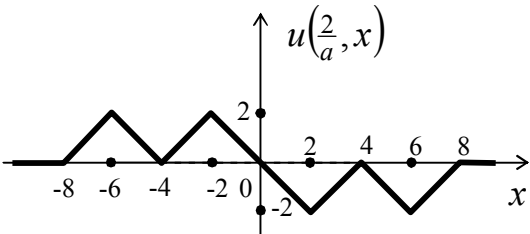


Рис. 39



г)

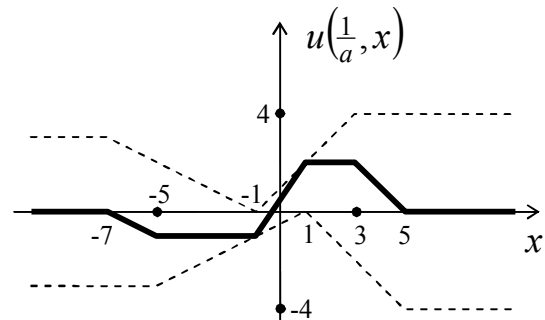
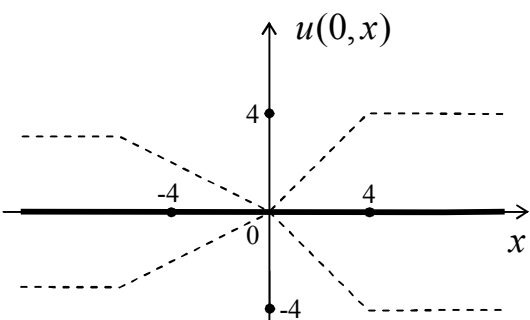
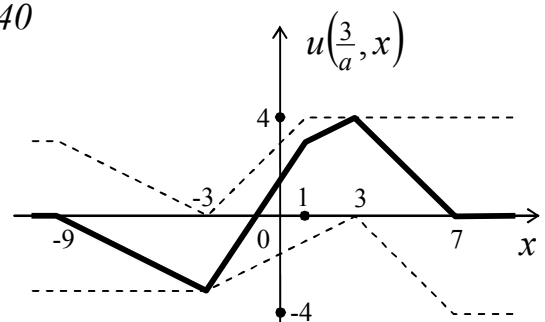
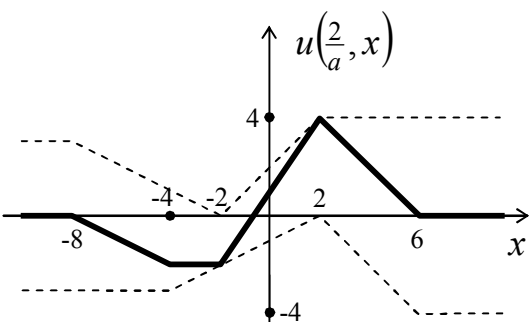


Рис. 40



84. На рис. 41 зображені відповідні фазові площини, на яких в кожному із зон вписане значення розв'язку задачі.

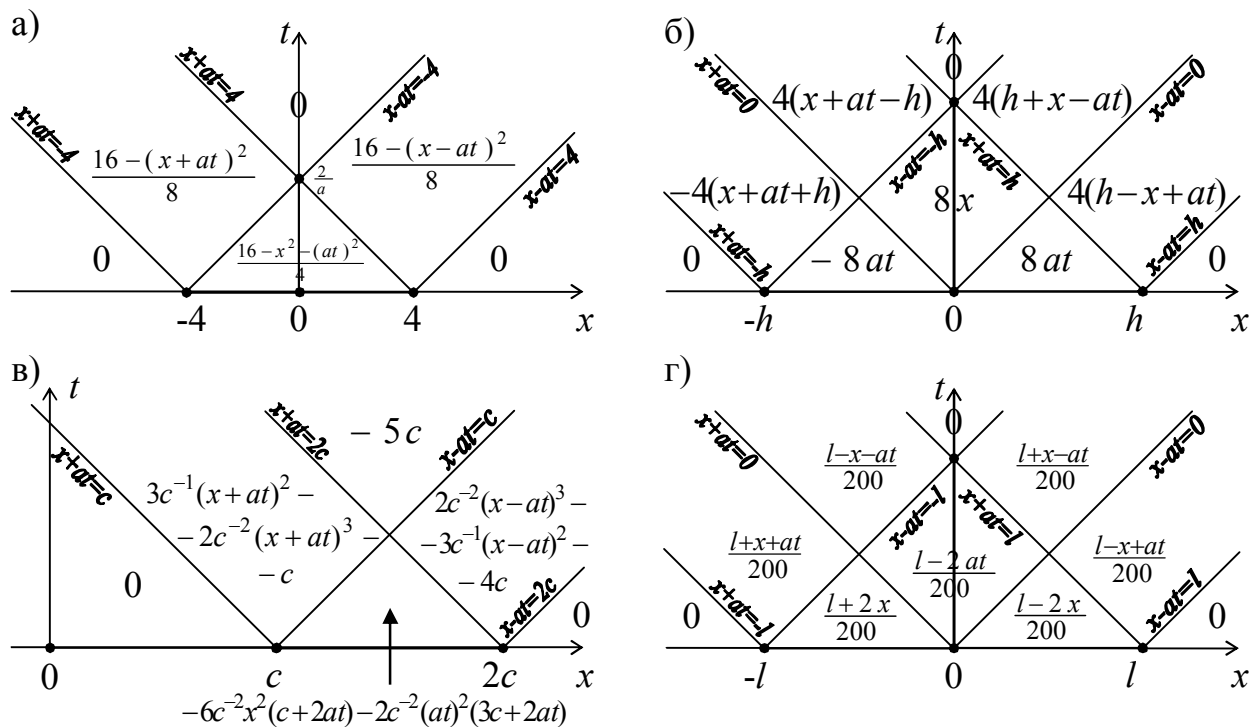


Рис. 41

85. Формули, які описують профілі струни в різні моменти часу:

а)

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -at, \\ 2 \sin(x + at), & -at \leq x \leq at, \\ 4 \sin x \cos at, & at \leq x \leq 2\pi - at, \\ 2 \sin(x - at), & 2\pi - at \leq x \leq 2\pi + at, \\ 0, & x \geq 2\pi + at; \end{cases}$$

$$t \geq \frac{\pi}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -at, \\ 2 \sin(x + at), & -at \leq x \leq 2\pi - at, \\ 0, & 2\pi - at \leq x \leq at, \\ 2 \sin(x - at), & at \leq x \leq 2\pi + at, \\ 0, & x \geq 2\pi + at. \end{cases}$$

б)

$$0 \leq t \leq \frac{4}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4 - at, \\ x + at + 4, & -4 - at \leq x \leq -4 + at, \\ 2at, & -4 + at \leq x \leq 4 - at, \\ 4 - x + at, & 4 - at \leq x \leq 4 + at, \\ 0, & x \geq 4 + at; \end{cases}$$

$$t \geq \frac{4}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4 - at, \\ x + at + 4, & -4 - at \leq x \leq 4 - at, \\ 8, & 4 - at \leq x \leq -4 + at, \\ 4 - x + at, & -4 + at \leq x \leq 4 + at, \\ 0, & x \geq 4 + at. \end{cases}$$

В)

$$0 \leq t \leq 2\pi: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{t}{2}, \\ 4 - 4 \cos(2x + t), & -\frac{t}{2} \leq x \leq \frac{t}{2}, \\ 8 \sin 2x \sin \frac{t}{2}, & \frac{t}{2} \leq x \leq 2\pi - \frac{t}{2}, \\ 4 \cos(2x - t) - 4, & 2\pi - \frac{t}{2} \leq x \leq 2\pi + \frac{t}{2}, \\ 0, & x \geq 2\pi + \frac{t}{2}; \end{cases}$$

$$t \geq 2\pi: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{t}{2}, \\ 4 - 4 \cos(2x + t), & -\frac{t}{2} \leq x \leq 2\pi - \frac{t}{2}, \\ 0, & 2\pi - \frac{t}{2} \leq x \leq \frac{t}{2}, \\ 4 \cos(2x - t) - 4, & \frac{t}{2} \leq x \leq 2\pi + \frac{t}{2}, \\ 0, & x \geq 2\pi + \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Г)

$$0 \leq t \leq \frac{3}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 - at, \\ \frac{9 - (x + at)^2}{2}, & -3 - at \leq x \leq -3 + at, \\ 9 - x^2 - (at)^2, & -3 + at \leq x \leq 3 - at, \\ \frac{9 - (x - at)^2}{2}, & 3 - at \leq x \leq 3 + at, \\ 0, & x \geq 3 + at; \end{cases}$$

$$t \geq \frac{3}{a}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3 - at, \\ \frac{9 - (x + at)^2}{2}, & -3 - at \leq x \leq 3 - at, \\ 0, & 3 - at \leq x \leq -3 + at, \\ \frac{9 - (x - at)^2}{2}, & -3 + at \leq x \leq 3 + at, \\ 0, & x \geq 3 + at. \end{cases}$$

86. Формули, які описують закони руху точок струни з різними абсцисами:

а)

$$x \leq 0: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -x, \\ (x + t)^2, & -x \leq t \leq 4 - x, \\ 16, & t \geq 4 - x; \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2: \quad u(t, x) = \begin{cases} 4atx, & 0 \leq t \leq x, \\ (x + t)^2, & x \leq t \leq 4 - x, \\ 16, & t \geq 4 - x; \end{cases}$$

$$2 \leq x \leq 4: \quad u(t, x) = \begin{cases} 4atx, & 0 \leq t \leq 4 - x, \\ 16 - (x - t)^2, & 4 - x \leq t \leq x, \\ 16, & t \geq x; \end{cases}$$

$$x \geq 4: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq x - 4, \\ 16 - (x - t)^2, & x - 4 \leq t \leq x, \\ 16, & t \geq x. \end{cases}$$

б)

$$x \leq -\frac{\pi}{2}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -\frac{\pi + 2x}{2a}, \\ 4 \cos(x + at), & -\frac{\pi + 2x}{2a} \leq t \leq \frac{\pi - 2x}{2a}, \\ 0, & t \geq \frac{\pi - 2x}{2a}; \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0: \quad u(t, x) = \begin{cases} 8 \cos x \cos at, & 0 \leq t \leq \frac{\pi + 2x}{2a}, \\ 4 \cos(x + at), & \frac{\pi + 2x}{2a} \leq t \leq \frac{\pi - 2x}{2a}, \\ 0, & t \geq \frac{\pi - 2x}{2a}; \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 8 \cos x \cos at, & 0 \leq t \leq \frac{\pi - 2x}{2a}, \\ 4 \cos(x - at), & \frac{\pi - 2x}{2a} \leq t \leq \frac{\pi + 2x}{2a}, \\ 0, & t \geq \frac{\pi + 2x}{2a}; \end{cases}$$

$$x \geq \frac{\pi}{2}: \quad u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -\frac{\pi - 2x}{2a}, \\ 4 \cos(x - at), & -\frac{\pi - 2x}{2a} \leq t \leq \frac{\pi + 2x}{2a}, \\ 0, & t \geq \frac{\pi + 2x}{2a}. \end{cases}$$

В)

$$x \leq 0:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -4x, \\ \frac{4x+t}{800}, & -4x \leq t \leq 4(l-x), \\ \frac{l}{200}, & t \geq 4(l-x); \end{cases}$$

$$0,5l \leq x \leq l:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{t}{400}, & 0 \leq t \leq 4(l-x), \\ \frac{4(l-x)+t}{800}, & 4(l-x) \leq t \leq 4x, \\ \frac{l}{200}, & t \geq 4x; \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 0,5l:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{t}{400}, & 0 \leq t \leq 4x, \\ \frac{4x+t}{800}, & 4x \leq t \leq 4(l-x), \\ \frac{l}{200}, & t \geq 4(l-x); \end{cases}$$

$$x \geq l:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 4(x-l), \\ \frac{4(l-x)+t}{800}, & 4(x-l) \leq t \leq 4x, \\ \frac{l}{200}, & t \geq 4x. \end{cases}$$

Г)

$$x \leq 0:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -\frac{x}{a}, \\ \frac{(x+at)(x+at-6)}{12}, & -\frac{x}{a} \leq t \leq \frac{6-x}{a}, \\ 0, & t \geq \frac{6-x}{a}; \end{cases}$$

$$3 \leq x \leq 6:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{x^2+(at)^2}{6} - x, & 0 \leq t \leq \frac{6-x}{a}, \\ \frac{(x-at)(x-at-6)}{12}, & \frac{6-x}{a} \leq t \leq \frac{x}{a}, \\ 0, & t \geq \frac{x}{a}; \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 3:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{x^2+(at)^2}{6} - x, & 0 \leq t \leq \frac{x}{a}, \\ \frac{(x+at)(x+at-6)}{12}, & \frac{x}{a} \leq t \leq \frac{6-x}{a}, \\ 0, & t \geq \frac{6-x}{a}; \end{cases}$$

$$x \geq 6:$$

$$u(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{x-6}{a}, \\ \frac{(x-at)(x-at-6)}{12}, & \frac{x-6}{a} \leq t \leq \frac{x}{a}, \\ 0, & t \geq \frac{x}{a}. \end{cases}$$

87. а) $u(t, x) = 0,5Ae^{-x}(\text{sh}t - te^{-t})$; б) $u(t, x) = 6 \cos 2x \cos 2t + 2t^2(t + 3x)$;

в) $u(t, x) = 4 \cos x \cos t + 2xt^4$.

88. Швидкість хвилі: а) $a = \frac{m}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}$; б) $a = \frac{b}{\sqrt{3}}$; в) $a = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$.

89. а) $u(t, x, y) = u(t, x) = 15x(x^2 + 3a^2t^2)$; б) $u(t, x, y) = u(t, y) = 2t(3y^2 + a^2t^2)$;

в) $u(t, x, y) = (xy)^2 + (at)^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{3}(at)^4$; г) $u(t, x, y) = t(2y + x^2 + \frac{1}{3}a^2t^2)$.

90. $u(t, x, y) = u(t, x) = 2xt^2$.

91. а) $u(t, x, y, z) = u(t, x) = \frac{x}{x^2 - (at)^2}$; б) $u(t, x, y, z) = u(t, x, y) = 3txy$;

в) $u(t, x, y) = x^2 + 2at + (at)^2 + \frac{4}{3}(at)^3$.

