УДК 519.49

Т. В. Боярищева (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimate of the rate of convergence to normal law of distributive function of sums of random variables.

Робота містить оцінку швидкості збіжності функцій розподілу сум незалежних випадкових величин до нормального закону.

Швидкість збіжності функцій розподілу сум незалежних випадкових величин до нормального закону досліджувалась у роботах [1–4]. У даній роботі досліджується збіжність розподілів сум незалежних випадкових величин до нормального закону розподілу. При цьому використовуються псевдомоменти, аналогічні до введених у [4], однак іншого порядку. Тоді послаблюються порівняно з [4] умови, що накладаються на доданки.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$. Позначимо функцію розподілу випадкової величини ξ_i через $F(x)$, а характеристичну функцію – через $f(t)$. Нехай $F_n(n)$ – функція розподілу випадкової величини $\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}$, а $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону.

Вважаємо, що існують псевдомоменти

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k dH(x) \ \ (k = 2, \ldots, m,\, m \in \mathbb{N},\, m \geq 2),$$

де

$$H(x) = F(x) - \Phi(x);$$

$$\kappa_0^{(1)}(m) = \int\limits_{|x|\leq\sigma\sqrt{n}} \max(1, |x|^m)|H(x)|dx;$$

$$\kappa_0^{(2)}(m) = \int\limits_{|x|>\sigma\sqrt{n}} \max(1, |x|^{m-1})|H(x)|dx.$$

Теорема 1. *Нехай* $\mu_k = 0$ *при* $k = 2,\ldots,m$, c *– довільна стала* ($c \in (0, 2^{-4})$).
1) *Нехай*

$$\kappa_0(m) = \max\left(\kappa_0^{(1)}(m), \kappa_0^{(2)}(m)\right) \leq c,$$

тоді для всіх $n \geq 1$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C^{(1)} \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(2)}{\sqrt{n}} + \kappa_0^{(2)}(2)\right),$$

де $C^{(1)} = C^{(1)}(c)$.

2) *При* $\kappa_0(m) > c$, *якщо виконується умова Г.Крамера* $\lim\limits_{|t|\mapsto\infty} f(t) \leq 1$, *тоді існує* n_0 *таке, що для всіх* $n \geq n_0$ $\kappa_0^{(2)}(m) \leq c$, *і виконується умова*

$$\sup_x |\Phi_n(x) - P(x)| \leq C^{(2)} \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} \right) + \frac{2}{\pi} b^n \ln \left(\left(\frac{C}{\kappa_0^{(1)}(m)} \right)^{\frac{m-2}{m-1}} n^{\frac{m-2}{2}} \right),$$

де $C^{(2)} = C^{(2)}(c, m)$, *а* b *таке, що при* $|t| \geq \left(\frac{C}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ *виконується* $\left| f\left(\frac{t}{\sigma}\right) \right| \leq b < 1$.

Для доведення теореми необхідні наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $\mu_k = 0$, $k = 2, ..., m$. *Тоді* $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\omega(t) = \left| f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \min \left\{ \frac{t^{m+1}}{m!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2t^m}{(m-1)!} \kappa_0^{(2)}(m); |t| \left(\kappa_0^{(1)}(m) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \kappa_0^{(2)}(m) \right); t^2 \left(\kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m) \right) \right\}.$$

Доведення.

$$\omega(t) = \left| f(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right) dH(x) \right| =$$

$$= \left| \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m} \frac{(itx)^k}{k!} \right) H(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - it \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right) H(x) dx \right| =$$

$$= |t| \left| \int\limits_{|x| \leq \sigma\sqrt{n}} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right) H(x) dx - \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \left(e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right) H(x) dx \right| \leq$$

$$\leq |t| \left(\int\limits_{|x| \leq \sigma\sqrt{n}} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |H(x)| \, dx + \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \left| e^{itx} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(itx)^k}{k!} \right| |H(x)| \, dx \right) \leq$$

