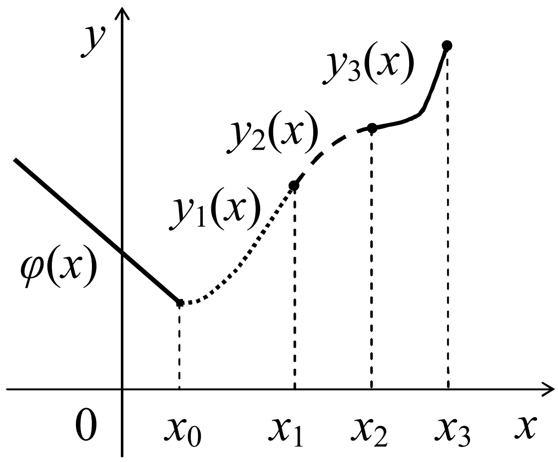
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Рего В.Л.

ТЕОРІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРҐУМЕНТУ



УЖГОРОД 2008

Рего В.Л. Теорія диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу. – Ужгород: Говерла, 2008. – 88 с.

У посібнику викладені деякі фундаментальні питання теорії диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу. Особлива увага звернута на дослідження існування і єдиності розв'язку основної початкової задачі, а також різноманітні методи інтеґрування рівнянь з відхиленням арґументу та їх систем. До більшості розділів подані вправи для самостійної роботи.
Посібник розрахований на студентів-математиків старших курсів, також може бути корисним для студентів природничих факультетів, аспірантів та викладачів при поглибленому вивченні теорії диференціальних рівнянь.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук
Ронто М.Й.

Рекомендовано до друку *Вченою Радою математичного факультету*
(протокол № 9 від 30 травня 2008 року)

ЗМІСТ

ВСТУП

При дослідженні багатьох реальних явищ чи процесів різної природи одержують звичайні диференціальні рівняння, які називають диференціальною моделлю досліджуваного явища чи процесу. Задачі теорії автоматичних систем управління, радіотехніки, електротехніки та ряду інших галузей науки досить часто приводять до рівнянь, в які шукана функція та її похідні входять за різних значень арґументу. Такі рівняння називають ***диференціальними рівняннями з відхиленням арґументу*** (ДРВА).

Для повного опису реального явища чи процесу самого тільки рівняння недостатньо. Необхідно доповнити його визначеними експериментальним чином додатковими умовами, які повинна справджувати шукана функція. Як відомо, у випадку звичайних диференціальних рівнянь такі умови задаються в одній (задача Коші) чи кількох (крайова задача) точках. У випадку ДРВА початкові умови, як правило, задаються на певному проміжку, а відповідна задача називається основною початковою задачею.

Курс "Диференціальні рівняння з відхиленням арґументу та методи їх інтеґрування" ознайомлює студентів з деякими важливими розділами теорії диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу. Досліджуються умови існування і єдиності розв'язку основної початкової задачі для рівнянь з запізненням, а також основи гармонічного аналізу та деякі інші питання якісної теорії ДРВА. Особлива увага звернута на аналітичні та числово-аналітичні методи інтеґрування основної початкової задачі, зокрема: метод кроків, метод послідовних наближень, метод малого параметра та інші асимптотичні методи, метод функції Коші тощо, а також методи розв'язування лінійних ДРВА вищих порядків.

РОЗДІЛ І
ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРҐУМЕНТУ

§1.1. Основні поняття та визначення. Класифікація ДРВА

Визначення 1. Диференціальне рівняння, в яке шукана функція та її похідні входять за різних значень арґументу, називається ***диференціальним рівнянням з відхиленням арґументу*** (ДРВА).

Загальновизнаної класифікації ДРВА на сьогодні немає. Це й не дивно, адже навіть сама назва “диференціальні рівняння з відхиленням арґументу” закріпилася не так давно: ці рівняння зустрічаються в літературі під назвами “диференціально-функціональних”, “гістеро-диференціальних”, “диференціально-різницевих” [1] тощо.

Найбільш загальна класифікація, наведена в 1958 р. Г.А.Каменським [2], вирізняє три основні типи ДРВА: рівняння з запізненням арґументу, рівняння з випередженням арґументу, а також рівняння нейтрального типу.

Визначення 2. ДРВА, в яке похідна найвищого порядку від шуканої функції входить за однакових значень арґументу, причому цей арґумент не менший за арґументи шуканої функції та її нижчих похідних, які входять у рівняння, називається ***рівнянням із запізненням арґументу*** (ДРЗА).

Приклади ДРЗА:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^3(t-3) + x(t-1) + \sin t;$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{dy(x-5)}{dx} - y(x-2);$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\tau(t))], \quad \tau(t) \ge 0. \tag{1.1}$$

ДРЗА першого порядку типу (1.1), в яких за арґумент береться час t, можуть описувати поведінку реальної системи, в якій швидкість зміни досліджуваної величини залежить від її минулих $x(t-\tau(t))$ і теперішніх $x(t)$ значень.

Визначення 3. ДРВА, в яке похідна найвищого порядку від шуканої функції входить за однакових значень арґументу, причому цей арґумент не перевищує інших арґументів шуканої функції та її нижчих похідних, які входять у рівняння, називається ***рівнянням із випередженням арґументу*** (ДРВпА).

Приклади ДРВпА:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x^2(t+5) - x(t+2) + x^2(t);$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{dy(x+1)}{dx} + y(x+7) - e^x;$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t+\tau(t))], \quad \tau(t) \ge 0. \tag{1.2}$$

ДРВпА першого порядку типу (1.2), в яких за арґумент береться час t, можуть описувати поведінку реальної системи, в якій швидкість зміни досліджуваної величини залежить від її теперішніх $x(t)$ і майбутніх $x(t+\tau(t))$ значень.

Усі інші ДРВА, згідно з класифікацією Г.А.Каменського, відносяться до ***рівнянь нейтрального типу*** (ДРНТ). Як правило, рахують, що в ДРНТ похідна найвищого порядку від шуканої функції входить за різних значень арґументу.

Приклади ДРНТ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t-2) - \frac{dx(t-1)}{dt} + x^2(t);$$

$$\frac{d^2y(x+2)}{dx^2} = y(x+1) - \frac{d^2y(x)}{dx^2};$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left[t, x(t), x(t-\tau(t)), \frac{dx(t-\tau(t))}{dt}\right]. \tag{1.3}$$

ДРНТ першого порядку типу (1.3) при $\tau(t) \geq 0$ можуть описувати поведінку реальної системи, в якій швидкість зміни досліджуваної величини в теперішній момент часу залежить від теперішніх $x(t)$ і минулих $x(t-\tau(t))$ значень цієї величини, а також від швидкості її зміни в минулому $\dot{x}(t-\tau(t))$.

Багатьох сучасних авторів така проста класифікація ДРВА не задовільняє, поскільки у зв'язку з різноманітними прикладними проблемами виникає все більше рівнянь, котрі необхідно більш точно класифікувати. Зокрема, розширюється класифікація рівнянь із запізненням арґументу.

Так, наприклад, ДРЗА вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), ..., x(t-\tau_m(t))], \quad \tau_k(t) \geq 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{1.4}$$

називається ***рівнянням із зосередженим запізненням***.

Припустимо, що в (1.4) запізнення залежать і від шуканої функції. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t), x(t-\tau_1(t,x)), ..., x(t-\tau_m(t,x))], \quad \tau_k(t,x) \geq 0, \quad k = \overline{1,m},$$

яке називається ***рівнянням із авторегульованим запізненням***.

Розглянемо, нарешті, рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t+s)], \tag{1.5}$$

права частина якого є функціоналом*, визначеним на неперервній функції $x(s)$ арґументу s, який змінюється в межах $-\tau \leq s \leq 0$, де $\tau = const > 0$. За цих умов рівняння (1.5) називають ***рівнянням із розподіленим запізненням***, або ***рівнянням із післядією***. У ДРЗА такого типу для визначення швидкості зміни досліджуваної величини в даний момент часу t необхідно відому функцію $x(t+s)$,

---

* ***Функціонал*** – оператор, який визначає відповідність між елементами деякої множини (наприклад, множини неперервних на деякому проміжку функцій) і множиною комплексних чисел.

що описує поведінку системи в попередні моменти часу, підставити в праву частину рівняння (1.5): тоді числові значення $f[t, x(t+s)]$ визначатимуть похідні $\dot{x}(t)$ в момент часу t.

Зауважимо, що наведена вище класифікація ДРВА має силу і у випадку систем ДРВА, заданих у векторній формі.

§1.2. Історична довідка. Задачі, що приводять до ДРВА

ДРВА вперше зустрічаються в роботах XVIII ст. під назвою "рівняння зі скінченими і нескінчено малими різницями" (нескінчено малою різницею тоді називали похідну). У XIX ст. такі рівняння стали називати "диференціальними рівняннями зі змішаними різницями". Ці назви пояснюються тим, що на той час ДРВА записувалися через похідні та різниці шуканої функції.

Рівняння зі змішаними різницями визначали як рівняння, яке містить похідні і різниці шуканої функції. При цьому випадки, коли похідні і різниці беруться по одній чи по різних змінних, у визначенні не розмежовувалися; не завжди подібні зазначення були і в текстах робіт. Тому навіть у сучасних авторів у питанні про першість у дослідженні ДРВА виникає плутанина. І.В.Серебрякова у статті "Когда и как появились дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом" [7, с. 3-30] детально аналізує це питання.

Йоганн Бернуллі (1667-1748) в роботі 1728 р., досліджуючи задачу про число коливань невагомої струни скінченої довжини, які відповідають одному ходові коливника заданої довжини D, якщо по струні на однаковій відстані один від одного прикріплені рівні тягарці, дістав співвідношення, з яких можна вивести рівняння

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(y_{k+1}, y_k, y_{k-1}), \tag{2.1}$$

де y_k означає ординату k-ї точки струни при її відхиленні від положення рівноваги; до аналоґічного рівняння (хоча в роботі Бернуллі його немає) зводилася пізніше й задача про поширення звуку. Рівняння (2.1) не є ДРВА, поскільки похідна і різниці беруться по різних змінних, але є рівнянням зі "змішаними різницями".

Задачу про коливання струни розглядав і П'єр-Сімон Лаплас (1749-1827) у роботі 1779 (1782) року. Проте одержані ним рівняння вигляду

$$az(x,y) + b\Delta z(x,y) - \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 0;$$

$$\Delta^n z(x,y) + a\Delta^{n-1}\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + b\Delta^{n-2}\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} + \ldots + m\Delta z(x,y) = 0,$$

де a, b, m – сталі, $n = 1,2,\ldots$, а $\Delta^n z(x,y) = \Delta^{n-1} z(x+1,y) - \Delta^{n-1} z(x,y)$ – різниці n-го порядку, що беруться по змінній x, не є ДРВА, але є рівняннями зі "змішаними різницями" з тієї ж причини, що й (2.1).

Зауважимо, що пізніше при дослідженні вищезгаданих задач стали застосовувати диференціальні рівняння з частинними похідними (ДРЧП).

Вперше ж власне ДРВА досліджуються в ґеометричних працях Леонарда Ейлера (1707-1783). Так, у роботі 1751 року "Новий метод відшукання взаємних алґебраїчних траєкторій" Ейлер повертається до задачі, запропонованої в 1720-х роках Ніколаєм Бернуллі, до якої зверталися багато тогочасних ґеометрів: знайти криву *ECF*, яка після дзеркального відображення відносно деякої осі *AB*, пересуваючись на довільний відрізок уздовж осі *AB* паралельно самій собі, в довільному положенні $f'C'e'$ перетинала б вихідну криву *ECF* під заданим кутом α (рис. 1).

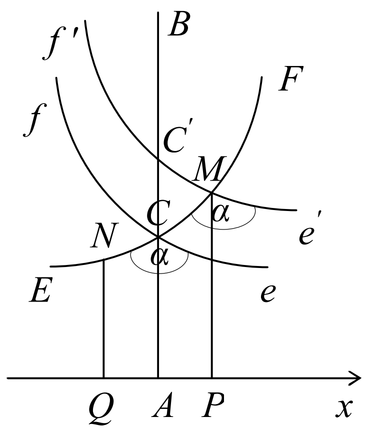


Рис. 1

Виходячи з рівності $\angle ENQ + \angle EMP = 2\angle ECA$, де $QA = AP$, і позначаючи ординату точки *M* через *y*, а ординату точки N через z, Ейлер одержує рівняння

$$-dydz = -dx^2,$$

або

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = 1,$$

яке можна було б подати у вигляді рівняння нейтрального типу

$$y'(x) \cdot y'(x - 2x) = 1, \tag{2.2}$$

поскільки $z = y(-x) = y(x - 2x)$.

Розв'язуючи (2.2) методом підбору (!), Ейлер виводить правило відшукання потрібних алґебраїчних кривих: якщо $q(u)$ – довільна непарна функція параметра u і знайдене

$$p = -\frac{(1 - u^2)dq}{2du},$$

тоді координати біжучої точки кривої є

$$x = q + \frac{(1 - u^2)dp}{2du}, \quad y = \frac{1 + u}{1 - u}(x - p - q).$$

Зауважимо, що рівняння (2.2) не охоплює всього різноманіття кривих, які мають задану властивість. Справді, нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої. Тоді, позначаючи абсцису точки *A* (див. рис. 1) через *a*, одержимо, що всі такі криві описуються диференціальним рівнянням нейтрального типу

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y'(2a - x) \cdot y'(x) - 1}{y'(2a - x) + y'(x)}. \tag{2.3}$$

Очевидно, що (2.2) одержується з більш загального рівняння (2.3) при $\alpha = \pi/2$ і $a = 0$ (коли за вісь *AB* береться вісь ординат).

У роботі 1764-66 років "Про зворотний метод дотичних" Ейлер розглядає ґеометричні задачі, дослідження яких також зводиться до розв'язування ДРВА (див. рис. 2).

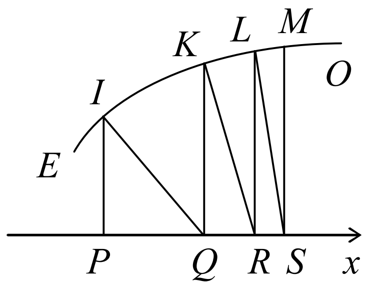


Рис. 2

Задача 1. Знайти криву *EO*, у якої нормаль *IQ*, проведена з довільної точки *I* кривої *EO*, рівна ординаті *QK*, поставленій з основи *Q* цієї нормалі, нормаль *KR* рівна ординаті *RL*, нормаль *LS* – ординаті *SM* тощо.

Якщо *x* і *y* – координати точки *I*, то задача зводиться до розв'язування ДРВА

$$y^2(x)+[y(x)\cdot y'(x)]^2=y^2(x+y(x)\cdot y'(x)). \quad (2.4)$$

В Ейлера є тільки словесне формулювання, еквівалентне рівнянню (2.4), а одержаний розв'язок має вигляд:

$$x=\frac{t\varphi}{2\pi}+\frac{t^2 d\varphi}{4\pi dt}-\frac{dV}{dt}, \quad y^2=\frac{t\varphi}{2\pi}+\frac{t^3 d\varphi}{2\pi dt}-\frac{2tdV}{dt}+2V,$$

де φ – кут, через який визначається піднормаль $PQ=t$, а V – деяка однозначна функція $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Інші задачі є подібними до задачі 1 і використовують рівняння, які будуються аналогічно до (2.4).

Задача 2. Знайти криву, у якої квадрат нормалі, проведеної з будь-якої точки кривої, менший за квадрат ординати, поставленої з основи цієї нормалі, на сталу величину a^2.

Відповідне ДРВА має вигляд:

$$a^2=y^2(x+y(x)\cdot y'(x))-[1+y'^2(x)]\cdot y^2(x). \quad (2.5)$$

Розв'язок Ейлера:

$$x=\frac{t\varphi}{2\pi}+\frac{(t-a^2)d\varphi-dV}{4\pi dt}, \quad y^2=\frac{(t^2+a^4)\varphi+V}{2\pi}+\frac{t(t^2-a^4)d\varphi-tdV}{2\pi dt},$$

де V і t – довільні однозначні функції $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Задача 3. Знайти криву *EO* (див. рис. 2) таку, що піднормалі PQ, QR, RS тощо утворюють арифметичну проґресію.

Відповідне ДРВА має вигляд:

$$\begin{aligned}&y(x+y(x)\cdot y'(x)+y(x+y(x)\cdot y'(x)))\cdot y'(x+y(x)\cdot y'(x)+y(x+y(x)\cdot y'(x)))+\\&+y(x)\cdot y'(x)=2y(x+y(x)\cdot y'(x))\cdot y'(x+y(x)\cdot y'(x)).\end{aligned} \quad (2.6)$$

Розв'язок Ейлера:

$$x=L\varphi^2+M\varphi+N,$$

$$y=4\pi\int(2L\varphi+2\pi L+M)(\varphi^2 dL+2\varphi L d\varphi+\varphi dM+Md\varphi+dN),$$

де L, M і N – довільні однозначні функції $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Задача 4. Аналогічна задачі 3, тільки піднормалі повинні утворювати ґеометричну проґресію зі знаменником n.

Відповідне ДРВА має вигляд:

$$ny(x)\cdot y'(x)=y(x+y(x)\cdot y'(x))\cdot y'(x+y(x)\cdot y'(x)). \quad (2.7)$$

Розв'язок Ейлера:

$$x = \frac{n^{\frac{\varphi}{2\pi}}}{n-1} p + q, \quad y^2 = \frac{n^{\frac{\varphi}{\pi}}}{n-1} p^2 + 2\int n^{\frac{\varphi}{2\pi}} p dq,$$

де p і q – довільні однозначні функції $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$.

Ейлер у згаданих роботах, опираючись на свою неймовірну кмітливість, підбирає частинні розв'язки досить складних ДРВА, причому ці рівняння є власне ДРВА, а не рівняннями зі "змішаними різницями". Ці ґеометричні задачі Ейлера зустрічаються в роботах багатьох математиків XIX сторіччя, але вони зводять ці задачі до рівнянь зі "змішаними різницями".

Вправа. Вивести диференціальні рівняння (2.3)-(2.7) для відповідних ґеометричних задач Ейлера.

Наступним кроком у розвитку теорії диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу є робота Жана Антуана Ніколя Коріта де Кондорсе (1743-1794) "Про визначення довільних функцій, які входять у розв'язок диференціальних рівнянь з частинними різницями" (1771 р.). Автор присвячує цілий розділ ДРВА, називаючи їх "рівняннями з різницями скінченими і нескінчено малими", причому розглядає рівняння виключно зі сталим відхиленням арґументу. Деякі ідеї, запропоновані маркізом де Кондорсе, широко застосовуються в теорії ДРВА і в наш час. Можна вирізнити два моменти.

1. Для рівнянь першого і другого порядків відносно похідних і різниць зі змінними коефіцієнтами Кондорсе робить спробу відшукати загальний метод розв'язування. Хоча запропонований ним метод не став робочим у зв'язку з недосконалістю і громіздкістю, зате його ідея побудови розв'язку як лінійної комбінації частинних розв'язків стає провідною при розв'язуванні ДРВА у XX сторіччі.

2. Кондорсе вирізняє лінійні ДРВА в самостійний розділ і для лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами застосовує підстановку Ейлера $y = \exp(kx)$, де $k = const$. Автор досліджує рівняння вигляду

$$y(x) + ay'(x) + b[y(x) + \Delta y(x)] = 0, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} y(x) + ay'(x) + b[y(x) + \Delta y(x)] + c\frac{dy(x+1)}{dx} + fy''(x) + \\ + g[y(x) + 2\Delta y(x) + \Delta^2 y(x)] = 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

де $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$, зводячи їх розв'язування до так званих характеристичних рівнянь і розглядаючи випадки дійсних різних і кратних коренів характеристичного рівняння (ХР).

Зокрема, для рівняння (2.8) одержане ХР

$$1 + ak + be^k = 0,$$

корені якого Кондорсе пропонує шукати ґрафічно як точки перетину прямої $1 + ay + bx = 0$ і кривої $x = \exp y$, зазначаючи при цьому, що кожному дійсному кореню відповідатиме нескінчена множина комплексних коренів за рахунок періодичності функції $x = \exp y$. Розв'язок рівняння (2.8) поданий у вигляді:

а) якщо $k_1 \neq k_2$ дійсні корені ХР, то

$$y = e^{k_1 x} \cdot Ae^{a'x} + Be^{b'x} + Ce^{c'x} + \ldots + e^{k_2 x} \cdot A'e^{a'x} + B'e^{b'x} + C'e^{c'x} + \ldots,$$

що слід розуміти як

$$y = e^{k_1 x}(Ae^{a'x} + Be^{b'x} + Ce^{c'x} + \ldots) + e^{k_2 x}(A'e^{a'x} + B'e^{b'x} + C'e^{c'x} + \ldots),$$

проте дужки у Кондорсе відсутні;

б) якщо $k_1 = k_2 \equiv k$, то

$$y = xe^{kx} Ae^{a'x} + Be^{b'x} + Ce^{c'x} + \ldots + e^{kx} A'e^{a'x} + B'e^{b'x} + C'e^{c'x} + \ldots,$$

що слід розуміти як

$$y = e^{kx}[(Ax + A')e^{a'x} + (Bx + B')e^{b'x} + (Cx + C')e^{c'x} + \ldots].$$

Для рівняння (2.9) Кондорсе розглядає частинні випадки:

а) $g = 0$, $f = 0$, $c = ab$. Тоді (2.9) при $\Delta x = 1$ набуде вигляду

$$y(x) + ay'(x) + by(x+1) + aby'(x+1) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння є

$$(1 + ak)(1 + be^k) = 0.$$

Розв'язок Кондорсе:

$$y = Ae^{-\frac{1}{a}x} + Be^{\ln\left(-\frac{1}{b}\right)x},$$

де B – довільна періодична з періодом 1 функція x. Зауважимо, що сьогодні цей розв'язок за умови $b < 0$ записався б у вигляді

$$y = Ae^{-\frac{1}{a}x} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{\left(\ln\left|\frac{1}{b}\right| + 2\pi i n\right)x},$$

де A, C_n – довільні сталі.

б) $f = 0$. Тоді з (2.9) одержимо

$$y(x) + ay'(x) + by(x+1) + cy'(x+1) + gy(x+2) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння є

$$1 + ak + be^k + cke^k + ge^{2k} = 0.$$

Припускаючи, що рівняння $1 + be^k + ge^{2k} = 0$ і $a + ce^k = 0$ мають спільний корінь k (при виконанні умови $c^2 - abc + a^2 g = 0$), Кондорсе записує розв'язок у вигляді

$$y = Be^{kx},$$

зазначаючи, що B – довільна функція типу тих, які входять у розв'язки рівнянь зі скінченими різницями.

в) $g = 0$. Тоді (2.9) дає

$$y(x) + ay'(x) + by(x+1) + cy'(x+1) + fy''(x) = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння:

$$1 + ak + be^k + cke^k + fk^2 = 0.$$

Припускаючи, що рівняння $1 + ak + fk^2 = 0$ і $b + ck = 0$ мають спільний корінь k ($k = -b/c$ при виконанні умови $c^2 - abc + fb^2 = 0$), Кондорсе записує розв'язок у вигляді

$$y = Ae^{-\frac{b}{c}x},$$

де A – довільна стала.

Методом підстановки $y = \exp(kx)$ математики кінця XVIII і всього XIX сторіччя охоче користувалися для підбору частинних розв'язків диференціальних рівнянь, а в XX ст. цей метод стає основним при розв'язуванні стаціонарних лінійних однорідних ДРВА.

Вправа. Записати розв'язок рівняння (2.9) для випадку а) за умови $b > 0$.

На теренах колишнього Радянського Союзу вивчення теорії диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу розпочалося в 1940-х роках. Основи (дослідження лінійних рівнянь із запізненням) закладені А.Д.Мишкісом [5]; під його впливом Л.Е.Ельсґольц орґанізував перший семінар з теорії ДРВА у Москві. Зараз багато науковців СНД та України займаються теорією і практикою ДРВА. На сьогодні ДРВА знаходять широке застосування не тільки в ґеометричних задачах, а й при вивченні різноманітних проблем практики (оптимізація автоматичних систем управління і теорія автоколивних систем, довгострокове планування в економіці, радіофізика, електротехніка, охорона довкілля, біоніка, медицина тощо). Наведемо приклади деяких конкретних задач, які приводять до рівнянь з відхиленням арґументу.

Теорія автоматичних систем управління (АСУ). Тут в основному досліджуються системи ДРВА першого порядку вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau(t)), \boldsymbol{u}(t)], \\ &\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t-\tau(t))], \end{aligned} \tag{2.10}$$

які описують деякий динамічний процес, де $\boldsymbol{u}(t)$ є реґулятором (вектором керування). Завдання полягає у виборі оптимального керування, котре мінімізувало б певний функціонал (усталений процес) $I(\boldsymbol{u})$, визначений за допомогою траєкторій системи (2.10) (варіаційна задача). Часто системи (2.10) є лінійними. Наприклад, при вивченні питання оптимізації динамічних процесів у сучасних транспортних пристроях з урахуванням запізнень у збурюючих рушіях розглядається [8, с. 140-141] система $2n$ ДРЗА

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{ш},$$

а сама задача полягає у виборі закону керування $\boldsymbol{u} = \varphi(\boldsymbol{x})$, який оптимізував би усталений процес у відповідності до квадратичного критерію якості

$$\boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}' \rangle + \langle \boldsymbol{u}\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}' \rangle,$$

де $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ – сталі матриці, причому $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}'$ і $\boldsymbol{C} > 0$; $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{u}$ – вектори фазових координат і керівних рушіїв відповідно, а $\boldsymbol{ш}$ – вектор зовнішніх збурень, який має наступну структуру:

$$\boldsymbol{ш} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(t) \\ \boldsymbol{f}(t-\tau) \end{bmatrix}, \quad \tau = const \geq 0,$$

де n-вимірний вектор $\boldsymbol{f}(t)$ є стаціонарний випадковий процес із нульовим математичним очікуванням і дробово-раціональною матрицею спектральних густот.

Хвильові процеси. У різних галузях техніки знаходять застосування хвильові системи зі змінними з бігом часу границями (оптичний резонатор і струна з коливною границею, резонатор із “плазмовим поршнем”, бруси зі змінними навантаженнями на кінцях, гідро- і ґазодинамічні системи змінної довжини тощо). В радіофізиці і радіотехніці особливий інтерес викликають хвильові системи з періодично змінною ємністю на границі, які застосовуються в інформаційних, обчислювальних і вимірювальних пристроях, а також при моделюванні хвильових процесів у системах іншої фізичної природи.

Власні коливання у хвильовій системі з періодично-змінними граничними умовами в стаціонарному режимі є розв’язками диференціально-різницевого рівняння [8, с. 105]

$$\frac{d}{dx}\{(1-\alpha x)[(1-\mu)y(x+1)+(1+\mu)y(x-1)]\}=y(x+1)-y(x-1), \tag{2.11}$$

де x – “безрозмірний час” (див. с. 52); $y(x)$ – хвиля на параметричній границі; μ – параметр, який враховує втрати на границі; $\alpha \ll 1$.

Інші коливні процеси. Розглянемо коливання в одній площині вантажу, підвішеного на нерозтяжній нитці, пропущеній через нерухоме кільце. Залежно від того, чи зовнішня періодична сила діє перпендикулярно до напряму руху вантажу (поперечні коливання) або по напряму руху вантажу (поздовжні коливання), коливання можуть бути описані за аналоґією відповідно з амплітудною модуляцією або з частотною і фазовою модуляціями в радіофізиці. Диференціальні рівняння руху відповідно матимуть вигляд [8, с. 191]:

$$\ddot{x}(t)+2\beta\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)\cdot(1+h\cos\nu t)=0,$$

$$\ddot{x}(t)+2\beta\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(\nu t+h\cos t)+\omega^2 x(t)=0. \tag{2.12}$$

Рівняння (2.12) є ДРВА і називається ***лінійним диференціальним рівнянням арґументних коливань***. Це – наочний приклад ДРВА, що не охоплюється наведеною в §1.1 класифікацією, адже завдяки дії високочастотної зовнішньої періодичної сили на частоті ν певну частку періоду арґумент зміщення буде передувати, а іншу частку – запізнювати відносно арґументів швидкості і прискорення.

Електротехніка. Функціонально-диференціальне рівняння

$$\frac{\ddot{x}(t)}{\left[1+\dot{x}^2(t)\right]^{3/2}}=\int\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty} d\{\theta[\tau-x(t)-x(t-\tau)]\}\,\frac{k}{\tau^2}\cdot\frac{1-\dot{x}(t-\tau)}{1+\dot{x}(t-\tau)} \tag{2.13}$$

описує [8, с. 91] рух двох однойменних точкових зарядів рівної маси по осі x, симетричний відносно точки $x=0$ (використана система одиниць, в якій швидкість світла $c=1$). Тут $\theta(t)$ – функція Хевісайда

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

а коефіцієнт $k>0$ пов’язаний із зарядами та масою частинок. Рівняння (2.13) одержується зі звичайних рівнянь електродинаміки, якщо знехтувати силою власнодії зарядів.

Горіння в камері рідинного ракетного двигуна (РРД). Виходячи з ідеї (*Л.Крокко*: “Вопросы ракетной техники”, 1952 р.), що між вприскуванням компонентів у камеру згоряння РРД і їх перетворенням у кінцеві продукти згоряння є деякий змінний час (час запізнення), створена [8, с. 247] повна нелінійна модель процесу горіння в РРД, а саме: для збурення швидкості вприскування палива в камеру згоряння одержане ДРЗА вигляду

$$\ddot{x}(t) + (\alpha + \beta p)\dot{x}(t) + \alpha\beta x(t) + \gamma x(t - \Delta) = \delta_1 x(t)\dot{x}(t) + \delta_2 x^2(t), \qquad (2.14)$$

де α, β, γ, δ_1, δ_2 – деякі сталі, а величина p характеризує тиск і є основним параметром. Запізнення Δ нелінійно залежить від $x(t)$, $\dot{x}(t)$ і p.

Вправа. Визначити типи рівнянь (2.10), (2.11), (2.13), (2.14) згідно класифікації, наведеної в §1.1.

Звичайно, всі вищенаведені ДРВА (2.10)-(2.14) є досить складними, тому для відшукання їх розв’язків застосовують різні наближені методи. Наприклад, знайдений (*Д.А.Кабанов*, *С.М.Никулин*: “Собственные решения волновых уравнений с нестационарными граничными условиями”, 1975 р.) шляхом розкладу $y(x \pm 1)$ в ряд Тейлора розв’язок рівняння (2.11) має вигляд імпульсів

$$y(x) = \begin{cases} y_0 e^{-0,5\alpha\mu^{-1}x^2}, & \mu \approx 1, \\ y_0 e^{1,5\mu x} \operatorname{Ai}\left[\sqrt[3]{3\alpha}\left(x + \frac{3\mu^2}{\alpha}\right)\right], & \mu << 1 \end{cases}$$

(тут $\operatorname{Ai}[\cdot]$ – інтеґрал Ейрі, y_0 – стала інтеґрування), відстань між якими визначається хвильовою довжиною системи і жорстко пов’язана з періодом зміни граничної умови.