92. $u(t, x) = \frac{e^{-0,5bt}}{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{t\rho e^{\sqrt{c+0,25b^2}t\rho \sin \theta}}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi(x + t\rho \cos \theta) d\theta d\rho + \right.$

$$+ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{t\rho e^{\sqrt{c+0,25b^2}t\rho \sin \theta}}{\sqrt{1-\rho^2}} [\psi(x+t\rho \cos \theta) - 0,5b\varphi(x+t\rho \cos \theta)] d\theta d\rho +$$

$$+ \left. \int_0^t \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\rho(t-\tau) e^{\sqrt{c+0,25b^2}\rho(t-\tau) \sin \theta + 0,5\tau}}{\sqrt{1-\rho^2}} f(\tau, x + \rho(t-\tau) \cos \theta) d\theta d\rho d\tau \right\}$$

$$93. a) u(t, r) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq t \leq \frac{r_0-r}{a}, \\ u_0 \frac{r-at}{2r}, & \frac{r_0-r}{a} < t \leq \frac{r_0+r}{a}, \text{ при } 0 < r < r_0, \\ 0, & \frac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$u(t, r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{r-r_0}{a}, \\ u_0 \frac{r-at}{2r}, & \frac{r-r_0}{a} < t \leq \frac{r+r_0}{a}, \text{ при } r_0 < r < +\infty; \\ 0, & \frac{r+r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$b) u(t, r) = \begin{cases} u_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{r_0-r}{a}, \\ u_0 \frac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar}, & \frac{r_0-r}{a} < t \leq \frac{r_0+r}{a}, \text{ при } 0 < r < r_0, \\ 0, & \frac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$u(t, r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{r-r_0}{a}, \\ u_0 \frac{r_0^2 - (r-at)^2}{4ar}, & \frac{r-r_0}{a} < t \leq \frac{r+r_0}{a}, \text{ при } r_0 < r < +\infty. \\ 0, & \frac{r+r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$96. \psi(t, r) = \begin{cases} \pi u_0, & 0 \leq t \leq \frac{r_0-r}{a}, \\ u_0 \left(0,5\pi + \arcsin \frac{r_0-at}{r} \right), & \frac{r_0-r}{a} < t \leq \frac{r_0+r}{a}, \text{ при } 0 < r < r_0, \\ 0, & \frac{r_0+r}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$\psi(t, r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{r-r_0}{a}, \\ u_0 \left(0,5\pi + \arcsin \frac{r_0-at}{r} \right), & \frac{r-r_0}{a} < t \leq \frac{r+r_0}{a}, \text{ при } r_0 < r < +\infty. \\ 0, & \frac{r+r_0}{a} < t < +\infty, \end{cases}$$

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ III

1. Відповідні математичні моделі (тут і далі використані позначення фізичних величин, подані на с. 61):

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

а) $U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

б) $U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

в) $U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U(t, 0) = \omega(t), \quad TU_x(t, l) = \nu(t), \quad t \geq 0.$

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

г) $U(0, x) = \varphi(x), \quad U_t(0, x) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U_x(t, 0) - hU(t, 0) = -h\gamma(t), \quad U_x(t, l) + hU(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad h = \alpha T^{-1}.$

2. Відповідні математичні моделі:

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

а) $U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}},$
 $U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, b, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq c,$
 $U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b.$

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

б) $U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}},$
 $U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, b, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq c,$
 $U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b.$

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

в) $U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}},$
 $U(t, 0, y) = \omega_1(t, y), \quad TU_x(t, b, y) = \nu_1(t, y), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq c,$
 $TU_y(t, x, 0) = -\nu_2(t, y), \quad U(t, x, c) = \omega_2(t, y), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b.$

$$U_{tt} = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

$$\Gamma) \begin{aligned} U(0, x, y) &= \varphi(x, y), \quad U_t(0, x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}}, \\ U_x(t, 0, y) - hU(t, 0, y) &= 0, \quad U_x(t, b, y) + hU(t, b, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq c, \quad h = \alpha T^{-1}, \\ U_y(t, x, 0) - hU(t, x, 0) &= -h\gamma_1(t, x), \quad U_y(t, x, c) + hU(t, x, c) = h\gamma_2(t, x), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq b. \end{aligned}$$

3. Відповідні математичні моделі:

$$U_{tt} = a^2(U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi}), \quad t > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{а) } \begin{aligned} U(0, \rho, \varphi) &= \Phi(\rho, \varphi), \quad U_t(0, \rho, \varphi) = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}}, \\ U(t, R, \varphi) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

$$U_{tt} = a^2(U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi}) + f(t, \rho, \varphi), \quad t > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{б) } \begin{aligned} U(0, \rho, \varphi) &= 0, \quad U_t(0, \rho, \varphi) = \Psi(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}}, \\ U_{\rho}(t, R, \varphi) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

$$U_{tt} = a^2(U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi}), \quad t > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{в) } \begin{aligned} U(0, \rho, \varphi) &= 0, \quad U_t(0, \rho, \varphi) = 0, \quad (\rho, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}}, \\ TU_{\rho}(t, R, \varphi) &= v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

$$U_{tt} = a^2(U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi}) + f(t, \rho, \varphi), \quad t > 0, \quad (\rho, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{г) } \begin{aligned} U(0, \rho, \varphi) &= \Phi(\rho, \varphi), \quad U_t(0, \rho, \varphi) = \Psi(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}}, \\ U_{\rho}(t, R, \varphi) + 2U(t, R, \varphi) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

4. При $x \geq 0$

$$\text{а) } U(t, x) = \begin{cases} e^{-x} \operatorname{ch} 3t + \frac{1}{30} [\sin 5(x+3t) - \sin 5(x-3t)], & x \geq 3t, \\ \frac{1}{78} (14e^{-(x-3t)} - \cos 5(x-3t)) - \frac{1}{3}(x-3t-1) - \frac{2}{65} \sin 5(x-3t) + \\ \quad + \frac{1}{30} \sin 5(x+3t) + 0,5e^{-(x+3t)}, & x < 3t. \end{cases}$$

$$\text{б) } U(t, x) = \begin{cases} x+t+t^2, & x \geq t, \\ x+t^2, & x < t. \end{cases} \quad \text{в) } U(t, x) = \begin{cases} 4, & x \geq at, \\ 4 - 4a \left[\sin \left(t - \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{3} \sin^3 \left(t - \frac{x}{a} \right) \right], & x < at. \end{cases}$$

$$\text{г) } U(t, x) = \begin{cases} x, & x \geq 2t, \\ 2 \sin \left(\frac{x}{2} - t \right) + 2t, & x < 2t. \end{cases}$$

$$\text{д) } U(t, x) = \begin{cases} e^x \operatorname{ch} 2t - t, & x \geq 2t, \\ 0,5e^{x+2t} + 0,25[(x-2t)^2 + 2x - 8t + 2], & x < 2t. \end{cases}$$

5. При $x \geq 0$

$$U(t, x) = \begin{cases} \sin(x + 3t), & x > 3t, \\ 3e^{x-3t} - x + 3t - 2 + \cos(x - 3t) + \\ \quad + \sin(x + 3t), & x < 3t. \end{cases}$$

6. а) При $x \geq 0, x - at > 0$

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau,$$

а при $x \geq 0, x - at < 0$

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau + \\ + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau.$$

б) При $x \geq 0, x - at > 0$

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau,$$

а при $x \geq 0, x - at < 0$

$$U(t, x) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(z) dz + \int_0^{at-x} \psi(z) dz \right] - a \int_0^{t-\frac{x}{a}} v(z) dz + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\int_0^{a(t-\tau)-x} f(\tau, z) dz + \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz \right] d\tau + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) dz d\tau.$$

в) При $x \geq 0$

$$U(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{6} t^3, & x \geq at, \\ \frac{x}{6a^3} (x^2 - 3atx + 3a^2 t^2), & x < at. \end{cases}$$

г) При $x \geq 0$

$$U(t, x) = \begin{cases} -3t^2 x, & x \geq t, \\ -3t^2 x - 2(x - t)^3, & x < t. \end{cases}$$

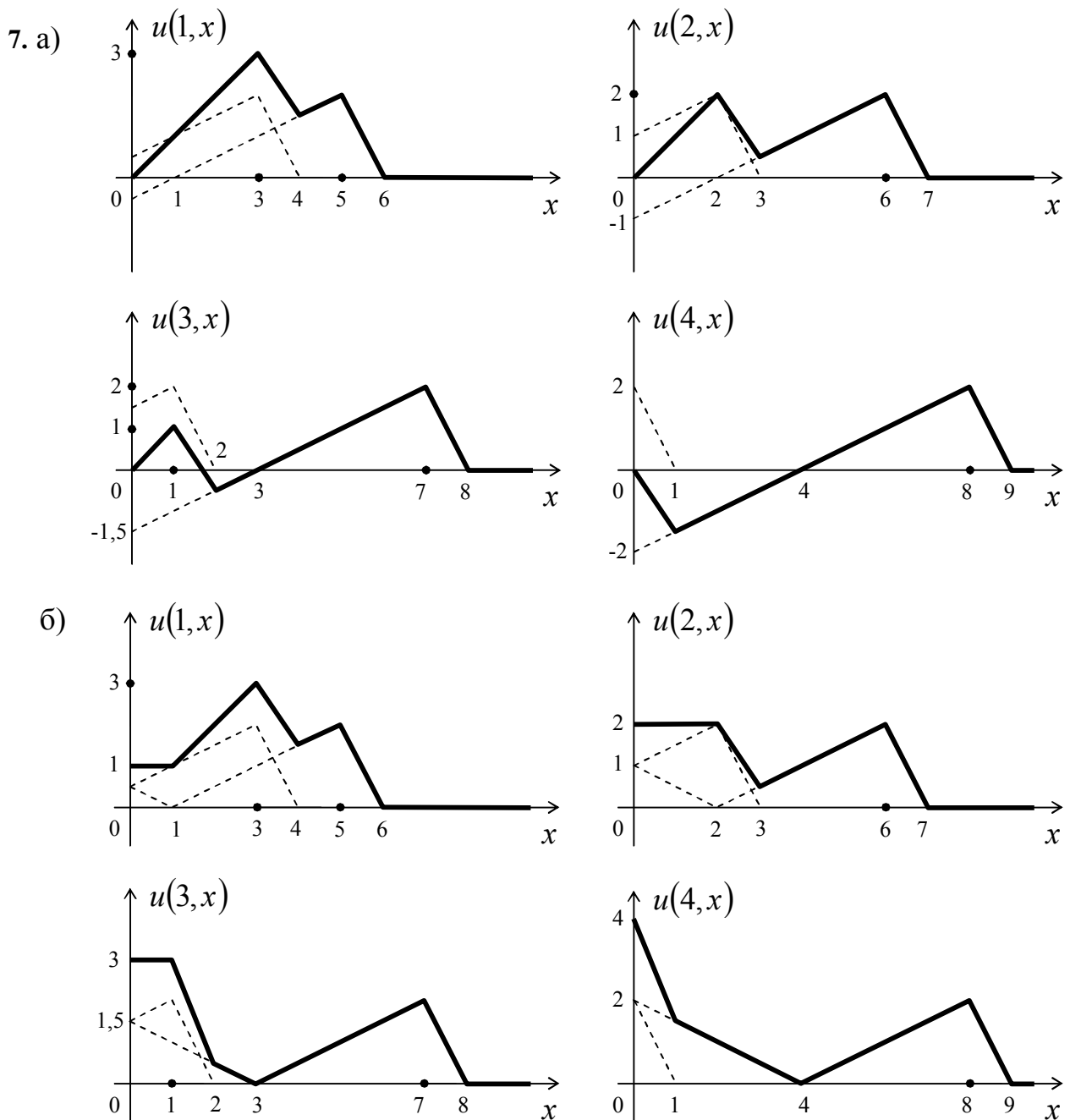


Рис. 42

8. Фазова площина зображена на рис. 43 (у випадку напівнескінченної струни будуються лише ті з характеристик, які перетинають першу чверть $t \geq 0, x \geq 0$). Так, характеристики $x + at = 0$ і $x + at = -2$ лежать у фіктивній області $t < 0$, а тому на розв'язок задачі впливу не матимуть. Формули для розв'язку в шести зонах (див. рис. 43) подані нижче (таблиця 2):

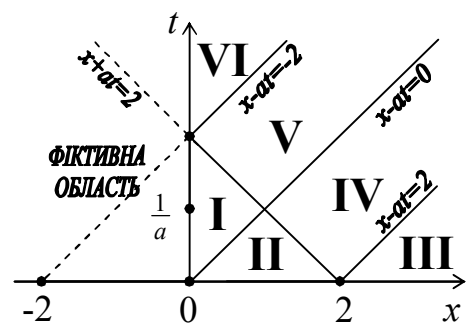


Рис. 43

Таблиця 2		
Зона	Формули для розв'язку	
	а) кінець нерухомий	б) кінець вільний
I	$u(t, x) = 4x(1 - at)$	$u(t, x) = -2[x^2 - 2at + (at)^2]$
II	$u(t, x) = -2[x^2 - 2x + (at)^2]$	
III, VI	$u(t, x) = 0$	
IV	$u(t, x) = 1 - (x - at - 1)^2$	
V	$u(t, x) = -1 + (x - at + 1)^2$	$u(t, x) = 1 - (x - at + 1)^2$

Фіксуючи значення $t = t_0 = const > 0$, дістанемо формули для профілю струни в момент часу t_0 . Вибираючи різні моменти часу, можна за одержаними формулами проілюструвати процес коливань струни графічно.

9. У моменти часу $t = 1, 2, 3$ профіль струни співпадатиме з зображеними на рис. 13. Далі матимемо (рис. 44):

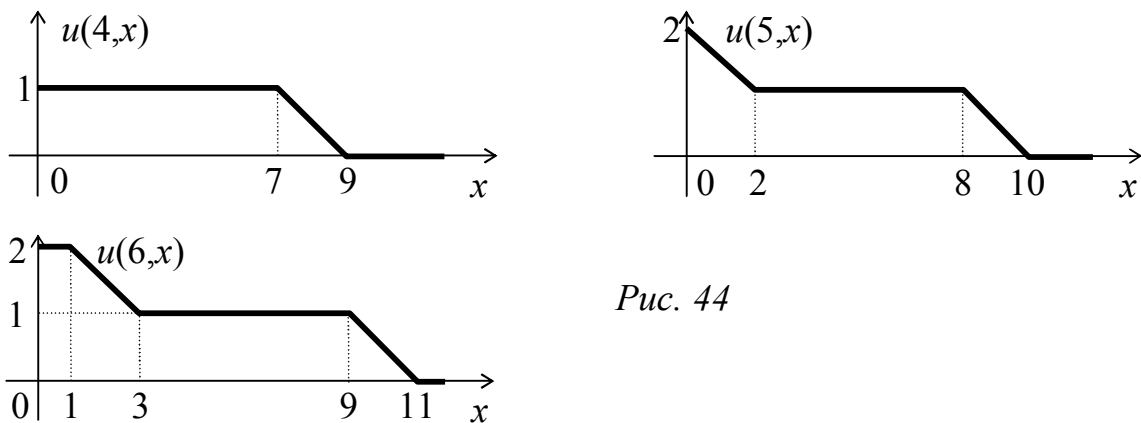


Рис. 44

У процесі коливань точки, через які пройшли хвилі, підійматимуться на висоту $h = 2$.

10. Фазова площина зображена на рис. 45. Характеристики $x + at = -1$ і $x + at = -2$ лежать у фіктивній області $t < 0$, а тому на розв'язок задачі впливу не матимуть. Формули для розв'язку в дев'яти зонах першої чверті (див. рис. 45) подані нижче (таблиця 3):

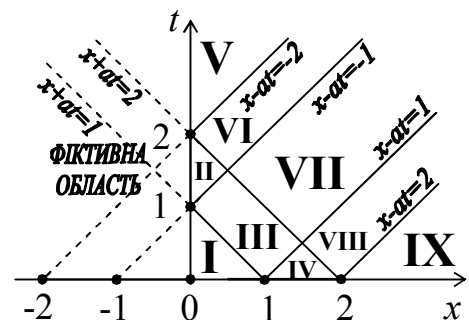


Рис. 45

Таблиця 3		
Зона	Формули для розв'язку	
	а) кінець нерухомий	б) кінець вільний
I, IX	$u(t, x) = 0$	

II	$u(t, x) = 4x$	$u(t, x) = 4(1 + at)$
III	$u(t, x) = 2(x + at - 1)$	
IV	$u(t, x) = 4at$	
V	$u(t, x) = 0$	$u(t, x) = 4$
VI	$u(t, x) = 2(x - at + 2)$	$u(t, x) = -2(x - at)$
VII	$u(t, x) = 2$	
VIII	$u(t, x) = -2(x - at - 2)$	

Графічна ілюстрація коливань одержується аналогічно до задачі 8.

11. Період коливань $T = 12$.

12. Період коливань: а) $T = 2$, б) $T = 1$, в) $T = 4$, г) $T = 4$.

13. Період коливань: а) $T = 3$, б) $T = 3$, в) $T = 6$, г) $T = 6$.

14. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0; 2),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 4 - x^2, \quad x \in [0; 2],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, 2) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція
$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{512 \cdot (-1)^k}{[(2k-1)\pi]^4 a} \sin \frac{2k-1}{4} \pi at \cos \frac{2k-1}{4} \pi x.$$

15. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = x^3(2-l) - x^2 l(3-l), \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 2) - U(t, 2) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція
$$U(t, x) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4l^2 - 6) \cos \lambda_k l + 3l + 6}{\lambda_k^4 (l - \sin^2 \lambda_k l)} \cos a \lambda_k t \cos \lambda_k x,$$
 де λ_k – додатні

корені рівняння $\lambda \operatorname{tg}(\lambda l) = -1$.

16. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + A \sin t, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = 0, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція $U(t, x) = A(t - \sin t)$.

17. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = 4U_{xx} - A \cos t, \quad t > 0, \quad x \in (0; l),$$

$$U(0, x) = x^2 - 2lx + A, \quad U_t(0, x) = 0, \quad x \in [0; l],$$

$$U(t, 0) = A \cos t, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція $U(t, x) = A \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32l^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \cos \frac{(2k-1)\pi}{l} t \sin \frac{(2k-1)\pi}{2l} x$.

18. $U(t, x) = 2x(1-x^2) + q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{(\pi n)^3} (-1)^n \cos \frac{\pi n}{2} t \sin \pi n x$.

19. а) $U(t, x) = \frac{4Al^2}{4l^2 + (a\pi)^2} \left(e^{-t} - \cos \frac{a\pi}{2l} t + \frac{2l}{a\pi} \sin \frac{a\pi}{2l} t \right) \cos \frac{\pi}{2l} x$.

б) $U(t, x) = 0,5t - \left(0,25 + \cos \frac{2}{a} x \right) \sin 2t$.

в) $U(t, x) = W(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) (\lambda_n \cos \lambda_n x + h \sin \lambda_n x)$, де

$$W(x) = \alpha x - \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(\xi) d\xi dy + \left\{ \beta - \alpha l + \frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^y f(\xi) d\xi dy \right\} \cdot \frac{1+hx}{1+hl},$$

$$A_n = \frac{2}{h+l(h^2+\lambda_n^2)} \int_0^l [\varphi(\xi) - W(\xi)] (\lambda_n \cos \lambda_n \xi + h \sin \lambda_n \xi) d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{a\lambda_n [h+l(h^2+\lambda_n^2)]} \int_0^l \psi(\xi) (\lambda_n \cos \lambda_n \xi + h \sin \lambda_n \xi) d\xi, \text{ а}$$

λ_n – додатні корені рівняння: $h \operatorname{tg}(\lambda l) = -\lambda$.

г) $U(t, x) = \frac{100}{49(a\pi)^2} \left(1 - \cos \frac{7\pi a}{10} t \right) \sin \frac{7\pi}{10} x$.

20. а) Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad x \in (0; b), \quad y \in (0; c),$$

$$U(0, x, y) = \sin \frac{\pi}{b} x \cdot \sin \frac{\pi}{c} y, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; b], \quad y \in [0; c],$$

$$U(t, 0, y) = U(t, b, y) = 0, \quad U(t, x, 0) = U(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція $U(t, x, y) = \cos a\pi \sqrt{b^{-2} + c^{-2}} t \cdot \sin \frac{\pi}{b} x \sin \frac{\pi}{c} y$.

б) Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + \rho^{-1} e^{-t} x(x-b) \sin \frac{2\pi}{c} y, \quad t > 0, \quad x \in (0; b), \quad y \in (0; c),$$

$$U(0, x, y) = 0, \quad U_t(0, x, y) = 0, \quad x \in [0; b], \quad y \in [0; c],$$

$$U(t, 0, y) = U(t, b, y) = 0, \quad U(t, x, 0) = U(t, x, c) = 0, \quad t \geq 0,$$

де ρ – поверхнева густина маси мембрани, є функція

$$U(t, x, y) = \sin \frac{2\pi}{c} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8b^2}{\rho \pi^3 (1 + [a\pi \omega_n]^2) (2n-1)^3} \left(e^{-t} - \cos a\pi \omega_n t + [a\pi \omega_n]^{-1} \sin a\pi \omega_n t \right) \times \\ \times \sin \frac{(2n-1)\pi}{b} x, \text{ де } \omega_n = \sqrt{b^{-2} (2n-1)^2 + 4c^{-2}}.$$

21. Розв'язки задач:

$$\text{a) } U(t, x, y) = txy(x-b)\sin t - \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{128b^3c^4}{\pi^7(2k-1)^3(\omega_{n,k}^2-1)} \cdot \frac{(2n-1)\pi-3}{(2n-1)^4} \times \\ \times \{\cos \omega_{n,k}t - \cos t\} \sin \frac{(2k-1)\pi}{b}x \sin \frac{(2n-1)\pi}{2c}y,$$

$$\text{де } \omega_{n,k} = \sqrt{\left[\frac{(2k-1)\pi}{b}\right]^2 + \left[\frac{(2n-1)\pi}{2c}\right]^2}.$$

$$U(t, x, y) = A(y+1) + \frac{1 - \cos a\sqrt{4 + \pi^2}t}{a^2(4 + \pi^2)} \cos 2x \sin \pi y -$$

б)

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8A}{\pi^3(2k-1)^3} \cos a\pi(2k-1)t \sin \pi(2k-1)y.$$

$$U(t, x, y) = Atx^2 + \frac{\sin \sqrt{1 + \pi^2}t}{1 + \pi^2} \cos y \sin \pi x +$$

в)

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16^3 A}{\pi^5(2k-1)^5} \left[\frac{4}{\pi(2k-1)} \sin \frac{\pi(2k-1)}{4}t - t \right] \sin \frac{\pi(2k-1)}{4}x.$$

22. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + 2r^{-1}U_r), \quad t > 0, \quad r \in (0; R),$$

$$U(0, r) = \varphi(r), \quad U_t(0, r) = 0, \quad r \in [0; R],$$

$$|U(t, 0)| < \infty, \quad U_r(t, R) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\text{є функція } U(t, r) = \frac{3}{R^3} \int_0^R \rho^2 \varphi(\rho) d\rho + \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\gamma_n}{R} r}{r} \cdot \frac{\cos \frac{\gamma_n a}{R} t}{\sin^2 \gamma_n} \cdot \int_0^R \rho \varphi(\rho) \sin \frac{\gamma_n}{R} \rho d\rho, \text{ де}$$

γ_n – додатні корені рівняння $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$, R – радіус сфери, a – швидкість поширення коливань у газі.

Вказівка: ввести заміну $U(t, r) = r^{-1} \cdot V(t, r)$.

23. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + r^{-1}U_r) + PT^{-1}, \quad t > 0, \quad r \in (0; R),$$

$$U(0, r) = 0, \quad U_t(0, r) = 0, \quad r \in [0; R],$$

$$|U(t, 0)| < \infty, \quad U(t, R) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\text{є функція } U(t, r) = \frac{P}{a^2 T} \left[\frac{1}{4} (R^2 - r^2) - 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n R^{-1} r)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a\mu_n}{R} t \right],$$

де μ_n – додатні корені рівняння $J_0(\mu) = 0$; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функції Бесселя (див. додаток у кінці книги).

24. Розв'язком мішаної задачі

$$U_{tt} = a^2(U_{rr} + r^{-1}U_r), \quad t > 0, \quad r \in (0; R),$$

$$U(0, r) = A(1 - r^2 R^{-2}), \quad U_t(0, r) = 0, \quad r \in [0; R],$$

$$|U(t, 0)| < \infty, \quad U(t, R) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція $U(t, r) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_n R^{-1} r)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{a\mu_n}{R} t$, де μ_n – додатні корені рівняння $J_0(\mu) = 0$; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функції Бесселя (див. додаток).

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ IV

1. Відповідні математичні моделі (тут і далі використані позначення фізичних величин, подані на с. 105-106):

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad U_t = a^2 U_{xx} + \frac{f(t, x)}{c\rho}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

а) $U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \text{б) } U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0. \quad U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0.$

$$U_t = a^2 U_{xx} - b[U - \theta(t, x)], \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

в) $U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U(t, 0) = \omega(t), \quad k\sigma U_x(t, l) = v(t), \quad t \geq 0.$

$$U_t = a^2 U_{xx} + (c\rho)^{-1} f(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

г) $U(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$
 $U_x(t, 0) - hU(t, 0) = -h\gamma(t), \quad U_x(t, l) + hU(t, l) = 0, \quad t \geq 0, \quad h = \alpha k^{-1}.$

2. Відповідні математичні моделі:

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

а) $U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\mathbf{D}},$
 $U(t, 0, y) = 0, \quad U(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4,$
 $U(t, x, 0) = 0, \quad U(t, x, 4) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$

$$U_t = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + (c\rho)^{-1} f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

б) $U(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \bar{\mathbf{D}},$
 $U_x(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4,$
 $U_y(t, x, 0) = 0, \quad U_y(t, x, 4) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

$$\text{в) } U(0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$U(t, 0, y) = \omega_1(t, y), \quad k\sigma_1 U_x(t, 1, y) = v_1(t, y), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4,$$

$$-k\sigma_2 U_y(t, x, 0) = v_2(t, y), \quad U(t, x, 4) = \omega_2(t, y), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

де σ_1 і σ_2 – поперечні перерізи пластинки в напрямках осей y і x відповідно.

$$U_t = a^2(U_{xx} + U_{yy}) + (c\rho)^{-1} f(t, x, y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{D},$$

$$\text{г) } U(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$U_x(t, 0, y) - hU(t, 0, y) = 0, \quad U_x(t, 1, y) + hU(t, 1, y) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad h = \alpha k^{-1},$$

$$U_y(t, x, 0) - hU(t, x, 0) = -h\gamma_1(t, x), \quad U_y(t, x, 4) + hU(t, x, 4) = h\gamma_2(t, x), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3. Відповідні математичні моделі:

$$r^2 U_t = a^2 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r), \quad t > 0, \quad 0 < r < R,$$

$$\text{а) } U(0, r) = \Phi(r), \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$U(t, R) = 0, \quad t \geq 0.$$

$$r^2 U_t = a^2 \frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r) + (c\rho)^{-1} r^2 f(t, r), \quad t > 0, \quad 0 < r < R,$$

$$\text{б) } U(0, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$U_r(t, R) = 0, \quad t \geq 0.$$

$$U_t = a^2 \Delta U(t, r, \theta, \varphi), \quad t > 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{в) } U(0, r, \theta, \varphi) = 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$kU_r(t, R, \theta, \varphi) = v(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

$$U_t = a^2 \Delta U(t, r, \theta, \varphi) + (c\rho)^{-1} f(t, r, \theta, \varphi), \quad t > 0, \quad (r, \theta, \varphi) \in \mathbf{D},$$

$$\text{г) } U(0, r, \theta, \varphi) = \Phi(r, \theta, \varphi), \quad (r, \theta, \varphi) \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$U_r(t, R, \theta, \varphi) + 4U(t, R, \theta, \varphi) = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Примітка. У випадках а) і б) розподіл температури в кулі буде радіальним, тобто $U(t, r, \theta, \varphi) \equiv U(t, r)$. У випадках в) і г) оператор Лапласа

$$\Delta U(t, r, \theta, \varphi) = r^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 U_r) + \sin^{-1} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta U_\theta) + \sin^{-2} \theta U_{\varphi\varphi} \right]$$

4. Відповідна математична модель:

$$S(x)U_t = a^2 \frac{\partial}{\partial x}[S(x)U_x] - b_1[U - \theta(t, x)], \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad b_1 = \alpha \omega (c\rho)^{-1},$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U(t, 0) = \omega(t), \quad kS(l)U_x(t, l) = v(t), \quad t \geq 0.$$