РОЗДІЛ II
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДХИЛЕННЯМ АРҐУМЕНТУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

§2.1. Постановка основної початкової задачі для ДРВА

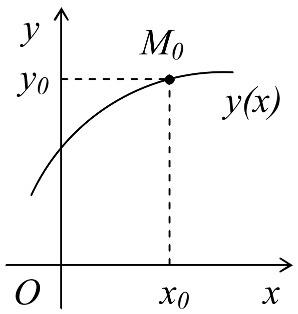


Рис. 3

Нагадаємо, що задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку (рис. 3)

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.2}$$

полягає у знаходженні інтеґральної кривої – розв’язку рівняння (1.1), яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ – тобто справджує початкову умову (1.2). Тут початкові дані – точка M_0; при виконанні умов теореми Коші і Пеано розв’язок задачі (1.1),(1.2) є єдиним.

Розглянемо тепер подібне до (1.1) ДРВА першого порядку

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau)]. \tag{1.3}$$

Будемо вважати, що в (1.3) $\tau = const > 0$. Поставимо задачу Коші для ДРВА (1.3), яку назвемо ***основною початковою задачею***. Для цього визначимо деяку точку x_0 і відрізок $x \in [x_0 - \tau, x_0]$, на якому задамо деяку неперервну функцію $\varphi(x)$ (рис. 4).

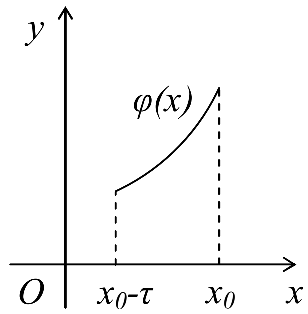


Рис. 4

Визначення. Основна початкова задача (ОПЗ) для ДРЗА (1.3) полягає у відшуканні на деякому проміжку $(x_0, x_1]$ такого розв’язку $y(x)$ рівняння (1.3), який на відрізку $[x_0 - \tau, x_0]$ співпадає з функцією $\varphi(x)$. При цьому $\varphi(x)$ називається ***початковою функцією***, а множина значень арґументу

$$\overline{E}_{x_0} = \{x \,|\, x_0 - \tau \le x \le x_0\},$$

тобто (в даному випадку!) відрізок $x \in [x_0 - \tau, x_0]$, називається ***початковою множиною***.

Отже, початковими даними для ДРВА є множина точок, визначена початковою функцією $\varphi(x)$. Залежно від заданої $\varphi(x)$ можна одержати різні розв’язки рівняння (1.3).

Якщо в рівнянні (1.3) $\tau \equiv \tau(x) \ge 0$, то основна початкова задача ставиться трохи інакше: у цьому випадку початкова множина

$$\overline{E}_{x_0} = \{x \,|\, \overline{x} - \tau(\overline{x}) \le x \le x_0, \quad \overline{x} \in [x_0, x_1]\}.$$

Отже, початкова множина для ДРЗА (1.3) у випадку $\tau \equiv \tau(x) \ge 0$ включає точку x_0 і всі ті значення запізнень $x - \tau(x)$, де $x \in [x_0, x_1]$, для яких виконується нерівність $x - \tau(x) \le x_0$.

Приклади ОПЗ для ДРЗА типу (1.3) наведені нижче.

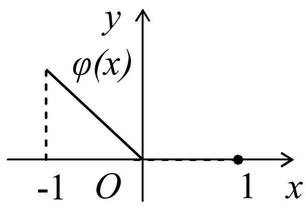


Рис. 5

1. На проміжку (0;1] знайти розв'язок ДРЗА зі сталим запізненням $\tau = 1$

$$y'(x) = y(x-1),$$

який на початковій множині $\overline{E}_0 = \{x \mid -1 \le x \le 0\}$ співпадає з функцією $\varphi(x) = -x$ (рис. 5).

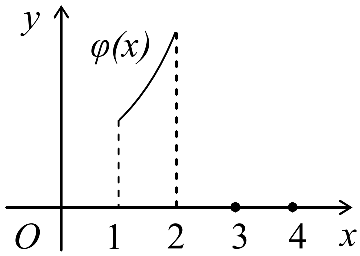


Рис. 6

2. На проміжку (2;4] знайти розв'язок ДРЗА із зосередженим запізненням ($\tau = 0{,}5x$)

$$y'(x) = x - y(\tfrac{x}{2}),$$

який на початковій множині $\overline{E}_2$ співпадає з функцією $\varphi(x) = 0{,}5x^2 + 1$ (рис. 6). Тут згідно з визначенням маємо: $\overline{E}_2 = \{x \mid \bar{x} - 0{,}5\bar{x} \le x \le 2, \quad \bar{x} \in [2;4]\}$, тобто $\overline{E}_2 = \{x \mid 1 \le x \le 2\}$. Зауважимо, що при зміні проміжку $(x_0, x_1]$ цього разу змінюватиметься і початкова множина. Так, якщо взяти $x_0 = 6$, $x_1 = 10$, то $\overline{E}_6 = \{x \mid 3 \le x \le 6\}$, а якщо шукати розв'язок поставленої ОПЗ на всій додатній півосі, то одержимо, що початкова множина включає єдину точку $x_0 = 0$.

Для ДРЗА першого порядку з m відхиленнями арґументу вигляду

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x - \tau_1(x)), \ldots, y(x - \tau_m(x))], \tag{1.4}$$

де $\tau_i(x) \ge 0$ неперервні функції, ОПЗ ставиться аналогічно до рівняння (1.3). Початкова множина в цьому випадку включає точку x_0 і всі ті значення запізнень $x - \tau_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, де $x \in [x_0, x_1]$, які не перевищують значення x_0.

Якщо в рівнянні (1.4) всі запізнення є сталими, то згідно з визначенням початковою множиною буде $\overline{E}_{x_0} = \{x \mid x_0 - \tau \le x \le x_0\}$, де $\tau = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \tau_i$.

ПРИКЛАДИ. Записати початкові множини для наступних ОПЗ:

а) $y'(x) = xy(x-3) + xy(x) \cdot y(x-2), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_{-4}} = x^2 - 16, \quad x_1 = 0.$

Розв'язання. Запізнення $\tau_1 = 3$ і $\tau_2 = 2$ є сталими, а відповідні їм початкові множини $\overline{E}(\tau_1) = [-7;-4]$, $\overline{E}(\tau_2) = [-6;-4]$. Згідно з визначенням початкова множина $\overline{E}_{-4}$ включає точку $x_0 = -4$ і всі ті значення запізнень $x - 3$ і $x - 2$, де $x \in [-4;0]$, які не перевищують значення -4. Тому

$$\overline{E}_{-4} = \overline{E}(\tau_1) \cup \overline{E}(\tau_2) = [-7;-4].$$

б) $y'(x) = 2y(\tfrac{x}{2}) - xy(x - e^{-x}) + y(x - \tfrac{1}{2}), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_0} = e^{-x}, \quad x_1 = 6.$

Розв'язання. Тут $\tau_1 = 0{,}5x$, $\tau_2 = e^{-x}$, $\tau_3 = 0{,}5$. Відповідні початкові множини: $\overline{E}(\tau_1) = \{0\}$, $\overline{E}(\tau_2) = [-1;0]$, $\overline{E}(\tau_3) = [-0{,}5;0]$. Тоді

$$\overline{E}_0 = \overline{E}(\tau_1) \cup \overline{E}(\tau_2) \cup \overline{E}(\tau_3) = [-1;0].$$

в) Візьмемо попередню ОПЗ, змінивши відрізок для знаходження розв’язку: нехай $x_0 = 2$, а $x_1 = 8$. Тоді матимемо: $\overline{E}(\tau_1) = [1;2]$, $\overline{E}(\tau_2) = [2 - e^{-2};2]$, $\overline{E}(\tau_3) = [1{,}5;2]$ і $\overline{E}_2 = \overline{E}(\tau_1) \bigcup \overline{E}(\tau_2) \bigcup \overline{E}(\tau_3) = [1;2]$.

Бачимо, що у випадку б) визначальною для початкової множини була множина $\overline{E}(\tau_2)$, а у випадку в) – множина $\overline{E}(\tau_1)$. Отже, вибір відрізка $[x_0, x_1]$ суттєво впливає на вигляд початкової множини заданої ОПЗ.

Аналогічно ставиться основна початкова задача для ДРВА вищих порядків, і для систем ДРВА, а також для ДРВА з частинними похідними. Зауважимо лишень, що для ДРВА з частинними похідними, де відхилення можуть бути по різних арґументах, задають кілька початкових функцій на різних початкових множинах.

§2.2. Метод кроків інтеґрування основної початкової задачі для ДРВА першого порядку

Розглянемо ДРЗА першого порядку вигляду

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau)], \quad \tau = const > 0. \tag{2.1}$$

Поставимо основну початкову задачу (ОПЗ): на інтервалі $x \in (x_0, x_1]$ знайти розв’язок $y(x)$ рівняння (2.1), який на початковій множині $\overline{E}_{x_0}$, тобто на проміжку $x \in [x_0 - \tau, x_0]$, співпадає з заданою неперервною функцією $\varphi(x)$:

$$y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x). \tag{2.2}$$

Для знаходження шуканого розв’язку застосуємо так званий метод кроків. Суть цього методу полягає в наступному.

Інтервал $(x_0, x_1]$ розбиваємо на елементарні відрізки I_k, $k = 1,2,...$, довжини τ, тобто $I_1 = (x_0, x_0 + \tau]$, $I_2 = (x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$, $I_3 = (x_0 + 2\tau, x_0 + 3\tau]$ тощо. Тоді, врахувавши початкову умову (2.2), на кожному з цих відрізків задачу (2.1),(2.2) можна звести до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.

Перший крок. Шукаємо розв’язок $y(x)$ на проміжку $I_1 = (x_0, x_0 + \tau]$. Зауважимо, що при $x \in [x_0, x_0 + \tau]$ $x_0 - \tau \in [x_0 - \tau, x_0] = \overline{E}_{x_0}$, тому функцію $y(x-\tau)$ у ДРЗА (2.1) згідно (2.2) можна замінити через функцію $\varphi(x-\tau)$. Тоді задача (2.1),(2.2) зведеться до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$y'(x) = f[x, y(x), \varphi(x-\tau)], \quad x \in I_1, \tag{2.1a}$$

$$y(x_0) = \varphi(x_0). \tag{2.2a}$$

Якщо рівняння (2.1а) належить до інтеґровного типу, тобто інтеґрується в квадратурах, тоді, розв’язавши задачу Коші (2.1а),(2.2а), знаходимо розв’язок $y_1(x)$ ОПЗ (1),(2) при $x \in [x_0, x_0 + \tau]$.

Другий крок. Беремо відрізок $I_2 = (x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$, при цьому проміжок I_1 розглядаємо як нову початкову множину, а щойно знайдену функцію $y_1(x)$ – як початкову функцію на цій множині. Тоді при $x \in (x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$ одержимо задачу Коші

$$y'(x) = f[x, y(x), y_1(x-\tau)], \quad x \in I_2, \tag{2.1б}$$

$$y(x_0 + \tau) = y_1(x_0 + \tau). \tag{2.2б}$$

Зінтеґрувавши задачу Коші (2.1б),(2.2б), одержимо розв'язок $y_2(x)$ ОПЗ (2.1),(2.2) при $x \in [x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$.

Третій крок. Беручи проміжок $I_2 = (x_0 + \tau, x_0 + 2\tau]$ за нову початкову множину, а функцію $y_2(x)$ – за початкову функцію на цій множині, на відрізку $x \in I_3 = [x_0 + 2\tau, x_0 + 3\tau]$ одержимо задачу Коші

$$y'(x) = f[x, y(x), y_2(x-\tau)], \quad x \in I_3,$$

$$y(x_0 + 2\tau) = y_2(x_0 + 2\tau).$$

Процес продовжуємо, поки не одержимо розв'язки на всіх послідовно елементарних відрізках.

Метод кроків має ту перевагу, що він простий у застосуванні і дозволяє знайти розв'язок в аналітичному вигляді. Проте він має й ряд суттєвих недоліків:

– метод кроків діє лише у тому випадку, коли звичайні задачі Коші, до яких зводиться ОПЗ (2.1),(2.2), мають точні розв'язки (інтеґруються в квадратурах);

– метод кроків практично незастосовний, коли τ досить мале, поскільки, якщо при цьому проміжок $(x_0, x_1]$ великий, доводиться морочитися з величезною кількістю дочірніх задач Коші, що недоцільно;

– метод кроків неможливо застосувати, коли початкова множина складається лише з однієї точки (так званий особливий випадок).

Метод кроків інтеґрує в замкненому вигляді лише деякі класи ДРВА. Переважна більшість ДРВА, що одержуються на практиці, є складними і розв'язуються наближеними методами.

ПРИКЛАД 1. На проміжку $x \in (1;3]$ знайти розв'язок рівняння з запізненням арґументу

$$y'(x) = 6y(x-1),$$

якщо $y(x)\big|_{\overline{E}_1} = x$, де $\overline{E}_1 = [0;1]$.

Розв'язання. Маємо ОПЗ (2.1),(2.2), де $\tau = 1$, $x_0 = 1$, $\varphi(x) = x$. Перший крок: $x \in (1;2] \Rightarrow x - 1 \in (0;1]$. Одержимо задачу Коші (2.1а),(2.2а) у вигляді

$$y'(x) = 6(x-1), \quad y(1) = 1.$$

Звідси маємо: $y(x) \equiv y_1(x) = 3x^2 - 6x + 4$ при $x \in (1;2]$. Для відшукання розв'язку на наступному елементарному відрізку поставимо нову ОПЗ:

$$y'(x) = 6y(x-1), \ \ y(x)\big|_{\overline{E}_2} = 3x^2 - 6x + 4, \ \text{де } \overline{E}_2 = [1;2].$$

Другий крок: $x \in (2;3] \Rightarrow x - 1 \in (1;2]$. Одержимо задачу Коші (2.1б),(2.2б) у вигляді

$$y'(x) = 18(x-1)^2 - 36(x-1) + 24, \quad y(2) = 4,$$

звідки маємо: $y(x) \equiv y_2(x) = 6(x-1)^3 - 18(x-1)^2 + 24x - 32$ при $x \in (2;3]$.

Знайдений розв'язок можна записати у вигляді

$$y(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1], \\ 3x^2 - 6x + 4, & x \in (1;2], \\ 6(x-1)^3 - 18(x-1)^2 + 24x - 32, & x \in (2;3]. \end{cases}$$

Зауважимо, що для ДРВА типу (2.1) характерна властивість згладжування розв'язків з ростом числа кроків. На першому кроці розв'язок рівняння є неперервним продовженням початкової функції, тобто $y_1(x_{0+}) = \varphi(x_{0-})$, але при цьому в точці x_0 перша похідна, взагалі кажучи, матиме розрив першого роду. Для того, щоб похідна не мала розриву, повинна виконуватися умова узгодженості

$$\varphi'(x_{0-}) \equiv f[x_0, y_1(x_0), \varphi(x_0 - \tau)],$$

яка справджується досить рідко в окремих простих випадках.

У точці $x_0 + \tau$ $y_2(x)$ і $y_2'(x)$ будуть неперервними, але $y_2''(x)$ матиме розрив першого роду. У точці $x_0 + 2\tau$ $y_3(x)$, $y_3'(x)$ і $y_3''(x)$ будуть неперервними, але $y_3'''(x)$ матиме розрив першого роду тощо, тобто з ростом числа кроків розв'язок згладжуватиметься. Проілюструємо вищезгадану властивість для розв'язку, одержаного в прикладі 1.

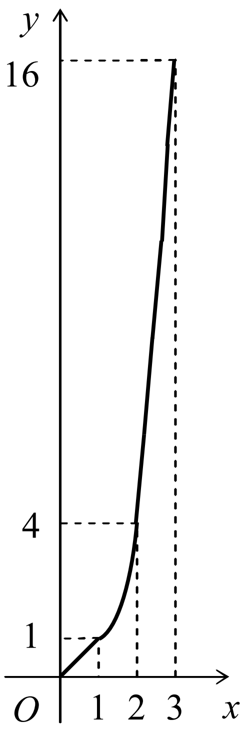


Рис. 7

У точці $x_0 = 1$ маємо: $\varphi(x_{0-}) = 1$, $y_1(x_{0+}) = 1$; $\varphi'(x_{0-}) = 1$, $y_1'(x_{0+}) = 0$, $f[x_0, y_1(x_0), \varphi(x_0 - \tau)] \equiv 6\varphi(0) = 0 \neq \varphi(x_{0-})$. Умова узгодженості не виконується, перша похідна має розрив.

У точці $x_0 + \tau = 2$, рахуючи $y_1(x)$ за нову початкову функцію, дістанемо: $y_1(x_0 + \tau) = 4$, $y_2(x_0 + \tau) = 4$; $y_1'(x_0 + \tau) = 6$, $y_2'(x_0 + \tau) = 6$; $y_1''(x_0 + \tau) = 6$, $y_2''(x_0 + \tau) = 0$. Значення першої похідної зліва і справа співпадають, а друга похідна має розрив. Інтеґруючи поставлену ОПЗ на наступних елементарних відрізках при $x > 3$, можна переконатися, що з ростом числа кроків розв'язок справді згладжуватиметься.

На рис. 7 зображений ґрафік функції $y(x)$ при $x \in [0;3]$. Помітно, що в точці $x = 1$ дотичні до ґрафіків зліва і справа є різними, а в точці $x = 2$ вони співпадають.

ПРИКЛАД 2. На інтервалі $x > -1$ знайти розв'язок ОПЗ

$$\begin{aligned} &y'(x) = xy(x) + y(x-1), \\ &y(x)\big|_{\bar{E}_0} = -x. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Розв'язання. Маємо лінійне ДРЗА, початкова функція для якого задана на початковій множині $\overline{E}_0 = [-1;0]$. Застосуємо метод кроків.

При $x \in [0;1]$ $x-1 \in [-1;0]$. Тоді з (2.3) одержимо задачу Коші для звичайного лінійного неоднорідного рівняння першого порядку:

$$\begin{aligned} &y'(x) = xy(x) - x + 1, \quad x \in (0;1], \\ &y(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Розв'язок задачі Коші (2.4) дається формулою

$$y(x) = \int_0^x (1-\xi) e^{0,5(x^2-\xi^2)} d\xi, \quad x \in (0;1].$$

Далі використовувати метод кроків явно недоцільно. Так, уже на другому кроці при $x \in (1;2]$ одержимо задачу Коші

$$y'(x) = xy(x) + \int_0^{x-1} (1-\xi) e^{0,5[(x-1)^2-\xi^2]} d\xi,$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-\xi) e^{0,5(1-\xi^2)} d\xi,$$

розв'язок якої доречніше шукати наближеними методами.

Розглянемо ОПЗ для ДРЗА першого порядку з m відхиленнями:

$$\begin{aligned} &y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau_1), ..., y(x-\tau_m)], \quad \tau_i = const > 0, \\ &y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Застосуємо метод кроків до задачі (2.5).

На першому кроці розв'язок знаходимо на проміжку $x \in (x_0, x_0 + h_1]$, де $h_1 = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \tau_i$ (адже тільки при такому значенні h_1 усі відхилення $x - \tau_i$ потрапляють у початкову множину). Тоді всі значення $y(x-\tau_i)$ визначаються початковою функцією $\varphi(x)$ і одержуємо задачу Коші

$$\begin{aligned} &y'(x) = f[x, y(x), \varphi(x-\tau_1), ..., \varphi(x-\tau_m)], \quad x \in (x_0, x_0 + h_1], \\ &y(x_0) = \varphi(x_0). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Позначимо через $y_1(x)$ розв'язок задачі Коші (2.6), а $x_1 = x_0 + h_1$. Тоді другим кроком розв'язок слід шукати на проміжку $x \in (x_1, x_1 + h_2)$, де h_2 вибираємо таким чином, щоб значення $y(x-\tau_i)$ однозначно визначалися функціями $\varphi(x)$ і $y_1(x)$. Отже, беремо

$$h_2 = \min\left\{\min_i \tau_i, \quad \min_{i \neq j} |\tau_i - \tau_j|\right\}.$$

Очевидно, що при цьому значення h_1 і h_2 можуть бути різними, але завжди $h_2 \le h_1$, тобто довжини елементарних відрізків з ростом числа кроків не збільшуються (зауважимо, що у випадку зосереджених чи автореґульованих запізнень твердження не має сили!). Аналоґічно інтеґруємо ОПЗ (2.5) на всіх послідовно елементарних відрізках.

ПРИКЛАД 3. На інтервалі $x > -1$ знайти розв'язок ОПЗ

$$\begin{aligned} &y'(x) = 12[2y(x-3) - y(x-2) - y(x-4)], \\ &y(x)\Big|_{\overline{E}_{-1}} = 2 + x. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Розв'язання. Маємо лінійне ДРЗА зі сталими коефіцієнтами, початкова функція для якого задана на множині $\overline{E}_{-1} = [-5;-1]$. Застосуємо метод кроків.

Довжина першого елементарного відрізка I_1 рівна $h_1 = 2$ (значення мінімального запізнення). При $x \in (-1;1]$ усі запізнення потрапляють у початкову множину, тому $y(x-2) = x$, $y(x-3) = x-1$, $y(x-4) = x-2$. Тоді з (2.7) одержимо просту задачу Коші

$$\begin{aligned} &y'(x) = 0, \quad x \in (-1;1], \\ &y(-1) = 1, \end{aligned}$$

розв'язок якої $y_1(x) \equiv 1$.

На другому кроці брати таку ж довжину елементарного відрізка не можна, поскільки при $x \in (1;3]$ значення $y(x-3)$ не визначаються однозначно. Тому беремо $h_2 = 1$. При $x \in (1;2]$ запізнення $x-3$ та $x-4$ потрапляють у початкову множину, а запізнення $x-2$ у перший елементарний відрізок I_1. Тоді $y(x-2) = 1$, $y(x-3) = x-1$, $y(x-4) = x-2$, і з (2.7) одержуємо задачу Коші

$$\begin{aligned} &y'(x) = 12(x-1), \quad x \in (1;2], \\ &y(1) = 1, \end{aligned}$$

розв'язок якої $y_2(x) = 6(x-1)^2 + 1$.

Наступні кроки робимо аналоґічно на відрізках довжини $h = 1$. Так, при $x \in (2;3]$ $y(x-2) = y(x-3) = 1$, $y(x-4) = x-2$, і з (2.7) одержимо задачу Коші

$$\begin{aligned} &y'(x) = 12(3-x), \quad x \in (2;3], \\ &y(2) = 7, \end{aligned}$$

розв'язок якої $y_3(x) = 13 - 6(3-x)^2$, тощо.

Метод кроків застосовний і до деяких ДРВА нейтрального типу. Наприклад, ОПЗ для рівняння першого порядку вигляду

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau), y'(x-\tau)], \quad \tau = const > 0,$$

з початковою умовою $y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x)$ на першому кроці зводиться до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} &y'(x) = f[x, y(x), \varphi(x-\tau), \varphi'(x-\tau)], \quad x \in (x_0, x_0 + \tau], \\ &y(x_0) = \varphi(x_0), \end{aligned}$$

котра підлягає наведеним вище міркуванням стосовно ДРЗА першого порядку.

ПРИКЛАД 4. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$2y'(x) = \frac{2x - 6 + y(x-3)}{y'(x-2)\cdot y(x)},$$
$$y(x)\Big|_{\overline{E}_1} = x^2 - 2x. \tag{2.8}$$

Розв'язання. Маємо ДРВА нейтрального типу першого порядку, початкова функція для якого задана на множині $\overline{E}_1 = [-2;1]$. Застосуємо метод кроків, беручи елементарні відрізки як у прикладі 3 (тобто $h_1 = 2$, а для наступних кроків довжини відрізків $h = 1$).

При $x \in (1;3]$ усі запізнення потрапляють у початкову множину, тому із (2.8) одержимо задачу Коші

$$2y'(x) = \frac{x-3}{2y(x)}, \quad x \in (1;3],$$
$$y(1) = -1,$$

розв'язок якої $y_1(x) = -0{,}5(3 - x)$.

Другий крок: при $x \in (3;4]$ значення $y(x-3)$ визначаються початковою функцією, а значення $y'(x-2)$ – вже функцією $y_1(x)$. Тоді з (2.8) одержуємо задачу Коші

$$y'(x) = \frac{(x-3)^2}{y(x)}, \quad x \in (3;4],$$
$$y(3) = 0,$$

розв'язки якої мають вигляд $y_2^{\pm}(x) = \pm\sqrt{\dfrac{2(x-3)^3}{3}}$, тощо.

§2.3. Інтеґровні типи диференціальних рівнянь з відхиленням арґументу першого порядку

Визначення 1. ДРВА, до яких застосовний метод кроків, називаються рівняннями, які інтеґруються в квадратурах (інтеґровними типами).

До інтеґровних типів ДРВА першого порядку, зокрема, відносяться:
- узагальнені рівняння з відокремлюваними змінними;
- узагальнені лінійні рівняння;
- узагальнені рівняння в повних диференціалах.

Визначення 2. Узагальненим рівнянням з відокремлюваними змінними називається ДРВА вигляду:

$$f_1[y(x)]\cdot f_2[x, y(x-\tau_1(x)),\dots, y(x-\tau_m(x))]dx +$$
$$+ g_1[y(x)]\cdot g_2[x, y(x-\tau_1(x)),\dots, y(x-\tau_m(x))]dy(x) = 0. \tag{3.1}$$

Основна початкова задача (ОПЗ) для рівняння (3.1) з початковою умовою

$$y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x) \tag{3.2}$$

на першому елементарному відрізку $x \in (x_0, x_0 + h_1]$ зводиться до задачі Коші

$$f_1[y(x)] \cdot f_2[x, \varphi(x - \tau_1(x)), ..., \varphi(x - \tau_m(x))]dx +$$
$$+ g_1[y(x)] \cdot g_2[x, \varphi(x - \tau_1(x)), ..., \varphi(x - \tau_m(x))]dy(x) = 0, \qquad (3.3)$$
$$y(x_0) = \varphi(x_0).$$

Очевидно, що рівняння задачі (3.3) є звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними вигляду

$$f_1(y)\bar{f}_2(x)dx = -g_1(y)\bar{g}_2(x)dy,$$

котре неважко зінтеґрувати.

ПРИКЛАД 1. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$(x-1)y(x) \cdot y(x-2)dy(x) = y(x-1)dx, \quad y(x)\Big|_{\bar{E}_1} = x.$$

Розв'язання. Визначимо спочатку початкову множину $\bar{E}_1$. Для відхилення $\tau_1 = 1$ $\bar{E}(\tau_1) = [0;1]$; для $\tau_2 = 2$ $\bar{E}(\tau_2) = [-1;1]$. Згідно з визначенням (див. §2.1) знаходимо $\bar{E}_1 = \bar{E}(\tau_1) \cup \bar{E}(\tau_2) = [-1;1]$.

Поскільки $\tau_1 < \tau_2$, то для визначеності розв'язку елементарні відрізки будуємо з кроком $\tau_1 = 1$. Отже, на першому кроці при $x \in (1;2]$ дістанемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$(x-1)(x-2)ydy = (x-1)dx, \quad y(1) = 1,$$

розв'язок якої має вигляд

$$y(x) = \sqrt{1 + 2\ln(2-x)}, \quad x \in (1;2].$$

Подальші кроки неможливі, поскільки при $x = 2$ маємо невизначеність (розв'язок асимптотично наближається до прямої $x = 2$).

ПРИКЛАД 2. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$(x-1)y(x-2)dy(x) = y(x) \cdot y(x-1)dx, \quad y(x)\Big|_{\bar{E}_1} = x.$$

Розв'язання. Аналогічно до попереднього прикладу визначаємо початкову множину $\bar{E}_1 = [-1;1]$. На першому кроці при $x \in (1;2]$ дістанемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$(x-1)(x-2)dy = (x-1)ydx, \quad y(1) = 1,$$

розв'язок якої є $y(x) = 2 - x$ при $x \in (1;2]$.

Другий крок: при $x \in (2;3]$ $x - 1 \in (1;2]$, тобто $y(x-1) = 2 - (x-1) = 3 - x$, а $x - 2 \in (0;1]$, тобто $y(x-2) = x - 2$. Одержуємо задачу Коші

$$(x-1)(x-2)dy = (3-x)ydx, \quad y(2) = 0,$$

розв'язок якої має вигляд

$$y(x) = C(x-2)(x-1)^{-2}, \quad x \in (2;3],$$

де C довільна стала (розв'язок розгалужується). Беручи різні значення сталої C, можна одержати різні розв'язки поставленої задачі.

Вправа. Знайти розв'язок поставленої ОПЗ на третьому елементарному відрізку.

Визначення 3. ДРВА вигляду

$$y'(x) + p[x, y(x-\tau_1(x)),\ldots,y(x-\tau_m(x))]y(x) = \\ = q[x, y(x-\tau_1(x)),\ldots,y(x-\tau_m(x))] \quad (3.4)$$

називається узагальненим лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку.

Основна початкова задача для рівняння (3.4) з початковою умовою (3.2) на першому елементарному відрізку $x \in (x_0, x_0 + h_1]$ зводиться до задачі Коші для звичайного лінійного рівняння першого порядку

$$y'(x) + p[x, \varphi(x-\tau_1(x)),\ldots,\varphi(x-\tau_m(x))]y(x) = q[x, \varphi(x-\tau_1(x)),\ldots,\varphi(x-\tau_m(x))],$$

$$y(x_0) = \varphi(x_0),$$

яка інтеґрується відомими з курсу звичайних диференціальних рівнянь методами (метод Лаґранжа, метод Д'Аламбера тощо).

Якщо в правій частині рівняння (3.4) присутній множник $y^n(x)$, причому $n \notin \{0;1\}$, то одержимо узагальнене рівняння Бернуллі

$$y'(x) + p[x, y(x-\tau_1(x)),\ldots,y(x-\tau_m(x))]y(x) = \\ = q[x, y(x-\tau_1(x)),\ldots,y(x-\tau_m(x))]y^n(x), \quad n \notin \{0;1\},$$

яке на першому кроці за початкової умови (3.2) зводиться до задачі Коші для звичайного рівняння Бернуллі

$$y'(x) + p[x, \varphi(x-\tau_1(x)),\ldots,\varphi(x-\tau_m(x))]y(x) = q[x, \varphi(x-\tau_1(x)),\ldots,\varphi(x-\tau_m(x))]y^n,$$

$$y(x_0) = \varphi(x_0),$$

яку також неважко зінтеґрувати.

ПРИКЛАД 3. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y'(x) - 2x^{-1}y(x) = 2x^3 y(x-2), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_3} = x+2, \quad \overline{E}_3 = [1;3].$$

Розв'язання. Перший крок: при $x \in (3;5]$ маємо задачу Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння першого порядку

$$y' - 2x^{-1}y = 2x^4, \quad y(3) = 5,$$

розв'язком якої є функція

$$y(x) = \tfrac{x^2}{9}(6x^3 - 157), \quad x \in (3;5].$$

Другий крок: при $x \in (5;7]$ одержимо задачу Коші

$$y' - 2x^{-1}y = \tfrac{2x^3(x-2)^2}{9}[6(x-2)^3 - 157], \quad y(5) = \tfrac{14825}{9}$$

тощо. На кожному наступному кроці права частина рівняння значно ускладнюватиметься.

ПРИКЛАД 4. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y'(x) + 2y(x) = y(-0{,}5x)\cdot y^2(x), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_0} = e^{-2x}, \quad \overline{E}_0 = (-\infty;0].$$

Розв'язання. Знайдемо розв'язок узагальненого рівняння Бернуллі на додатній півосі. Очевидно, що при $x > 0$ $-0{,}5x \in \overline{E}_0$, тому дістанемо задачу Коші для звичайного рівняння Бернуллі

$$y' + 2y = e^x y^2, \quad y(0) = 1,$$

розв'язком якої є функція $y(x) = e^{-x}$ при $x > 0$. Отже, розв'язок поставленої ОПЗ є

$$y(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \le 0; \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Як відомо, звичайне диференціальне рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліву частину можна подати у вигляді повного диференціалу деякої функції $f(x, y)$, для чого необхідно і досить виконання умови Ейлера $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$.

Розглянемо відповідне узагальнене рівняння

$$\begin{aligned} &M[x, y(x), y(x-\tau(x))]dx + N[x, y(x), y(x-\tau(x))]dy(x) + \\ &\quad + P[x, y(x), y(x-\tau(x))]dy(x-\tau(x)) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Будемо вважати, що функції M, N і P є неперервно диференційовними в області задання рівняння (3.5), причому $N \ne 0$.

Визначення 4. ДРВА (3.5) називається узагальненим рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $f[x, y(x), y(x-\tau(x))]$.

Введемо позначення $z = y(x-\tau(x))$ і запишемо (3.5) у вигляді

$$M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)dz = 0. \tag{3.6}$$

Рівняння (3.6) у теорії звичайних диференціальних рівнянь називається ***рівнянням Пфаффа***. Розглянемо вектор $\vec{F} = (M, N, P)$ і його ротор

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

ТЕОРЕМА (умова інтеґровності рівняння Пфаффа). Для того, щоб ліва частина рівняння (3.6) була повним диференціалом деякої функції $f(x, y, z)$, необхідно і досить виконання умови $(\vec{F}, \operatorname{rot}\vec{F}) = 0$, тобто

$$M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + N\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Доведення. Якщо $N \ne 0$, то рівняння (3.6) можна записати як

$$dy = -MN^{-1}dx - PN^{-1}dz. \tag{3.8}$$

Припустимо, що шуканий розв'язок рівняння (3.8) подається у вигляді $y = \psi(x, z)$. Тоді згідно з визначенням повного диференціала

$$dy = \tfrac{\partial \psi}{\partial x}dx + \tfrac{\partial \psi}{\partial z}dz = \tfrac{\partial y}{\partial x}dx + \tfrac{\partial y}{\partial z}dz,$$

звідки на підставі (3.8) дістанемо:

$$\tfrac{\partial y}{\partial x} = -MN^{-1}, \quad \tfrac{\partial y}{\partial z} = -PN^{-1}. \tag{3.9}$$

Умова сумісності системи (3.9) має вигляд $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$. Враховуючи, що праві частини рівностей системи є неявними функціями y, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-MN^{-1})\cdot\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(-MN^{-1})=\frac{P}{N}\cdot\frac{M'_yN-N'_yM}{N^2}-\frac{M'_zN-N'_zM}{N^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(-PN^{-1})\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(-PN^{-1})=\frac{M}{N}\cdot\frac{P'_yN-N'_yP}{N^2}-\frac{P'_xN-N'_xP}{N^2}.$$

Прирівнявши одержані вирази, домноживши на $N^3\neq 0$ і звівши подібні члени, дістанемо:

$$PN(M'_y-N'_x)+MN(N'_z-P'_y)+N^2(P'_x-M'_z)=0,$$

звідки після скорочення на $N\neq 0$ одержимо рівність (3.7).

Отже, при виконанні умови (3.7) рівняння Пфаффа (3.6) подається у вигляді $df(x,y,z)=0$, а його загальний інтеґрал має вигляд $f(x,y,z)=C$, де C довільна стала. Але тоді співвідношення

$$f[x,y(x),y(x-\tau(x))]=C \qquad (3.10)$$

буде загальним інтеґралом ДРВА (3.5). Використовуючи (3.10), можна будувати розв'язки ОПЗ для рівняння (3.5) на всіх послідовно елементарних відрізках без інтеґрування! Отож узагальнені рівняння в повних диференціалах можна вважати одним із найпростіших інтеґровних типів ДРВА, адже при розв'язуванні ОПЗ для таких рівнянь достатньо ***одного*** інтеґрування. Щоправда, для цього необхідно побудувати загальний інтеґрал (3.10), одержати який у більшості випадків не так просто.

ПРИКЛАД 5. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y(x)y(x-1)dx+xy(x-1)dy(x)+xy(x)dy(x-1)=0,\quad y(x)\Big|_{\overline{E}_1}=1,\quad \overline{E}_1=[0;1].$$

Розв'язання. Позначимо $z=y(x-1)$. Тоді відповідне рівняння Пфаффа є $yzdx+xzdy+xydz=0$. Очевидно, що умова (3.7) тут виконується (перевірити!), а загальний інтеґрал має вигляд $xyz=C$. Тоді інтеґралом (3.10) відповідного ДРВА буде співвідношення

$$xy(x)y(x-1)=C. \qquad (3.11)$$

Застосуємо метод кроків, використовуючи загальний інтеґрал (3.11). При $x\in(1;2]$ $y(x-1)=1$ і на підставі (3.11) $xy(x)=C$. З початкової умови $y(1)=1$ визначаємо $C=1$, тобто $y=x^{-1}$ при $x\in(1;2]$.

При $x\in(2;3]$ $y(x-1)=(x-1)^{-1}$ і на підставі (3.11) $x(x-1)^{-1}y(x)=C$. З початкової умови $y(2)=0{,}5$ визначаємо $C=1$, тобто $y=1-x^{-1}$ при $x\in(2;3]$.

При $x\in(3;4]$ $y(x-1)=1-(x-1)^{-1}$ і $x[1-(x-1)^{-1}]y(x)=C$. З початкової умови $y(3)=\frac{2}{3}$ визначаємо $C=1$, тобто $y=(1-x^{-1})(x-2)^{-1}$ при $x\in(3;4]$ тощо.

Зауваження 1. Якщо умова (3.7) не виконується, то рівняння Пфаффа не інтеґрується в квадратурах, проте це не стосується відповідного ДРВА (3.5)! Справді, ОПЗ для ДРВА вигляду (3.5) за початкової умови (3.2) можна інтеґрувати аналогічно до інших наведених вище інтеґровних типів. Тоді на першому елементарному відрізку ОПЗ (3.5),(3.2) зведеться до задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$M[x,y,\varphi(x-\tau(x))]dx+N[x,y,\varphi(x-\tau(x))]dy+P[x,y,\varphi(x-\tau(x))]d\varphi(x-\tau(x))=0,$$

$$y(x_0)=\varphi(x_0).$$

Звісно, в цьому випадку для знаходження розв'язку одного інтеґрування не досить: доведеться, як завше, на кожному кроці розв'язувати нову задачу Коші…

ПРИКЛАД 6. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y(x)dx+xdy(x)+(x-1)y(x-1)dy(x-1)=0,\quad y(x)\Big|_{\overline{E}_1}=1,\quad \overline{E}_1=[0;1].$$

Розв'язання. Позначимо $z=y(x-1)$. Тоді відповідне рівняння Пфаффа є $ydx+xdy+(x-1)zdz=0$. Очевидно, що умова (3.7) тут не виконується (перевірити!), тобто відповідне ДРВА не є узагальненим рівнянням в повних диференціалах, тому одним інтеґруванням тут не відбутися.

Застосуємо метод кроків. При $x\in(1;2]$ $y(x-1)=1$ і $dy(x-1)=0$. Одержимо задачу Коші: $ydx+xdy=0$, $y(1)=1$. Її розв'язок: $y=x^{-1}$ при $x\in(1;2]$.

При $x\in(2;3]$ $y(x-1)=(x-1)^{-1}$ і $dy(x-1)=-(x-1)^{-2}dx$. Відповідна задача Коші: $ydx+xdy-(x-1)^{-2}dx=0$, $y(2)=0{,}5$. Розв'язком цієї задачі є функція $y=(2-3x^{-1})(x-1)^{-1}$ при $x\in(2;3]$ тощо.

Зауваження 2. Якщо рівняння типу (3.5) містить m відхилень $\tau_i(x)$, то воно матиме вигляд

$$\begin{aligned}&M[x,y(x),y(x-\tau_1(x)),...,y(x-\tau_m(x))]dx+\\&\quad+N[x,y(x),x,y(x),y(x-\tau_1(x)),...,y(x-\tau_m(x))]dy(x)+\\&\quad+\sum_{i=1}^{m}P_i[x,y(x),y(x-\tau_1(x)),...,y(x-\tau_m(x))]dy(x-\tau_i(x))=0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Навіть якщо ліва частина такого рівняння і є повним диференціалом, та побудувати загальний інтеґрал тут доволі складно. Проте ОПЗ для рівняння (3.12), як і у випадку рівняння (3.5), завжди можна зінтеґрувати способом, викладеним у зауваженні 1.

Вправа. Записати задачу Коші, до якої зводиться ОПЗ (3.12),(3.2) на першому елементарному відрізку.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ II

I. За допомогою методу кроків зінтеґрувати наступні основні початкові задачі:

1. $(x-4)y(x-1)y^{-1}(x)dy(x)=(x-2)y(x-3)dx, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=x-1.$

2. $e^{x-y(x)+y(x-1)}dx=-dy(x), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_{-1}}=-x-1.$

3. $e^{y(x-2)}dx=[1+y(x-3)]dy(x), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=0.$

4. $xy(x)y(x-1)dx=0{,}5dy(x), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1}=4(x+1)^{-2}.$

5. $y(x)y(x-2)dy(x)=xy(x-3)dx, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=1.$

6. $y(x-1)dy(x-1)=y(x-x^2-1)dx, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1}=x+1.$

7. $y(0{,}5x)dy(x)=xy(x)dx, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_2}=x^2+1.$

8. $2y(x-1)y(x-2)dx+y(0{,}25x)dy(x)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_3}=1.$

9. $y'(x)+e^{x-1}y(x-2)y(x)=e^x y(x-1), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_{-1}}=e^{-x-1}.$

10. $y'(x)+y(x-2)y(x-3)y(x)=2e^x, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=1.$

11. $xy'(x)-y(x)=xy(x-1), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=0.$

12. $y'(x)+\dfrac{y(x-1)}{x-1}y(x)=3\dfrac{x-1}{y(x-1)}, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_3}=x.$

13. $y'(x)+y(x)=\dfrac{y(x-4)\cdot y(x-1)}{y(x-3)\cdot y(x-2)}, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=e^x.$

14. $y'(x)-y(x-1)y(x)=-y^2(x), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_4}=x^{-1}.$

15. $y'(x)-[y(0{,}5x)-1]\cdot y(x)=2x^{-2}, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1}=1.$

II. Зінтеґрувати ОПЗ методом кроків, використовуючи (якщо це можливо), загальний інтеґрал рівняння:

1. $3y(x)y(x-2)dx+xy(x-2)dy(x)+2xy(x)dy(x-2)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_3}=x^{-1}.$

2. $[2y(x)y(x-3)+3x]dx+xy(x-3)dy(x)+xy(x)dy(x-3)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_4}=-1.$

3. $[x-y(x)]dx+y(x-2)dy(x)-xdy(x-2)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=0{,}5x.$

4. $[2x^2+2xy(x)+2xy^2(x-1)+1]dx+dy(x)+2y(x-1)dy(x-1)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=0.$

5. $[y(x)+xy(x-1)]dx+y(x-1)dy(x)-[y(x)+y^2(x-1)]dy(x-1)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=1.$

6. $y(x-2)dx+y(x-3)dy(x)+y(x)dy(x-3)+xdy(x-2)=0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0}=x.$

7. $xy(x)y^2(x-3)dx+0{,}5x^2y^2(x-3)dy(x)+x^2y(x)y(x-3)dy(x-3)-dy(x-1)=0,$
$y(x)\big|_{\overline{E}_{-2}}=0{,}5.$

РОЗДІЛ III
ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ОСНОВНОЇ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ

У даному розділі викладений математичний апарат, за допомогою якого вирішуються проблеми існування і єдиності розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і основної початкової задачі для ДРВА.

§ 3.1. Лема Ґронуола-Белмана та її застосування

ЛЕМА 1 (основна лема Ґронуола-Белмана). Нехай функції $u(t)$ і $\mu(t)$ неперервні і невід'ємні при $a < t_0 \le t < b$, причому для всіх $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$u(t) \le \lambda + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau, \tag{1.1}$$

де $\lambda = const \ge 0$. Тоді при $t \ge t_0$ має силу нерівність

$$u(t) \le \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right). \tag{1.2}$$

Доведення. Введемо позначення: $F(t) = \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau$. Тоді за умовою леми $F'(t) = \mu(t) u(t) \ge 0$ при $t \ge t_0$, і згідно (1.1) маємо $0 \le \mu(t) u(t) \le [\lambda + F(t)] \cdot \mu(t)$, або

$$F'(t) \le [\lambda + F(t)] \cdot \mu(t). \tag{1.3}$$

Домноживши нерівність (1.3) на $\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) > 0$, дістанемо:

$$[F'(t) - \mu(t) F(t)] \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) \le \lambda \mu(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right),$$

або

$$\frac{d}{dt}\left[F(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) \right] \le \lambda \mu(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right).$$

Зінтеґрувавши останню нерівність на проміжку від t_0 до t з урахуванням того, що $F(t_0) = 0$ згідно наших позначень, дістанемо:

$$F(t) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) \le \lambda \int_{t_0}^{t} \mu(\xi) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{\xi} \mu(\tau) d\tau \right) d\xi =$$

$$= \lambda \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\xi} \mu(\tau) d\tau \right) \cdot d\left(\int_{t_0}^{\xi} \mu(\tau) d\tau \right) = \lambda \cdot \left[1 - \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) \right].$$

Отже,

$$F(t) \le \lambda \cdot \left[\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) - 1 \right],$$

звідки з урахуванням умови (1.1) випливає потрібна нерівність (1.2).

ЛЕМА 2. Нехай функції $u(t)$ і $\mu(t)$ при $a < t_0 \le t < b$ неперервні і невід'ємні, причому для всіх $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$u(t) \ge \lambda + \int_{t_0}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau,$$

де $\lambda = const \ge 0$. Тоді при $t \ge t_0$ має силу нерівність

$$u(t) \ge \lambda \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right).$$

Доведення. Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1, але тут позначаємо $F(t) = -\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau$ і домножуємо на $\exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) > 0$.

ЛЕМА 3 (узагальнена лема Ґронуола-Белмана). Нехай функції $u(t)$ і $\mu(t)$ неперервні і невід'ємні при $a < t < b$, причому для всіх $a < t, s < b$ виконується інтеґральна нерівність

$$u(t) \le u(s) + \int_{s}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau. \tag{1.4}$$

Тоді при $a < t_0 \le t < b$ має силу двостороння оцінка

$$u(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right) \le u(t) \le u(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right). \tag{1.5}$$

Доведення. Візьмемо в (1.4) $s = t_0$. Тоді, поскільки $u(t_0) = const \ge 0$ згідно умови леми, то на підставі леми 1 дістанемо:

$$u(t) \le u(t_0) \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(\tau) d\tau \right). \tag{1.6}$$

Нерівність (1.4) можна записати у вигляді

$$u(s) \ge u(t) - \int_{s}^{t} \mu(\tau) u(\tau) d\tau = u(t) + \int_{t}^{s} \mu(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Тоді на підставі леми 2 при $t = t_0$ буде

$$u(s) \ge u(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \mu(\tau) d\tau \right). \tag{1.7}$$

Поклавши в (1.7) $s = t$ і об'єднавши нерівності (1.6) і (1.7), одержимо подвійну нерівність (1.5).

ЛЕМА 4 (лема Ґронуола). Нехай функції $u(t)$ і $\lambda(t)$ неперервні і невід'ємні при $a < t_0 \le t < b$, причому для всіх $t \ge t_0$ виконується нерівність

$$u(t) \le \lambda(t) + \mu \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau,$$

де $\mu = const \ge 0$. Тоді при $t \ge t_0$ має силу нерівність

$$u(t) \le \lambda(t) + \mu \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau) e^{\mu(t-\tau)} d\tau. \tag{1.8}$$

Доведення. Доведення леми 4 аналоґічне доведенню леми 1, але тут позначаємо $F(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$ і домножуємо на величину $e^{-\mu(t-t_0)} > 0$.

Зауважимо, що лема Ґронуола для $\lambda(t) \equiv \lambda = const \ge 0$ аналоґічна лемі Ґронуола-Белмана для $\mu(t) \equiv \mu = const \ge 0$. У цьому випадку нерівності (1.2) і (1.8) еквівалентні і набувають вигляду

$$u(t) \le \lambda e^{\mu(t-t_0)}. \tag{1.9}$$

Наведені леми про інтеґральні нерівності можна застосувати при дослідженні єдиності розв'язку (якщо такий існує) як задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, так і основної початкової задачі для ДРВА.

ПРИКЛАД 1. За допомогою леми Ґронуола-Белмана показати єдиність розв'язку задачі Коші

$$\begin{aligned} &y'(x) = f[x, y(x)], \\ &y(x_0) = y_0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Розв'язання. Будемо вважати, що при $x \ge x_0$ функція $f[x, y(x)]$ неперервна по обох арґументах і справджує умову Ліпшиця по змінній $y(x)$. Припустимо, що задача Коші (1.10) має два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Тоді при $x \ge x_0$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_1(s)] ds, \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y_2(s)] ds,$$

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} \big(f[s, y_1(s)] - f[s, y_2(s)] \big) ds.$$

Тому

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \big(f[s, y_1(s)] - f[s, y_2(s)] \big) ds \right| \le \int_{x_0}^{x} \big| f[s, y_1(s)] - f[s, y_2(s)] \big| ds$$

і з урахуванням умови Ліпшиця

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le L \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)| ds, \tag{1.11}$$

де $L = const \ge 0$ – стала Ліпшиця. Очевидно, що нерівність (1.11) аналоґічна нерівності (1.1), якщо покласти $u \equiv |y_1(x) - y_2(x)| \ge 0$, $\mu \equiv L \ge 0$ і $\lambda = 0$. Тоді на підставі (1.2) одержуємо оцінку $|y_1(x) - y_2(x)| \le 0$, тобто $y_1(x) \equiv y_2(x)$ і задача Коші (1.10) має єдиний розв'язок.

ПРИКЛАД 2. За допомогою леми Ґронуола дослідити єдиність розв'язку основної початкової задачі

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau)], \quad \tau = const > 0,$$
$$y(x)\Big|_{\bar{E}x_0} = \varphi(x).$$

Розв'язання. Припустимо, що поставлена ОПЗ має два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Тоді при $x \ge x_0$

$$y_1(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[s, y_1(s), y_1(s-\tau)]ds, \quad y_2(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[s, y_2(s), y_2(s-\tau)]ds,$$

$$y_1(x) - y_2(x) = \int_{x_0}^{x} \big(f[s, y_1(s), y_1(s-\tau)] - f[s, y_2(s), y_2(s-\tau)]\big)ds.$$

Будемо вважати, що при $x \ge x_0$ функція $f[x, y(x), y(x-\tau)]$ неперервна по всіх арґументах і справджує умову Ліпшиця по змінних $y(x)$ та $y(x-\tau)$, тобто

$$|f[s, y_1(s), y_1(s-\tau)] - f[s, y_2(s), y_2(s-\tau)]| \le$$
$$\le L|y_1(x) - y_2(x)| + L_1|y_1(x-\tau) - y_2(x-\tau)|, \quad L, L_1 = const \ge 0.$$

Тоді маємо:

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le L\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_2(s)|ds + L_1\int_{x_0}^{x} |y_1(s-\tau) - y_2(s-\tau)|ds. \qquad (1.12)$$

Застосувати лему Ґронуола, покладаючи $u \equiv |y_1(x) - y_2(x)| \ge 0$, $\mu \equiv L \ge 0$ і $\lambda = 0$, можна тільки при $x \in [x_0, x_0 + \tau]$, поскільки лише в цьому випадку можемо з певністю стверджувати, що $y_1(x-\tau) = y_2(x-\tau) = \varphi(x-\tau)$, а тому другий інтеґрал у правій частині нерівності (1.12) перетворюється в нуль. Отже, у випадку ОПЗ за допомогою леми Ґронуола можна показати єдиність розв'язку тільки на першому елементарному відрізку. Зауважимо при цьому, що ні для задачі Коші, ні для ОПЗ лема нічого не говорить про існування розв'язку.

§3.2. Метричний простір. Принцип стислих відображень (Банаха)

Визначення 1. Множина M елементів довільної природи називається ***метричним простором***, якщо на цій множині введена метрика $\rho(x, y)$ для довільних елементів $x, y \in M$, причому

а) $\rho(x, y) \ge 0$; $\rho(x, y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$;

б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

в) для довільного $z \in M$ має силу нерівність $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (так зване “правило трикутника”).

Визначення 2. Послідовність елементів $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\} \subset M$ називається ***фундаментальною***, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \rho(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Визначення 3. Послідовність елементів $\{y_1, y_2, ..., y_n, ...\} \subset M$ називається ***збіжною***, якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = Y$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \rho(y_n, Y) < \varepsilon.$$

Визначення 4. Метричний простір *M* називається ***повним***, якщо будь-яка фундаментальна послідовність його елементів є збіжною.

ТЕОРЕМА (принцип стислих відображень Банаха). Нехай у повному метричному просторі *M* діє деякий оператор *A* з наступними властивостями:

1) оператор *A* переводить елементи простору *M* в елементи цього ж простору: $y \in M \Rightarrow Ay \in M$;
2) для довільних двох точок $y, z \in M$ має силу нерівність $\rho(Ay, Az) \le \alpha\rho(y, z)$, де $\alpha \in (0;1)$ і не залежить від вибору точок $y, z \in M$. (Оператор, для якого $0 < \alpha < 1$, називається ***оператором стиску***; у випадку $\alpha > 1$ маємо ***оператор розтягу***).

Тоді в просторі *M* існує єдина нерухома точка $\bar{y}$, яка може бути одержана шляхом послідовних наближень:

$$\bar{y} = \lim_{n\to\infty} y_n, \quad y_n = Ay_{n-1}, \quad n = 1,2,...,$$

причому початкова точка y_0 вибирається довільним чином.

Доведення. Покажемо, що послідовність $\{y_n\}$, утворена послідовними наближеннями $y_n = Ay_{n-1}$, є фундаментальною. Розглянемо точки y_n і y_{n+m}. Застосувавши "правило трикутника" $(m-1)$ раз, дістанемо:

$$\rho(y_n, y_{n+m}) \le \rho(y_n, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + \rho(y_{n+m-1}, y_{n+m}). \qquad (2.1)$$

Згідно властивостей оператора стиску

$$\rho(y_n, y_{n+1}) = \rho(Ay_{n-1}, Ay_n) \le \alpha\rho(y_{n-1}, y_n).$$

Покладаючи в останньому співвідношенні $n = 1$, $n = 2$ тощо, одержимо:

$$\rho(y_1, y_2) = \rho(Ay_0, Ay_1) \le \alpha\rho(y_0, y_1);$$

$$\rho(y_2, y_3) = \rho(Ay_1, Ay_2) \le \alpha\rho(y_1, y_2) \le \alpha^2\rho(y_0, y_1);$$

нарешті,

$$\rho(y_n, y_{n+1}) \le \alpha^n\rho(y_0, y_1). \qquad (2.2)$$

Враховуючи нерівність (2.2), із (2.1) дістанемо:

$$\rho(y_n, y_{n+m}) \le (\alpha^n + \alpha^{n-1} + ... + \alpha^{n+m-1})\rho(y_0, y_1). \qquad (2.3)$$

Оскільки $\alpha \in (0;1)$, то

$$\alpha^n \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^k < \alpha^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^n}{1-\alpha},$$

а отже на підставі (2.3) можемо записати:

$$\rho(y_n, y_{n+m}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(y_0, y_1) < \varepsilon,$$

поскільки для довільного $\varepsilon > 0$ можна підібрати такий номер n, щоб остання нерівність мала силу. Отже, послідовність $\{y_n\}$ є фундаментальною. Поскільки M – повний метричний простір, то послідовність $\{y_n\}$ буде збіжною, тобто існуватиме границя $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \bar{y} \in M$.

Покажемо, що $A\bar{y} = \bar{y}$, тобто $\bar{y}$ є нерухомою точкою простору *M*. Припустимо, що в просторі *M* існує точка $\bar{\bar{y}} \neq \bar{y}$ така, що $A\bar{y} = \bar{\bar{y}}$. Тоді згідно “правила трикутника”

$$\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \le \rho(\bar{y}, y_n) + \rho(y_n, y_{n+1}) + ... + \rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}). \tag{2.4}$$

Оцінимо доданки в правій частині нерівності (2.4). Маємо:

– $\rho(\bar{y}, y_n) < \varepsilon/3$, поскільки $\bar{y}$ є границею послідовності $\{y_n\}$;
– $\rho(y_n, y_{n+1}) < \varepsilon/3$, поскільки послідовність $\{y_n\}$ є фундаментальною;
– $\rho(y_{n+1}, \bar{\bar{y}}) = \rho(Ay_n, A\bar{y}) \le \alpha\rho(y_n, \bar{y}) < \varepsilon/3$, поскільки $\alpha \in (0;1)$.

Але тоді $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) < \varepsilon$ для довільного $\varepsilon > 0$ незалежно від номера n, звідки випливає, що $\bar{\bar{y}} \equiv \bar{y}$ і $A\bar{y} = \bar{y}$, тобто $\bar{y}$ є нерухомою точкою простору *M*.

Покажемо, що $\bar{y}$ є єдиною нерухомою точкою простору *M*. Справді, якщо припустити існування в просторі *M* іншої нерухомої точки $\bar{\bar{y}} \neq \bar{y}$ такої, що $A\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{y}}$, то з нерівності стиску $\rho(A\bar{y}, A\bar{\bar{y}}) \le \alpha\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})$, враховуючи нерухомість точок $\bar{y}$ і $\bar{\bar{y}}$, одержимо $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) \le \alpha\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}})$, звідки $\alpha \ge 1$, що суперечить умові теореми. Отже, маємо $\rho(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0$ і $\bar{\bar{y}} \equiv \bar{y}$, тобто при дії оператора стиску не може бути двох різних нерухомих граничних точок.

Принцип Банаха* лежить в основі одного з найпростіших за ідеєю (але не за практичною реалізацією) методу наближеного інтеґрування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$y' = f(x, y), \quad x \in (a, b); \tag{2.5}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b]. \tag{2.6}$$

Цей метод називається ***методом послідовних наближень Пікара*** і полягає в наступному. Задачу (2.5),(2.6) подаємо в еквівалентному інтеґральному вигляді

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{2.7}$$

Беручи за нульове наближення $y_0(x) = y_0$, наступні ітерації (послідовні наближення) знаходимо зі співвідношення

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds, \quad n = \overline{0, \infty}. \tag{2.8}$$

---

* ***Стефан Банах (1892-1945)*** – видатний польський математик, професор Львівського університету. Один із засновників сучасного функціонального аналізу.

Припустимо, що функція $f(x,y)$ у деякій замкненій області $\mathrm{G} \supset (a,b)$ є неперервною по обох змінних і справджує умову Ліпшиця по змінній *y*, тобто для довільних точок (x,y_1), (x,y_2) області G має силу нерівність

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le L|y_2 - y_1|,$$

де $L = const \ge 0$ – стала Ліпшиця.

Розглянемо різницю двох послідовних наближень $\rho_n = |y_{n+1} - y_n|$. На підставі (2.8) згідно умови Ліпшиця маємо:

$$\rho_n = \left|\int_{x_0}^{x} [f(s,y_n) - f(s,y_{n-1})]ds\right| \le \int_{x_0}^{x} L|y_n - y_{n-1}|ds \le L|b-a|\rho_{n-1}. \qquad (2.9)$$

Введемо в просторі $C_{(a,b)}$ метрику $\rho(y,z) = \max\limits_{x\in(a,b)} |y-z|$. Тоді згідно (2.9)

$$\rho(y_{n+1},y_n) \le \alpha\rho(y_n,y_{n-1}), \quad \alpha = L|b-a| \ge 0. \qquad (2.10)$$

Запишемо співвідношення (2.8) в операторному вигляді

$$y_{n+1} = Ay_n, \quad Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds,$$

тоді (2.10) можна подати як

$$\rho(Ay_n, Ay_{n-1}) \le \alpha\rho(y_{n-1},y_{n-2}).$$

Згідно принципу стислих відображень при $\alpha < 1$ оператор *A* буде оператором стиску, тобто послідовність $\{y_n\}$ при $n \to \infty$ збігатиметься до єдиної граничної функції – розв'язку задачі Коші (2.5),(2.6). Позначимо цю функцію через $y(x)$ і подамо її у вигляді нескінченого ряду

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{n+1} - y_n) + \ldots$$

Цей ряд при $\alpha < 1$ збігається рівномірно на інтервалі $x \in (a,b)$, поскільки мажорується збіжним числовим рядом

$$|y_0| + \rho_0 + \alpha\rho_0 + \alpha^2\rho_0 + \ldots + \alpha^n\rho_0 + \ldots, \quad \rho_0 = \rho(y_1,y_0).$$

Подамо *n*-не наближення y_n у вигляді

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}).$$

Тоді

$$y - y_n = (y_{n+1} - y_n) + (y_{n+2} - y_{n+1}) + \ldots \le \rho(y_{n+1},y_n) + \rho(y_{n+2},y_{n+1}) + \ldots \le$$
$$\le \alpha^n\rho_0 + \alpha^{n+1}\rho_0 + \ldots$$

З останньої нерівності для достатньо малого проміжку інтеґрування – такого, що $L|b-a| = \alpha < 1$, одержимо оцінку похибки методу на *n*-му кроці:

$$\varepsilon_n = |y - y_n| \le \frac{\alpha^n\rho_0}{1-\alpha}.$$

ПРИКЛАД 1. За допомогою методу Пікара побудувати розв'язок задачі Коші

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання. Беремо $y_0 = 1$, тоді згідно (2.8)

$$y_1 = 1 + \int\limits_0^x (s-1)ds = 1 - x + 0{,}5x^2 \ ,$$

$$y_2 = 1 + \int\limits_0^x (s - 1 + s - 0{,}5s^2)ds = 1 - x + x^2 - \tfrac{1}{6}x^3 \text{ тощо,}$$

$$y_n = 1 - x + \tfrac{2x^2}{2!} - \tfrac{2x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \tfrac{2x^n}{n!} - (-1)^n \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Подавши $1 - x = -(1-x) + 2 - 2x$, можна легко побачити, що при $n \to \infty$ послідовні наближення збігаються до функції $y(x) = 2e^{-x} - 1 + x$, яка є точним розв'язком поставленої задачі Коші (перевірити!). Поскільки стала Ліпшиця $L = \max|f'_y| = 1$, то область збіжності методу визначається нерівністю $|b - a| < 1$. Отже, при $a = x_0 = 0$ метод збігається на інтервалі $[0;1)$.