5. Постановка задачі: в області $\mathbf{B} = \{(t, x) | t > 0, \quad 0 < x < l\}$ знайти розв'язок рівняння $U_t = DU_{xx}$, (D – коефіцієнт дифузії), який при $0 \leq x \leq l$ задовольняє початкову умову $U(0, x) = \varphi(x)$ (задана початкова концентрація), а при $t \geq 0$ – крайові умови: а) $U(t, 0) = U(t, l) = 0$; б) $U_x(t, 0) = U_x(t, l) = 0$; в) якщо через α позначити коефіцієнт проникності кожної з граничних площин, то дістанемо $U_x(t, 0) - hU(t, 0) = 0$, $U_x(t, l) + hU(t, l) = 0$, де $h = \alpha D^{-1}$. **Вказівка:** скористатися законом дифузії Нернста (див. додаток у кінці книги).
6. Для визначення концентрації $U(t, x)$ дифундууючої речовини одержуємо рівняння $U_t = DU_{xx} - vU_x$, де v – швидкість руху середовища. **Вказівка:** для виведення рівняння слід виділити елемент із сталою площею поперечного перерізу, паралельний до осі x , і розглянути кількості речовини, які проходять через перерізи x та $x + \Delta x$ за рахунок дифузії і за рахунок перенесення рухомим середовищем.
7. а) $cU_t = D(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) - \beta U$, б) $cU_t = D(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + \beta U$, де $\beta > 0$ – коефіцієнт поглинання.
8. Якщо швидкість рухомої площини зберігає напрям, то швидкості частинок рідини будуть паралельними до цього напрямку. Направляючи вісь x по товщі шару і розташовуючи початок координат на нерухомій площині, для визначення швидкості частинок $V(t, x)$ дістанемо мішану задачу

$$V_t = \nu V_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$V(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$V(t, 0) = 0, \quad V(t, l) = V_0(t), \quad t \geq 0,$$

де l – товщина шару, $V_0(t)$ – швидкість руху граничної площини, $\nu = \mu\rho^{-1}$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості, ρ – густина маси, μ – динамічний коефіцієнт в'язкості, що входить у закон Ньютона для визначення напруги тертя між шарами в'язкої рідини

$$\tau = \mu V_x.$$

Вказівка. При виведенні рівняння нехтувати градієнтом тиску в порівнянні з градієнтом сил тертя, що можна робити, якщо рідина має високу в'язкість.

9. Нехай змінна ζ виражає відстань, яка відраховується від деякої фіксованої площини до площини поля. Тоді для визначення векторів напруженостей електричного поля $\mathbf{E}(t, \zeta)$ і магнітного поля $\mathbf{H}(t, \zeta)$ одержуємо рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \zeta^2},$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі, λ – коефіцієнт електропровідності, μ – коефіцієнт магнітної проникності середовища.

Вказівка. Скористатися системою рівнянь Максвелла при умові, що в розглядуваній області відсутні об'ємні заряди і сторонні електрорушійні сили:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}, \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0, \mathbf{I} = \lambda \mathbf{E},$$

нехтуючи струмами зміщення $\frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}$ в порівнянні зі струмом провідності \mathbf{I}

(ε – діелектрична стала середовища).

$$10. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} \right), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\lambda\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} \right).$$

Вказівка. Рівняння виводяться аналогічно до задачі 9.

11. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$U(0, x) = 2x^3 - 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0, \quad t \geq 0$$

є функція $U(t, x) = -0,5 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{96}{\pi^4 (2k-1)^4} e^{-[a\pi(2k-1)]^2 t} \cdot \cos \pi(2k-1)x$.

12. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U(0, x) = 6 \cos \frac{3\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

де $b = \alpha \varpi (c \rho \sigma)^{-1}$ (див. с. 106), є функція $U(t, x) = 6e^{-[b + (1,5a\pi l^{-1})^2]t} \cdot \cos \frac{3\pi}{2l} x$.

13. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U(0, x) = A \cos \frac{\pi}{4l} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) + \frac{\pi}{4l} U(t, l) = 0, \quad t \geq 0$$

є функція $U(t, x) = A e^{-\left(\frac{a\pi}{4l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi}{4l} x$.

14. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} + (c\rho)^{-1} e^{-t} (x^2 - 2lx), \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U(0, x) = 9 \sin \frac{9\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція

$$U(t, x) = 9e^{-(4,5a\pi l^{-1})^2 t} \cdot \sin \frac{9\pi}{2l} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{a^2 \lambda_k - 1} \left(e^{-t} - e^{-a^2 \lambda_k t} \right) \sin \frac{(2k-1)\pi}{2l} x,$$

$$\text{де } \lambda_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2l} \right]^2, \quad f_k = \frac{32l^2 (c\rho)^{-1}}{\pi^3 (2k-1)^3}.$$

15. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} + (c\rho)^{-1} [lx - (hl+2)(hl+1)^{-1} x^2] t, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad U_x(t, l) + hU(t, l) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція

$$U(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(1+lh)(1-\cos \mu_k l)}{a^3 \mu_k^6 (2+lh) c\rho} \left(1 - e^{-(a\mu_k)^2 t} - a\mu_k t \right) \sin \mu_k x,$$

де μ_k – додатні корені рівняння $\mu_k = -h \operatorname{tg} \mu_k$.

16. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = U_{xx} - b(U - U_0), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$U(0, x) = U_1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = 0, \quad t \geq 0,$$

де $b = \alpha \varpi (c\rho \sigma)^{-1}$ (див. с. 106), є функція $U(t, x) = (U_1 - U_0) e^{-bt} + U_0$.

17. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = U_{xx} - v_0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$U(0, x) = 1 + 0,5v_0 x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad U_x(t, 1) = v_0, \quad t \geq 0,$$

є функція $U(t, x) = 1 + 0,5v_0 x^2$.

18. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = U_{rr} + 2r^{-1} U_r - \frac{1}{2} A r \sin t, \quad t > 0, \quad r \in (0; 1),$$

$$U(0, r) = A, \quad r \in [0; 1],$$

$$|U(t, 0)| < \infty, \quad U_r(t, 1) + U(t, 1) = A \cos t, \quad t \geq 0,$$

є функція

$$U(t, r) = A \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A f_k}{(\lambda_k^4 + 1) r} \left(e^{-\lambda_k^2 t} + \lambda_k^2 \sin t - \cos t \right) \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} r,$$

$$\text{де } \lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad f_k = \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^3}.$$

19. Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = U_{rr} + 2r^{-1} U_r - \sin t, \quad t > 0, \quad r \in (0; 1),$$

$$U(0, r) = r - \frac{1}{2}, \quad r \in [0; 1],$$

$$|U(t, 0)| < \infty, \quad U_r(t, 1) + 2U(t, 1) = 2 \cos t, \quad t \geq 0,$$

є функція

$$U(t, r) = \cos t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(\cos \mu_k - 1)}{\mu_k^3 (1 + \cos^2 \mu_k)} e^{-\mu_k^2 t} \sin \mu_k r,$$

де μ_k – додатні корені рівняння $\mu_k = -\operatorname{tg} \mu_k$.

20. Розв'язки мішаних задач:

$$\text{а) } U(t, x) = e^{-bt} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2bl^3 \cdot [(-1)^n \cos l - 1] \cdot [(\pi n)^2 + l^2]}{(\pi n - l)^2 (\pi n + l)^2 [(a\pi n)^2 - bl^2]} \left[e^{-bt} - e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \right] \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

$$\text{б) } U(t, r) = 1 + \frac{r^2 - 3}{6a^2} - \frac{32}{a^2 \pi^4 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^4} e^{-\frac{[(2n-1)a\pi]^2}{4} t} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} r.$$

$$\text{в) } U(t, x, y) = Ax + \frac{4}{(6a\pi)^4} \left[1 - (6a\pi)^2 t - e^{-(6a\pi)^2 t} \right] \sin 6\pi x;$$

$$\text{г) } U(t, x, y) = 2txy + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{1 + \lambda_k^2} (\sin t + \lambda_k \cos t - \lambda_k e^{-\lambda_k t}) \sin 4\pi y, \text{ де}$$

$$\lambda_k = \pi^2 \left([2k-1]^2 + 16 \right), \quad f_k = -\frac{16}{\pi^3 (2k-1)^3};$$

$$\text{д) } U(t, x, y) = 10 + \frac{3}{a^2} (1 - e^{-a^2 t}) \cos y + \frac{2}{45a^2} (1 - e^{-45a^2 t}) \cos 6x \cos 3y.$$

21. Розв'язками задачі Коші

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

при заданих значеннях початкової температури $\varphi(x)$ є функції:

$$\text{а) } U(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4a^2 t + 1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t + 1}\right);$$

$$\text{б) } U(t, x) = T\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \text{ тут і далі у відповідях до розділу IV } \Phi(z) \text{ – інтеграл}$$

імовірностей (див. додаток у кінці книги).

22. Розв'язком задачі Коші

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U(0, x) = A, \quad x \in \mathbf{R},$$

де $b = \alpha \pi (c \operatorname{erfc})^{-1}$ (див. с. 106), є функція $U(t, x) = Ae^{-bt}$.

$$\text{23. а) } U(t, x) = e^{-t(a^2+1)} (\sin x - \cos x).$$

$$\text{б) } U(t, x) = 0,5 \left[\Phi\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right) + 1 \right] + \frac{0,5e^{-0,5x^2}}{\sqrt{8t+1}} \left[\Phi\left(\frac{x}{4\sqrt{t(8t+1)}}\right) + 1 \right].$$

24. Розв'язком задачі Коші

$$U_t = U_{xx} + f(t) \exp(-0,25x^2), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

де $\varphi(x)$ – задана в умові початкова температура, ϵ функція

$$U(t, x) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + 0,5U_0 \left[\Phi\left(\frac{l-x}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{l+x}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau+1}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau+1)}} d\tau.$$

25. а) $U(t, x) = 5 + e^{-t}(\sin t - \cos t)$.

б) $U(t, x) = e^{-at(a-2)} \cos x - 1$.

в) $U(t, x) = e^{-5t} \sin 2x$.

г) $U(t, x) = At + B$.

26.
$$U(t, x) = (c\rho)^{-1} \cdot \int_0^t (e^{-\tau} - 1) \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + \frac{e^{-\frac{x^2+0,25t^2}{1+t}}}{2\sqrt{1+t}} \left[e^{-\frac{x}{1+t}} \left(1 + \Phi\left(\frac{2x-t}{2t\sqrt{1+t}}\right) \right) + e^{\frac{x}{1+t}} \left(1 - \Phi\left(\frac{2x+t}{2t\sqrt{1+t}}\right) \right) \right].$$

27.
$$U(t, x) = \operatorname{ch} x + 0,5 \left[e^{-x} \Phi\left(\frac{2x-t}{2\sqrt{t}}\right) - e^x \Phi\left(\frac{2x+t}{2\sqrt{t}}\right) \right] +$$

28. а) Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} - bU, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(t, 0) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

де $b = \alpha\pi(c\rho\sigma)^{-1}$ (див. с. 106), ϵ функція

$$U(t, x) = \frac{x e^{-bt}}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)} + b\tau\right) d\tau.$$

б) Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$U(0, x) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$-k\sigma U_x(t, 0) = v(t), \quad t \geq 0,$$

ϵ функція
$$U(t, x) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(\tau)}{k\sigma\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau.$$

29. а) Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} - \beta U, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a^2 = k,$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

$$U(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

ϵ функція

$$U(t, x) = e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t \frac{f(\tau)}{\rho} e^{\beta \tau} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right] d\xi \right\};$$

при $\varphi(x) = 0$, $f(t) = A\rho e^{-\beta t}$ $U(t, x) = Ae^{-\beta t} \left\{ t + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) d\tau \right\}$.

б) Розв'язком мішаної задачі

$$U_t = a^2 U_{xx} - \beta U, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad a^2 = k,$$

$$U(0, x) = \varphi(x), \quad x \geq 0,$$

$$U_x(t, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

є функція

$$U(t, x) = e^{-\beta t} \left\{ \int_0^t f(\tau) e^{\beta \tau} d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right) \right] d\xi \right\};$$

при $\varphi(x) = 0$, $f(t) = Ae^{-\beta t}$ маємо: $U(t, x) = Ate^{-\beta t}$.

30.

а) $U(t, x) = e^{-x} + \int_0^t e^{0,25(t-\tau)} \left\{ \operatorname{ch} x + e^{-x} \Phi\left(\frac{x}{t-\tau} - \frac{1}{2}\right) - e^x \Phi\left(\frac{x}{t-\tau} + \frac{1}{2}\right) \right\} d\tau$.

б) $U(t, x) = e^{-2t} \left\{ \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{4t+1}} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t(4t+1)}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right\}$.

в) $U(t, x) = e^{-t} (2 + e^{-x}) - 2$.

г) $U(t, x) = 2a \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right) \cdot \int_0^t \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)(t-\tau+1)}}\right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau+1}}$.

ВІДПОВІДІ ДО РОЗДІЛУ V

1. $\Delta U(x, y, z) = -k^{-1} f(x, y, z)$, де $U(x, y, z)$ – температура, k – коефіцієнт теплопровідності, $f(x, y, z)$ – інтенсивність джерел тепла.
2. $\Delta U(x, y, z) = 0$, де $U(x, y, z)$ – концентрація.
3. $\Delta U(x, y, z) = -4\pi\varepsilon^{-1}\rho(x, y, z)$, де $U(x, y, z)$ – потенціал електростатичного поля, ε – діелектрична стала.
4. $\Delta U(x, y, z) = 0$, де $U(x, y, z)$ – потенціал магнітного поля.
5. $\Delta U(x, y, z) = 0$, де $U(x, y, z)$ – потенціал електричного поля.
6. $\Delta U(x, y, z) = -\rho^{-1} f(x, y, z)$, де $U(x, y, z)$ – потенціал швидкостей, ρ – густина рідини, $f(x, y, z)$ – інтенсивність джерел рідини.
7. Якщо T – величина натягу, а ρ – поверхнева густина мембрани, то

$$\Delta U(x, y) \equiv U_{xx} + U_{yy} = -T^{-1}f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

а) $U(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$
 $U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$

$$\Delta U(x, y) = -T^{-1}\rho f(x, y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

б) $U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$
 $U_x(0, y) = 0, \quad U_x(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

в) $TU_y(x, 0) = -v_1(x), \quad TU_y(x, b) = v_2(x), \quad 0 \leq x \leq a;$
 $U(0, y) = \mu_1(y), \quad U(a, y) = \mu_2(y), \quad 0 \leq y \leq b.$

$$\Delta U(x, y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

г) $U_y(x, 0) - hU(x, 0) = -h\theta_2(x), \quad U_y(x, b) + hU(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad h = \alpha T^{-1};$
 $U_x(0, y) - hU(0, y) = 0, \quad U_x(a, y) + hU(a, y) = h\theta_1(y), \quad 0 \leq y \leq b.$

8.