Метод Пікара застосовний також при розв'язуванні основної початкової задачі для ДРВА першого порядку. Зокрема, для ОПЗ

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau)], \quad \tau = const > 0,$$

$$y(x) = \varphi(x), \quad x \le x_0$$

алґоритм методу послідовних наближень ***на першому елементарному відрізку*** матиме вигляд

$$y_{n+1}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \le x_0, \\ \varphi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f[s, y_n(s), y_n(s-\tau)]ds, & x > x_0. \end{cases}$$

Стосовно збіжності методу див. доведення теореми єдиності (§3.3).

ПРИКЛАД 2. Застосувати метод Пікара до ОПЗ

$$y'(x) = x - y(x-1) + y(x), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_0} = 1.$$

Розв'язання. На першому елементарному відрізку при $x \in (0;1]$ одержимо задачу Коші

$$y' = x - 1 + y, \quad y(0) = 1, \tag{2.11}$$

яка інтеґрується методом Пікара аналогічно до прикладу 1. Маємо: $y_0 = 1$, тоді

$$y_1 = 1 + \int\limits_0^x sds = 1 + 0{,}5x^2, \ \ y_2 = 1 + \int\limits_0^x (s + 0{,}5s^2)ds = 1 + 0{,}5x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \text{ тощо,}$$

$$y_n = 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Легко бачити, що при $n \to \infty$ послідовні наближення збігаються до функції $y(x) = e^x - x$, яка є точним розв'язком задачі Коші (2.11) при $x \in (0;1]$.

Вправа. Застосувати метод Пікара до поставленої ОПЗ на другому елементарному відрізку.

Принцип стислих відображень і метод Пікара широко застосовуються в теорії звичайних диференціальних рівнянь, а також рівнянь з відхиленням арґументу для доведення існування і єдиності розв'язку задачі Коші та основної початкової задачі. Такий спосіб доведення, що ґрунтується на доведенні збіжності послідовних наближень, розробив у 1890 р. французький математик Карл Еміль Пікар (1857-1941).

§3.3. Існування і єдиність розв'язку основної початкової задачі для ДРВА першого порядку

Розглянемо ОПЗ для ДРВА першого порядку з m відхиленнями арґументу

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau_1(x)),..., y(x-\tau_m(x))] \equiv f[y], \tag{3.1}$$

$$y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x). \tag{3.2}$$

Будемо шукати розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2) на проміжку $x \in (x_0, x_1]$. Має силу наступна

ТЕОРЕМА 1. Нехай у рівнянні (3.1) функції $\tau_i(x)$ $(i=\overline{1,m})$ неперервні і невід'ємні на проміжку $x \in [x_0, x_1]$, функція $\varphi(x)$ неперервна на початковій множині $\overline{E}_{x_0}$, а функція $f[y]$ неперервна за всіма арґументами і справджує умову Ліпшиця за всіма арґументами, починаючи з другого, в деякій замкнутій області $\overline{\mathrm{D}} \subset \mathrm{R}^{m+2}$, яка містить відрізок $x \in [x_0, x_1]$. Тоді на деякому проміжку $x \in [x_0, x_0+h]$, де $h>0$ досить мале і $x_0 + h < x_1$, існує єдиний неперервний розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2).

Доведення. Подамо ОПЗ (3.1),(3.2) в еквівалентному інтеґральному вигляді при $x > x_0$:

$$y(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[y(s)]ds\,. \tag{3.3}$$

Позначимо через C_h клас функцій, неперервних на проміжку $[x_0, x_0+h]$. Зауважимо, що множина C_h є повним метричним простором з метрикою

$$\rho(y,z) = \sup_{x\in[x_0, x_0+h]} |y(x) - z(x)|.$$

Введемо в просторі C_h оператор

$$Ay = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[y(s)]ds \tag{3.4}$$

і покажемо, що за виконання умов теореми оператор A підпадатиме під умови принципу стислих відображень Банаха (див. §3.2).

Покажемо спочатку, що оператор A переводить елементи простору C_h в елементи цього ж простору. Нехай функція $y(x) \in C_h$, тобто є неперервною на проміжку $[x_0, x_0+h]$. Тоді $f[y]$ є неперервною в замкнутій області $\overline{\mathrm{D}}_1 \subset \overline{\mathrm{D}}$, яка містить відрізок $x \in [x_0, x_0+h] \subset [x_0, x_1]$, тому вона є також і обмеженою в цій області, тобто існує додатна стала M така, що $|f[y]| \le M$ в області $\overline{\mathrm{D}}_1$. Покажемо, що вираз (3.4) як інтеґрал зі змінною межею від неперервної функції $f[y]$ також є неперервною функцією на проміжку $[x_0, x_0+h]$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |Ay(x) - Ay(x_0)| < \varepsilon .$$

В околі точки x_0 при $|x - x_0| < \delta$ маємо:

$$|Ay(x) - Ay(x_0)| \equiv |Ay - \varphi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f[y(s)]ds \right| \le M\,|x - x_0| < M\delta < \varepsilon$$

при $\delta < \varepsilon M^{-1}$. Звідси випливає, що $Ay \in C_h$, тобто оператор A підпадає під першу з умов принципу Банаха.

Припустимо, що оператор A є оператором стиску, тобто для довільних функцій $y(x), z(x) \in C_h$ $\rho(Ay, Az) \le \alpha\rho(y,z)$, де $0 < \alpha < 1$. Маємо:

$$\rho(Ay, Az) = \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} |Ay - Az| = \sup_{x \in [x_0, x_0+h]} \left| \int_{x_0}^{x} (f[y(s)] - f[z(s)])ds \right| .$$

Задля скорочення записів введемо $\tau_0(x) \equiv 0$. На підставі умови Ліпшиця

$$|f[y] - f[z]| < \sum_{i=0}^{m} L_i\,|y(x - \tau_i(x)) - z(x - \tau_i(x))| \le N \sum_{i=0}^{m} |y(x - \tau_i(x)) - z(x - \tau_i(x))|$$

де $L_i = const \ge 0$ сталі Ліпшиця за $(i+1)$-м арґументом функції $f[y]$, а N – максимальне з цих чисел. З урахуванням наведеного вище умова стиску набуде вигляду

$$\rho(Ay, Az) < Nh(m+1)\rho(y,z) = \alpha\rho(y,z) . \qquad (3.5)$$

З нерівності (3.5) очевидно випливає: якщо $h > 0$ узяти настільки малим, щоб виконувалася умова $Nh(m+1) < 1$, то оператор A буде оператором стиску, а тоді згідно з принципом Банаха в просторі C_h існуватиме єдина нерухома точка, тобто єдиний неперервний на проміжку $x \in [x_0, x_0+h]$ розв'язок $y(x)$ ОПЗ (3.1),(3.2), котрий можна одержати шляхом послідовних наближень на підставі інтеґрального рівняння (3.3), узявши $y_0(x) = \varphi(x_0)$:

$$y_{n+1}(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f[y_n(s)]ds, \quad n = \overline{0,\infty}; \quad y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x), \quad x \in [x_0, x_0+h]$$

(аналоґічно до методу Пікара для звичайного диференціального рівняння першого порядку, див. §3.2).

З доведеної теореми випливає, що проміжок $x \in [x_0, x_0+h]$, де $h > 0$ визначається з нерівності $Nh(m+1) < 1$, є областю збіжності методу послідовних наближень для ОПЗ (3.1),(3.2) на першому елементарному відрізку.

Вправа. Визначити область збіжності методу Пікара на першому кроці у випадку ОПЗ, наведеної в прикладі 2 §3.2.

Зауважимо, що для рівнянь нейтрального типу питання існування і єдиності розв'язку основної початкової задачі є набагато складнішим. Зокрема, ОПЗ вигляду

$$y'(x) = f[x, y(x), y(x-\tau(x)), y'(x-\tau(x))], \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x)$$

має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли має розв'язок рівняння

$$y'(x_0) = f[x_0, y(x_0), y(x_0-\tau(x_0)), y'(x_0-\tau(x_0))] \tag{3.6}$$

(доведення: *Каменский Г.А.* // Математический сборник 55(97), **4** (1961), с. 363-378). Наприклад, ОПЗ

$$y'(x) = y'(0{,}5x) + y'^2(0{,}5x) + 2y^2(x) - y^2(0{,}5x) + 1, \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_0} = y_0 = const$$

не матиме розв'язку, адже умова розв'язності (3.6) дає

$$y'(0) = y'(0) + y'^2(0) + 2y^2(0) - y^2(0) + 1,$$

або $y'^2(0) = -y_0^2 - 1$. Останнє рівняння не має розв'язку.

ТЕОРЕМА 2 (про неперервну залежність розв'язку ОПЗ від параметра і початкових даних). Нехай функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ є розв'язками ОПЗ (для правої частини рівняння використаємо позначення з теореми 1)

$$y_i'(x) = f_i[\mu, y], \quad y_i(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,2},$$

де μ параметр, причому функції $\tau_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ (запізнення, які входять у рівняння), $\varphi_i(x)$ і $f_i[\mu, y]$, $i = \overline{1,2}$, підпадають під умови теореми 1, до того ж $f_i[\mu, y]$, $i = \overline{1,2}$, неперервні за параметром μ. Тоді

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \left.\begin{aligned} |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| < \delta \\ |f_1[\mu, y] - f_2[\mu, y]| < \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$$

для всіх $x \in [x_0, x_0 + h]$, де $h > 0$ вибирається згідно з теоремою 1.

Доведення. На підставі (3.3) для всіх $x \in [x_0, x_0 + h]$ маємо:

$$y_i(x) = \varphi_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_i[\mu, y(s)]ds, \ i = \overline{1,2}.$$

Тоді з урахуванням умов теореми при $x \in [x_0, x_0 + h]$

$$|y_1(x) - y_2(x)| \le |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f_1[\mu, y(s)] - f_2[\mu, y(s)]|\, ds < \delta(1+h) < \varepsilon,$$

якщо взяти $\delta < \varepsilon(1+h)^{-1}$, і теорема доведена.

§3.4. Деякі специфічні особливості розв'язків ДРВА

У порівнянні з розв'язком звичайної задачі Коші

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

розв'язок ОПЗ для ДРВА першого порядку

$$x'(t) = f[t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t))] \equiv f[x], \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = \varphi(t) \qquad (4.2)$$

має кілька важливих особливостей. Розглянемо деякі з них.

1. Вибір початкових даних. Зрозуміло, що в задачі (4.1) вибір початкової точки (t_0, x_0) довільний і жодним чином не впливає на розв'язок рівняння. Натомість в ОПЗ (4.2) початкова точка t_0 визначає початкову множину $\overline{E}_{t_0}$, а початкова функція $\varphi(t)$ – значення розв'язку на цій множині, яке використовується в рівнянні, тому вибір початкових даних суттєво впливатиме на розв'язок задачі.

ПРИКЛАД 1. Розглянемо ОПЗ

$$x'(t) = tx(t-2) \cdot x(t), \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = \varphi(t) \equiv t. \qquad (4.3)$$

Візьмемо за початкову точку $t_0 = 0$, тоді $\overline{E}_{t_0} \equiv \overline{E}_0 = [-2;0]$. На першому кроці при $t \in (0;2]$ дістанемо задачу Коші

$$x'(t) = t(t-2)x(t), \quad x(0) = 0,$$

розв'язок якої є $x(t) \equiv 0$. На другому кроці при $t \in (2;4]$ маємо:

$$x'(t) = 0, \quad x(2) = 0,$$

звідки знову $x(t) \equiv 0$ тощо. Отже, розв'язок ОПЗ (4.3) у випадку $t_0 = 0$ є

$$x(t) = \begin{cases} t, & t \in [-2;0]; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Покладемо тепер в (4.3) $t_0 = 1$. Тоді $\overline{E}_{t_0} \equiv \overline{E}_1 = [-1;1]$, а на першому кроці при $t \in (1;3]$ дістанемо задачу Коші

$$x'(t) = t(t-2)x(t), \quad x(1) = 1,$$

розв'язок якої є $x(t) = e^{\frac{1}{3}(t^3 - 3t^2 + 2)}$. На другому кроці при $t \in (3;5]$ маємо:

$$x'(t) = te^{\frac{1}{3}(t^3 - 9t^2 + 24t - 22)} \cdot x(t), \quad x(3) = e^{\frac{2}{3}},$$

звідки

$$x(t) = \exp\left(\frac{2}{3} + \int_3^t \tau e^{\frac{1}{3}(\tau^3 - 9\tau^2 + 24\tau - 22)} d\tau\right)$$

тощо. Бачимо, що, змінивши в ОПЗ (4.3) тільки початкову точку, ми отримали розв'язок, абсолютно відмінний від попереднього. Очевидно, що до такого ж результату призведе і зміна початкової функції, адже в цьому випадку рівняння в дочірніх задачах Коші матимуть інший вигляд.

Вправа. Розв'язати ОПЗ (4.3) для випадків $t_0 = 0$ і $t_0 = 1$, узявши за початкову функцію $\varphi(t) \equiv 1$, і порівняти результати з отриманими вище.

2. Продовження розв'язку. Нехай у задачі Коші (4.1) $f(t, x(t))$ визначена, неперервна за обома аргументами в прямокутнику $\mathrm{D}: |t - t_0| \le a$, $|x - x_0| \le b$

і, окрім того, справджує в цій області умову Ліпшиця за змінною x:

$$|f(t,x_2(t)) - f(t,x_1(t))| \le L|x_2(t) - x_1(t)|, \quad L = const \ge 0.$$

Тоді згідно з теоремою Коші і Пеано задача (4.1) має єдиний неперервно диференційовний розв'язок $x = x(t)$ на інтервалі $I_0: |t - t_0| \le h$, де $h = \min\{a, b/M\}$, а M – стала, що обмежує функцію $f(t,x)$ у прямокутнику D. Якщо при цьому побудований розв'язок залишається в межах області D, де функція $f(t,x)$ визначена, неперервна і справджує умову Ліпшиця, то його можна продовжити.

Дійсно, нехай значення знайденого розв'язку для арґументу $t_1 = t_0 + h$ є $x_0^{(1)}$, причому точка $(t_1, x_0^{(1)})$ є внутрішньою точкою області D, тобто міститься в D разом з деяким своїм околом. Тоді існує прямокутник $\mathrm{D}_1 \subset \mathrm{D}$: $|t - t_1| \le a_1$, $|x - x_0^{(1)}| \le b_1$. Беручи за початкові дані $(t_1, x_0^{(1)})$, згідно з теоремою Коші і Пеано можемо стверджувати існування розв'язку задачі Коші (4.1) на інтервалі I_1: $|t - t_1| \le h_1$, де $h_1 = \min\{a_1, b_1/M_1\}$, а M_1 – стала, що обмежує функцію $f(t,x)$ у прямокутнику D_1. Поскільки середина інтервалу I_1 співпадає з кінцем проміжку I_0, причому в цій точці обидва побудовані розв'язки набувають одного й того ж значення $x_0^{(1)}$, тоді на підставі єдиності розв'язку задачі (4.1) ці розв'язки на перетині $I_0 \cap I_1$ співпадають. Знайдений розв'язок на проміжку $[t_1, t_1 + h_1]$ назвемо ***продовженням*** раніше одержаного на інтервалі I_0 розв'язку. Якщо значення знайденого розв'язку для арґументу $t_2 = t_1 + h_1$ є $x_0^{(2)}$, причому точка $(t_2, x_0^{(2)})$ є внутрішньою точкою області D, то беручи $(t_2, x_0^{(2)})$ за початкові дані, дістанемо продовження розв'язку на інтервалі $[t_2, t_2 + h_2]$ тощо. Аналоґічні побудови можна здійснити і для спадних значень t. Із теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що такими продовженнями можна підійти як завгодно близько до границі прямокутника D.

Розглянемо тепер основну початкову задачу (4.2). Будемо шукати її розв'язок на проміжку $(t_0, t_1]$. Як було показано вище (див. §3.3), при виконанні всіх умов теореми єдиності (теорема 1) задача (4.2) має єдиний розв'язок на проміжку $t \in [t_0, t_0 + h]$, де $h > 0$ досить мале і $t_0 + h < t_1$. Беручи $t_0^{(1)} = t_0 + h$ за нову початкову точку, розв'язок ОПЗ (4.2) також можна продовжити на інтервал $[t_0^{(1)}, t_0^{(1)} + h]$ і далі на увесь заданий відрізок (на відміну від задачі Коші у випадку ОПЗ послідовні інтервали перетинаються лише в одній точці!), якщо тільки побудовані продовження не виходять за межі області $\mathrm{D} \subset \mathrm{R}^{m+2}$. При цьому можливі випадки:

а) при продовженні розв'язку точка $(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_m(t)))$ наближається до границі області D;

б) при продовженні розв'язку точка $(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), ..., x(t - \tau_m(t)))$ то наближається, то віддаляється від границі області D (*Мышкис А.Д.*: "Общая теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом").

3. Розгалуження розв'язку. Якщо в задачах (4.1) або (4.2) порушується умова відповідної теореми єдиності, то з ростом t розв'язки таких задач можуть розгалужуватися. Для прикладу розглянемо ОПЗ

$$x'(t) = x(t - x(t+1)) + \tfrac{1}{2}, \quad x(t)\big|_{\overline{E}_0} = \varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \le -1, \\ 0, & t \in (-1;0]. \end{cases}$$

Будемо вважати $x(t) \ge 0$. Тоді на першому кроці при $t \in (0;2]$ з урахуванням розриву початкової функції $\varphi(t)$ дістанемо дві задачі Коші

а) $x_1'(t) = \frac{1}{2}, \quad x_1(0) = 0$; б) $x_2'(t) = \frac{3}{2}, \quad x_2(-1) = 1$,

звідки $x_1(t) = \frac{1}{2}t$, $x_2(t) = \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}$. Отож, поскільки початкова функція має розрив першого роду на початковій множині (порушується одна з умов теореми існування і єдиності розв'язку ОПЗ), то відбувається розгалуження розв'язку ОПЗ на два розв'язки $x_1(t)$ і $x_2(t)$.

ПРИКЛАД 2. Побудувати розв'язок ОПЗ

$$x'(t) = -x'(t - 0{,}25x^2(t)), \quad x(t)\big|_{t \le 0} = 1 - t. \tag{4.4}$$

Розв'язання. Маємо рівняння нейтрального типу. Умова (3.6) розв'язності задачі в початковій точці $t_0 = 0$ дає $x'(0) = -x'(-0{,}25)$; таке рівняння може мати розв'язок, наприклад, $x(t) = t^2(3 + 8t)$.

Будемо шукати розв'язок ОПЗ (4.4) при $t \ge 0$ з кроком $h = 1$, вважаючи задля визначеності $|x(t)| \le h + 1 = 2$. Тоді дістанемо (див. рис. 8):

$t \in (0;1]: \quad x'(t) = 1, \quad x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t + 1$;

$t \in (1;2]: \quad x'(t) = -1, \quad x(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 3 - t$;

$t \in (2;3]: \quad x'(t) = 1, \quad x(2) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t - 1$

тощо. Якщо шукати розв'язок ОПЗ (4.4) при $t \ge 0$ з кроком $h = 2$, вважаючи задля визначеності $|x(t)| \le 3$, то матимемо (рис. 8):

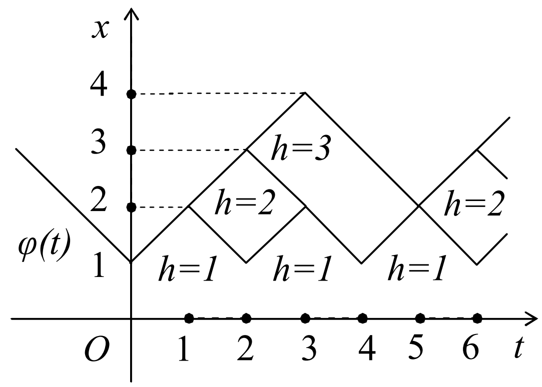


Рис. 8

$$x(t) = \begin{cases} t + 1, & t \in (0;2], \\ 5 - t, & t \in (2,4], \\ t - 3, & t \in (4,6] \end{cases}$$

тощо. Отже, у випадку ОПЗ (4.4) розгалуження розв'язку відбувається за рахунок зміни кроку.

Вправа. Побудувати розв'язок ОПЗ (4.4) для значень $t \ge 0$ з кроком $h = 3$ за умови $|x(t)| \le 4$.

Нехай в задачі Коші (4.1) функція $f(t, x(t))$ не є неперервною в деякій точці (t_0, x_0) Розглянемо два випадки:

1) $f(t,x) \to \infty$ при $(t,x) \to (t_0,x_0)$, тоді матимемо $f^{-1}(t,x) \to 0$. Покладемо $f^{-1}(t_0,x_0) = 0$ і розглянемо рівняння

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t,x)}$$

за припущення, що для нього в околі точки (t_0,x_0) виконуються умови теореми єдиності. Одержимо інтеґральну криву, яка проходить через точку (t_0,x_0) і задається рівнянням $t = \psi(x)$. При $t = t_0$, $x = x_0$ маємо $dt/dx = 0$; отже, інтеґральна крива в точці (t_0,x_0) буде мати вертикальну дотичну – ніяких інших ґеометричних особливостей ця точка не матиме.

2) $f(t,x)$ необмежена в околі точки (t_0,x_0), але не має єдиної границі $\pm\infty$ при прямуванні $(t,x) \to (t_0,x_0)$ і при цьому в інших точках цього околу $f(t,x)$ або $f^{-1}(t,x)$ неперервна. Такою є, наприклад, функція

$$f(t,x) = \frac{at+bx}{ct+dx}$$

в околі точки $(0;0)$. Так, якщо $(t,x) \to (0;0)$ уздовж прямої $at+bx=0$, то функція рівна нулеві; якщо уздовж прямої $ct+dx=0$, то функція невизначена, але поблизу цієї прямої нескінчено зростає; уздовж інших напрямів дістанемо нові границі. Тому кажуть, що в точці $(0;0)$ наша функція має ***ізольовану особливу точку*** типу $\frac{0}{0}$. Поведінка траєкторій в околі особливої точки і типи таких точок детально вивчаються в окремому курсі "Теорія стійкості" (для випадку ОПЗ див. [9], розділ 3, §§1-7).

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ III

За допомогою методу Пікара розв'язати ОПЗ:

1. $y'(x) + \operatorname{tg} x \cdot y(x) + y(x - \frac{\pi}{6}) = -x \operatorname{tg} x, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = 1.$

2. $3y'(x) + y(x-1) \cdot y(x) = 0, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = 3.$

3. $xy'(x) - y(x) = xy(x - \frac{\pi}{2}) - y(x - \pi), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = \sin x.$

4. $xy'(x) - 2y(x) = x^2 + xy(x-2), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1} = -x.$

РОЗДІЛ IV
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДХИЛЕННЯМ АРҐУМЕНТУ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

У цьому розділі розглядатимемо в основному лінійні ДРВА вищих порядків та методи їх інтеґрування.

§4.1. Метод кроків інтеґрування основної початкової задачі для ДРВА вищих порядків

Алґоритм методу кроків, викладений в §2.2 для ДРВА першого порядку, застосовний і до деяких ДРВА вищих порядків. Наприклад, основна початкова задача для рівняння з одним запізненням $\tau = const > 0$

$$F[x, y(x),..., y^{(n)}(x), y(x-\tau),..., y^{(n-1)}(x-\tau)] = 0, \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_{x0}} = \varphi(x)$$

на першому кроці при $x \in (x_0; x_0 + \tau]$ зводиться до задачі Коші для звичайного рівняння *n*-го порядку

$$F[x, y(x),..., y^{(n)}(x), \varphi(x-\tau),..., \varphi^{(n-1)}(x-\tau)] = 0, \tag{1.1}$$

$$y(x_0) = \varphi(x_0), \quad y'(x_0) = \varphi'(x_0), \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0). \tag{1.2}$$

Якщо рівняння (1.1) відноситься до інтеґровних типів, то, зінтеґрувавши задачу Коші (1.1),(1.2), можна перейти до наступного кроку. Зауважимо, що у випадку ДРЗА з одним запізненням $\tau = const > 0$ розрив у точці x_0 матиме, взагалі кажучи, похідна *n*-го порядку, на другому кроці в точці $x_0 + \tau$ – похідна $(n+1)$-го порядку тощо.

ПРИКЛАД 1. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y'''(x) + [y(x-2) - 12x + 3x^2 - 0{,}5x^3] \cdot y'(x) = 24x, \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_{-2}} = \frac{x^3}{2} + 6x + 20. \tag{1.3}$$

Розв'язання. Маємо ДРЗА третього порядку, початкова функція для якого задана на множині $\overline{E}_{-2} = [-4;-2]$. Застосуємо метод кроків, беручи елементарні відрізки довжини $h = 2$.

При $x \in (-2;0]$ усі запізнення потрапляють у початкову множину, тому $y(x-2) = 4.$ Тоді з (1.3) маємо задачу Коші

$$y'''(x) - 4y'(x) = 24x, \quad y(-2) = 4, \quad y'(-2) = 12, \quad y''(-2) = -6,$$

розв'язок якої $y_1(x) = 16 - 3x^2$ при $x \in (-2;0]$.

Другий крок: при $x \in (0;2]$ значення $y(x-2)$ визначаються вже функцією $y_1(x)$. Тобто $y(x-2) = 16 - 3(x-2)^2$, і з (1.3) одержуємо задачу Коші

$$y'''(x) + [4 - 0{,}5x^3] \cdot y'(x) = 24x, \quad y(0) = 16, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6,$$

розв'язавши яку, переходимо до наступного кроку тощо.

Аналогічно діє метод кроків і у випадку ДРВА з *m* відхиленнями, а також із зосередженими та автореґульованими запізненнями. Наприклад, ОПЗ

$$\sum_{k=0}^{n} p_k[x, y(x-\tau_1(x)),\dots, y(x-\tau_m(x))]y^{(k)}(x) = f(x), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_{x_0}} = \varphi(x)$$

на першому кроці при $x \in (x_0, x_0 + h_1)$ зводиться до задачі Коші для звичайного лінійного рівняння n-го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} p_k[x, \varphi(x-\tau_1(x)),\dots, \varphi(x-\tau_m(x))]y^{(k)}(x) = f(x)$$

з початковими умовами (1.2).

ПРИКЛАД 2. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$y''(x) + y(x) = y(x-\pi) - y(x-2\pi), \quad y(x)\Big|_{\overline{E}_0} = 1. \tag{1.4}$$

Розв'язання. Маємо ДРЗА другого порядку, початкова функція для якого задана на множині $\overline{E}_0 = [-2\pi; 0]$. Застосуємо метод кроків, беручи задля однозначності розв'язку елементарні відрізки довжини $h = \pi$.

При $x \in (0;\pi]$ $y(x-\pi) = y(x-2\pi) = 1$, тому з (1.4) дістанемо задачу Коші

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

розв'язок якої $y_1(x) = \cos x$ при $x \in (0;\pi]$.

Другий крок: при $x \in (\pi; 2\pi]$ $y(x-\pi) = \cos(x-\pi) = -\cos x$, $y(x-2\pi) = 1$, і з (1.4) одержуємо задачу Коші

$$y''(x) + y(x) = -\cos x - 1, \quad y(\pi) = -1, \quad y'(\pi) = 0,$$

розв'язавши яку, переходимо до наступного кроку тощо.

Вправа. Знайти розв'язки наведених ОПЗ (приклад 1 і приклад 2) на другому елементарному відрізку.

§4.2. Лінійні ДРВА вищих порядків та їх властивості

Розглянемо лінійне неоднорідне ДРВА n-го порядку вигляду

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}(t)x^{(p)}(t-\tau_j) = f(t) \tag{2.1}$$

з m запізненнями $\tau_j = const \geq 0$ (вважаємо $\tau_0 = 0$), де $a_{pj}(t)$ – задані неперервні в області визначення рівняння (2.1) функції, причому $a_{n,0}(t) \neq 0$. Зауважимо, що при $a_{nj}(t) \equiv 0$, $j = \overline{1,m}$ (2.1) буде рівнянням із запізненням арґументу, інакше одержимо рівняння нейтрального типу.

Відповідне до (2.1) однорідне рівняння має вигляд

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj}(t)x^{(p)}(t-\tau_j) = 0. \tag{2.2}$$

З теорії звичайних диференціальних рівнянь відомо, що лінійне перетворення залежної змінної $x(t) = \varphi_1(t)v(t) + \varphi_2(t)$ з n разів неперервно диференційовними на заданому проміжку коефіцієнтами, а також перетворення арґументу

$t=\varphi(\xi)$, де $\varphi(\xi)$ – n разів неперервно диференційовна на заданому проміжку функція, не змінюють лінійності диференціального рівняння n-го порядку. Перевіримо виконання цих властивостей для лінійного ДРВА (2.1).

Введемо лінійне перетворення залежної змінної $x(t)=\varphi_1(t)v(t)+\varphi_2(t)$, де $v(t)$ – нова невідома функція. Тоді

$$x(t-\tau_j)=\varphi_1(t-\tau_j)v(t-\tau_j)+\varphi_2(t-\tau_j), \quad x'(t)=\varphi_1'(t)v(t)+\varphi_1(t)v'(t)+\varphi_2'(t),$$
$$x'(t-\tau_j)=\varphi_1'(t-\tau_j)v(t-\tau_j)+\varphi_1(t-\tau_j)v'(t-\tau_j)+\varphi_2'(t-\tau_j)$$

тощо. Бачимо, що усі одержані вирази є лінійними відносно $v(t)$ та її похідних із відхиленнями, тому після підставляння у ДРВА (2.1) дістанемо нове лінійне рівняння. Отже, лінійне перетворення залежної змінної не змінює лінійності ДРВА (2.1).

Перейдемо тепер у ДРВА (2.1) до нового арґументу ξ заміною $t=\varphi(\xi)$. Припустимо, що функція $\varphi(\xi)$ має обернену, тобто можна визначити $\xi=\psi(t)$, де $\psi(\varphi(\xi))=\xi$. Тоді, переходячи в $x(t)$ до нового арґументу, дістанемо нову функцію $v(\xi)$. Маємо:

$$x(t)=v(\xi)\equiv v(\psi(t)), \quad x(t-\tau_j)\equiv x(\varphi(\xi)-\tau_j)=v(\psi(\varphi(\xi)-\tau_j)),$$
$$x'(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dv(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}=\frac{1}{\varphi'(\xi)}\cdot v'(\xi)=\frac{1}{\varphi'(\psi(t))}\cdot v'(\psi(t)), \tag{2.3}$$
$$x'(t-\tau_j)=\frac{1}{\varphi'(\psi(\varphi(\xi)-\tau_j))}\cdot v'(\psi(\varphi(\xi)-\tau_j))$$

тощо.

Нехай функція $\varphi(\xi)$ є лінійною, тобто заміна арґументу набуває вигляду $t=a\xi+b$, де $a\neq 0$, b – сталі. Тоді $\xi=a^{-1}(t-b)$, отже, функція $\psi(t)$ також є лінійною, причому

$$\psi(\varphi(\xi)-\tau_j)=\psi(a\xi+b-\tau_j)=\xi-a^{-1}\tau_j.$$

Позначимо через $\overline{\tau}_j=a^{-1}\tau_j$, $j=\overline{0,m}$. Тоді, підставивши вирази (2.3) у рівняння (2.1), одержимо нове лінійне ДРВА відносно $v(\xi)$ та її похідних з відхиленнями $\overline{\tau}_j$. Отже, лінійне перетворення арґументу не змінює лінійності ДРВА (2.1).

Якщо функція $\varphi(\xi)$ не є лінійною, то й вирази $\psi(\varphi(\xi)-\tau_j)$, взагалі кажучи, не будуть лінійними. Після підставляння (2.3) у (2.1) можемо одержати лінійне ДРВА іншого типу (із зосередженим запізненням абощо). Якщо ж (2.1) містить авторегульовані запізнення $\tau_j=\tau_j(t,x(t))$, то нелінійна заміна арґументу очевидно порушить лінійність рівняння (2.1).

ПРИКЛАД. Розглянемо лінійне однорідне ДРВА другого порядку

$$x''(t)-x''(t-1)+x'(t)-x'(t-1)-x(t-2)=0. \tag{2.4}$$

1. Введемо лінійну заміну залежної змінної $x(t)=tv(t)+t^2$. Тоді

$x(t-2)=(t-2)v(t-2)+(t-2)^2$, $x'(t)=v(t)+tv'(t)+2t$, $x''(t)=2v'(t)+tv''(t)+2$, $x'(t-1)=v(t-1)+(t-1)v'(t-1)+2t-2$, $x''(t-1)=2v'(t-1)+(t-1)v''(t-1)+2$.

Після підставляння у вихідне рівняння (2.4) дістанемо лінійне неоднорідне ДРВА другого порядку

$$tv''(t)+(1-t)v''(t-1)+(t+2)v'(t)-(t+1)v'(t-1)+v(t)-$$
$$-v(t-1)+(2-t)v(t-2)=t^2-4t+2.$$

2. Введемо лінійну заміну незалежної змінної $t=0{,}5\xi+1$. Тоді згідно з формулами (2.3)

$x(t-2)=v(\xi-4)$, $x'(t)=2v'(\xi)$, $x''(t)=4v''(\xi)$,

$x'(t-1)=2v'(\xi-2)$, $x''(t-1)=4v''(\xi-2)$

і після підставляння у (2.4) дістанемо лінійне однорідне ДРВА

$$v''(\xi)-v''(\xi-2)+0{,}5[v'(\xi)-v'(\xi-2)]-0{,}25v(\xi-4)=0.$$

3. Введемо нелінійну заміну незалежної змінної $t=e^{\xi}$, $\xi=\ln t$. Тоді

$x(t-2)=v(\ln(e^{\xi}-2))$, $x'(t)=e^{-\xi}v'(\xi)$, $x''(t)=e^{-2\xi}v''(\xi)-e^{-2\xi}v''(\xi)$,

$x'(t-1)=e^{-\ln(e^{\xi}-1)}v'(\ln(e^{\xi}-1))=(e^{\xi}-1)^{-1}v'(\ln(e^{\xi}-1))$,

$x''(t-1)=(e^{\xi}-1)^{-2}[v''(\ln(e^{\xi}-1))-v'(\ln(e^{\xi}-1))]$.

Після підставляння в (2.4) дістанемо лінійне ДРВА із зосередженими відхиленнями (перевірити!).

Інші властивості звичайних лінійних диференціальних рівнянь мають силу і для лінійних ДРВА вигляду (2.1) і (2.2) (перевірити!):

– якщо $x(t)$ деякий розв'язок однорідного ДРВА (2.2), а C довільна стала, то функція $Cx(t)$ також є розв'язком ДРВА (2.2);
– якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ деякі розв'язки ДРВА (2.2), то функція $x_1(t)+x_2(t)$ також є розв'язком ДРВА (2.2);
– якщо $x_1(t)$ і $x_2(t)$ – деякі розв'язки ДРВА (2.1) і (2.2) відповідно, то функція $x_1(t)+x_2(t)$ є розв'язком неоднорідного ДРВА (2.1).

§4.3. Інтеґрування основної початкової задачі для лінійних ДРВА за допомогою функції Коші

Розглянемо лінійне неоднорідне ДРВА n-го порядку вигляду (2.1)

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}(t)x^{(p)}(t-\tau_j)=f(t) \tag{3.1}$$

з m запізненнями $\tau_j=const\geq 0$ (вважаємо $\tau_0=0$), де $a_{pj}(t)$ – задані неперервні в області визначення рівняння (2.1) функції, причому $a_{n,0}(t)\neq 0$. Задля скорочення записів подамо (3.1) у вигляді

$L_0(x)+L_\tau(x)=f(t)$,

де $L_0(x) \equiv \sum_{p=0}^{n} a_{p,0}(t) x^{(p)}(t)$, $L_\tau(x) \equiv \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{pj}(t) x^{(p)}(t-\tau_j)$.

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння (3.1) при початковій умові

$$x(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = 0. \tag{3.2}$$

Тоді на першому елементарному відрізку $t \in (t_0, t_0 + h_1]$, де $h_1 = \min\limits_{j=\overline{1,m}} \tau_j$, задача (3.1),(3.2) є еквівалентною задачі Коші

$$L_0(x) = f(t), \tag{3.3}$$

$$x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0. \tag{3.4}$$

Розв'язок задачі (3.3),(3.4) будемо шукати у вигляді інтеґрала

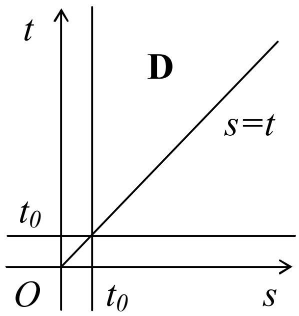


Рис. 9

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,s) f(s) ds, \tag{3.5}$$

де $G(t,s)$ деяка функція, визначена й неперервна в області $\mathrm{D} = \{(t,s) \mid t \ge t_0, \quad t_0 \le s \le t\}$ (рис. 9). Виберемо $G(t,s)$ таким чином, щоб інтеґрал (3.5) був розв'язком рівняння (3.3) і справджував початкові умови (3.4). Маємо:

$$x'(t) = G(t,t) f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f(s) ds.$$

Покладемо $G(t,t) = 0$. Тоді

$$x''(t) = \frac{\partial G(t,t)}{\partial t} f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 G(t,s)}{\partial t^2} f(s) ds.$$

Аналогічно покладаємо $\dfrac{\partial G(t,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 G(t,t)}{\partial t^2} = \ldots = \dfrac{\partial^{(n-2)} G(t,t)}{\partial t^{(n-2)}} = 0$. Тоді

$$x^{(n)}(t) = \frac{\partial^{(n-1)} G(t,t)}{\partial t^{n-1}} f(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^{(n)} G(t,s)}{\partial t^n} f(s) ds.$$

Одержані вирази для похідних шуканої функції підкладемо в рівняння (3.3). Маємо:

$$a_{n,0}(t) \frac{\partial G^{(n-1)}(t,t)}{\partial t^{n-1}} f(t) + \int_{t_0}^{t} f(s) \cdot \sum_{p=0}^{n} a_{p,0}(t) \frac{\partial^{(p)} G(t,s)}{\partial t^p} ds = f(t).$$

Для того, щоб остання рівність виконувалася, очевидно слід покласти

$$\frac{\partial G^{(n-1)}(t,t)}{\partial t^{n-1}} = \frac{1}{a_{n,0}(t)}, \quad \sum_{p=0}^{n} a_{p,0}(t) \frac{\partial^{(p)} G(t,s)}{\partial t^p} \equiv L_0(G) = 0.$$

Визначення. Функція $G(t,s)$, визначена й неперервна в області D (див. рис. 9), називається ***функцією Коші*** задачі (3.3),(3.4), якщо

1) при $t \ne s$ $G(t,s)$ як функція змінної t є розв'язком однорідного рівняння $L_0(G) = 0$;

2) при $t = s$ $G(t,s)$ і її похідні за змінною t до $(n-2)$-го порядку включно перетворюються в нуль, а похідна $(n-1)$-го порядку набуває значення $a_{n,0}^{-1}(s)$.

Із наведеного вище випливає: якщо $G(t,s)$ є функцією Коші задачі (3.3), (3.4), то інтеґрал (3.5) буде розв'язком рівняння (3.3) і справджуватиме (що очевидно з вигляду виразів для похідних) початкові умови (3.4).

Нехай функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків рівняння $L_0(\varphi) = 0$. Тоді функцію Коші $G(t,s)$ задачі (3.3),(3.4) на підставі властивості 1) визначення можна шукати у вигляді

$$G(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s)\varphi_i(t),$$

де коефіцієнти $\alpha_i(s)$ однозначно визначаються з лінійної неоднорідної алґебраїчної системи, одержаної на підставі властивості 2) (перевірити!)

Припустимо, що функція Коші задачі (3.3),(3.4) побудована. Тоді розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2) на першому кроці при $t \in I_1 = (t_0, t_0 + h_1]$ дається формулою (3.5). Позначимо цей розв'язок через $x_1(t)$.

Очевидно, що значення функції $x_1(t)$ та її похідних в точці $t_1 = t_0 + h_1$, взагалі кажучи, не будуть рівними нулеві, тому на другому елементарному відрізку $t \in I_2 = (t_1, t_1 + h_2 = t_2]$ одержимо задачу Коші з неоднорідними початковими умовами, які для застосування формули (3.5) необхідно звести до однорідних. Отож продовжимо функцію $x_1(t)$ на відрізок $t \in I_2$. Тоді розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2) на другому кроці можна шукати у вигляді $x_2(t) = y(t) + x_1(t)$, де $y(t)$ є розв'язком задачі Коші вже з однорідними початковими умовами

$$L_0(y) = f(t) - L_\tau(x) - L_0(x_1), \quad y(t_1) = y'(t_1) = \ldots = y^{(n-1)}(t_1) = 0,$$

який аналоґічно до розв'язку задачі (3.3),(3.4) можна подати у вигляді інтеґрала

$$y(t) = \int_{t_1}^{t} G(t,s)[f(s) - L_\tau(x(s)) - L_0(x_1(s))]ds.$$

Отже, на другому кроці розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2) є

$$x_2(t) = x_1(t) + \int_{t_1}^{t} G(t,s)[f(s) - L_\tau(x(s)) - L_0(x_1(s))]ds, \quad t \in I_2. \tag{3.6}$$

Аналоґічні до (3.6) формули можна одержати і для наступних кроків. Так, якщо, вважаючи $x_0(t) \equiv 0$, позначити через $x_n(t)$ розв'язок ОПЗ (3.1),(3.2) на n-му елементарному відрізку $t \in I_n = (t_{n-1}, t_{n-1} + h_n = t_n]$, де t_0 початкова точка, а $t_n > t_{n-1}$ для довільного $n \in \mathrm{N}$, то дістанемо рекурентне співвідношення

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) + \int_{t_{n-1}}^{t} G(t,s)[f(s) - L_\tau(x(s)) - L_0(x_{n-1}(s))]ds, \quad t \in I_n, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{3.7}$$

Зауважимо, що в (3.7) підінтеґральний доданок $L_\tau(x(s))$ на кожному кроці матиме різні значення, а ось функція Коші залишається тією ж самою!

ПРИКЛАД. За допомогою функції Коші побудувати розв'язок ОПЗ

$$x''(t)+4x(t-2)=1,\quad x(t)\Big|_{\bar{E}_0}=0. \tag{3.8}$$

Розв'язання. Маємо основну початкову задачу типу (3.1),(3.2), де $t_0=0$, $L_0(x)=x''(t)$, $L_\tau(x)=4x(t-2)$, $f(t)=1$. На першому кроці при $t\in(0;2]$ дістанемо задачу Коші (3.3),(3.4) вигляду

$$x''(t)=1,\quad x(0)=x'(0)=0. \tag{3.9}$$

Фундаментальна система частинних розв'язків однорідного рівняння без відхилень $x''(t)=0$ є $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(t)=1$. Тому функцію Коші $G(t,s)$ задачі (3.9) шукатимемо у вигляді $G(t,s)=\alpha(s)t+\beta(s)$. На підставі властивостей функції Коші маємо:

$$\left.\begin{aligned} &G(s,s)\equiv\alpha(s)\cdot s+\beta(s)=0,\\ &\frac{\partial G(s,s)}{\partial t}\equiv\alpha(s)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad G(t,s)=t-s.$$

Отже, на першому кроці згідно з формулою (3.5) розв'язок ОПЗ (3.8) є

$$x_1(t)=\int_{t_0}^{t}G(t,s)f(s)ds=\int_0^t(t-s)ds=\frac{t^2}{2},\quad t\in(0;2].$$

На другому кроці при $t\in(2;4]$ застосуємо рекурентну формулу (3.7) з урахуванням того, що на цьому відрізку $L_\tau(x)=4x_1(t-2)$. Отже,

$$x_2(t)=x_1(t)+\int_{t_1}^{t}G(t,s)[f(s)-L_\tau(x(s))-L_0(x_1(s))]ds=$$

$$=\frac{t^2}{2}+\int_2^t(t-s)\left[1-4\frac{(s-2)^2}{2}-1\right]ds=-\frac{(t-2)^4}{6},\qquad t\in(2;4]$$

тощо.

Вправа. За допомогою формули (3.7) побудувати розв'язок ОПЗ (3.8) на третьому елементарному відрізку.

§4.4. Метод збурень (малого параметра) інтеґрування основної початкової задачі для лінійних ДРВА

Застосування методу збурень є зручним тоді, коли для розглядуваної ОПЗ відомий розв'язок близької задачі, коефіцієнти якої мало відрізняються від заданих. Викладемо ідею методу для випадку лінійних ДРВА.

Розглянемо лінійне ДРВА n-го порядку (3.1) (див. §4.3) у вигляді

$$L[x]\equiv\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}(t)x^{(p)}(t-\tau_j)-f(t)=0 \tag{4.1}$$

або (використаємо позначення, введені у §4.3)

$$L[x]\equiv L_0(x)+L_\tau(x)-f(t)=0.$$

Нехай потрібно знайти розв'язок рівняння (4.1) при початковій умові

$$x(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = \varphi(t). \qquad (4.2)$$

Тоді на першому елементарному відрізку I_1 задача (4.1),(4.2) є еквівалентною задачі Коші

$$L[1,x] \equiv L_0(x) + L_\tau(\varphi) - f(t) = 0, \qquad (4.3)$$

$$x^{(p)}(t_0) = \varphi^{(p)}(t_0), \quad p = \overline{0, n-1}. \qquad (4.4)$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші (4.3),(4.4) застосуємо метод збурень (інша його назва – метод малого параметра), суть якого полягає в наступному. Вводимо параметр збурень ε і складаємо допоміжне рівняння

$$L[\varepsilon, x] = 0 \qquad (4.5)$$

з урахуванням наступних вимог:

а) при $\varepsilon = 1$ рівняння (4.5) співпадає з рівнянням (4.3);

б) розв'язок рівняння (4.5) при $\varepsilon = 0$ відомий або легко знаходиться.

Зауваження. Якщо в рівнянні (4.5) параметр ε міститься при старшій похідній (або ж ліва частина рівності (4.5) має розрив при $\varepsilon = 0$), то збурення називають ***синґулярним***, якщо при нижчих похідних – ***реґулярним***. Рівняння із синґулярним збуренням можна "реґуляризувати", тобто звести до рівняння з реґулярним збуренням, введенням підстановки незалежної змінної $z = t\varepsilon^{-1}$ (так званий "безрозмірний час"). Надалі розглядатимемо лише реґулярні збурення.

Припустимо, що розв'язок $x(t,\varepsilon)$ допоміжної задачі Коші

$$L[\varepsilon, x] = 0, \quad x^{(p)}(t_0) = \varphi^{(p)}(t_0), \quad p = \overline{0, n-1} \qquad (4.6)$$

розкладається в збіжний ряд по степенях ε вигляду

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots, \qquad (4.7)$$

де $x_0(t)$ – відомий розв'язок задачі (4.6) при $\varepsilon = 0$, а $x_i(t),\ i \in \mathrm{N}$ – невідомі функції, які справджують однорідні початкові умови

$$x_i^{(p)}(t_0) = 0, \quad p = \overline{0, n-1}, \quad i = \overline{1, \infty}. \qquad (4.8)$$

Зауважимо, що виконання умов (4.8) забезпечує виконання умов (4.4) для функції $x(t,\varepsilon)$.

Підставивши (4.7) у рівняння (4.5) і подавши $L[\varepsilon, x]$ у вигляді ряду по степенях ε (вважаємо це можливим), дістанемо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Phi_i = 0, \qquad (4.9)$$

де Φ_i – відомі диференціальні вирази, які можна виписати в явній формі, причому з коефіцієнтів ряду (4.7) вираз Φ_0 містить лише $x_0(t)$, вираз Φ_1 містить $x_0(t)$ і $x_1(t)$, загалом вираз Φ_n містить $x_0(t)$, $x_1(t)$, …, $x_n(t)$, причому всі функції $x_i(t),\ i \in \mathrm{N}$ справджують початкові умови (4.8). Для виконання умови (4.9) достатньо вимагати, щоб $\Phi_0 = \Phi_1 = \ldots = \Phi_n = \ldots = 0$.

Розв'язуючи тепер послідовно задачі

$$\begin{aligned}&\Phi_0 = 0, \quad x_0^{(p)}(t_0) = \varphi(t_0), \quad p = \overline{1, n-1},\\ &\Phi_i = 0, \quad x_i^{(p)}(t_0) = 0, \quad p = \overline{1, n-1}, \quad i = 1,2,...,\end{aligned} \tag{4.10}$$

шуканий розв'язок задачі Коші (4.3),(4.4) з урахуванням того, що при $\varepsilon = 1$ рівняння (4.5) і (4.3) співпадають, дістаємо у вигляді нескінченого ряду

$$x(t) \equiv x(t,1) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + ... \tag{4.11}$$

За наближений розв'язок задачі (4.3),(4.4) – себто розв'язок ОПЗ (4.1),(4.2) при $t \in I_1$ – можна взяти суму деякої скінченої кількості перших членів ряду (4.11). Аналогічно одержуємо наближений розв'язок поставленої ОПЗ і на наступних елементарних відрізках.

Зауважимо, що наведений метод застосовний переважно у випадку лінійних ДРВА із запізненням арґументу (у випадку рівнянь нейтрального типу можемо отримати синґулярне збурення). Проілюструємо алґоритм методу малого параметра на прикладі ОПЗ для лінійного рівняння першого порядку зі сталим запізненням $\tau = const > 0$:

$$x'(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t-\tau) = f(t), \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = \varphi(t). \tag{4.12}$$

Введемо малий параметр ε. Тоді на першому кроці при $t \in (0;\tau]$ дістанемо, наприклад, таке допоміжне рівняння (4.5):

$$x'(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t) \cdot \varepsilon x(t-\tau) = f(t).$$

Підставивши в допоміжне рівняння $x(t,\varepsilon)$ у вигляді (4.7), після зведення членів з однаковими степенями параметра ε для визначення коефіцієнтів ряду дістанемо задачі Коші (4.10) вигляду

$$x_0'(t) + a_1(t)x_0(t) = f(t), \quad x_0(0) = \varphi(0),$$

$$x_i'(t) + a_1(t)x_i(t) = -a_2(t)x_{i-1}(t-\tau), \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1,2,...$$

Тоді розв'язок ОПЗ (4.12) при $t \in (0;\tau]$ подається у вигляді ряду (4.11). Якщо знайдені n перших членів ряду (4.11), а при інтеґруванні наступних задач Коші виникають складнощі, то можна записати наближений розв'язок поставленої ОПЗ на першому елементарному відрізку:

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + ... + x_n(t), \quad t \in (0;\tau],$$

після чого перейти до наступного кроку.

Метод малого параметра – один із найпростіших асимптотичних методів наближеного інтеґрування диференціальних рівнянь (як лінійних, так і нелінійних) та їх систем (якщо $\boldsymbol{x}(t)$ розглядати як вектор-функцію). Ряд (4.7) за степенями малого параметра ε називається ***асимптотичним рядом***.

ПРИКЛАД. За допомогою методу збурень розв'язати ОПЗ, залишаючи два перші члени асимптотичного ряду:

$$x''(t) + e^{-t}x(-0{,}5t) - x(t) = 1, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = -e^t. \tag{4.13}$$

Розв'язання. Щоб знайти розв'язок ОПЗ (4.13) при $t > 0$, запишемо допоміжне рівняння з параметром

$$x''(t) - x(t) + \varepsilon e^{-t}x(-0{,}5t) = 1.$$

Підставивши в допоміжне рівняння $x(t,\varepsilon)$ у вигляді (4.7), для визначення коефіцієнтів ряду дістанемо (з урахуванням того, що при $t>0$ згідно з початковою умовою $x_0(-0{,}5t)=-e^{-0{,}5t}$, $x_i(-0{,}5t)=0$, $i\in \mathrm{N}$) задачі Коші

$$x_0''(t)-x_0(t)=1,\ \ x_0(0)=-1,\ \ x_0'(0)=-1;$$

$$x_1''(t)-x_1(t)=-e^{-t}x_0(-0{,}5t)=e^{-1{,}5t},\ \ x_1(0)=0,\ \ x_1'(0)=0;$$

$$x_i''(t)-x_i(t)=-e^{-t}x_{i-1}(-0{,}5t),\ \ x_i(0)=0,\ \ x_i'(0)=0,\ \ i=2,3,...$$

тощо. Зінтеґрувавши дві перші задачі Коші, одержимо:

$$x_0(t)=-\operatorname{sh}t-1,\ \ x_1(t)=\tfrac{2}{5}(\operatorname{sh}t+2e^{-1{,}5t}).$$

Якщо за шуканий розв'язок узяти суму двох перших членів асимптотичного ряду (4.11), то

$$x(t)\approx x_0(t)+x_1(t)=\tfrac{1}{5}(4e^{-1{,}5t}-3\operatorname{sh}t-5),\ \ t>0.$$

Вправа. Знайти третій член ряду (4.11) для ОПЗ (4.13).

§4.5. Метод Ейлера інтеґрування лінійних однорідних ДРВА зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне ДРВА з *m* запізненнями вигляду

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}x^{(p)}(t-\tau_j)=0, \tag{5.1}$$

де a_{pj} – задані сталі, причому $a_{n,0}\neq 0$, а запізнення $\tau_j=const\geq 0$, причому вважаємо $\tau_0=0$. Для знаходження розв'язків рівнянь типу (5.1) застосовний метод Ейлера аналоґічно до звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь (ЛОДР) *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Отже, будемо шукати розв'язки рівняння (5.1) у вигляді $x=e^{kt}$, де k деяка невідома стала. Тоді

$$x(t-\tau_j)=e^{k(t-\tau_j)}=e^{kt}\cdot e^{-k\tau_j},\quad x'(t-\tau_j)=ke^{kt}\cdot e^{-k\tau_j}\quad \ldots\quad x^{(n)}(t-\tau_j)=k^ne^{kt}\cdot e^{-k\tau_j}.$$

Підставивши одержані функції в рівняння (5.1), після скорочення на $e^{kt}\neq 0$ дістанемо алґебраїчне рівняння для визначення сталої k:

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}k^pe^{-k\tau_j}=0. \tag{5.2}$$

Співвідношення (5.2) називається характеристичним рівнянням (ХР) для ДРВА (5.1). На відміну від звичайних ЛОДР, у випадку ЛОДРВА характеристичне рівняння є трансцендентним і в нього входять відхилення τ_j. Корені ХР (5.2) будуть, як правило, комплексними; поскільки рівняння є трансцендентним, то таких коренів буде безліч.

Нехай $z=\alpha+\beta i$ деяке комплексне число, яке є коренем рівняння (5.2). Тоді ХР (5.2) можна записати у вигляді

$$\Phi(z) \equiv \sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-z\tau_j} = 0. \tag{5.3}$$

Вираз $\Phi(z)$ у співвідношенні (5.3) називають квазіполіномом. Зауважимо, що нулі квазіполінома $\Phi(z)$ в явному вигляді можна знайти лише в деяких простіших випадках; найчастіше ж їх доводиться шукати наближеними методами. Отже, метод Ейлера доцільно застосовувати тільки для досить вузького класу ЛОДРВА (переважно рівнянь нейтрального типу), коли всі корені ХР (5.2) або (5.3) знаходяться в явному вигляді. Вперше розв'язувати такі рівняння за допомогою підстановки Ейлера запропонував у 1771 р. французький вчений де Кондорсе (докладніше про це див. §1.2).

Частинні розв'язки, які відповідають кореням ХР (5.2) або (5.3), записують так само, як і для звичайних ЛОДР зі сталими коефіцієнтами. Отже, якщо ХР (5.2) має дійсний корінь $k_1 = \alpha$, то відповідний йому частинний розв'язок є $x_1(t) = e^{\alpha t}$. Якщо комплексно спряжені числа $z_{2,3} = \alpha \pm \beta i$ є нулями квазіполінома $\Phi(z)$, то відповідні їм частинні розв'язки в комплексному вигляді є $x_{2,3}(t) = e^{(\alpha \pm \beta i)t}$, проте частіше замість них використовують дійсні функції $x_2(t) = \mathrm{Re}\, e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t} \cos\beta t$, $x_3(t) = \mathrm{Im}\, e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t} \sin\beta t$. Якщо деякий корінь ХР (5.2) або (5.3) має кратність λ, то відповідну лінійно незалежну систему частинних розв'язків одержуємо, домножуючи на t, t^2, …, $t^{\lambda-1}$. Загальний розв'язок ДРВА (5.1), як і у випадку звичайних ЛОДР, записують у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків.

ПРИКЛАД. Записати загальний розв'язок ДРВА

$$x''(t-\tau) - x''(t) = 0, \quad \tau = const > 0.$$

Розв'язання. Застосуємо метод Ейлера: $x = e^{kt}$, тоді з рівняння

$$k^2 e^{k(t-\tau)} - k^2 e^{kt} = 0$$

дістанемо ХР (5.2) вигляду

$$k^2 (e^{-k\tau} - 1) = 0.$$

Звідси $k_1 = k_2 = 0$, а з рівняння $e^{-k\tau} = 1$ одержимо $k_3 = 0$ (трикратний корінь ХР). Знайдемо комплексні корені $z = \alpha + \beta i$ рівняння $e^{-z\tau} = 1$, тобто нулі квазіполінома $\Phi(z) = e^{-z\tau} - 1$. Маємо: $e^{-(\alpha+\beta i)\tau} = 1$, або

$$e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau - i\sin\beta\tau) = 1.$$

Остання рівність виконується при $\alpha = 0$, $\beta\tau = 2\pi n$, де $n \in \mathrm{Z}$. Отже, нулями квазіполінома будуть числа $z_n = 2\pi n \tau^{-1} i$, $n \in \mathrm{Z}$.

Трикратному нулеві відповідають частинні розв'язки $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$, а комплексним кореням – функції $\exp(2\pi n \tau^{-1} i t)$, $n \in \mathrm{Z}$. Поскільки комплексні частинні розв'язки включають функцію $x_1(t)$, то шуканий загальний розв'язок запишеться як

$$x(t) = A_1 t^2 + A_2 t + \sum_{n \in Z} C_n \exp(\tfrac{2\pi n i}{\tau} t)$$

або через дійсні частинні розв'язки – у вигляді

$$x(t) = A_1 t^2 + A_2 t + A_3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n^{(1)} \cos \tfrac{2\pi n}{\tau} t + C_n^{(2)} \sin \tfrac{2\pi n}{\tau} t \right).$$

§4.6. Лінійні неоднорідні ДРВА зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо відповідне до (5.1) лінійне неоднорідне ДРВА з m запізненнями і сталими коефіцієнтами вигляду

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^{(p)}(t - \tau_j) = f(t), \tag{6.1}$$

де $f(t)$ задана неперервна на проміжку задання рівняння (6.1) функція.