а) Згідно з умовою $U(\rho, \varphi, z) \equiv U(\rho, \varphi)$, тому маємо задачу:

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(R, \varphi) = f(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

б) Згідно з умовою $U(\rho, \varphi, z) \equiv U(\rho, \varphi)$, тому маємо задачу:

$$\Delta U(\rho, \varphi) = -4\pi\varepsilon^{-1}F(\rho, \varphi), \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

в) $\Delta U(\rho, \varphi, z) \equiv U_{\rho\rho} + \frac{U_{\rho}}{\rho} + \frac{U_{\varphi\varphi}}{\rho^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}F(\rho, \varphi, z), \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R};$

$$U(R, \varphi, z) = f(\varphi, z), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

г) Згідно з умовою $U(\rho, \varphi, z) \equiv U(\rho)$, тому маємо задачу:

$$\Delta U(\rho) \equiv U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} = -4\pi F(\rho), \quad 0 < \rho < R;$$

$$U(R) = 0.$$

9. Якщо $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – площі країв $\varphi = 0, \varphi = \alpha$ і $\rho = R$ відповідно, то

$$\Delta U(\rho, \varphi) \equiv U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = -k^{-1}F(\rho), \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha;$$

а) $U_{\varphi}(\rho, 0) = 0, \quad U_{\varphi}(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R;$

$$U_{\rho}(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha.$$

$$\Delta U(\rho, \varphi) = -k^{-1}F(\rho, \varphi), \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha;$$

$$\text{б) } U(\rho, 0) = 0, \quad U(\rho, \alpha) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R;$$

$$U(R, \varphi) = \mu(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha.$$

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha;$$

$$\text{в) } k\sigma_1 U_\varphi(\rho, 0) = -v_1(\rho), \quad k\sigma_2 U_\varphi(\rho, \alpha) = v_2(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R;$$

$$U_\rho(R, \varphi) + hU(R, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha.$$

$$\Delta U(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 < \varphi < \alpha;$$

$$\text{г) } U_\varphi(\rho, 0) - hU(\rho, 0) = -h\theta(\rho), \quad U(\rho, \alpha) = \mu(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R;$$

$$k\sigma_3 U_\rho(R, \varphi) = v(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha.$$

$$10. \text{ а) } U(x, y) \equiv U(y) = \frac{u_2 - u_1}{b} y + u_1. \quad \text{б) } U(x, y) \equiv U(x) = \frac{u_2 - u_1}{a + 1} x + u_1.$$

$$\text{в) При } A = B, \quad C = D \text{ розв'язок: } U(x, y) = Ax + Cy + const.$$

$$\text{г) При } A = -0,25b^3 \quad U(x, y) = -\frac{b^3}{4} x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12b^4 \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b}}{(\pi n)^5 \operatorname{ch} \frac{\pi n a}{b}} [(-1)^n - 1] \cos \frac{\pi n}{b} y + const.$$

$$11. \text{ а) } U(x, y) \equiv U(y) = Q \frac{y^2 - by}{2} + \frac{u_2 - u_1}{b} y + u_1.$$

$$\text{б) } U(x, y) \equiv U(x) = Q \frac{x^2}{2} + \frac{2(u_2 - u_1) - aQ(2 + a)}{2(a + 1)} x + u_1.$$

$$\text{в) При виконанні умови } Q = \frac{D - C}{b} + \frac{B - A}{a} \text{ розв'язком задачі буде функція}$$

$$U(x, y) = \frac{D - C}{2b} y^2 + \frac{B - A}{2a} x^2 + Ax + Cy + const.$$

$$\text{г) При } A = -aQ \text{ розв'язок: } U(x, y) = Q \left(\frac{x^2}{2} - ax \right) + \frac{b \operatorname{ch} \frac{\pi x}{b}}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi a}{b}} \cos \frac{\pi}{b} y + const.$$

12. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < a;$$

$$U_y(x, 0) = 6 \sin \frac{x}{2}, \quad U_y(x, a) + U(x, a) = 3x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$U(0, y) = 0, \quad U_x(\pi, y) = 3, \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$\text{є функція } U(x, y) = 3x + \frac{24 \operatorname{sh} \frac{y-a}{2} - 12 \operatorname{ch} \frac{y-a}{2}}{2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} + \operatorname{sh} \frac{a}{2}} \sin \frac{x}{2}.$$

13. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2\pi;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U(x, 2\pi) = A, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U_x(0, y) - U(0, y) = A(\cos \frac{3}{4}y - 1), \quad U_x(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(x, y) = A - \frac{4A \operatorname{ch} \frac{3(x-1)}{4}}{4 \operatorname{ch} \frac{3}{4} + 3 \operatorname{sh} \frac{3}{4}} \cos \frac{3y}{4}.$$

14. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U(x, 2) = B \sin 4\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$U(0, y) = A \sin \pi y, \quad U(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(x, y) = \frac{A \operatorname{sh}[\pi(1-x)]}{\operatorname{sh} \pi} \sin \pi y + \frac{B \operatorname{sh} 4\pi y}{\operatorname{sh} 8\pi} \sin 4\pi x.$$

15. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 18xy, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$U_y(x, 0) = 0, \quad U_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$U(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(x, y) = 3xy(x^2 - a^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24a^4 \cdot (-1)^n}{(\pi n)^4 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \operatorname{sh} \frac{\pi n(2y-b)}{2a} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

16. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = 12y - 6(a^2 - x^2) \sin \frac{5\pi}{2b} y, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b;$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U_y(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$U_x(0, y) = 0, \quad U(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(x, y) = 2y^3 - 6b^2 y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1152b^3 \cdot (-1)^n \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2b} x}{(2n-1)^4 \pi^4 \operatorname{ch} \frac{(2n-1)\pi}{2b} a} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2b} y -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{768a^4 b^2 \cdot (-1)^n}{(2n-1)^3 \pi^5 [(2n-1)^2 b^2 + 25a^2]} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \sin \frac{5\pi}{2b} y.$$

17. Розв'язком крайової задачі

$$U_{xx} + U_{yy} = -4\pi \epsilon^{-1} f(x) \sin 3y, \quad 0 < x, y < \pi;$$

$$U(x, 0) = 0, \quad U(x, \pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$U(0, y) = 0, \quad U(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\epsilon(n^2 + 9)} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi \sin nx \sin 3y \quad (\epsilon - \text{діелектрична}$$

стала середовища).

$$18. U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{32Ab^2}{(2n-1)^3 \pi^3} e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2b}x} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2b} y.$$

$$19. U(x, y, z) \equiv U(z) = u_1 + (u_2 - u_1)h^{-1}z.$$

$$20. \text{а) } U(x, y) = y(1 + 3x^3) + \frac{b \operatorname{ch} \frac{2\pi}{b} x}{2\pi \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{b}} \cos \frac{2\pi}{b} y + \operatorname{const}.$$

$$\text{б) } U(x, y) = x(1 + 3y^2) + 2y^3 + \frac{2 \operatorname{ch} \pi y}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}} \cos \pi x + \operatorname{const}.$$

$$21. \text{а) } U(\rho, \varphi) = A. \quad \text{б) } U(\rho, \varphi) = A + B\rho \sin \varphi. \quad \text{в) } U(\rho, \varphi) = 0,5A\rho^2 \sin 2\varphi.$$

$$\text{г) } U(\rho, \varphi) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2} \rho^2 \cos 2\varphi.$$

$$22. U(\rho, \varphi) = 0,25(\rho^2 - a^2).$$

$$23. \text{б) } U(\rho, \varphi) = 0,5A\rho^2 \cos 2\varphi + \operatorname{const}.$$

$$\text{г) } U(\rho, \varphi) = (A + 0,75B)\rho \sin \varphi - \frac{B}{12a^2} \rho^3 \sin 3\varphi + \operatorname{const}.$$

Задачі а) та в) поставлені некоректно.

$$24. \text{При } B = 0,5aA \text{ розв'язок існує і має вигляд } U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho) = 0,25A\rho^2 + \operatorname{const}.$$

$$25. \text{а) } U(\rho, \varphi) = A. \quad \text{б) } U(\rho, \varphi) = A + Ba^2\rho^{-1} \sin \varphi. \quad \text{в) } U(\rho, \varphi) = 0,5Aa^4\rho^{-2} \sin 2\varphi.$$

$$\text{г) } U(\rho, \varphi) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2\rho^2} a^2 \cos 2\varphi.$$

$$26. \text{б) } U(\rho, \varphi) = -0,5Aa^5\rho^{-2} \cos 2\varphi + \operatorname{const}.$$

$$\text{г) } U(\rho, \varphi) = -(A + 0,75B)a^2\rho^{-1} \sin \varphi - \frac{Ba^4}{12\rho^3} \sin 3\varphi + \operatorname{const}.$$

Задачі а) та в) поставлені некоректно.

$$27. U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\ln(\rho a^{-1})}{\ln(ba^{-1})}.$$

$$28. \text{а) } U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho) = u_2 + 0,25A(\rho^2 - b^2) + \frac{u_1 - u_2 + 0,25A(b^2 - a^2)}{\ln(0,25b)} \ln \frac{b}{\rho}.$$

$$\text{б) } U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho) = u_1 + 0,25A(\rho^2 - a^2) + b(C - 0,5Ab) \ln \frac{\rho}{a}.$$

в) $U(\rho, \varphi) \equiv U(\rho) = 0,25A\rho^2 - a(0,5Aa - B) \ln \rho + \operatorname{const}$. Задача має розв'язок лише за виконання умови $2aC = A(b^2 - a^2) + 2aB$.

29. Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U_{\rho}(R, \varphi) = -40 \cos 2\varphi \sin 3\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$\epsilon \text{ функція } U(\rho, \varphi) = 20\rho^{-1} \sin \varphi + 4\rho^{-5} \sin 5\varphi + \operatorname{const}.$$

30. Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U_{\rho}(R, \varphi) = V_0 \cos 4\varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = \frac{V_0 \rho^4}{4R^3} \cos 4\varphi + \text{const.}$

31. а) Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U_{\rho}(1, \varphi) = 39 \cos 3\varphi, \quad U(2, \varphi) = A \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = 0,4A(\rho + \rho^{-1}) \sin \varphi - \frac{13}{63}(\rho^3 - 64\rho^{-3}) \cos 3\varphi.$

б) Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(1, \varphi) = A \cos 3\varphi, \quad U_{\rho}(2, \varphi) = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = 0,8(\rho - \rho^{-1}) \sin \varphi + \frac{A}{65}(\rho^3 + 64\rho^{-3}) \cos 3\varphi.$

32. Електростатичне поле $\mathbf{E} = -\text{grad}U$, де потенціал $U = U(\rho) = u_0 \frac{\ln(b\rho^{-1})}{\ln(ba^{-1})}$ є

розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 0, \quad a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(a, \varphi) = u_0, \quad U(b, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

33. Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 8 \cos 4\varphi, \quad 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(a, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\rho}{a} \right)^2 - 1 \right] \rho^2 \cos 4\varphi.$

34. а) Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = 68 \cos 2\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(1, \varphi) = 10 \sin \varphi + 1, \quad U_{\rho}(2, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = 1 + (2\rho + 8\rho^{-1}) \sin \varphi + [16 \ln 2 e(\rho^{-2} - \rho^2) + 17\rho^2 \ln \rho] \cos 2\varphi.$

б) Розв'язком крайової задачі

$$U_{\rho\rho} + \rho^{-1}U_{\rho} + \rho^{-2}U_{\varphi\varphi} = A T^{-1} \sin 2\varphi, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$U(1, \varphi) = 0, \quad T U_{\rho}(2, \varphi) = A, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

є функція $U(\rho, \varphi) = \frac{2A}{T} \ln \rho - \frac{2A}{17T} (1 + 2 \ln 2) (\rho^2 - \rho^{-2}) \sin 2\varphi.$

35. а) $U(\rho, \varphi) = \frac{1}{9}(\rho^3 - a^3) + C.$

$$\text{б) } U(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \cdot (-1)^n (\rho^{2n-1} - \rho^{1-2n})}{\pi(4n^2 - 1)(2n - 3)(2^{2n-1} - 2^{1-2n})} \cos(2n - 1)\varphi.$$

$$\text{в) } U(\rho, \varphi) = \rho^2 \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{16(\rho^2 - \rho)}{3\pi} \sin \varphi - \frac{8\rho^2}{7\pi} \ln \rho \sin 2\varphi + \\ + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{240n \cdot (-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4 - n^2)} (\rho^n - \rho^2) \sin n\varphi.$$

$$\text{г) } U(\rho, \varphi) = \frac{8A}{27\pi} (\rho^2 - \rho) \sin 4\varphi + \frac{4A}{225\pi} \rho^2 \ln \rho \sin 8\varphi - \\ - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{8An \cdot (-1)^n}{\pi(4n^2 - 1)^2 (4 - n^2)} (\rho^n - \rho^2) \sin 4n\varphi.$$

$$\text{д) } U(\rho, \varphi) = \frac{\rho^2}{2} + \frac{b^3(\rho^4 + a^4)}{\rho^2(b^4 - a^4)} \cos 2\varphi + \text{const.}$$

$$\text{е) } U(\rho, \varphi) = C\rho^2 \cos 3\varphi + \frac{2C}{1 + 2^{12}} \left(\rho^6 + \frac{2^{12}}{\rho^6} \right) \cos 6\varphi.$$

$$36. \text{ а) } U = u_0. \quad \text{б) } U = U(r) = ar^{-1}u_0.$$

$$37. U = U(r) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{a^{-1} - b^{-1}} (r^{-1} - b^{-1})$$

$$38. \text{ а) } U = U(r) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2). \quad \text{б) } U = U(r) = \frac{A}{12}(r^3 - a^3) + \frac{B}{6}(r^2 - a^2)$$

$$39. \text{ а) } U = U(r) = \frac{1}{6}(r^2 - a^2) + \frac{1}{6}ab(a + b)(r^{-1} - a^{-1})$$

$$\text{б) } U = U(r) = \frac{A}{6}(r^2 - a^2) + \frac{B}{2}(r - a) + ab \left[\frac{A}{6}(b + a) + \frac{B}{2} \right] (r^{-1} - a^{-1})$$

$$40. G(P, M) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[\text{ch}(x+\xi) - \cos(y-\eta)] \cdot [\text{ch}(x-\xi) - \cos(y+\eta)]}{[\text{ch}(x+\xi) - \cos(y+\eta)] \cdot [\text{ch}(x-\xi) - \cos(y-\eta)]}, \text{ де } P = P(\xi, \eta), M = M(x, y).$$

$$41. \text{ а) } G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0},$$

причому (див. рис. 46) $\rho_0 \rho_1 = R^2$.