Загальний розв'язок ДРВА (6.1), як і в теорії звичайних диференціальних рівнянь, знаходимо у вигляді суми

$$x(t) = X(t) + x_0(t), \tag{6.2}$$

де $X(t)$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (5.1), який можна шукати методом Ейлера (див. §4.5), а $x_0(t)$ – деякий частинний розв'язок ДРВА (6.1), який за умови спеціального вигляду функції $f(t)$ можна знайти за допомогою методу невизначених коефіцієнтів аналоґічно до звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Отже, якщо вільний член рівняння (6.1) має вигляд

$$f(t) = e^{\alpha t}[P_s(t) \cos \beta t + Q_r(t) \sin \beta t], \tag{6.3}$$

де $P_s(t)$ і $Q_r(t)$ – многочлени степенів s і r відповідно, і при цьому число $z = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (5.3), то частинний розв'язок $x_0(t)$ шукаємо у вигляді

$$x_0(t) = e^{\alpha t}[\overline{P}_m(t) \cos \beta t + \overline{Q}_m(t) \sin \beta t],$$

де $\overline{P}_m(t)$ і $\overline{Q}_m(t)$ – многочлени степеня $m = \max\{s, r\}$, коефіцієнти яких визначаємо безпосередньо з рівняння (6.1). Якщо ж число $z = \alpha + \beta i$ є коренем ХР (5.3) кратності λ, то матимемо

$$x_0(t) = t^{\lambda} e^{\alpha t}[\overline{P}_m(t) \cos \beta t + \overline{Q}_m(t) \sin \beta t].$$

ПРИКЛАД 1. Записати загальний розв'язок ДРВА

$$x'(t) + x'(t-1) = \cos \pi t. \tag{6.4}$$

Розв'язання. Маємо: $x(t) = X(t) + x_0(t)$. Застосувавши метод Ейлера, дістанемо ХР (4.2) вигляду

$$k(e^{-k} + 1) = 0.$$

Звідси $k_1 = 0$, а з рівняння $e^{-k} = -1$ одержимо комплексні корені $z_n = (2n+1)\pi i$, $n \in \mathrm{Z}$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння через дійсні частинні розв'язки запишеться у вигляді

$$X(t) = A_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(1)}\cos(2n+1)\pi t + C_n^{(2)}\sin(2n+1)\pi t\right).$$

Права частина рівняння має спеціальний вигляд (6.3), де $s = r = 0$, причому $\alpha = 0$, $\beta = \pi$. Число $\alpha + \beta i = \pi i$ є коренем ХР кратності 1, тому частинний розв'язок $x_0(t)$ рівняння (6.4) шукаємо у вигляді

$$x_0(t) = t(A\cos\pi t + B\sin\pi t), \tag{6.5}$$

де *A*, *B* – невідомі коефіцієнти. Підклавши (6.5) у (6.4), визначаємо: $B = \pi^{-1}$, $A = 0$. Отже, згідно з (6.2) загальний розв'язок ДРВА (6.4) є

$$x(t) = A_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(1)}\cos(2n+1)\pi t + C_n^{(2)}\sin(2n+1)\pi t\right) + \frac{t}{\pi}\sin\pi t.$$

ПРИКЛАД 2. Записати загальний розв'язок ДРВА

$$x'''(t) - 2x'''(t-2) + x'(t) - 2x'(t-2) = e^t. \tag{6.6}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння (3.2) має вигляд

$$k(k+1)(1-2e^{-2k}) = 0.$$

Звідси $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm i$, а з рівняння $2e^{-2k} = 1$ одержимо корені $z_n = \ln\sqrt{2} + \pi n i$, $n \in \mathrm{Z}$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння через дійсні частинні розв'язки запишеться у вигляді

$$X(t) = A_1 + A_2\cos t + A_3\sin t + 2^{\frac{t}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(1)}\cos\pi nt + C_n^{(2)}\sin\pi nt\right).$$

Права частина рівняння (6.6) має спеціальний вигляд (6.3), де $s = r = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 1$ не є коренем ХР, тому частинний розв'язок $x_0(t)$ шукаємо у вигляді $x_0(t) = Ae^t$, де *A* – невідомий коефіцієнт. Підкладання у (6.6) дає: $A = 0{,}25e\,\mathrm{csch}1$. Отже, згідно (6.2) загальний розв'язок ДРВА (6.6) є

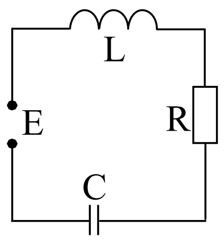
$$x(t) = A_1 + A_2\cos t + A_3\sin t + 2^{\frac{t}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n^{(1)}\cos\pi nt + C_n^{(2)}\sin\pi nt\right) + \frac{e^{t+1}}{4\,\mathrm{sh}1}.$$

Зауваження. Розв'язки лінійних ДРВА зі сталими коефіцієнтами можна шукати також за допомогою так званого операційного методу з використанням інтеґрального перетворення Лапласа. У дану методичну розробку цей метод не включений, поскільки він детально розглядається в окремому курсі "Операційне числення".

Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами описують різноманітні коливні процеси. Так, наприклад, коливання матеріальної точки масою *m* описуються рівнянням

$$mx''(t) + \lambda x'(t) + kx(t) = f(t), \qquad (6.7)$$

де $x(t)$ – відхилення точки від деякого положення рівноваги в момент часу t, k – жорсткість пружної системи (пружини, ресори), сила опору рухові пропорційна з коефіцієнтом λ швидкості, $f(t)$ – зовнішня збурююча сила (при $f(t) \equiv 0$ коливання називаються вільними, при $f(t) \neq 0$ – вимушеними). Рівняння вигляду (6.7) описує малі коливання й інших механічних систем, наприклад, крутильні коливання маховика на пружному валі: тоді $x(t)$ є кут повороту маховика в момент часу t, k – крутильна жорсткість валу, а $mf(t)$ є момент зовнішніх сил відносно осі руху.



Рівняння типу (6.7) описують також явища в електричних колах. Розглянемо електричний контур з послідовно з'єднаними індуктивністю L, опором R і конденсатором ємності C (рис. 10), до якого прикладена електрорушійна сила $E(t)$. З електротехніки відомо, що сила струму $I(t)$ і заряд $Q(t)$ конденсатора є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$Q'(t) = I(t), \quad LI'(t) + RI(t) + C^{-1}Q(t) = E.$$

Диференціюванням рівнянь системи і взаємними підстановками для визначення $I(t)$ і $Q(t)$ дістанемо рівняння типу (6.7)

$$\begin{aligned} &LQ''(t) + RQ'(t) + C^{-1}Q(t) = E(t), \\ &LI''(t) + RI'(t) + C^{-1}I(t) = E'(t). \end{aligned} \qquad (6.8)$$

Якщо при цьому процес відбувається з запізненням (залежить від "минулих" значень шуканої функції), то із (6.7) і (6.8) одержимо відповідні лінійні ДРВА зі сталими коефіцієнтами вигляду (6.1). Характер коливань, які описуються розв'язком рівняння (6.1), неважко передбачити, знаючи корені характеристичного рівняння (5.3) і характер зовнішнього збурення.

Розглянемо лінійне однорідне ДРВА (5.1) і відповідне йому ХР (5.3). З урахуванням того, що характер коливань залежить від вигляду частинних розв'язків, лінійною комбінацією яких є загальний розв'язок $x(t)$ ДРВА (5.1) (розглядатимемо лише нетривіальні розв'язки $x(t) \neq 0$), можна стверджувати:

1) якщо всі дійсні частини коренів ХР (5.3) є від'ємними, то розв'язок $x(t)$ ДРВА (5.1) визначає затухаючі коливання, тобто з ростом t амплітуда коливань швидко спадає: $t^p e^{(-a+bi)t} \to 0$ при $t \to \infty$ ($p < n,\ a > 0$);

2) якщо всі дійсні частини коренів ХР (5.3) є недодатніми, то з ростом t характер коливань визначатиметься членами ряду, які відповідають чисто уявним кореням. Якщо серед коренів вигляду $z = bi$ є кратні, то амплітуда коливань з ростом t необмежено зростатиме: $t^p e^{bit} \to \infty$ при $t \to \infty$, у протилежному випадку розв'язок $x(t)$ ДРВА (5.1) визначає затухаючі гармонічні коливання (тобто коливання спочатку затухатимуть, а далі перейдуть у гармонічні);

3) якщо всі корені ХР (5.3) є чисто уявними, то при наявності кратних розв’язок необмежено зростатиме, інакше ж розв’язок $x(t)$ ДРВА (5.1) визначатиме гармонічні коливання, тобто буде періодичною функцією;

4) якщо хоча б один із коренів ХР (5.3) має додатну дійсну частину, то з ростом t розв’язок $x(t)$ ДРВА (5.1) необмежено зростатиме: $t^p e^{(a+bi)t} \to 0$ при $t \to \infty$.

У випадку неоднорідного ДРВА (6.1) характер коливань залежить також від вигляду зовнішнього збурення $f(t)$. При вивченні пружних коливань механічних систем, а також електричних коливань часто доводиться мати справу з періодичними збурюючими силами вигляду $A\sin\omega t$, $B\cos\omega t$ тощо. Якщо частота ω зовнішньої сили співпадає з частотою власних коливань системи – тобто число $z = \omega i$ є коренем ХР (5.3), – то з ростом t амплітуда коливань необмежено зростатиме (це явище називають ***резонансом***). Якщо ж число $z = \omega i$ не є коренем ХР (5.3) (нерезонансний випадок), то періодична зовнішня сила визначатиме додатковий гармонічний член у ряді для розв’язку ДРВА (6.1), а характер коливань визначатиметься загальним розв’язком відповідного однорідного рівняння (5.1).

На практиці особливий інтерес становлять механічні системи, в яких можливі гармонічні коливання, тобто відповідне рівняння коливань має періодичні розв’язки. Докладніше про періодичні розв’язки ДРВА та їх систем див. далі в §5.2.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ IV

I. За допомогою методу кроків зінтеґрувати основні початкові задачі:

1. $y''(x) - 9y(x) = e^{3x} y(x-2\pi), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = \cos x.$

2. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = y(x-1) - y(x-2) + 2, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_2} = 5 - 2x.$

3. $y(0{,}5x) \cdot y'''(x) - 2y'(x) = x^{-1}, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1} = 4x^2.$

4. $y''(x) - y(x) = 2\sqrt{e}\, y(0{,}5x), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1} = e^{x-1}.$

5. $y''(x) + y(x) = y(x-\pi), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = \sin x.$

6. $y'''(x) = y(x-1) - y(x-2), \quad y(x)\big|_{\overline{E}_1} = x^2.$

7. $y''(x) + y(x-2\pi) = x, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = 0.$

8. $y''(x) - y(x-2) + y(x) - 2y(x-1) = \cos x, \quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = 0.$

II. Методом функції Коші розв’язати ОПЗ для заданих ДРВА з нульовими початковими умовами:

1. $x''(t) - x(t-\pi) = \sin t, \quad x(t)\big|_{\overline{E}_0} = 0.$

2. $ty'(t) - y(t) = t^2 - y(t-1), \quad y(t)\Big|_{\overline{E}_1} = 0.$

3. $z'''(t) + z''(t) + z'(t) + z(t) - z(t-\pi) + z'(t-2\pi) = 1, \quad z(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

4. $x^{(4)}(t) + 5x''(t) + 4x(t) - 2x(t-\frac{\pi}{2}) - x(t-2\pi) = \sin 2t - \cos t, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

5. $x^{(5)}(t) - x^{(4)}(t) + x(t-1) - x(t-2) = 12t, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

6. $\cos t \cdot [y'(t) - \mathrm{tg}\, t \cdot y(t)] = y(t-\frac{\pi}{4}) + 1, \quad y(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

7. $x'(t) + x(t) - x(t-1) = \cos t, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

8. $x'''(t) - x''(t-1) = t, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0.$

III. За допомогою методу малого параметра знайти асимптотичний розв'язок ОПЗ, залишаючи два члени асимптотичного ряду:

1. $x'''(t) + tx(t-1) = 6, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_1} = 1.$

2. $x''(t) + x(t) + 10e^t x(t-\pi) = 0, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = \cos t.$

3. $x''(t) + x'(t) + tx(-0{,}5t) = 1, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = t.$

4. $x''(t) + x(t) + t^2 x(t-1) + 1 = 0, \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = -1.$

IV. Знайти загальний розв'язок ДРВА:

1. $x'(t-2) + x(t-2) - 2x'(t-1) - 2x(t-1) + x'(t) + x(t) = 0.$

2. $x''(t+4) + x''(t) - 4x'(t+4) - 4x'(t) + 4x(t+4) + 4x(t) = 0.$

3. $x'''(t+2) - 8x(t+2) + e^4[x'''(t) - 8x(t)] = 0.$

4. $x^{(4)}(t-6) - 3x^{(4)}(t) - 2x''(t-6) + 6x''(t) + x(t-6) - 3x(t) = 0.$

5. $2x^{(4)}(t-1) - 3x^{(4)}(t) + x^{(4)}(t-2) - 18x''(t-1) - 27x''(t) + 9x''(t-2) = 0.$

6. $x^{(4)}(t-4) + 12x^{(4)}(t) + 2x''(t-4) + 24x''(t) + x(t-4) + 12x(t) = 0.$

7. $x'(t-2) - 3x(t-2) + 2x'(t-1) - 6x(t-1) + x'(t) - 3x(t) = e^{3(t-2)}.$

8. $2x''(t-4) - 4\sqrt{3}x''(t-2) + 8x''(t) + 18x(t-4) - 36\sqrt{3}x(t-2) + 72x(t) = 36.$

9. $x''(t) - 2x''(t-\pi) + x(t) - 2x(t-\pi) = \cos t.$

10. $x''(t) + x''(t-2\pi) = t.$

11. $x''(t) - 2x''(t-2) = e^{-2t}.$

12. $x''(t) + 5x''(t-1) = 1 + 2\sin t.$

13. $x''(t) - x''(t-2) + x(t) - x(t-2) = 4e^t.$

14. $8x^{(4)}(t) + x^{(4)}(t-3) + 8x(t) + x(t-3) = 0.$

15. $2x^{(4)}(t-0{,}5) - 3x^{(4)}(t) - 16x''(t-0{,}5) + 24x''(t) + 32x(t-0{,}5) - 48x(t) = 0.$

V. Дослідити поведінку розв'язків ДРВА:

1. $x'(t) - x'(t-1) = \cos \pi t$.

2. $x'(t) - x'(t-1) = A \sin \frac{\pi t}{6}$, $A = const \neq 0$.

3. $x'(t-2) + 2x'(t-1) = C \sin \pi t$, $C = const \neq 0$.

4. $x'(t-2) - 2x'(t-1) = B \cos \pi t$, $B = const \neq 0$.

РОЗДІЛ V
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРҐУМЕНТУ

§5.1. Метод кроків інтеґрування основної початкової задачі для систем ДРВА

Алґоритм методу кроків, викладений в §2.2 для ДРВА першого порядку і в §4.1 для ДРВА вищих порядків, застосовний і при розв'язуванні ОПЗ для деяких систем ДРВА (зауважимо, що у випадку системи на початковій множині задають початкову вектор-функцію, елементи якої є початковими функціями для відповідних елементів вектор-функції, що є розв'язком системи). Наприклад, основна початкова задача для нормальної системи n-го порядку з одним запізненням $\tau = const > 0$

$$x_i'(t) = F_i[t, x_1(t), ..., x_n(t), x_1(t-\tau), ..., x_n(t-\tau)] = 0, \quad x_i(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1,n}$$

на першому кроці при $t \in (t_0; t_0 + \tau]$ зводиться до задачі Коші для звичайної нормальної системи n-го порядку

$$x_i'(t) = F_i[t, x_1(t), ..., x_n(t), \varphi_1(t-\tau), ..., \varphi_n(t-\tau)] = 0, \quad x_i(t_0) = \varphi_i(t_0), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (1.1)$$

Якщо одержана система інтеґрується в квадратурах, то, розв'язавши задачу Коші (1.1), можна перейти до наступного кроку.

Аналоґічно діє метод кроків і у випадку систем ДРВА з m відхиленнями (у тому числі зосередженими й автореґульованими), а також для систем, не заданих у нормальному вигляді. Наприклад, ОПЗ

$$F_i[t, \boldsymbol{x}(t), ..., \boldsymbol{x}^{(n)}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau(t)), ..., \boldsymbol{x}^{(n-1)}(t-\tau(t))] = 0, \quad \boldsymbol{x}(t)\Big|_{\overline{E}_{t_0}} = \varphi(t), \quad i = \overline{1,n},$$

де вектор-функції $\boldsymbol{x}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$, $\varphi(t) = \left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\right)$, на першому елементарному відрізку при $t \in (t_0, t_0 + h_1)$ зводиться до задачі Коші для звичайної нелінійної системи n-го порядку

$$F_i[t, \boldsymbol{x}(t), ..., \boldsymbol{x}^{(n)}(t), \varphi(t-\tau(t)), ..., \varphi^{(n-1)}(t-\tau(t))] = 0, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \varphi(t_0), \quad i = \overline{1,n}$$

тощо.

ПРИКЛАД. Застосувати метод кроків до ОПЗ

$$\left.\begin{aligned} &x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t), \quad x(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 0; \\ &y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + 2y(t-\ln 2) - z(t-\ln 2), \quad y(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 1; \\ &z'(t) = x(t) + y(t) - z(t), \quad z(t)\Big|_{\overline{E}_0} = 2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Розв'язання. Маємо систему ДРВА третього порядку в нормальному вигляді, початкові функції для якої задані на множині $\overline{E}_0 = [-\ln 2; 0]$. Застосуємо метод кроків, беручи елементарні відрізки довжини $h = \ln 2$.

При $t \in (0; \ln 2]$ $y(t - \ln 2) = 1$, $z(t - \ln 2) = 2$, тому з (1.2) дістанемо задачу Коші для однорідної системи третього порядку

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t), \quad x(0) = 0; \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t), \quad y(0) = 1; \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t), \quad z(0) = 2. \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд: $x_1(t) = e^t - e^{-2t}$, $y_1(t) = e^t$, $z_1(t) = e^t + e^{-2t}$ при $t \in (0; \ln 2]$ (перевірити!).

Другий крок: при $t \in (\ln 2; 2\ln 2]$ $y(t - \ln 2) = 0{,}5e^t$, $z(t - \ln 2) = 0{,}5e^t + 4e^{-2t}$, і з (1.2) одержуємо задачу Коші вже для неоднорідної системи третього порядку

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t), \quad x(\ln 2) = \frac{7}{4}; \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + \frac{1}{2}e^t - 4e^{-2t}, \quad y(\ln 2) = 2; \\ z'(t) = x(t) + y(t) - z(t), \quad z(\ln 2) = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

розв'язавши яку, переходимо до наступного кроку тощо.

Вправа. Знайти розв'язок наведеної у прикладі ОПЗ на другому елементарному відрізку.

§5.2. Періодичні розв'язки рівнянь та систем із запізненням. Загальні питання

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із запізненням арґументу (ДРЗА) n-го порядку в нормальному вигляді

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)], \quad \tau = const > 0, \tag{2.1}$$

де $\boldsymbol{x}(t)$ і $\boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)]$ – n-вимірні вектор-функції. Припустимо, що система (2.1) має розв'язок, періодичний з періодом ω. Тоді для довільного значення t $\boldsymbol{x}(t+\omega) = \boldsymbol{x}(t)$, а

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t+\omega)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}. \tag{2.2}$$

Підставивши в (2.1) замість змінної t вираз $t+\omega$, з урахуванням періодичності функції $\boldsymbol{x}(t)$ маємо:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t+\omega)}{dt} = \boldsymbol{f}[t+\omega, \boldsymbol{x}(t+\omega), \boldsymbol{x}(t-\tau+\omega)] = \boldsymbol{f}[t+\omega, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)]. \tag{2.3}$$

З рівностей (2.1) і (2.3) на підставі (2.2) дістанемо умову

$$\boldsymbol{f}[t+\omega, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)] = \boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)].$$

Отже, для існування періодичних з періодом ω розв'язків $\boldsymbol{x}(t)$ системи (2.1) ***досить*** (але ***не необхідно***), щоб функція $\boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)]$ була періодичною з цим же періодом за змінною t.

Іноді систему (2.1) для знаходження періодичних розв'язків вдається спростити. Зауважимо, що при $\tau > \omega$ обов'язково знайдеться $k \in \mathrm{N}$ таке, що $\tau = k\omega + \tau_1$, а тоді для періодичного з періодом ω розв'язку системи (2.1) буде

$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t+\omega)=\boldsymbol{x}(t-\omega)$ і $\boldsymbol{x}(t-\tau)=\boldsymbol{x}(t-k\omega-\tau_1)=\boldsymbol{x}(t-\tau_1)$. Тому для відшукання періодичних розв'язків систему (2.1) можна подати у вигляді

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau_1)].$$

Якщо ж шукати розв'язки, періодичні з періодом τ, то система (2.1) набуває вигляду

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t)],$$

тобто вироджується в систему звичайних диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що викладені вище міркування мають силу і у випадку скалярних ДРЗА.

ПРИКЛАД 1. Показати, що рівняння

$$x'(t)=\cos^2 t\cdot x(t)+\sin^2 t\cdot x(t-6\pi)$$

не має періодичних з періодом $\omega=2\pi$ нетривіальних розв'язків.

Розв'язання. Коефіцієнти $\cos^2 t$ і $\sin^2 t$ періодичні з періодом $\omega=2\pi$, а для періодичних з таким же періодом розв'язків $x(t)$ маємо $x(t-6\pi)=x(t)$, тобто ці функції є розв'язками звичайного диференціального рівняння $x'(t)=x(t)$. Розв'язки такого рівняння мають вигляд $x(t)=Ce^t$, де $C=const$; очевидно, що при $C\neq 0$ вони не є періодичними функціями. Отже, вихідне ДРЗА не має періодичних з періодом $\omega=2\pi$ нетривіальних розв'язків.

Розглянемо лінійну систему ДРЗА в нормальному вигляді

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{f}(t), \tag{2.4}$$

де $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ – матриці виміру $n\times n$, елементами яких є деякі неперервні на заданому проміжку функції. Очевидно, що система (2.4) є частинним випадком (2.1), тому для неї мають силу наведені вище міркування стосовно періодичних розв'язків. Отже, для існування періодичних з періодом ω розв'язків $\boldsymbol{x}(t)$ системи (2.4) досить, щоб елементи матриць $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ і вектор-функції $\boldsymbol{f}(t)$ були функціями, періодичними з цим же періодом за змінною t. Наведемо деякі особливості системи (2.4).

Матричну функцію $\boldsymbol{G}(t,s)$ називатимемо функцією Ґріна, якщо при $t\neq s$ вона визначена, неперервна за обома арґументами і є розв'язком системи

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}(t,s)}{\partial t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{G}(t,s)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{G}(t-\tau,s),$$

а також справджує умови

$$\boldsymbol{G}(t,s)\big|_{t=s+0}-\boldsymbol{G}(t,s)\big|_{t=s-0}=\boldsymbol{E},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\|\boldsymbol{G}(t,s)\|ds\leq M<\infty,$$

де $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця, $\|\boldsymbol{G}(t,s)\|$ – евклідова норма.

Має силу наступне твердження: якщо система (2.4) має функцію Ґріна $\boldsymbol{G}(t,s)$, яка справджує умову

$$\|\boldsymbol{G}(t,s)\| \le M_0 e^{-\alpha_0 (t-s)}, \quad t \ne s,$$

де M_0, α_0 – невід'ємні сталі, то вона має єдиний періодичний з періодом $\omega = 2\pi$ розв'язок $\boldsymbol{x}(t)$, який можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{G}(t,s)\boldsymbol{f}(s)ds .$$

Існування періодичного розв'язку означає, що задана система ДРЗА описує реальну систему, в якій можливі гармонічні коливання. Тому всі дослідження, пов'язані з періодичними розв'язками, називають гармонічним аналізом.

Дослідимо на існування періодичних розв'язків лінійну систему ДРЗА зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau) + \boldsymbol{f}(t), \tag{2.5}$$

де $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – сталі матриці виміру $n \times n$, а отже, їх елементи – числа a_{sk} і b_{sk} – є періодичними функціями з будь-яким періодом. Систему (2.5) можна записати у скалярному вигляді

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{sk} x_k(t-\tau) + f_s(t), \quad s = \overline{1,n},$$

де $x_s(t)$, $f_s(t)$, $s = \overline{1,n}$ – елементи вектор-функцій $\boldsymbol{x}(t)$ і $\boldsymbol{f}(t)$ відповідно.

Розглянемо відповідну однорідну систему

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k(t) + \sum_{k=1}^{n} b_{sk} x_k(t-\tau), \quad s = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Розв'язок системи (2.6) шукатимемо методом Ейлера у вигляді $x_s(t) = C_s e^{\lambda t}$, $s = \overline{1,n}$, $\lambda = const$. Після підставляння у (2.6) і скорочення на $e^{\lambda t} \ne 0$ дістанемо лінійну однорідну алґебраїчну систему для визначення невідомих сталих C_s:

$$\lambda C_s = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} C_k + \sum_{k=1}^{n} b_{sk} e^{-\lambda\tau} C_k, \quad s = \overline{1,n} \tag{2.7}$$

Для того, щоб існував нетривіальний розв'язок системи (2.7), необхідне виконання умови

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \| a_{sk} + b_{sk} e^{-\lambda\tau} - \delta_{sk}\lambda \| = 0, \tag{2.8}$$

де δ_{sk} символ Кронекера (рівний 1 при $s = k$ і нулеві при $s \ne k$). Рівність (2.8) називається характеристичним рівнянням (ХР) для системи (2.6).

Нехай $\lambda = \alpha$ дійсний корінь ХР (2.8), тоді відповідний частинний розв'язок системи (2.6) має вигляд $x_s(t) = C_s e^{\alpha t}$, $s = \overline{1,n}$. Очевидно, що

– при $\alpha \ne 0$ незалежно від кратності кореня $\lambda = \alpha$ відповідний частинний розв'язок не є періодичною вектор-функцією;

– якщо $\alpha = 0$ корінь ХР (2.8) кратності $m > 1$, то йому відповідає частинний розв'язок вигляду

$$x_s(t) = \sum_{p=0}^{m-1} C_s^{(p)} t^p, \; s = \overline{1,n},$$

який загалом також не є періодичним;

– якщо $\alpha = 0$ однократний корінь ХР (2.8), то відповідний частинний розв'язок $x_s(t) = C_s$, $s = \overline{1,n}$ (стала вектор-функція) є періодичним з будь-яким періодом.

Припустимо тепер, що ХР (2.8) має пару комплексно спряжених коренів $\lambda^{\pm} = \alpha \pm \beta i$, де $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$. Тоді відповідними розв'язками системи (2.7) будуть комплексно спряжені числа $C_s^{\pm} = A_s \pm B_s i$, а частинні розв'язки системи (2.6) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} x_s^{\pm}(t) &= (A_s \pm B_s i) e^{(\alpha \pm \beta i)t} = (A_s \pm B_s i) \cdot e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t) = \\ &= e^{\alpha t}(A_s \cos\beta t - B_s \sin\beta t) \pm i e^{\alpha t}(A_s \sin\beta t + B_s \cos\beta t), \quad s = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Якщо (2.9) – розв'язок системи (2.6), то розв'язками цієї ж системи в силу її лінійності ті однорідності будуть дійсна і уявна частини функцій (2.9):

$$x_s^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(A_s \cos\beta t - B_s \sin\beta t), \quad x_s^{(2)} = e^{\alpha t}(A_s \sin\beta t + B_s \cos\beta t), \quad s = \overline{1,n},$$

але при $\alpha \neq 0$ ці розв'язки не є періодичними. Якщо ж $\alpha = 0$, тобто $\lambda^{\pm} = \pm\beta i$, то відповідні частинні розв'язки системи (2.6) мають вигляд

$$x_s^{(1)}(t) = (A_s \cos\beta t - B_s \sin\beta t), \quad x_s^{(2)} = (A_s \sin\beta t + B_s \cos\beta t), \quad s = \overline{1,n},$$

і ці розв'язки у випадку однократності коренів $\lambda^{\pm} = \pm\beta i$ будуть періодичними.

Таким чином, на підставі викладеного вище можемо стверджувати: однорідна система (2.6) може мати періодичні розв'язки тоді й тільки тоді, коли відповідне характеристичне рівняння (2.8) має ***чисто уявні*** корені $\lambda_j = \beta_j i$, де $\beta_j \in \mathrm{R}$. У цьому випадку числа β_j називають ***власними частотами*** системи з запізненням (2.6) або ***ступенями вільності*** коливної системи.

Зауважимо, що існування періодичного розв'язку для неоднорідної системи (2.5) залежить, окрім наведеного вище, також від вигляду зовнішньої сили $\boldsymbol{f}(t)$. Якщо частота зовнішньої сили співпадає з власною частотою відповідної однорідної системи (2.6), то виникає явище ***резонансу***, коли амплітуда коливань з ростом t необмежено зростає; у цьому випадку періодичних розв'язків система (2.5) не має. Очевидно, що в нерезонансному випадку для існування періодичних розв'язків системи (2.5) досить, щоб мала періодичні розв'язки відповідна однорідна система (2.6).

ПРИКЛАД 2. Дослідити на існування періодичних розв'язків систему

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2x(t - \pi). \end{cases} \tag{2.6a}$$

Розв'язання. Маємо лінійну однорідну систему ДРЗА другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Застосовуючи метод Ейлера (див. вище), одержимо характеристичне рівняння (2.8) вигляду

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1+2e^{-\pi\lambda} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2e^{-\pi\lambda} - 1 = 0. \qquad (2.8a)$$

Згідно з викладеним вище система (2.6а) має періодичні розв'язки тільки при наявності чисто уявних коренів ХР (2.8а). Шукаючи ці корені у вигляді $\lambda = \beta i$, де $\beta \in \mathrm{R}$, для визначення власних частот системи із (2.8а) дістанемо рівняння $\beta^2 + 1 = -2e^{-\pi\beta i}$, дійсними коренями якого є числа ± 1. Отже, система (2.6а) має єдину власну частоту $\beta = 1$, яка визначає двопараметричні періодичні розв'язки вигляду

$$x(t) = A\cos t + B\sin t, \quad y(t) = x'(t) = -A\sin t + B\cos t.$$

Дослідимо тепер на існування періодичних розв'язків лінійне неоднорідне ДРЗА *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{dx^k(t-\tau)}{dt^k} = f(t), \qquad (2.10)$$

де a_k, b_k задані сталі. Зауважимо, що підстановкою $x_s(t) = x^{(s-1)}(t)$, $s = \overline{1,n}$ рівняння (2.10) зводиться до системи ДРЗА вигляду (2.5), тому при гармонічному аналізі ДРЗА (2.10) враховуватимемо одержані вище результати стосовно систем (2.5) і (2.6).

Розглянемо відповідне до (2.10) однорідне рівняння

$$\frac{dx^n(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{dx^k(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{dx^k(t-\tau)}{dt^k} = 0. \qquad (2.11)$$

Розв'язок рівняння (2.11) шукатимемо методом Ейлера у вигляді $x(t) = e^{\lambda t}$, де $\lambda = const$. Після підставляння у (2.11) і скорочення на $e^{\lambda t} \neq 0$ дістанемо характеристичне рівняння (ХР)

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_k + e^{-\lambda\tau} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda_k = 0. \qquad (2.12)$$

Аналогічно до випадку системи (2.6) легко показати, що періодичні розв'язки рівняння (2.11) існуватимуть лише за наявності чисто уявних коренів ХР (2.12) незалежно від їх кратності (на відміну від системи!). Отож припустимо, що ХР (2.12) має k пар різних коренів (незважаючи на їх кратності) вигляду $\lambda_j^{\pm} = \pm i p_j \omega$, $j = \overline{1,k}$, де $p_j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $\omega \in \mathrm{R}$. Тоді відповідними періодичними частинними розв'язками рівняння (2.11) є функції

$$x_j^{\pm}(t) = e^{\pm p_j \omega i t} = \cos p_j \omega t \pm i \sin p_j \omega t, \quad j = \overline{1,k},$$

причому дійсна і уявна частини $x_j^{(1)}(t) = \cos p_j \omega t$, $x_j^{(2)}(t) = \sin p_j \omega t$, $j = \overline{1,k}$, окремо також будуть частинними розв'язками ДРЗА (2.11). Занумеруємо ці частинні розв'язки від 1 до $2k$ і позначимо їх задля зручності записів через $\varphi_j(t)$,

$j=\overline{1,2k}$. З урахуванням того, що розв'язком ДРЗА (2.11) в силу його лінійності та однорідності буде й будь-яка лінійна комбінація цих функцій, можемо стверджувати: рівняння (2.11) має періодичні розв'язки, які можна записати у вигляді

$$x(t)=\sum_{j=1}^{2k}M_j\varphi_j(t),\quad M_j=const,\quad j=\overline{1,2k},$$

тобто як $2k$-параметричні розв'язки ДРЗА (2.11).

Покажемо, що рівняння (2.12) має не більш ніж $2n$ чисто уявних коренів. Для цього подамо (2.12) у вигляді

$$P_n(\lambda)+e^{-\lambda\tau}Q_{n-1}(\lambda)=0, \tag{2.13}$$

де $P_n(\lambda)$, $Q_{n-1}(\lambda)$ – многочлени степенів n і $(n-1)$ відповідно. Якщо комплексно спряжені числа $\lambda^{\pm}=\pm iy$ ($y\in\mathrm{R}$) є коренями (2.13), то дістанемо:

$$0=[P_n(iy)+e^{-iy\tau}Q_{n-1}(iy)]\cdot[P_n(-iy)+e^{iy\tau}Q_{n-1}(-iy)],$$

тобто дійсне число y буде коренем рівняння

$$P_n(y^2)+Q_{n-1}(y^2)=0. \tag{2.14}$$

Очевидно, що рівняння (2.14) має не більш ніж n пар коренів вигляду $\pm y$. Отже, рівняння (2.12) може мати не більш ніж n пар чисто уявних коренів, а ДРЗА (2.11) – не більш ніж n різних власних частот, які визначають його періодичні розв'язки.

Розглянемо тепер неоднорідне ДРЗА (2.10). Будемо шукати періодичні з періодом T розв'язки рівняння (2.10) у вигляді

$$x(t)=A_se^{is\omega t},\quad A_s=const,\quad \omega=\tfrac{2\pi}{T}.$$

Подамо функцію $f(t)$ рядом Фур'є (вважатимемо це можливим)

$$f(t)=\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\alpha_pe^{ip\omega t}=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t+a_2\cos 2\omega t+b_2\sin 2\omega t+\ldots$$

або

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(\omega t+\varphi_k),\quad A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad \mathrm{tg}\,\varphi_k=\frac{a_k}{b_k},$$

де коефіцієнти Фур'є визначаються з формул

$$\alpha_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{a_0}{2},\quad \alpha_p=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ip\omega t}dt=\begin{cases}0{,}5(a_p-ib_p), & p>0,\\ 0{,}5(a_{-p}+ib_{-p}), & p<0.\end{cases}$$

Якщо для деякої пари коренів $\lambda^{\pm}=\pm im\omega$, $m\in\mathrm{N}\bigcup\{0\}$ ХР (2.12) відповідний коефіцієнт Фур'є $\alpha_m\neq 0$ (тобто частота зовнішньої сили співпадає з власною частотою $m\omega$ коливної системи), то періодичних розв'язків неоднорідне ДРЗА (2.10) не має (резонанс). У нерезонансному випадку аналогічно до розглянутих вище систем ДРЗА можемо стверджувати: якщо існують періодичні розв'язки відповідного однорідного рівняння (2.11), то має періодичні розв'язки і неоднорідне рівняння (2.10).

Відзначимо, що при $T = 2\pi$ буде $\omega = 1$, і наведені вище формули значно спрощуються.

ПРИКЛАД 3. Знайти (за умови існування) періодичні розв'язки ДРЗА

$$2\sqrt{3}x''(t) + x'(t) + x(t - \tfrac{\pi}{3}) = \cos t. \qquad (2.10а)$$

Розв'язання. Маємо лінійне неоднорідне рівняння з запізненням аргументу зі сталими коефіцієнтами типу (2.10). Відповідне характеристичне рівняння (2.12) має вигляд

$$\Delta(\lambda) \equiv 2\sqrt{3}\lambda^2 + \lambda + e^{-\frac{\pi}{3}\lambda} = 0. \qquad (2.12а)$$

Шукаючи чисто уявні корені ХР (2.12а) у вигляді $\lambda = \beta i$, де $\beta \in \mathrm{R}$, для визначення власних частот із (2.10а) дістанемо рівняння

$$2\sqrt{3}\beta^2 - \beta i = e^{-\frac{\pi}{3}\beta i},$$

дійсними коренями якого є числа $\pm\frac{1}{2}$. Отже, коливна система, яка описується рівнянням (2.10а), має єдину власну частоту $\beta = \frac{1}{2}$, яка визначає періодичні розв'язки відповідного до (2.10а) однорідного рівняння у вигляді

$$X(t) = A\cos\tfrac{t}{2} + B\sin\tfrac{t}{2}.$$

Із (2.10а) очевидно, що власна частота коливної системи не співпадає з частотою зовнішньої сили $\omega = 1$ – адже функції $\cos t$ відповідають контрольні числа $\lambda = \pm i$, які не є коренями ХР (2.12а), – тобто маємо нерезонансний випадок. Отже, неоднорідне рівняння (2.10а) також має періодичні розв'язки. Враховуючи вигляд періодичної зовнішньої сили, частинний розв'язок ДРЗА (2.10а) знаходимо у вигляді $x_0(t) = a\cos t + b\sin t$. Після підставляння у (2.10а) визначаємо:

$$a = \frac{1 - 4\sqrt{3}}{4(7 - \sqrt{3})}, \quad b = \frac{2 - \sqrt{3}}{4(7 - \sqrt{3})}.$$

Отже, двопараметричні періодичні розв'язки ДРЗА (2.10а) записуються у вигляді

$$x(t) = X(t) + x_0(t) = A\cos\tfrac{t}{2} + B\sin\tfrac{t}{2} + \frac{1}{4(7 - \sqrt{3})}\Big[(1 - 4\sqrt{3})\cos t + (2 - \sqrt{3})\sin t\Big].$$

Зауваження. Наведені вище міркування застосовні і для лінійних ДРВА зі сталими коефіцієнтами нейтрального типу

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{dx^k(t - \tau)}{dt^k} = f(t),$$

проте тут (2.13) має вигляд

$$P_n(\lambda) + e^{-\lambda\tau} Q_n(\lambda) = 0.$$

Якщо $P_n(\lambda) = \pm Q_n(\lambda)$, то виникає явище резонансу (нескінчена кількість власних частот).

Визначення 1. Система диференціальних рівнянь називається ***квазілінійною***, якщо всі її рівняння є лінійними відносно похідних найвищого порядку.

Визначення 2. Система диференціальних рівнянь називається ***автономною***, якщо жодне з її рівнянь не містить в явному вигляді незалежної змінної, і ***неавтономною*** – в протилежному випадку.

Усі попередні міркування можуть бути застосовними і у випадку квазілінійних систем із запізненням. Надалі будемо вважати $T = 2\pi$ і розглянемо [3] неавтономну квазілінійну систему з запізненням

$$\begin{aligned} &x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x(t) + \beta_1 x'(t-\tau) + \beta_2 x(t-\tau) = \\ &\qquad = f[\nu t, x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)], \end{aligned} \tag{2.15}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, $\tau > 0$ – відомі сталі, а f – функція, періодична за змінною t з періодом $2\pi\nu^{-1}$, яка допускає подання у вигляді

$$f[\nu t, x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)] = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n[x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)],$$

причому коефіцієнти f_n цієї скінченої суми є деякими поліномами відносно своїх арґументів.

Якщо відповідне однорідне ДРЗА

$$x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x(t) + \beta_1 x'(t-\tau) + \beta_2 x(t-\tau) = 0$$

має чисто уявні корені характеристичного рівняння, то система (2.15) може мати періодичні розв'язки. При цьому, як і у випадку лінійних рівнянь із запізненням, за виконання умови $\omega_0 \approx \nu$, де $\omega_0 i$ один із коренів ХР, тобто $\omega = \omega_0$ справджує рівності

$$\Delta_1(\omega) \equiv -\omega^2 + \beta_1\omega\sin\omega\tau + \alpha_2 + \beta_2\cos\omega\tau = 0,$$

$$\Delta_2(\omega) \equiv \alpha_1\omega + \beta_1\omega\cos\omega\tau - \beta_2\sin\omega\tau = 0,$$

виникає явище резонансу. Більше того, у системах типу (2.15) можливий резонанс і у випадках $\nu = pq^{-1}\omega_0$, де p і q взаємно прості числа.

Система (2.15) буде автономною, якщо права частина не залежатиме явно від змінної t:

$$\begin{aligned} &x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x(t) + \beta_1 x'(t-\tau) + \beta_2 x(t-\tau) = \\ &\qquad = f[x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)], \end{aligned} \tag{2.16}$$

У цьому випадку мають силу попередні міркування за винятком одного: у системах типу (2.16) не може виникати явище резонансу за рахунок дії зовнішньої сили. Отже, якщо ХР автономної системи (2.16) має хоча б пару чисто уявних коренів $\pm iy$ $(y \in \mathrm{R})$, а інші корені мають від'ємні дійсні частини, то існує періодичний розв'язок системи, який залежить від двох сталих:

$$x_k(t) = A\left(\varphi_k e^{i(yt+\theta)} + \overline{\varphi}_k e^{-i(yt+\theta)}\right),$$

де φ_k, $\overline{\varphi}_k$ – комплексно спряжені цілком визначені числа.

Докладніше про дослідження коливних систем вигляду (2.15) і (2.16) див. у наступному розділі.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ V

I. За допомогою методу кроків зінтеґрувати основні початкові задачі:

1. $\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = x(t) - 2x(t-\pi), \end{cases}$ $\quad x(t)\big|_{\overline{E}_0} = \cos t, \quad y(t)\big|_{\overline{E}_0} = 0.$

2. $\begin{cases} x'(t) + 5x(t) + y(t) = -9y(t-2), \\ y'(t) - 2x(t) + 3y(t) = -x(t-1), \end{cases}$ $\quad x(t)\big|_{\overline{E}_0} = 3, \quad y(t)\big|_{\overline{E}_0} = 3.$

3. $\begin{cases} x'(t) + 3x(t) - 2y(t) = x(t-2), \\ y'(t) + 6x(t) - 4y(t) = 3y(t-2)e^{4t}, \end{cases}$ $\quad x(t)\big|_{\overline{E}_0} = 0, \quad y(t)\big|_{\overline{E}_0} = 4.$

4. $\begin{cases} y''(x) + z'(x) - 2z(x) = y(x-1)\cdot e^{2x}, \\ z'(x) + 2y'(x) - 3y(x) = z(x-1), \end{cases}$ $\quad y(x)\big|_{\overline{E}_0} = 1, \quad z(x)\big|_{\overline{E}_0} = 0.$

5. $\begin{cases} tx'(t) - x(t) - 3y(t) = tx'(t-1), \\ ty'(t) - x(t) + y(t) = ty'(t-2), \end{cases}$ $\quad x(t)\big|_{\overline{E}_1} = t, \quad y(t)\big|_{\overline{E}_1} = 1.$

II. Дослідити на існування періодичних розв'язків рівняння і системи:

1. $4x''(t) + 4x'(t-\pi) + x(t-2\pi) = 0.$

2. $x''(t) - 4x'(t-\pi) + 4x(t-2\pi) = 0.$

3. $x'''(t) + 16\pi^2 x'(t-1) = 0.$

4. $x''(t) + x(t-2\pi) = 18\sin 2t.$

5. $4x''(t) - \pi x'(t-2) = 10\cos\frac{\pi}{4}t.$

6. $x'(t) - 2x(t-1) + x(t) = -6\cos t.$

7. $x''(t) - x'(t-\pi) - x'(t) = 2\sin t.$

8. $\begin{cases} 4x'(t) = \pi y(t), \\ y'(t) = x(t-8). \end{cases}$

9. $\begin{cases} x'(t) = x'(t-2) + y'(t), \\ y'(t) = y'(t-2) - x'(t). \end{cases}$

10. $\begin{cases} x'(t) = y(t-4\pi), \\ y'(t) = -x(t-4\pi). \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'(t) = x'(t-1) + 2y'(t), \\ y'(t) = y'(t-1) - x'(t-1). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x'(t) = x'(t-1) + y'(t), \\ y'(t) = y'(t-1) + x'(t). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'(t) = y(t-4), \\ y'(t) = x(t-4). \end{cases}$

РОЗДІЛ VI
АСИМПТОТИЧНІ МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОЇ МЕХАНІКИ В ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ КВАЗІЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Як було показано раніше (див. §4.4), для інтеґрування лінійних ДРВА можна успішно застосовувати один із найпростіших асимптотичних методів – метод збурень (малого параметра). У цьому розділі розглядаються асимптотичні методи для нелінійних коливних систем з параметром.

§6.1. Асимптотичні методи в теорії звичайних диференціальних рівнянь

При дослідженні коливних процесів в нелінійних системах, які описуються звичайними диференціальними рівняннями або диференціальними рівняннями з відхиленням арґументу, досить ефективними є асимптотичні методи нелінійної механіки. Зауважимо, що основи нелінійної механіки були закладені вченими київської математичної школи М.М.Криловим та його учнем М.М.Боголюбовим (“Вступ до нелінійної механіки”, 1937 р.): їх дослідження стосувалися саме асимптотичних розкладів у загальній теорії динамічних систем і були розвинуті далі рядом послідовників, зокрема Ю.А.Митропольським [3,4].

Викладемо загальну ідею асимптотичних методів для найпростішого нелінійного диференціального рівняння вигляду

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f[x(t), x'(t)], \tag{1.1}$$

де ε малий додатній параметр.

При відсутності збурення $(\varepsilon = 0)$ одержимо відповідне однорідне диференціальне рівняння

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0,$$

загальний розв'язок якого подається у вигляді

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \quad C_1, C_2 = const$$

або

$$x(t) = a\cos\psi, \quad \psi = \omega t + \theta,$$

звідки випливає, що в цьому випадку коливання будуть чисто гармонічними зі сталою амплітудою і рівномірно обертаючим фазовим кутом:

$$\frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega .$$

Амплітуда a і фаза θ – сталі за часом величини, що залежать від початкових умов.

Наявність нелінійного збурення призводить до появи в розв'язку рівняння (1.1) обертонів (гармонік із частотами, кратними власній частоті ω) обумовлює залежність миттєвої частоти від амплітуди і може викликати систематичне збільшення чи зменшення амплітуди коливань.

Беручи наведені міркування до уваги, шукатимемо розв'язок рівняння (1.1) у вигляді нескінченого ряду

$$x(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi) + ..., \tag{1.2}$$

де $u_1(a,\psi)$, $u_2(a,\psi)$, ... – періодичні з періодом 2π функції змінної ψ, а величини a, ψ як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + ..., \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + ... \tag{1.3}$$

Отже, задача побудови асимптотичного наближення для рівняння (1.1) зводиться до вибору функцій $u_i(a,\psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$, $i = \overline{1,\infty}$, таким чином, щоб вираз (1.2), в який замість a і ψ будуть підкладені функції часу, що визначаються з рівнянь (1.3), став розв'язком рівняння (1.1). На практиці у зв'язку з ускладненням формул для запису розв'язку (1.2) задовольняються знаходженням двох-трьох перших членів ряду (1.2), тобто за асимптотичне наближення m-го порядку береться функція

$$x(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi) + ... + \varepsilon^m u_m(a,\psi), \tag{1.4}$$

де

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + ... + \varepsilon^m A_m(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + ... + \varepsilon^m B_m(a).$$

При цьому вимагається, щоб при малому ε вираз (1.4) досить точно подавав розв'язок рівняння (1.1) для досить довгого інтервалу часу, тобто справджував рівняння (1.1) з точністю до величини порядку меншого за ε^{m+1}. Тоді розклад (1.2) розглядається як формальний розклад для побудови асимптотичного наближення (1.4). Проте при розв'язуванні більшості практичних задач достатньо обмежитися першим наближенням

$$x(t) = a\cos\psi; \quad a'(t) = \varepsilon A_1(a), \quad \psi'(t) = \omega + \varepsilon B_1(a).$$

Наведена вище ідея асимптотичних методів може застосовуватися при побудові асимптотичних наближень для найрізноманітніших коливних систем з малим параметром, як із одним, так і з багатьма ступенями свободи. Але в загальному випадку застосування цих методів, особливо для систем із багатьма ступенями свободи, потребує попереднього розв'язання сукупності звичайних лінійних диференціальних рівнянь із числом невідомих, пропорційним числу ступенів вільності (власних частот вихідної системи), із-за чого виникають значні труднощі при практичній реалізації методів. Для усунення таких труднощів М.М.Боголюбовим і Ю.А.Митропольським був розроблений і обґрунтований метод асимптотичного інтеґрування, за допомогою якого досліджуються одночастотні коливання в нелінійних системах із багатьма ступенями свободи, що визначаються системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k}{dt} + \sum_{s=1}^{n} C_{ks} x_s = \varepsilon f_k(x_1,...,x_n,\varepsilon), \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.5}$$

де C_{ks} деякі сталі.

Припускаємо, що в незбуреній системі (при $\varepsilon = 0$) можливі незатухаючі гармонічні коливання вигляду

$$x_k(t) = a\varphi_k e^{i(\omega t+\theta)} + a\overline{\varphi}_k e^{-i(\omega t+\theta)}, \quad k = \overline{1,n} \tag{1.6}$$

з деякою частотою ω, які залежать тільки від двох довільних сталих a і θ, причому розв'язок збуреної системи (1.5) є близьким до розв'язку (1.6) і подається у вигляді ряду

$$x_k(t) = a\varphi_k e^{i\psi} + a\overline{\varphi}_k e^{-i\psi} + \varepsilon u_k^{(1)}(a,\psi) + \ldots, \quad k = \overline{1,n},$$

де a і ψ визначаються як розв'язки рівнянь (1.3), а $\varphi_k e^{i\psi}$ і $\overline{\varphi}_k e^{-i\psi}$ – частинні розв'язки незбуреної системи, які відповідають характеристичним числам $\pm i\omega$. Таким чином, задача наближеного інтеґрування системи (1.5) зводиться до визначення функцій $u_k^{(i)}(a,\psi)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$, $i = \overline{1,\infty}$, $k = \overline{1,n}$, і інтеґрування рівнянь (1.3).

Наведені ідеї можуть бути використані і для систем диференціальних рівнянь із запізненням арґументу (ДРЗА). При цьому припускається, що запізнення не дуже велике порявняно з періодом коливань вихідної системи.

§6.2. Побудова асимптотичних розв'язків рівнянь із запізненням у нерезонансному випадку

I. Розглянемо ДРЗА

$$\begin{aligned} x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x(t) + \beta_1 x'(t-\tau) + \beta_2 x(t-\tau) = \\ = \varepsilon f[\nu t, x(t), x'(t), x(t-\tau), x'(t-\tau)], \end{aligned} \tag{2.1}$$

де α_1, α_2, β_1, β_2, $\tau > 0$ – відомі сталі, ε малий додатній параметр. Припустимо, що відповідне однорідне (при $\varepsilon = 0$) ДРЗА

$$x''(t) + \alpha_1 x'(t) + \alpha_2 x(t) + \beta_1 x'(t-\tau) + \beta_2 x(t-\tau) = 0 \tag{2.2}$$

має сім'ю періодичних розв'язків

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) \equiv a\cos\psi,$$

де a, φ – довільні сталі, а ω_0 власна частота однорідного рівняння (2.2). Як було згадано раніше (див. §5.2), у системах, що описуються рівнянням (2.1), можливий резонанс при виконанні умов

$$\nu = pq^{-1}\omega_0, \tag{2.3}$$

де p і q – взаємно прості числа.

У нерезонансному випадку шукаємо розв'язок рівняння (2.1) у вигляді

$$x(t) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a,\psi,\nu t) + \varepsilon^2 u_2(a,\psi,\nu t) + \ldots, \tag{2.4}$$

де функції $u_i(a,\psi,\nu t)$ періодичні з періодом 2π за змінними ψ і νt, а величини a, ψ як функції часу визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots \tag{2.5}$$

Будемо визначати функції $u_i(a,\psi,\nu t)$, $A_i(a)$, $B_i(a)$ за умови відсутності в виразах для $u_i(a,\psi,\nu t)$ першої гармоніки арґумента ψ. Підставимо ряд (2.4) у рівняння (2.1) з урахуванням умов (2.5). Розклавши обидві частини рівняння (2.1) по степенях малого параметра ε і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, знаходимо:

$$(-\omega_0^2+\beta_1\omega_0\sin\omega_0\tau+\alpha_2+\beta_2\cos\omega_0\tau)\cos\psi+(-\alpha_1\omega_0-\beta_1\omega_0\cos\omega_0\tau+$$
$$+\beta_2\sin\omega_0\tau)\sin\psi\equiv\Delta_1(\omega_0)\cos\psi+\Delta_2(\omega_0)\sin\psi=0;$$

$$\omega_0^2\frac{\partial^2 u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial\psi^2}-2\omega_0\frac{\partial^2 u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial\psi\partial t}+\frac{\partial^2 u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial t^2}+$$
$$+\alpha_1\frac{\partial u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial\psi}+\alpha_2 u_1(a,\psi,\nu t)+\beta_1\omega_0\frac{\partial u_1(a,\psi(t-\tau),\nu\cdot(t-\tau))}{\partial\psi^2}+$$
$$+\beta_2 u_1(a,\psi(t-\tau),\nu\cdot(t-\tau))+\alpha_1\nu\frac{\partial u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial t}+\beta_1\nu\frac{\partial u_1(a,\psi,\nu t)}{\partial t}+ \tag{2.6}$$
$$+\{-2\omega_0 A_1-\alpha_1 aB_1+\beta_1[(\omega_0\tau A_1-aB_1)\cos\omega_0\tau+(\omega_0\tau aB_1+A_1)\sin\omega_0\tau]+$$
$$+\beta_2[aB_1\tau\cos\omega_0\tau-\tau A_1\sin\omega_0\tau]\}\sin\psi+\{-2\omega_0 aB_1+\alpha_1 A_1+\beta_1[(a\omega_0\tau B_1+$$
$$+A_1)\cos\omega_0\tau-(\omega_0\tau A_1-aB_1)\sin\omega_0\tau]+\beta_2[-aB_1\tau\sin\omega_0\tau-$$
$$-\tau A_1\cos\omega_0\tau]\}\cos\psi=f_0(a,\psi,\nu t),$$

де

$$f_0(a,\psi,\nu t)=f[\nu t,a\cos\psi,-a\omega_0\sin\psi,a\cos(\psi-\omega_0 t),-a\omega_0\sin(\psi-\omega_0 t)].$$

Покажемо, що з одержаних рівнянь (2.6) завжди можна визначити функції $A_1(a)$, $B_1(a)$ і $u_1(a,\psi,\nu t)$. Для цього розкладемо $f_0(a,\psi,\nu t)$ і $u_1(a,\psi,\nu t)$ в подвійні ряди Фур'є

$$f_0=\sum_{n,m}f_{mn}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)},\quad u_1=\sum_{n,m}u_{mn}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}, \tag{2.7}$$

де

$$f_{mn}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(a,\psi,\nu t)e^{-i(n\nu t+m\psi)}d\psi d(\nu t),$$

а коефіцієнти $u_{mn}(a)$ визначаємо, підставивши у (2.6) вирази (2.7):

$$\sum_{n,m}\Big\{-(m\omega_0+n\nu)^2+i\alpha_1(m\omega_0+n\nu)+\alpha_2+i\beta_1(m\omega_0+n\nu)\cdot e^{-i(m\omega_0+n\nu)\tau}+$$
$$+\beta_2 e^{-i(m\omega_0+n\nu)\tau}\Big\}\cdot u_{mn}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}+\{-2\omega_0 A_1-\alpha_1 aB_1+\beta_1[(\omega_0\tau A_1-aB_1)*$$
$$*\cos\omega_0\tau+(\omega_0\tau aB_1+A_1)\sin\omega_0\tau]+\beta_2[aB_1\tau\cos\omega_0\tau-\tau A_1\sin\omega_0\tau]\}\sin\psi+ \tag{2.8}$$
$$+\{-2\omega_0 aB_1+\alpha_1 A_1+\beta_1[(a\omega_0\tau B_1+A_1)\cos\omega_0\tau-(\omega_0\tau A_1-aB_1)\sin\omega_0\tau]+$$
$$+\beta_2[-A_1\tau\cos\omega_0\tau-aB_1\tau\sin\omega_0\tau]\}\cos\psi=\sum_{n,m}f_{nm}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}.$$

Нагадаємо, що згідно з запровадженими додатковими вимогами функція $u_1(a,\psi,\nu t)$ не повинна містити першої гармоніки арґумента ψ, тобто має бути $u_{mn}(a)=0$ для всіх тих значень індексів m і n, які на підставі (2.3) справджують умови

$$np\pm(m\pm1)q=0.$$

Прирівнюючи у (2.8) коефіцієнти при однакових гармоніках, дістанемо:

$$u_{mn}(a)=f_{mn}(a)\cdot\Big\{-(m\omega_0+n\nu)^2+i\alpha_1(m\omega_0+n\nu)+\alpha_2+$$
$$+i\beta_1(m\omega_0+n\nu)e^{-i(m\omega_0+n\nu)\tau}+\beta_2 e^{-i(m\omega_0+n\nu)\tau}\Big\}^{-1}.$$

Тоді з (2.7) маємо:

$$u_1(a,\psi,\nu t)=\sum_{\substack{n,m\\ np\pm(m\pm1)q\neq 0}}u_{mn}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)}.$$

Одночасно із (2.8) отримуємо також співвідношення для функцій $A_1(a)$ і $B_1(a)$. Прирівнявши у (2.8) вирази, що не містять $u_{mn}(a)$, до правої частини у вигляді

$$\sum_{\substack{n,m\\ np\pm(m\pm1)q=0}}f_{mn}(a)e^{i(n\nu t+m\psi)},$$

потім прирівнюємо коефіцієнти при $\sin\psi$ і $\cos\psi$, що дає систему алґебраїчних рівнянь для визначення $A_1(a)$ і $B_1(a)$, яка завжди розв'язується однозначно, поскільки її визначник

$$\Delta(\omega_0)=a\Big\{(-2\omega_0+\beta_1\tau\omega_0\cos\omega_0\tau+\beta_1\sin\omega_0\tau-\beta_2\tau\sin\omega_0\tau)^2+(-\alpha_1+$$
$$+\beta_1\tau\omega_0\sin\omega_0\tau-\beta_1\cos\omega_0\tau+\beta_2\tau\cos\omega_0\tau)^2\Big\}=a\Big\{\Delta_1'^2(\omega_0)+\Delta_2'^2(\omega_0)\Big\}\neq 0,$$

де $\omega_0 i$ звичайний корінь характеристичного рівняння лінійної системи (2.2). Таким чином, перше наближення розв'язку рівняння (2.1) має вигляд

$$x(t)=a(t)\cos\psi(t),$$

де функції $a(t)$ і $\psi(t)$ визначаються з диференціальних рівнянь першого наближення

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a),\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega_0+\varepsilon B_1(a).$$

Продовжуючи далі цей процес, можна знайти асимптотичний розв'язок ДРЗА (2.1) в довільному наближенні.

II. Розглянемо одночастотні коливання, що описуються автономною системою з запізненням

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\delta)+\varepsilon\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\delta),\varepsilon],\tag{2.9}$$

де ε малий додатній параметр; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – матриці розмірності $n\times n$; $\boldsymbol{F}$ – вектор-функція, яка має похідні за всіма арґументами при досить малих значеннях ε.