$$\text{б) } G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = G_1(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi; \rho_0, -\varphi_0),$$

де G_1 – розв'язок задачі для круга 41а).

$$\text{в) } G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = G_1(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi; \rho_0, -\varphi_0) + \\ + G_1(\rho, \varphi; \rho_0, \pi + \varphi_0) - G_1(\rho, \varphi; \rho_0, \pi - \varphi_0),$$

де G_1 – розв'язок задачі для круга 41а).

$$\text{г) } G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [G_1(\rho, \varphi; \rho_0, 2k\alpha + \varphi_0) - \\ - G_1(\rho, \varphi; \rho_0, 2k\alpha - \varphi_0)], \text{ де } G_1 \text{ розв'язок задачі 41а), } \alpha = \pi/n.$$

42. Якщо e – точковий заряд у перерізі циліндра, то потенціал (див. рис. 46)

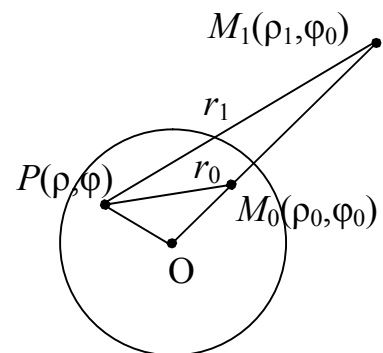


Рис. 46

а) $U = e \ln \frac{\rho_0 r_1}{R r_0}$, б) $U = e \ln \frac{\rho_1 r_0}{R r_1}$, де $\rho_0 \rho_1 = R^2$; R – радіус циліндра.

43. Функція Гріна всередині кільця подається формулою

$$G(P, M) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{e_n r'_n}{r_n e'_n}, \text{ де } P = P(\rho, \varphi), M = M_0(\rho_0, \varphi_0); r_n = |PM_n|,$$

$M_n = M_n(\rho_n, \varphi_0)$; $r'_n = |PM'_n|$, $M'_n = M'_n(\rho'_n, \varphi_0)$, а величини e_n , e'_n , ρ_n , ρ'_n визначаються з формул

$$e_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k, & n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad e'_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{\rho_0}, & n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{b}{\rho_0}, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad (*)$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \rho_0, & n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{2(k+1)} \rho_0, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad \rho'_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \frac{a^2}{\rho_0}, & n = 2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{2k} \frac{b^2}{\rho_0}, & n = 2k + 1. \end{cases} \quad (**)$$

При $a \rightarrow 0$ дістанемо розв'язок задачі 42а), при $b \rightarrow \infty$ – задачі 42б).

44. Нехай точковий заряд e розміщений в точці $P(\xi, \eta, \zeta)$, тоді його зображення в площині $z=0$ буде в точці $P_1(\xi, \eta, -\zeta)$. Якщо $M(x, y, z)$ точка спостереження, то потенціал точкового заряду e рівний

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \left(r_0^{-1} - r_1^{-1} \right), \text{ де } r_0 = |PM|, r_1 = |P_1M|.$$

Густина поверхневих зарядів

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{e\zeta}{2\pi} \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2 \right]^{3/2}.$$

Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі $z > 0$ за крайової умови $U(x, y, 0) = f(x, y)$ дається формулою (25) у вигляді

$$U(M) = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi=-\infty}^{+\infty} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{2z}{\left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + \zeta^2 \right]^{3/2}} f(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

45. Потенціал точкового заряду e , розміщеного в точці $P = P(\xi, \eta, \zeta)$, рівний

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(r_n^{-1} - r'_n{}^{-1} - \bar{r}_n{}^{-1} + \bar{r}'_n{}^{-1} \right), \text{ де } M = M(x, y, z), \text{ а}$$

$$r_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2},$$

$$\bar{r}_n = \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2},$$

$$\bar{r}'_n = \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2}.$$

46. Електричне поле $\mathbf{E} = -\text{grad}U$, де $U = U(\rho, \varphi, z)$ – потенціал точкового заряду e , розміщеного в точці $P = P(s, \psi, \zeta)$, що визначається формулою

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \sum_{k=0}^{n-1} \left(r_k^{-1} - r'_k{}^{-1} \right), \text{ де } M = M(\rho, \varphi, z) \text{ точка спостереження, а}$$

$$r_k = |MP_k| = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (\psi + 2\alpha k)] + (z - \zeta)^2}, \quad \text{де } \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

$$r'_k = |MP'_k| = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z - \zeta)^2},$$

Вказівка. Перейти до циліндричних координат, направивши вісь z уздовж ребра двогранного кута; при дзеркальному відбитті джерело заряду повториться $(2n - 1)$ разів, тому шуканий потенціал одержимо шляхом сумування потенціалів $2n$ зарядів. При відбитті зарядів у гранях двогранного кута всі його образи розміщуватимуться по колу радіуса s , яке лежить у площині $z = \zeta$, причому заряди $+e$ знаходитимуться в точках $P_k(s, 2\alpha k + \psi, \zeta)$, а заряди $-e$ в точках $P'_k(s, 2\alpha k - \psi, \zeta)$, $k = 0, n - 1$.

47. Якщо вісь z напрямлена уздовж одного з ребер так, що перпендикулярний переріз лежить у площині (x, y) , то потенціал точкового заряду e , розміщеного в точці $P = P(\xi, \eta, \zeta)$, рівний

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \sum_{m, n = -\infty}^{+\infty} (r_{mn}^{-1} - r'_{mn}{}^{-1} + \bar{r}_{mn}{}^{-1} - \bar{r}'_{mn}{}^{-1}), \quad \text{де } M = M(x, y, z), \text{ а}$$

$$r_n = \sqrt{[x - (2ma + \xi)]^2 + [y - (2nb + \eta)]^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r'_n = \sqrt{[x - (2ma - \xi)]^2 + [y - (2nb - \eta)]^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$\bar{r}_n = \sqrt{[x - (2ma + \xi)]^2 + [y - (2nb - \eta)]^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$\bar{r}'_n = \sqrt{[x - (2ma - \xi)]^2 + [y - (2nb + \eta)]^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Вказівка. Покрити всю площину (x, y) прямокутниками, що отримуються з перерізу даного циліндра шляхом зсуву на величину bn уздовж осі y і на величину am уздовж осі x . Об'єднуючи чотири подібні прямокутники, що лежать всередині області $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, в одну групу і беручи непарні відбиття в усіх сторонах, дістанемо перший доданок суми ряду. Зміщуючи далі всю групу по осях x , y на $2am$ і $2bm$ відповідно, дістанемо інші члени ряду.

48. Потенціал у точці $M(x, y, z)$ точкового заряду e , поміщеного всередину паралелепіпеда зі сторонами a , b , c в точці $P = P(\xi, \eta, \zeta)$, рівний

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \sum_{k, m, n = -\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r_{kmn}^{(1)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(2)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(3)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(4)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(5)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(6)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(7)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(8)}} \right),$$

де

$$r_{kmn}^{(1)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(2)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(3)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(4)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(5)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(6)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(7)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(8)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2}.$$

Вказівка. Виберемо початок координат в одній із вершин паралелепіпеда, а осі направимо уздовж його ребер. Покриємо цей простір паралелепіпедами, подібними до заданого, шляхом зсувів по осях x , y і z на ak , bm і cn відповідно, де a , b , c – довжини ребер уздовж осей x , y , z . Об'єднуючи вісім подібних паралелепіпедів, які лежать в області $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$, в одну групу і беручи непарні відбиття в усіх гранях, дістанемо один доданок суми. Зміщуючи далі всю групу по осях x , y , z на величини $2ak$, $2bm$, $2cn$ відповідно, дістанемо інші доданки суми.

49. Потенціал точкового заряду e , розміщеного в точці M_1 зовні сфери (див. рис. 34), рівний

$$U = 4\pi e G(P, M_1) = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1 r_0} \right).$$

Густина поверхневих зарядів на сфері рівна $\sigma = -e \frac{\rho_1^2 - R^2}{4\pi R r_1^3}$.

Вказівка. Розв'язання задачі аналогічне наведеному в прикладі 2, слід лише змінити місцями джерело заряду та його образ.

50. Якщо позначити через $G_1(P, M)$ функцію Гріна (28) для задачі Діріхле в кулі (див. приклад 2), то одержимо:

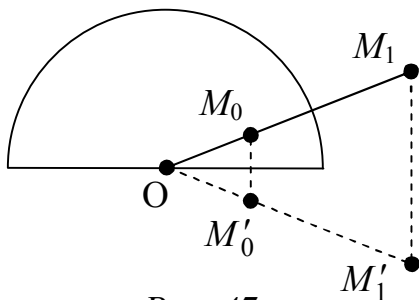


Рис. 47

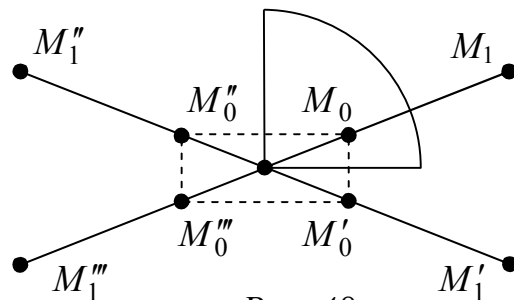


Рис. 48

- а) для півкулі, що лежить в області $z \geq 0$, функція Гріна є

$$G(P, M_0) = G_1(P, M_0) - G_1(P, M'_0),$$

де $M'_0(\rho_0, \pi - \theta_0, \varphi_0)$ – точка, симетрична до точки $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ відносно площини $z = 0$ (рис. 47);

- б) для четвертини кулі, обмеженої площинами $z = 0$, $x = 0$ і поверхнею сфери (рис. 48), маємо:

$$G(P, M_0) = G_1(P, M_0) - G_1(P, M'_0) + G_1(P, M''_0) - G_1(P, M'''_0),$$

де $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ – точка, в якій поміщений заряд, а $M'_0(\rho_0, \pi - \theta_0, \varphi_0)$, $M''_0(\rho_0, \pi - \theta_0, \pi + \varphi_0)$, $M'''_0(\rho_0, \theta_0, \pi + \varphi_0)$ – його образи.

51. Потенціал точкового заряду e , поміщеного в точку $M = M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ всередині сферичного шару, рівний

$$U = 4\pi e G(P, M) = e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n} \right),$$

де $P = P(\rho, \theta, \varphi)$ – точка спостереження, $r_n = |PM_n|$, $r'_n = |PM'_n|$, причому в точках $M_n(\rho_n, \theta_0, \varphi_0)$ і $M'_n(\rho'_n, \theta_0, \varphi_0)$ поміщені додатні заряди e_n і від'ємні заряди $-e'_n$, а величини e_n , e'_n , ρ_n , ρ'_n визначаються з формул (*), (**). При $a \rightarrow 0$ дістанемо розв'язок для задачі Діріхле в кулі, при $b \rightarrow \infty$ – розв'язок задачі 49.

Вказівка. Усі заряди e_n і e'_n , вочевидь, знаходяться на промені $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$, причому їх положення на промені визначаються відстанями від центра ρ_n і ρ'_n . При визначенні e_n , e'_n , ρ_n і ρ'_n слід враховувати, що 1) положення заряду знаходиться шляхом послідовних відбиттів у сферах $\rho = a$ і $\rho = b$ з використанням перетворень обернених радіусів, при яких $\rho_n \rho'_n = a^2$ або $\rho_n \rho'_n = b^2$; 2) при кожному відбитті величина заряду змінюється в $-a\rho_0^{-1}$ або в $-b\rho_0^{-1}$ разів.

52. Потенціал точкового заряду e , розміщеного в точці M_1 зовні сфери (див. рис. 34), рівний

$$U(P, M_1) = \frac{e_1}{\rho} + \frac{eR}{\rho_1 \rho} + U_0(P, M_1),$$

де P – точка спостереження, M_0 – точка, в якій знаходиться зображення заряду, причому $\rho_0 \rho_1 = R^2$, а $U_0(P, M)$ – потенціал точкового заряду за наявності заземленої сфери (розв'язок задачі 49).

Густина поверхневих зарядів на сфері

$$\sigma = \frac{e_1}{4\pi R^2} + \frac{e}{4\pi R} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_1^3} \right) = \frac{e_1}{4\pi R^2} + \bar{\sigma},$$

де $\bar{\sigma}$ – густина індукованих зарядів.

Вказівка. Розв'язок слід шукати у вигляді $U = U_1 + U_0$, де $U_1 = R\rho^{-1}V$ – потенціал поля, створюваного сферою, зарядженою до потенціалу V . Для визначення V використати рівність

$$4\pi e_1 = - \iint_S \frac{\partial U}{\partial \rho} ds = 4\pi R V - \iint_S \frac{\partial U_0}{\partial \rho} ds.$$

53. а) $U(x, y) = V \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctg \frac{y}{x} \right)$. **Вказівка.** Функція Гріна для півплощини $y > 0$ є

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r'_0}{r_0}.$$

б) $U(\rho, \varphi) = V\left(1 - \frac{\varphi}{\alpha}\right)$. **Вказівка.** Знайти функцію Гріна всередині кута (див. задачу 41) і скористатися формулою Гріна:

$$G(\rho, \varphi; s, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{r'_k}{r_k}, \quad U(\rho, \varphi) = -V \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} \right)_{\psi=\alpha} ds.$$

в) Розв'язки внутрішньої U_1 і зовнішньої U_2 задач Діріхле для круга за крайової умови $U(R, \varphi) = f(\varphi)$ мають вигляд:

$$U_1(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} f(\psi) d\psi,$$

$$U_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\psi - \varphi)} f(\psi) d\psi.$$

г) $U(M_1) = \frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\rho_1^2 - R^2}{r_1^3} f(P) ds$, де $f(P)$ – значення розв'язку на сфері

(див. рис. 34). **Вказівка.** Використати функцію Гріна з задачі 49.