Припустимо, що відповідна однорідна (при $\varepsilon=0$) система

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\delta)\tag{2.10}$$

має пару чисто уявних коренів $\lambda^{\pm}=\pm i\omega$ характеристичного рівняння

$$\Delta(\lambda)\equiv\det\left\|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}e^{-\lambda\delta}\right\|=0,\tag{2.11}$$

а всі інші корені λ мають від'ємні дійсні частини. Тоді однорідна система (2.10) має періодичний розв'язок

$$\boldsymbol{x}(t)=a\left(\varphi e^{i(\omega t+\theta)}+\overline{\varphi}e^{-i(\omega t+\theta)}\right),$$

де a, θ – довільні сталі, а вектор-функція φ – нетривіальний розв'язок системи

$$(-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}e^{-i\omega\delta}+\boldsymbol{E}i\omega)\varphi=0\,. \tag{2.12}$$

Розв’язок системи (2.9) шукатимемо у вигляді

$$\boldsymbol{x}(t)=a\varphi e^{i\psi}+a\overline{\varphi}e^{-i\psi}+\varepsilon\boldsymbol{u}_1(a,\psi)+\varepsilon^2\boldsymbol{u}_2(a,\psi)+\ldots,\quad \psi=\omega t+\theta\,, \tag{2.13}$$

де $\boldsymbol{u}_i(a,\psi)$ – періодичні з періодом 2π функції аргумента ψ, а величини a, ψ як функції часу визначаються з диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+\ldots,\quad \frac{d\psi}{dt}=\omega+\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2 B_2(a)+\ldots \tag{2.14}$$

Введемо позначення

$$\boldsymbol{u}_0(a,\psi)=a\left(\varphi e^{i\psi}+\overline{\varphi}e^{-i\psi}\right).$$

Тоді після диференціювання (2.13) з урахуванням (2.14) дістанемо:

$$\boldsymbol{x}'(t)=\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial a}\cdot a'(t)+\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\psi}\cdot\psi'(t)+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial a}\cdot a'(t)+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial\psi}\cdot\psi'(t)+\ldots=\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial a}\left(\varepsilon A_1(a)+\ldots\right)+$$

$$+\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\psi}\left(\omega+\varepsilon B_1(a)+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial a}\left(\varepsilon A_1(a)+\ldots\right)+\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial\psi}\left(\omega+\varepsilon B_1(a)+\ldots\right)+\ldots=$$

$$=\omega\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\psi}+\varepsilon\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial a}A_1(a)+\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\psi}B_1(a)\right)+\varepsilon\omega\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial\psi}+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots,$$

а для доданків, що містять відхилення, застосуємо розклад у ряд по степенях δ з урахуванням (2.14), тоді маємо:

$$a(t-\delta)=a(t)-\delta a'(t)+\ldots=a(t)-\delta\left(\varepsilon A_1(a)+\ldots\right)+\ldots=a(t)-\varepsilon\delta A_1(a)+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots;$$

$$\psi(t-\delta)=\psi(t)-\delta\omega-\varepsilon\delta B_1(a)+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots;$$

$$\boldsymbol{x}(t-\delta)=\boldsymbol{u}_0[a(t-\delta),\psi(t-\delta)]+\varepsilon\boldsymbol{u}_1[a(t-\delta),\psi(t-\delta)]+\ldots=\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta)+$$

$$+\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial a}\left(-\varepsilon\delta A_1(a)+\ldots\right)+\frac{\partial\boldsymbol{u}_0}{\partial\psi}\left(-\varepsilon\delta B_1(a)+\ldots\right)+\varepsilon\boldsymbol{u}_1(a,\psi-\omega\delta)+\ldots=$$

$$=\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta)+\varepsilon\left(-\delta A_1(a)\frac{\partial\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta)}{\partial a}-\delta B_1(a)\frac{\partial\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta)}{\partial\psi}+\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{u}_1(a,\psi-\omega\delta)\right)+\varepsilon^2(\ldots)+\ldots$$

Підставимо одержані вище вирази в (2.9) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Для нульового степеня ε^0 дістанемо систему рівностей

$$\omega\frac{\partial\boldsymbol{u}_0(a,\psi)}{\partial\psi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_0(a,\psi)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta),$$

які виконуються тотожно на підставі (2.12). Для першого степеня ε^1 маємо:

$$\begin{gathered}\omega\frac{\partial\boldsymbol{u}_1(a,\psi)}{\partial\psi}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1(a,\psi)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1(a,\psi-\omega\delta)+\boldsymbol{F}_0(a,\psi)-\\ -\left(A_1(a)\frac{\partial}{\partial a}+B_1(a)\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\boldsymbol{u}_0(a,\psi)-\delta\boldsymbol{B}\left(A_1(a)\frac{\partial}{\partial a}+B_1(a)\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta)\end{gathered} \tag{2.15}$$

тощо. Зауважимо, що в останній рівності

$$\boldsymbol{F}_0(a,\psi) \equiv \boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}_0(a,\psi), \boldsymbol{u}_0(a,\psi-\omega\delta), 0].$$

Покажемо, що з системи рівностей (2.15) завжди можна однозначно визначити функції $\boldsymbol{u}_1(a,\psi)$, $A_1(a)$ і $B_1(a)$. Для цього подамо $\boldsymbol{F}_0(a,\psi)$ у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі:

$$\boldsymbol{F}_0(a,\psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{Ц}_m(a) e^{im\psi}, \quad \boldsymbol{Ц}_m(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}_0(a,\psi) e^{-im\psi} d\psi,$$

а функцію $\boldsymbol{u}_1(a,\psi)$ також шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$\boldsymbol{u}_1(a,\psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{u}_{1,m}(a) e^{im\psi}, \quad \boldsymbol{u}_{1,m}(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{u}_1(a,\psi) e^{-im\psi} d\psi.$$

Підставивши подані ряди Фур'є в (2.15) і прирівнявши коефіцієнти при однакових гармоніках, дістанемо наступні системи:

$$(im\omega \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}e^{-im\omega\delta})\boldsymbol{u}_{1,m}(a) = \boldsymbol{Ц}_m(a), \quad m \neq \pm 1; \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
&(i\omega \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}e^{-i\omega\delta})\boldsymbol{u}_{1,1}(a) = \boldsymbol{Ц}_1(a) - [A_1(a) + iaB_1(a)]\varphi - \\
&\qquad - \delta \boldsymbol{B}[A_1(a) + iaB_1(a)]\varphi e^{-i\omega\delta}; \\
&(-i\omega \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}e^{-i\omega\delta})\boldsymbol{u}_{1,-1}(a) = \boldsymbol{Ц}_{-1}(a) - [A_1(a) - iaB_1(a)]\overline{\varphi} - \\
&\qquad - \delta \boldsymbol{B}[A_1(a) - iaB_1(a)]\overline{\varphi} e^{i\omega\delta}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Поскільки числа $\lambda = im\omega$ при $m = \pm 1$ не є коренями характеристичного рівняння (2.11), то визначник системи рівнянь (2.16) не рівний нулеві, а тому система (2.16) має єдиний розв'язок.

Для систем (2.17) визначники згідно з припущенням рівні нулеві. Тому повинна виконуватися умова лінійної залежності

$$0 = \sum_{q=1}^{n} \kappa_q \left\{ \Phi_{1,q}(a) - [A_1(a) + iaB_1(a)]\varphi_q - \delta \boldsymbol{B}[A_1(a) + iaB_1(a) e^{-i\omega\delta}]\varphi_q \right\}, \tag{2.18}$$

де κ_q деякі комплексні сталі, не всі рівні нулеві. Поскільки в (2.18) коефіцієнт при виразі $[A_1(a) + iaB_1(a)]$ відмінний від нуля згідно з (2.12), то завжди можна дістати однозначний розв'язок $A_1(a)$, $B_1(a)$.

Отже, якщо характеристичне рівняння (2.11) системи (2.10) має два чисто уявні корені $\lambda^{\pm} = \pm i\omega$, то завжди можна побудувати асимптотичне наближення для розв'язку системи (2.9). У першому наближенні маємо:

$$\boldsymbol{x}(t) = a\left(\varphi e^{i\psi} + \overline{\varphi} e^{-i\psi}\right),$$

де φ – нетривіальний розв'язок однорідної системи алґебраїчних рівнянь (2.12), а величини a, ψ як функції часу визначаються з диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a),$$

коефіцієнти яких $A_1(a)$ і $B_1(a)$ знаходяться з (2.18).

III. Розглянемо знову систему (2.9) і припустимо, що характеристичне рівняння (2.11) має чисто уявні корені вигляду $\lambda_j = \pm i p_j \omega$, де $p_j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Тоді, як відомо (див. §5.2), система (2.9) має сім'ю періодичних з періодом $T = 2\pi/\omega$ розв'язків вигляду

$$\boldsymbol{x}_0(t) = M_1\varphi_1(t) + M_2\varphi_2(t) + \ldots + M_{m-1}\varphi_{m-1}(t), \tag{2.19}$$

де $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, m-1}$ – власні періодичні розв'язки відповідної однорідної (при $\varepsilon = 0$) системи (2.10).

Будемо шукати розв'язок $\boldsymbol{x}(t,\varepsilon)$ збуреної системи (2.9), близький при досить малих значеннях ε до розв'язку (2.19). Подамо шуканий розв'язок у вигляді асимптотичного ряду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{m-1} M_s\varphi_s(t) + e\boldsymbol{u}_1(t_1, M_1,\ldots,M_{m-1}) + \ldots \equiv \\ \equiv \boldsymbol{u}_0(t) + e\boldsymbol{u}_1(t_1, M_1,\ldots,M_{m-1}) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.20}$$

де $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, … – періодичні з періодом $T = 2\pi/\omega$ за арґументом t_1 функції, а величини M_s, $s = \overline{1, m-1}$, і t_1 як функції часу визначаються з диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dM_s}{dt} &= \varepsilon E_{s,1}(M_1,\ldots,M_{m-1}) + \varepsilon^2 E_{s,2}(M_1,\ldots,M_{m-1}) + \ldots, \quad s = \overline{1, m-1}, \\ \frac{dt_1}{dt} &= 1 + \varepsilon\alpha_1(M_1,\ldots,M_{m-1}) + \varepsilon^2\alpha_2(M_1,\ldots,M_{m-1}) + \ldots, \end{aligned} \tag{2.21}$$

де E_{sj} і α_j ($s = \overline{1, m-1}$, $j \in \mathrm{N}$) – невідомі функції, які потрібно визначити.

Підставивши ряд (2.20) у систему (2.9) з урахуванням (2.21) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, одержимо диференціальні рівняння для визначення функцій $\boldsymbol{u}_j(t_1, M_1,\ldots,M_{m-1})$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t_1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1(t_1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1(t_1 - \delta) + \alpha_1\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t_1} - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial M_s}E_{sj} + \boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}_0(t_1), \boldsymbol{u}_0(t_1 - \delta), 0]; \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_j}{\partial t_1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j(t_1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_j(t_1 - \delta) + \alpha_j\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial t_1} - \sum_{s=1}^{m-1}\frac{\partial \boldsymbol{u}_0}{\partial M_s}E_{sj} + \boldsymbol{R}_j, \quad j = 2,3,\ldots, \tag{2.23}$$

де функції $\boldsymbol{R}_j$ залежать тільки від арґументів $\boldsymbol{u}_0(t_1)$, …, $\boldsymbol{u}_{j-1}(t_1)$, $\boldsymbol{u}_0(t_1 - \delta)$, …, $\boldsymbol{u}_{j-1}(t_1 - \delta)$ та їх похідних, а також від величин α_1, …, α_{j-1}, $E_{s,1}$, …, $E_{s,j-1}$.

Величини α_p, E_{sp} ($s = \overline{1, m-1}$, $p \in \mathrm{N}$) визначаються з умов періодичності функцій $\boldsymbol{u}_j(t_1, M_1,\ldots,M_{m-1})$ з періодом $T = 2\pi/\omega$ за арґументом t_1. Ці умови для системи (2.22) мають вигляд:

$$\begin{aligned} Q_j(M_1,\ldots,M_{m-1},\alpha_1) \equiv \int_0^{2\pi/\omega}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}_0(t_1), \boldsymbol{u}_0(t_1 - \delta), 0]\boldsymbol{w}_j(t_1)dt_1 + \\ + \alpha_1\int_0^{2\pi/\omega}\sum_{s=1}^{m-1}M_s\frac{d\varphi_s(t_1)}{dt_1}\boldsymbol{w}_j(t_1)dt_1 - \int_0^{2\pi/\omega}\sum_{s=1}^{m-1}E_{s,1}\varphi_s(t_1)\boldsymbol{w}_j(t_1)dt_1 = 0, \end{aligned} \quad j = \overline{1, m}, \tag{2.24}$$

де $\boldsymbol{ш}_j(t)$ – періодичний розв'язок системи, спряженої до однорідної системи (2.10). Визначивши із (2.24) функції $\alpha_1(M_1,...,M_{m-1})$ та $E_{s,1}(M_1,...,M_{m-1})$, $s=\overline{1,m-1}$, а потім підклавши їх у рівняння (2.22), знайдемо періодичну функцію $\boldsymbol{u}_1(t_1,M_1,...,M_{m-1})$ у вигляді

$$\boldsymbol{u}_1(t_1,M_1,...,M_{m-1})=C_1^{(1)}\varphi_1(t_1)+...+C_{m-1}^{(1)}\varphi_{m-1}(t_1)+\boldsymbol{u}_1^*(t_1),$$

де $C_j^{(1)}$, $j=\overline{1,m-1}$ – довільні функції аргументів M_1, …, M_{m-1}, котрі надалі знаходитимуться з умов періодичності функції $\boldsymbol{u}_2(t_1,M_1,...,M_{m-1})$ з урахуванням (2.23), а $\boldsymbol{u}_1^*(t_1)$ – деякий частинний періодичний розв'язок системи (2.22).

Продовжуючи цей процес, можемо знайти величини α_p, E_{sp}, а також функції $\boldsymbol{u}_p(t_1,M_1,...,M_{m-1})$, $p=\overline{2,\infty}$, кожна з яких міститиме $(m-1)$ довільну функцію аргументів M_1, …, M_{m-1}. Таким чином, у p-му наближенні дістанемо:

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{s=1}^{m-1}M_s\varphi_s(t)+e\boldsymbol{u}_1(t_1,M_1,...,M_{m-1})+...+e^{p-1}\boldsymbol{u}_{p-1}(t_1,M_1,...,M_{m-1}),$$

де величини M_s, $s=\overline{1,m-1}$, і t_1 як функції часу визначаються з диференціальних рівнянь

$$\frac{dM_s}{dt}=\varepsilon E_{s,1}(M_1,...,M_{m-1})+...+\varepsilon^p E_{s,p}(M_1,...,M_{m-1}),\quad s=\overline{1,m-1},$$

$$\frac{dt_1}{dt}=1+\varepsilon\alpha_1(M_1,...,M_{m-1})+...+\varepsilon^p\alpha_p(M_1,...,M_{m-1}).$$

Викладеним вище методом можна скористатися і для знаходження періодичних розв'язків системи (2.9). Для цього необхідно знайти статичний розв'язок системи перших $(m-1)$ рівнянь з (2.21)

$$\frac{dM_s}{dt}=\varepsilon E_{s,1}(M_1,...,M_{m-1})+\varepsilon^2 E_{s,2}(M_1,...,M_{m-1})+...,\quad s=\overline{1,m-1} \tag{2.25}$$

$M_s=M_s(\varepsilon)$, при початкових умовах

$$M_s(0)=M_s^*,\ s=\overline{1,m-1}. \tag{2.26}$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь системи (2.25) до нуля, для визначення статичного (не залежного від часу) розв'язку одержимо систему

$$E_{s,1}(M_1,...,M_{m-1})+\varepsilon E_{s,2}(M_1,...,M_{m-1})+...=0,\quad s=\overline{1,m-1} \tag{2.27}$$

Для того, щоб система (2.27) мала розв'язки вигляду $M_s=M_s(\varepsilon)$, достатньо, щоб значення M_s^* визначалися як корені системи алґебраїчних рівнянь

$$E_{s,1}(M_1^*,...,M_{m-1}^*)=0,\quad s=\overline{1,m-1}.$$

Тоді із (2.27) з урахуванням (2.26) знаходимо значення $M_s=M_s(\varepsilon)$, яким і відповідають періодичні розв'язки системи (2.9).

§6.3. Дослідження одночастотних коливань неавтономних систем із запізненням

Розглянемо неавтономну систему рівнянь із запізненням

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau) + \varepsilon \boldsymbol{F}[\nu t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \varepsilon], \tag{3.1}$$

де ε малий додатній параметр; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – сталі матриці розмірності $n \times n$; величина $\tau = const > 0$ характеризує запізнення в системі.

Припустимо, що функція $\boldsymbol{F}$ є періодичною з періодом 2π за арґументом νt і може бути подана у вигляді скінченої суми Фур'є

$$\boldsymbol{F}[\nu t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \varepsilon] = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} \boldsymbol{f}_n[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau), \varepsilon]$$

з коефіцієнтами, які є деякими поліномами по відношенню до $\boldsymbol{x}(t)$ і $\boldsymbol{x}(t-\tau)$.

Поряд із (3.1) розглянемо відповідну однорідну (при $\varepsilon = 0$) систему

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau). \tag{3.2}$$

Припустимо, що характеристичне рівняння системи (3.2)

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left\| \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}e^{-\lambda\tau} - \lambda \boldsymbol{E} \right\| = 0,$$

має чисто уявні корені $\lambda_k^{\pm} = \pm i\omega_k$, $k = \overline{1,m}$. Тоді, як відомо (див. §5.2), система (3.2) має періодичні розв'язки

$$\boldsymbol{x}_k(t) = a\varphi_k \cos(\omega_k t + \theta), \quad k = \overline{1,m},$$

які залежать від двох довільних сталих a і θ, де φ_k – так звані ***нормальні функції***, які є нетривіальними розв'язками системи однорідних алґебраїчних рівнянь

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}e^{-i\omega_k\tau} - i\omega_k \boldsymbol{E})\varphi = 0.$$

Розглянемо задачу про побудову асимптотичних наближень до розв'язків, близьких для малих значень ε до одного з періодичних розв'язків породжуючої системи (3.1) – наприклад, до розв'язку

$$\boldsymbol{x}(t) = a\varphi_1 \cos(\omega_1 t + \theta).$$

Для застосування викладеного в §6.2 методу накладемо необхідні умови. Припустимо, що а) в системі (3.2) можливі затухаючі гармонічні коливання з частотою ω_1, які залежать лише від двох довільних сталих; б) єдиним статичним розв'язком системи (3.2) є тривіальний розв'язок $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ і в) жодне з чисел вигляду $p\omega_1$, де p – ціле число, не рівне жодному з чисел ω_2, …, ω_m, тобто в системі (3.2) відсутній внутрішній резонанс.

Для системи (3.1) розглядають резонансний і нерезонансний випадки. Нерезонансний випадок маємо тоді, коли частота зовнішньої сили ν не співпадає з жодною із власних частот системи і не виконуються співвідношення

$$\nu \approx pq^{-1}\omega_k, \quad k = \overline{1,m}.$$

У нерезонансному випадку розв'язок системи (3.1) шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду

$$\boldsymbol{x}(t) = a\varphi_1 \cos\psi + e\boldsymbol{u}_1(a, \nu t, \psi) + e^2\boldsymbol{u}_2(a, \nu t, \psi) + ..., \quad \psi = \omega_1 t + \theta,$$

де $\boldsymbol{u}_1(a, \nu t, \psi)$, $\boldsymbol{u}_2(a, \nu t, \psi)$, … – функції, періодичні з періодом $T = 2\pi$ за обома кутовими арґументами νt і ψ, а амплітуда a і фаза ψ як функції часу визначаються з диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + ..., \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + ...$$

Для визначення функцій $\boldsymbol{u}_j(a, \nu t, \psi)$, $A_j(a)$ і $B_j(a)$ можна скористатися алґоритмом, викладеним у §6.2.

Вправа. Застосувати алґоритм, викладений у §6.2 для автономної системи (2.9), у випадку неавтономної системи (3.1) з урахуванням зазначених припущень.

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

Розділ II

I. Розв'язки заданих ОПЗ на перших елементарних відрізках:

1. $y(x) = -e^x, \quad x \in (0;1]; \quad y(x) = -\exp[e^{1-x}(x-1)+1], \quad x \in (1;2].$

2. $y(x) = \ln(2-x), \quad x \in (-1;0]; \quad y(x) = \ln|6+(x-4)e^x|, \quad x \in (0;1].$

3. $y(x) = x, \quad x \in (0;2]; \quad y(x) = 1 + e^{x-2}, \quad x \in (2;3].$

4. $y(x) = x^2, \quad x \in (1;2]; \quad y(x) = 4\exp(\frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - \frac{4}{3}), \quad x \in (2;3].$

5. $y(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad x \in (0;2]; \quad y(x) = \sqrt{3 + 2\sqrt{(x-2)^2+1} + 4\ln\left(\frac{x+\sqrt{(x-2)^2+1}}{3}\right)}, \quad x \in (2;3].$

6. $y(x) = x + \frac{1}{2}(3-x^2), \quad x \in (1;2]; \quad y(x) = 2x + 6\ln|\frac{x}{2} - 2| - \frac{5}{2}, \quad x \in (2;3].$

7. $y(x) = \frac{5}{64}(x^2+4)^2, \quad x \in (2;4]; \quad y(x) = \frac{125}{4}\exp\left[\frac{16(x^2-16)}{5(x^2+16)}\right], \quad x \in (4;8].$

8. $y(x) = 7 - 2x, \quad x \in (3;4]; \quad y(x) = 2x^2 - 18x + 39, \quad x \in (4;5];$

$y(x) = 2x^4 - 44x^3 + 360x^2 - 1298x + 1734, \quad x \in (5;6].$

9. $y(x) = 1, \quad x \in (-1;0]; \quad y(x) = \operatorname{ch} x, \quad x \in (0;1].$

10. $y(x) = e^x, \quad x \in (0;2]; \quad y(x) = (1-2e^2)\cdot e^{1-\exp(x-2)} + 2e^2, \quad x \in (2;3].$

11. $y(x) = Cx, \quad x \in (0;1]; \quad y(x) = Cx(x - \ln x), \quad x \in (1;2];$

$y(x) = Cx \cdot [0{,}5x^3 - (x-1)\ln x], \quad x \in (2;3], \quad C = const.$

12. $y(x) = 1, \quad x \in (3;4]; \quad y(x) = (x-1)^2 - 24(x-1)^{-1}, \quad x \in (4;5].$

13. $y(x) = 1, \quad x \in (0;1]; \quad y(x) = xe^{1-x}, \quad x \in (1;2]; \quad y(x) = (\frac{x^2}{2} - x + 2)e^{1-x}, \quad x \in (2;3];$

$y(x) = \frac{23}{8}e^{1-x} + \frac{1}{8}e^{x-5}\cdot(2x^2 - 10x + 17), \quad x \in (3;4].$

14. $y(x) = 4(x-1)(2x^2 - 4x - 13)^{-1}, \quad x \in (4;5].$

15. $y(x) = x^{-1}(3x-2), \quad x \in (1;2]; \quad y(x) = \frac{1}{2x^4}(77e^{2x-4} - 2x^2 - 2x - 1), \quad x \in (2;4].$

II. Вказівки до розв'язування:

1. Домножити рівняння на інтеґрувальний множник $\mu = x^2 y(x-2)$. Загальний інтеґрал: $x^3 y(x) y^2(x-2) = C$.

2. Виділити повний диференціал із двох останніх доданків. Загальний інтеґрал: $x^2 y(x) y(x-3) + x^3 = C.$

3. Не виконується умова інтеґровності відповідного рівняння Пфаффа. Розв'язок на першому кроці: $y(x) = [(x-2)^4 + 16(x-1)]\cdot(x-2)^{-2}, \quad x \in (0;2].$

4. Зафіксувавши $x = const$, $dx = 0$, дістанемо: $y^2(x-1) + y(x) = C(x)$; після підкладання в рівняння та інтеґрування маємо $C(x) = Ce^{-x^2} - x$. Загальний інтеґрал: $y^2(x-1) + y(x) + x = Ce^{-x^2}$.

5. Зафіксувавши $x = const$, $dx = 0$, дістанемо: $y(x) = y^2(x-1) + C(x)y(x-1)$, причому $C(x)$ з рівняння визначається однозначно. Загальний інтеґрал є $y(x) = y^2(x-1) - xy(x-1)$.

6. Виділити повні диференціали. Загальний інтеґрал: $xy(x-2) + y(x)y(x-3) = C$.

7. Загальний інтеґрал: $x^2 y(x) y^2(x-3) - 2y(x-1) = C$ (аналогічно до попереднього прикладу).

Розділ III

Розв'язки заданих ОПЗ на першому елементарному відрізку:

1. $y(x) = \cos x - x, \quad x \in (0; \frac{\pi}{6}].$ **2.** $y(x) = 3e^{-x}, \quad x \in (0;1].$

3. $y(x) = x - \sin x, \quad x \in (0; \frac{\pi}{2}].$ **4.** $y(x) = x(x-2), \quad x \in (1;3].$

Розділ IV

I. Розв'язки заданих ОПЗ на перших елементарних відрізках:

1. $y(x) = \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{39}{74}e^{-3x} + \frac{1}{37}e^{3x}(6\sin x - \cos x), \quad x \in (0;2\pi].$

2. $y(x) = (7-3x)e^{x-2}, \quad x \in (2;3].$

3. $y(x) = \frac{1}{27}(49x^3 + 59 + 69\ln x) - \frac{1}{6}\ln^2 x, \quad x \in (1;2].$

4. $y(x) = (1 + 2\sqrt{e})e^{x-1} + \frac{2}{3}e^{1,5-x} - \frac{8}{3}e^{0,5x}, \quad x \in (1;2].$

5. $y(x) = \frac{1}{2}(\sin x + x\cos x), \quad x \in (0;\pi].$

6. $y(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{4}, \quad x \in (1;2].$

7. $y(x) = \frac{1}{6}x^3, \quad x \in (0;2\pi]; \quad y(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}(x-2\pi)^5, \quad x \in (2\pi;4\pi].$

8. $y(x) = \frac{x}{2}\sin x, \quad x \in (0;1];$

$y(x) = \frac{x}{2}\sin x + \frac{x-1}{4}\sin(x-1) - \frac{(x-1)^2}{4}\cos(x-1), \quad x \in (1;2].$

II. Функція Коші має вигляд:

1. $G(t,s) = t - s.$ **2.** $G(t,s) = ts^{-2}.$ **3.** $G(t,s) = \frac{1}{2}[\sin(t-s) - \cos(t-s) + e^{s-t}].$

4. $G(t,s) = \frac{1}{3}\sin(t-s) + \frac{1}{6}\sin 2(t-s).$

5. $G(t,s) = e^{t-s} - \frac{1}{6}t^3 + \frac{s-1}{2}t^2 - \frac{(s-1)^2+1}{2}t + \frac{1}{6}[(s-1)^3 + 3s - 5].$

6. $G(t,s) = e^{\cos s - \cos t} \cdot \sec s.$ **7.** $G(t,s) = \mathrm{sh}(t-s).$ **8.** $G(t,s) = \frac{1}{2}(t-s)^2.$

III. Вводячи малий параметр ε як множник при доданку, який містить відхилення, на першому кроці дістанемо:

1. $t \in (1;2]: \quad x_0(t) = t^3 + 1, \quad x_1(t) = 0.$

2. $t \in (0;\pi]: \quad x_0(t) = \cos t, \quad x_1(t) = 2(e^t - 1)\cos t + 2(2e^t - 3)\sin t.$

3. $t > 0: \quad x_0(t) = t, \quad x_1(t) = e^{-t} - 1 + \frac{1}{6}t(t^2 - 3t + 6).$

4. $t \in (0;1]: \quad x_0(t) = -1, \quad x_1(t) = 2(\operatorname{ch} t - 1).$

IV. Загальний розв'язок рівняння є

1. $x(t) = Ae^{-t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{(C_n^{(1)}t + C_n^{(2)})\cos 2\pi nt + (C_n^{(3)}t + C_n^{(4)})\sin 2\pi nt\right\}.$

2. $x(t) = (A_1 t + A_2)e^{2t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{4} + C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right\}.$

3. $x(t) = A_1 e^{2t} + e^{-t}(A_2\cos\sqrt{3}t + A_3\sin\sqrt{3}t) + e^{2t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{2} + C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{2}\right\}.$

4. $x(t) = (A_1 t + A_2)e^{t} + (A_3 t + A_4)e^{-t} + \frac{1}{729^t}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{\pi nt}{3} + C_n^{(2)}\sin\frac{\pi nt}{3}\right\}.$

5.
$$x(t) = A_1 t^2 + A_2 t + A_3 e^{3t} + A_4 e^{-3t} + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos 2\pi nt + C_n^{(2)}\sin 2\pi nt\right\} +$$
$$+ \frac{1}{3^t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos(2n+1)\pi t + C_n^{(2)}\sin(2n+1)\pi t\right\}.$$

6. $x(t) = (A_1 t + A_2)\cos t + (A_3 t + A_4)\sin t + \frac{1}{12^{4t}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{4} + C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right\}.$

7. $x(t) = \left(A + \frac{t}{(e^3-2)^2-9}\right)e^{3t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{(C_n^{(1)}t + C_n^{(2)})\cos(2n+1)\pi t + (C_n^{(3)}t + C_n^{(4)})\sin(2n+1)\pi t\right\}.$

8. $x(t) = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + A_1\sin 3t + A_2\cos 3t + \frac{1}{10^{4t}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos(\frac{\pi}{12} + \pi n)t + C_n^{(2)}\sin(\frac{\pi}{12} + \pi n)t\right\}.$

9. $x(t) = A_1\cos t + (\frac{t}{6} + A_2)\sin t + 2^{\frac{t}{\pi}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos 2nt + C_n^{(2)}\sin 2nt\right\}.$

10. $x(t) = \frac{t^2}{12}(3\pi + t) + A_1 t + A_2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)t}{2} + C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)t}{2}\right\}.$

11. $x(t) = \frac{e^{-2t}}{4(1-2e^4)} + A_1 t + A_2 + 2^{\frac{t}{2}}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\pi nt + C_n^{(2)}\sin\pi nt\right\}.$

12. $x(t) = \frac{t^2}{12} - \frac{5\sin(t+1)-\sin t}{13+5\cos 1} + A_1 t + A_2 + 5^t\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos(2n+1)\pi t + C_n^{(2)}\sin(2n+1)\pi t\right\}.$

13. $x(t) = \frac{2e^{t+2}}{e^2-1} + A_1 + A_2 e^{-t} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\pi nt + C_n^{(2)}\sin\pi nt\right\}.$

14. $$x(t)=e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}\left(A_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+A_2\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\left(A_3\cos\frac{t}{\sqrt{2}}+A_4\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2^t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{3}+C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{3}\right\}.$$

15. $x(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+(A_3t+A_4)e^{2t}+\left(\frac{4}{9}\right)^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos 4\pi nt+C_n^{(2)}\sin 4\pi nt\right\}.$

V. Характер коливань, які описують розв'язки заданих рівнянь:
1. Резонанс. **2.** Гармонічні коливання. **3.** Амплітуда необмежено зростає (всі корені характеристичного рівняння мають додатні дійсні частини). **4.** Затухаючі коливання.

Розділ V

I. Розв'язки заданих ОПЗ на перших елементарних відрізках:

1. $x(t)=2\operatorname{ch}t-\cos t,\quad y(t)=2\operatorname{sh}t+\sin t,\quad t\in(0;\pi].$

2. $x(t)=3e^{-4t}(\sin t-\cos t)+6,\quad y(t)=-6e^{-4t}\sin t+3,\quad t\in(0;1].$

3. $x(t)=2(e^{4t}-1),\quad y(t)=7e^{4t}-3,\quad t\in(0;2].$

4. $$y(x)=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(3\cos\frac{\sqrt{23}}{2}x-\frac{19}{\sqrt{23}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}x\right)+\frac{1}{4}e^{2x},$$
$$z(x)=\frac{1}{8}e^{\frac{x}{2}}\left(-\cos\frac{\sqrt{23}}{2}x+\frac{101}{8\sqrt{23}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}x\right)+\frac{1}{8}e^{2x},\qquad x\in(0;1].$$

5. $x(t)=\frac{1}{8}(15t^2-5t^{-2}-2),\quad y(t)=\frac{1}{8}(5t^2+5t^{-2}-2),\quad t\in(1;2].$

II. Періодичні розв'язки мають вигляд:

1. $x(t)=A\cos\frac{t}{2}+B\sin\frac{t}{2}.$ **2.** Немає. **3.** $x(t)=A+B\cos 4\pi t+C\sin 4\pi t.$

4. $x(t)=A\cos t+B\sin t-6\sin 2t.$ **5.** Немає (резонанс).

6. $x(t)=\dfrac{6\cos(t+1)-3(\sin t+\cos t)}{3+2(\sin 1-\cos 1)}$ (власних частот рівняння не має).

7. $x(t)=A-2\sin t.$ **8.** $x(t)=A\cos\frac{\pi t}{4}+B\sin\frac{\pi t}{4},\ y(t)=-A\sin\frac{\pi t}{4}+B\cos\frac{\pi t}{4}.$

9. $x(t)=A,\ y(t)=B.$ **10.** $x(t)=A\cos t+B\sin t,\ y(t)=-A\sin t+B\cos t.$

11. $x(t)=A+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{(1)}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{4}+C_n^{(2)}\sin\frac{(2n+1)\pi t}{4}\right\}$ (нескінчена кількість власних частот).

12. $x(t)=A,\ y(t)=B.$ **13.** Немає.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Белман Р.*, *Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. *Каменский Г.А.* К общей теории уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН СССР, № 120, **4** (1958). – С. 697-700.
3. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. – К.: Ин-т матем. АН УССР, 1969.
4. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием – К.: Вища школа, 1979. – 247 с.
5. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Гостехиздат, 1951. – 203 с.
6. *Норкин С.Б.* Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1965.
7. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Том IX. – М.: УДН, 1975. – 156 с.
8. IV Всесоюзная конференция по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Тезисы докладов. – К.: Наукова думка, 1975. – 260 с.
9. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М: Наука, 1971. – 296 с.