54. Якщо M_1 зображення точки $M = M_0$ в сфері (рис. 34), а через Q позначити основу перпендикуляра, опущеного з точки P на пряму OM_1 , то шукана функція Гріна є

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r_0} + \frac{R}{4\pi \rho_0 r_1} + \frac{1}{4\pi R} \ln \frac{2\rho_1}{\rho_1 - |OQ| + r_1} - \frac{1}{2\pi R}.$$

Розв'язок задачі Неймана для рівняння Лапласа в кулі має вигляд

$$U(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\rho} \left\{ \iint_S f(P) \frac{(R^2 - t^2) ds}{[R^2 + t^2 - 2Rt \cos \gamma]^{3/2}} \right\} \frac{dt}{t},$$

де $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

$$55. V(r) = 2\pi f_0 \int_0^R \int_0^{\pi} \frac{\xi^2 \sin \theta d\theta d\xi}{\sqrt{\xi^2 + r^2 - 2r\xi \cos \theta}} = \begin{cases} \frac{2\pi f_0}{3} (3R^2 - r^2), & r < R, \\ \frac{4\pi R^3}{3r}, & r > R. \end{cases}$$

56. Відповідні об'ємні потенціали рівні:

$$а) V(r) = \begin{cases} 2\pi f_0 (b^2 - a^2), & r < a, \\ 2\pi f_0 b^2 - \frac{2}{3} \pi f_0 (r^2 + 2a^3 r^{-1}), & a < r < b, \\ \frac{4}{3} \pi f_0 (b^3 - a^3) r^{-1}, & r > b. \end{cases}$$

$$б) V(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi f_1 (3a^2 - r^2) + 2\pi f_2 (c^2 - b^2), & r < a, \\ \frac{4}{3} \pi f_1 a^3 r^{-1} + 2\pi f_2 (c^2 - b^2), & a < r < b, \\ \frac{4}{3} \pi f_1 a^3 r^{-1} + 2\pi f_2 c^2 - \frac{2}{3} \pi f_2 (r^2 + 2b^3 r^{-1}), & b < r < c, \\ \frac{4}{3} \pi [a^3 f_1 + (c^3 - b^3) f_2] r^{-1}, & r > c. \end{cases}$$

Вказівка. Розв'язок подається у вигляді суми розв'язків задач 55 і 56а).

$$b) V(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{r} \int_0^c \xi^2 f(\xi) d\xi, & r > c, \\ \frac{4\pi}{r} \int_0^r \xi^2 f(\xi) d\xi + 4\pi \int_r^c \xi f(\xi) d\xi, & r < c. \end{cases}$$

$$57. U(r) = \psi_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta}} = \begin{cases} 4\pi R \psi_0, & r < R, \\ \frac{4\pi R^2 \psi_0}{r}, & r > R. \end{cases}$$

58. Нехай центр кулі радіуса a поміщений в точку $Q(0,0,b)$, а $f_0 = const$ – густина об'ємних зарядів. Тоді потенціал електростатичного поля рівний

$$V = \begin{cases} \frac{2}{3} \pi f_0 (3a^2 - r^2 - 2a^3 r_1^{-1}), & r < a, \\ \frac{4}{3} \pi f_0 a^3 (r^{-1} - r_1^{-1}), & r > a, \end{cases}$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}$, $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + b)^2}$.

Вказівка. Для розрахунку впливу ідеально провідної площини $z=0$ слід дзеркально відобразити вихідну кулю з центром у точці $Q(0,0,b)$ відносно площини $z=0$.

59. Логарифмічний потенціал круга в точці (ρ, φ)

$$V \equiv V(\rho) = -\frac{f_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \xi \ln[\xi^2 + \rho^2 - 2\xi\rho \cos \psi] d\xi d\psi = \begin{cases} \frac{M}{2} \left(1 - 2 \ln R - \frac{\rho^2}{R^2} \right), & \rho < R, \\ -M \ln \rho, & \rho > R, \end{cases}$$

де $M = \pi R^2 f_0$ – повна маса заряду, розподіленого в крузі.

$$60. U(x, y) = 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} - \frac{a-x}{2} \ln[(a-x)^2 + y^2] - \frac{a+x}{2} \ln[(a+x)^2 + y^2].$$

$$61. W(x, y) = \mu_0 \left(\operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)$$

62. Див. відповідь до задачі 53в).

63. Розв'язок знаходиться у вигляді потенціалу простого шару

$$U(\rho, \varphi) = -\frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \ln[R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(\varphi - \psi)] \nu(\psi) d\psi + const,$$

а розв'язок інтегрального рівняння для густини зарядів дає $\nu(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{\pi}$.

$$64. U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} + const.$$

$$65. U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}; \text{ при } f(x, y) \equiv C \text{ буде } U(x, y) = C.$$

66. а) $f(x, y, z) = -5\pi^{-1}(x^2 + y^2 + z^2)$; б) $M = \iiint_{D_1} f(P) dP = -4R^5$, де D_1 – задана

куля.

67. $U(x_1, \dots, x_n) = A^{-1} \int_0^{\omega} \int_0^{\xi} F(\eta) d\eta d\xi$, де $\omega = \sum_{k=1}^n a_k x_k$. 68. $M = -\frac{8}{3\pi}$.

69. а) $f(x, y) = x$; б) $V(x, y) = \frac{\pi}{4} \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$. 70. $M = \frac{15\pi}{512}$.

71. $U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[(\xi - x)^2 + y^2] \varphi(\xi) d\xi + const$.

72. $U(x, y) = \begin{cases} -R \ln R, & x^2 + y^2 < R^2, \\ -R \ln \sqrt{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$

73. а) $W(x, y) = \begin{cases} -1, & \rho^2 < 1, \\ 0, & \rho^2 > 1. \end{cases}$ б) $W(x, y) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \rho^2 < 1, \\ \frac{x}{2\rho^2}, & \rho^2 > 1. \end{cases}$ Тут $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

74. $U(\rho, \varphi) = \frac{\cos 2\varphi}{\rho^2} - 1$.

75. а) $U(x, y, z) = \frac{x^2 - y^2}{r^5} - \frac{1}{r}$. б) $U(x, y, z) = \frac{z}{r^3}$. Тут $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

76. $U(x, y) = -\frac{y}{2}$. 77. $\psi(x, y) = 2x(4y + 1)$.

ДОДАТОК

I. Різні ортогональні системи координат

Нехай (x, y, z) – декартові, а (x_1, x_2, x_3) – криволінійні ортогональні координати деякої точки. Квадрат елемента довжини визначається формулою

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2,$$

де

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2}, \quad i = \overline{1,3}$$

– метричні коефіцієнти, або коефіцієнти Ламе. Ортогональна система координат повністю характеризується трьома метричними коефіцієнтами h_1, h_2, h_3 .

Загальні вирази для операторів grad, div, rot і оператора Лапласа Δ мають вигляд:

$$\text{grad } u = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \mathbf{i}_j, \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) \right],$$

де $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – одиничні базові вектори, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ – довільний вектор, u – скаляр, $A_p = A_p(x_1, x_2, x_3)$, $p = \overline{1,3}$, $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

1. Прямокутні координати: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, h_1 = h_2 = h_3 = 1$;

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k},$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – напрямні одиничні вектори осей x, y, z .

2. Циліндричні координати: $x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$, пов'язані з прямокутними координатами співвідношеннями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Координатні поверхні: $r = const$ – циліндри, $\varphi = const$ і $z = const$ – площини. Метричні коефіцієнти рівні $h_1 = h_3 = 1$, $h_2 = r$, тому

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{i}_3, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r} \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_3, \\ \Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

3. Сферичні координати: $x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$, пов'язані з прямокутними координатами співвідношеннями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Координатні поверхні: концентричні сфери $r = const$, площини $\varphi = const$, конуси $\theta = const$. Метричні коефіцієнти: $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin \theta$, тому

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3, \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right] \mathbf{i}_3, \\ \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

4. Еліптичні координати: $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = z$, визначаються за допомогою формул перетворення

$$x = c \lambda \mu, \quad y = c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

де c – масштабний множник. Метричні коефіцієнти рівні

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = 1.$$

Координатні поверхні: $\lambda = const$ – циліндри еліптичного перерізу з фокусами в точках $x = \pm c$, $y = 0$; $\mu = const$ – сім'я конфокальних гіперболічних циліндрів, $z = const$ – площини.

5. Параболічні координати: якщо (r, φ) – полярні координати точки на площині, то параболічні координати можуть бути введені за допомогою формул

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad x_3 = z.$$

Зв'язок з декартовими координатами дають формули

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z.$$

Метричні коефіцієнти: $h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $h_3 = 1$.

Координатні поверхні $\lambda = const$ і $\mu = const$ є параболічними циліндрами, що перетинаються, твірні яких паралельні осі z .

6. Еліпсоїдні координати: $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$, вводяться згідно з рівняннями ($a > b > c$)

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad \lambda > -c^2 \quad (\text{рівняння еліпсоїда});$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} = 1, \quad -c^2 > \mu > -b^2 \quad (\text{рівняння однопорожнинного гіперболоїда});$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} = 1, \quad -b^2 > \nu > -a^2 \quad (\text{рівняння двопорожнинного гіперболоїда}).$$

Кожній точці (x, y, z) відповідає єдина система значень λ , μ , ν . Ці параметри й називаються еліпсоїдними координатами. Декартові координати через еліпсоїдні виражаються явно за формулами:

$$x = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + b^2)(\mu + b^2)(\nu + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}},$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)(\nu + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}}.$$

Коефіцієнти Ламе рівні

$$h_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{R^2(\lambda)}}, \quad h_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{R^2(\mu)}}, \quad h_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}{R^2(\nu)}},$$

де $R(s) = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)}$.

Оператор Лапласа подається у вигляді

$$\Delta u = \frac{4}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(\mu - \nu)} \left[(\mu - \nu)R(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(R(\lambda) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) + \right.$$

$$\left. + (\nu - \lambda)R(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(R(\mu) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) + (\lambda - \mu)R(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(R(\nu) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \right].$$

Частинний розв'язок рівняння Лапласа, залежний тільки від λ , $U = U(\lambda)$, подається формулою

$$U = A \int \frac{d\lambda}{R(\lambda)} + B,$$

де A, B – довільні сталі.

7. Вироджені еліпсоїдні координати: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$.

а) Для витягнутого еліпсоїда обертання вироджені еліпсоїдні координати визначаються за допомогою формул

$$x = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta,$$

де c – масштабний множник, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Координатні поверхні: витягнуті еліпсоїди обертання $\alpha = \operatorname{const}$, двопорожнинні гіперболоїди обертання $\beta = \operatorname{const}$ і площини $\varphi = \operatorname{const}$.

Метричні коефіцієнти $h_1 = h_\alpha$, $h_2 = h_\beta$, $h_3 = h_\varphi$ рівні

$$h_\alpha = h_\beta = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}, \quad h_\varphi = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta.$$

Оператор Лапласа подається у вигляді

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right].$$

б) Для сплюсненого еліпсоїда обертання система вироджених еліпсоїдних координат (α, β, φ) визначається за допомогою рівностей

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta,$$

де c – масштабний множник, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Координатні поверхні: сплюснуті еліпсоїди обертання $\alpha = \operatorname{const}$, однопорожнинні гіперболоїди обертання $\beta = \operatorname{const}$ і площини $\varphi = \operatorname{const}$, що проходять через вісь z .

Метричні коефіцієнти рівні

$$h_\alpha = h_\beta = c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta}, \quad h_\varphi = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta.$$

Оператор Лапласа подається у вигляді

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{ch} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right].$$

8. Тороїдні координати: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$, визначаються за допомогою формул

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

де c – масштабний множник, $0 \leq \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Координатні поверхні: площини $\varphi = \operatorname{const}$, тори $\alpha = \operatorname{const}$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c \operatorname{cth} \alpha \right)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \alpha} \right)^2$$

і сфери $\beta = \operatorname{const}$

$$(z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{\sin \beta} \right)^2.$$

Метричні коефіцієнти рівні

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad h_\varphi = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}.$$

Оператор Лапласа подається у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Зручно вводити замість u нову функцію v за формулою

$$u = \sqrt{2(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)} \cdot v,$$

при цьому рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ зводиться до рівняння

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_{\alpha} \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. Біполярні координати на площині: змінні $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = z$ називаються біполярними координатами, якщо мають силу рівності:

$$x = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = z.$$

Метричні коефіцієнти рівні

$$h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad h_3 = 1.$$

10. Бісферичні координати: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$, визначаються за допомогою формул

$$x = \frac{c \sin \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \sin \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha},$$

де c – сталий множник, $0 \leq \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < +\infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Ці формули можна подати в компактній формі

$$z + i\sqrt{x^2 + y^2} = c i \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\beta}{2}.$$

Координатними поверхнями є: площини $\varphi = \operatorname{const}$, веретеноподібні поверхні обертання $\alpha = \operatorname{const}$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - c \operatorname{ctg} \alpha \right)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin \alpha} \right)^2$$

і сфери $\beta = \operatorname{const}$

$$(z - c \operatorname{cth} \beta)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta} \right)^2.$$

Метричні коефіцієнти рівні

$$h_{\alpha} = h_{\beta} = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad h_{\varphi} = \frac{c \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}.$$

Оператор Лапласа подається у вигляді

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha) \sin \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

При розв'язуванні рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ зручно вводити підстановку

$$u = \sqrt{2(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)} \cdot v,$$

тоді для функції v отримуємо рівняння

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_{\alpha} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{4}v + \frac{1}{\sin^2 \alpha} v_{\varphi\varphi} = 0.$$

11. Сфероїдні координати: $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \varphi$.

а) Витягнуті сфероїдні координати визначаються за допомогою формул

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos \varphi, \quad z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin \varphi,$$

де c – сталий множник, $\lambda \geq 1$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Метричні коефіцієнти

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

б) Сплюснуті сфероїдні координати визначаються за формулами

$$x = c\lambda\mu \sin \varphi, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = c\lambda\mu \cos \varphi.$$

Поверхні $\lambda = \operatorname{const}$ – сплюснуті сфероїди, $\mu = \operatorname{const}$ – однопорожнинні гіперболоїди. Метричні коефіцієнти

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \quad h_3 = c\lambda\mu.$$

12. Параболоїдні координати: $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \varphi$, визначаються за допомогою формул

$$x = \lambda\mu \cos \varphi, \quad y = \lambda\mu \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2).$$

Координатні поверхні $\lambda = \operatorname{const}$, $\mu = \operatorname{const}$ є параболоїдами обертання навколо осі симетрії Oz . Метричні коефіцієнти рівні

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad h_3 = \lambda\mu.$$

II. Основні закони фізики, які використовуються при виведенні рівнянь

Нехай змінна t характеризує час, а $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – точка n -вимірному простору ($n = 1, 2, 3$).

Другий закон Ньютона. Добуток маси пружного тіла m на прискорення $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ дорівнює рівнодійній $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ усіх сил, прикладених до тіла:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Закон Гука. Відносна лінійна деформація пружного тіла визначається відношенням абсолютної деформації Δl в заданому напрямку до початкового

лінійного розміру тіла l . Нехай $T(x, t)$ – вектор сили натягу, що діє на пружне тіло, а $T(x, t)$ – його проекція на заданий напрям, яка згідно з законом Гука прямо пропорційна відносному видовженню тіла:

$$T = \alpha \Delta l, \quad \alpha = ES l^{-1},$$

де E – модуль пружності Юнга, S – площа поперечного перерізу тіла в заданому напрямі. Коефіцієнт α називають *жорсткістю*.

У випадку крутильних коливань пружного тіла, які відбуваються з деформацією зсуву, закон Гука має вигляд

$$\tau = G\varphi,$$

де τ – напруга зсуву, G – модуль зсуву, φ – кут зсуву.

Принцип Д’Аламбера. Сума всіх сил, які діють на пружне тіло в напрямі можливого переміщення, включно з силами інерції, в будь-який момент часу рівна нулеві.

Закон Фур’є про потік тепла через поверхню. Нехай функція $u(x, t)$ описує температуру нерівномірно нагрітого твердого тіла. Кількість тепла Q , яка проходить через елемент поверхні dS тіла в напрямі вектора зовнішньої нормалі \vec{n} (рис. 49) за проміжок часу dt , рівна

$$Q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS dt,$$

де λ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності тіла.

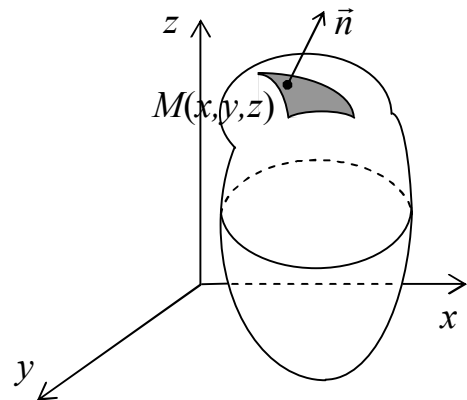


Рис. 49

Формула для визначення кількості тепла. Кількість тепла Q , яка витрачається для нагрівання тіла масою m від температури θ_1 до температури θ_2 , рівна

$$Q = cm(\theta_2 - \theta_1),$$

де c – питома теплоємність тіла.

Закон теплообміну Ньютона. Нехай функція $u(x, t)$ описує температуру нерівномірно нагрітого твердого тіла, через поверхню якого відбувається теплообмін із довкіллям, температура якого рівна $u_0(x, t)$. Кількість тепла Q , яка передається в довкілля через елемент поверхні dS тіла за одиницю часу, пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища:

$$Q = \alpha(u - u_0)dS,$$

де α – коефіцієнт теплообміну.

Закон дифузії Нернста для потоку частинок через поверхню. Нехай функція $u(\mathbf{x}, t)$ описує концентрацію частинок в деякому просторовому об'ємі V , нерівномірно заповненому газом або розчищеною речовиною змінної концентрації. Кількість речовини q , яка дифундує через елемент поверхні dS даного об'єму в напрямі вектора зовнішньої нормалі \vec{n} (див. рис. 49) за одиницю часу, рівна

$$q = -D \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS,$$

де D – коефіцієнт дифузії.

Рівняння газо-гідродинаміки. Розглянемо рух ідеальної рідини (газу), тобто рідини, в якій відсутні сили в'язкості. Нехай $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор швидкості руху рідини, $\rho(\mathbf{x}, t)$ – її густина, $p(\mathbf{x}, t)$ – тиск, $f(\mathbf{x}, t)$ – інтенсивність джерел і $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = (F_1, F_2, F_3)$ – інтенсивність масових сил. Тоді ці величини задовольняють наступну нелінійну систему рівнянь, які мають назву рівнянь гідродинаміки (газової динаміки):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = f, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \operatorname{grad} \mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{F}.$$

Перше з наведених рівнянь називається *рівнянням нерозривності*, а друге – *рівнянням руху Ейлера*. Для того, щоб замкнути цю систему рівнянь, необхідно задати зв'язок між тиском і густиною

$$\Phi(p, \rho) = 0,$$

так зване *рівняння стану*. Наприклад, для нестисливої рідини рівняння стану має вигляд $\rho = \text{const}$, а для адіабатичного руху газу $p\rho^{-\kappa} = \text{const}$, $\kappa = c_p / c_v$, де c_p і c_v – питомі теплоємності газу при сталому тиску і сталому об'ємі відповідно.

Рівняння Максвелла. Нехай в деякому середовищі існує змінне електромагнітне поле. Позначимо: $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_1, E_2, E_3)$ – напруженість електричного поля, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = (H_1, H_2, H_3)$ – напруженість магнітного поля, $\rho(\mathbf{x})$ – густина зарядів, ε – діелектрична стала середовища, μ – коефіцієнт магнітної проникності середовища, і $\mathbf{I}(\mathbf{x}, t) = (I_1, I_2, I_3)$ – струм провідності. Тоді ці величини задовольняють наступну лінійну систему диференціальних рівнянь, які називаються *рівняннями Максвелла*:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\mu \mathbf{H})}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{I},$$

де $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с – швидкість світла у вакуумі (електродинамічна стала).

Третє з наведених рівнянь виражає *закон Фарадея*, а четверте – *закон Ампера*.

Якщо процес є стаціонарним, то рівняння Максвелла перетворюються в *рівняння електростатики*

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

і рівняння магнітостатики

$$\operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{I}.$$

Закон Ома. Струм у заданій точці середовища пропорційний силі, з якою електромагнітне поле діяло б у цій точці середовища на одиничний позитивний заряд, що рухається разом із середовищем. Якщо позначити через \mathbf{v} швидкість руху середовища в розглядуваній точці, то з урахуванням позначень, введених у рівняннях Максвелла, в загальному випадку закон Ома може бути виражений співвідношенням

$$\mathbf{I} = \lambda \left(\mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right),$$

де λ – стала, яка називається електропровідністю середовища.

У випадку нерухомого середовища закон Ома має вигляд $\mathbf{I} = \lambda \mathbf{E}$. Якщо при цьому $\rho = 0$, $\varepsilon = \text{const}$ і $\mu = \text{const}$, то, користуючись рівняннями Максвелла, для компонент векторів \mathbf{E} і \mathbf{H} дістанемо так зване *телеграфне рівняння*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u - \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

III. Деякі спеціальні функції

1. Тригонометричні функції:

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = i \operatorname{sh}(iz).$$

Деякі властивості:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)], \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)].$$

2. Гіперболічні функції:

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) = \cos(iz),$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 + \dots = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = -i \sin(iz).$$

Деякі властивості:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

3. Інтеграл імовірностей:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Деякі властивості:

а) розклад у ряд при малих z

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{1! \cdot 3} + \frac{z^5}{2! \cdot 5} - \dots \right);$$

б) асимптотичний розклад при великих z

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-z^2}}{z} \left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{3 \cdot 4}{(2z)^4} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(2z)^6} + \dots \right).$$

4. Гама-функція Ейлера:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Деякі властивості:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(z) \xrightarrow{z \gg 1} \sqrt{2\pi z} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}.$$

5. Циліндричні функції. Диференціальне рівняння циліндричних функцій $y = y(\xi)$ має вигляд

$$y'' + \frac{1}{\xi} y' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) y = 0, \quad k = \text{const}, \quad \nu = \text{const}.$$

Це рівняння за допомогою заміни незалежної змінної $x = k\xi$ зводиться до рівняння Бесселя

$$z'' + \frac{1}{x} z' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) z = 0, \quad z = z(x) = y\left(\frac{x}{k}\right).$$

Загальними розв'язками цих рівнянь відповідно є

$$y_{\nu}(\xi) = C_1 J_{\nu}(k\xi) + C_2 N_{\nu}(k\xi),$$

$$z_{\nu}(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 N_{\nu}(x),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі,

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

– функції Бесселя порядку ν , а

$$N_\nu(x) = \begin{cases} \frac{J_\nu(x) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}, & \nu \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right], & \nu \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

– функції Неймана порядку ν .

Деякі властивості функцій Бесселя:

а) $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$; $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

б) ортогональність: якщо α і β – дійсні корені рівняння

$$\mu J_\nu(x) + \eta x J'_\nu(x) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \mu + \eta > 0,$$

то при $\nu > -1$

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\alpha}{l} x\right) J_\nu\left(\frac{\beta}{l} x\right) dx = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

а також

в) $\int_0^l x J_\nu^2\left(\frac{\alpha}{l} x\right) dx = \frac{l^2}{2} \left\{ J_\nu'^2(\alpha) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right) J_\nu^2(\alpha) \right\}$.

г) рекурентні співвідношення:

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J'_\nu(x).$$

д) асимптотичні формули:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

6. Циліндричні функції уявного аргументу. Заміною $x = it$ рівняння Бесселя зводиться до рівняння

$$u'' + \frac{1}{t} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{t^2}\right) u = 0, \quad u = u(t) = z(it),$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$u_\nu(t) = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t),$$

де C_1, C_2 – довільні сталі,

$$I_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

– функції Бесселя уявного аргументу (модифіковані функції Бесселя 1-го роду) порядку ν , а

$$K_\nu(t) = \begin{cases} \frac{\pi[I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)]}{2 \sin \pi \nu}, & \nu \notin \mathbb{Z}, \\ \frac{(-1)^\nu}{2} \left[\frac{\partial J_{-\nu}(t)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_\nu(t)}{\partial \nu} \right], & \nu \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

– функції Макдональда (модифіковані функції Бесселя 2-го роду) порядку ν .
Асимптотичні формули:

$$I_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t [1 + O(t^{-1})], \quad t \rightarrow +\infty; \quad K_\nu(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} [1 + O(t^{-1})], \quad t \rightarrow +\infty.$$

7. Поліноми Лежандра (кульові функції): $P_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, є розв'язками рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0, \quad -1 < x < 1$$

і подаються у вигляді

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}.$$

Деякі властивості:

$$\text{а) } P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \pm \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^{-(n+1)} d\varphi,$$

звідки $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0, 1, \dots$, а також

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \theta}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} r^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), & r < r_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} r_0^n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), & r > r_0. \end{cases}$$

б) рекурентні співвідношення:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)].$$

в) ортогональність на проміжку $(-1; 1)$:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n; \quad \int_{-1}^1 P_n(x) q_m(x) dx = 0,$$

де $q_m(x)$ – поліном степеня $m > n$, а також

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

8. Приєднані функції Лежандра: $P_n^{(m)}(x)$, є розв'язками рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0,$$

і подаються у вигляді

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

причому

$$\int_{-1}^1 [P_n^{(m)}(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

9. Гіпергеометричні функції. Гіпергеометричне рівняння має вигляд

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

де α, β, γ – параметри. Якщо γ відмінне від нуля або цілого від'ємного числа, то частинним розв'язком наведеного рівняння є *гіпергеометричний ряд*

$$y_1(x) \equiv F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{(n+1)! \cdot \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)} x^{n+1} + \dots,$$

який збігається абсолютно при $|x| < 1^*$. Якщо число $2 - \gamma$ відмінне від нуля або цілого від'ємного числа, то частинним розв'язком гіпергеометричного рівняння є функція

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x).$$

Зв'язок з поліномами Лежандра, а також деякими елементарними функціями дається формулами:

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+x}{2}\right), \\ P_n^{(m)}(x) = \frac{(n+m)!}{2^m \cdot m!(n-m)!} (1-x^2)^{m/2} F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-x}{2}\right);$$

$$F(1, \beta, \beta, x) = F(\alpha, 1, \alpha, x) = (1-x)^{-1}, \quad F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n,$$

$$F(1, 1, 2, -x) = x^{-1} \ln(1+x), \quad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = x^{-1} \arcsin x.$$

Вироджена гіпергеометрична функція

$$F \equiv F(\alpha, \gamma, \rho) = 1 + \frac{\alpha \rho}{\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \rho^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \dots$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$\rho \frac{d^2 F}{d\rho^2} + (\gamma - \rho) \frac{dF}{d\rho} - \alpha F = 0.$$

* Збіжність ряду при $x = 1$ і $x = -1$ залежить від числа $\delta = \gamma - \alpha - \beta$. При $x = 1$ ряд збігається абсолютно, якщо $\delta > 0$, і розбігається, якщо $\delta \leq 0$. При $x = -1$ ряд є абсолютно збіжним, якщо $\delta > 0$, умовно збіжним, коли $-1 < \delta \leq 0$, і розбіжним, якщо $\delta \leq -1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1982. – 336 с.
2. *Бицадзе А.В., Калининко Б.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 310 с.
3. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
4. *Вірченко Н.О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: Інрес, Воля, 2006. – 332 с.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Физматгиз, 1988. – 512 с.
6. *Гончаренко В.М.* Основы теории рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995. – 350 с.
7. *Комеч А.И.* Практическое решение уравнений математической физики. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.
8. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
9. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
10. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. – М.: Гостехиздат, 1955. – 420 с.
11. *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2006. – 424 с.
12. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
13. Рівняння математичної фізики (методичний посібник) // Укладачі: Лавренчук В.П., Івасишин С.Д., Совін Я.А., Дронь В.С. – Чернівці: Рута, 1998. – 187 с.
14. *Смирнов М.М.* Задачи по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1975. – 128 с.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1999. – 798 с.