$$\leq |t| \left(\int\limits_{|x| \leq \sigma\sqrt{n}} \frac{|tx|^m}{m!} |H(x)| \, dx + \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \frac{2|tx|^{m-1}}{(m-1)!} |H(x)| \, dx \right) =$$

$$= \frac{|t|^{m+1}}{m!} \int\limits_{|x| \leq \sigma\sqrt{n}} |x|^m |H(x)| \, dx + \frac{2|t|^m}{(m-1)!} \int\limits_{|x| > \sigma\sqrt{n}} |x|^{m-1} |H(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^{m+1}}{m!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{(m-1)!} \kappa_0^{(2)}(m);$$

$$\omega(t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH(x) \right| = \left| e^{itx} H(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - it \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} H(x) dx \right| =$$

$$= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH(x) \right| \le |t| \int_{-\infty}^{+\infty} |H(x)| dx =$$

$$= |t| \left(\int_{|x| \le \sigma\sqrt{n}} |H(x)| dx + \int_{|x| > \sigma\sqrt{n}} |H(x)| dx \right) = |t| \left(\kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m) \right);$$

$$\omega(t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) dH(x) \right| = \left| \left(e^{itx} - 1 - itx\right) H(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - it \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1\right) H(x) dx \right| \le$$

$$\le |t| \left(\int_{|x| \le \sigma\sqrt{n}} \left|e^{itx} - 1\right| |H(x)| \, dx + \int_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \left|e^{itx} - 1\right| |H(x)| \, dx \right) \le$$

$$\le |t| \left(\int_{|x| \le \sigma\sqrt{n}} |tx| \, |H(x)| \, dx + \int_{|x| > \sigma\sqrt{n}} |tx| \, |H(x)| \, dx \right) \le$$

$$\le t^2 \left(\int_{|x| \le \sigma\sqrt{n}} \max\left(1, |x|^m\right) |H(x)| \, dx + \int_{|x| > \sigma\sqrt{n}} \max\left(1, |x|^{m-1}\right) |H(x)| \, dx \right) = t^2 \left(\kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m) \right).$$

Лема 2. *Нехай* $\mu_k = 0$, $k = 2, ..., m$; $\kappa_0(m) = \max\left\{\kappa_0^{(1)}(m), \kappa_0^{(2)}(m)\right\}$, $c \in (0, 2^{-4})$. *Тоді при* $\kappa_0(m) \le c$ *і* $|t| \le T_1 = \sqrt{-2 \ln \kappa_0(m)}$

$$|f(t)| \le e^{-t^2 c_1},$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c} > 0$.

Якщо ж $|t| > T_1$, *то*

$$|f(t)| \le 3\kappa_0(m)|t|.$$

При $\kappa_0(m) > c$, $|t| \le T_2 = \left(\frac{c}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{1}{m-1}}$ *(при умові, що* $\kappa_0^{(2)}(m) \le c$*)*

$$|f(t)| \le e^{-t^2 c_2},$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{e}c > 0$.

Доведення. Розглянемо випадок $\kappa_0(m) \le c$, $|t| \le T_1$.

$$|f(t)| \le e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega(t) \le e^{-\frac{t^2}{4}} \left(e^{-\frac{t^2}{4}} + e^{\frac{t^2}{4}} \omega(t) \right) \le$$

$$\le e^{-\frac{-t^2}{4}} \left(1 + e^{\frac{1}{4}(-2 \ln \kappa_0(m))} \right) t^2 \left(\kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m) \right) \le$$

$$\le e^{-\frac{-t^2}{4}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\kappa_0(m)}} \right) = e^{-\frac{-t^2}{4}} \left(1 + t^2 \sqrt{\kappa_0(m)} \right) \le e^{-\frac{-t^2}{4}} e^{t^2 \sqrt{c}} = e^{-t^2 \left(\frac{1}{4} - \sqrt{c} \right)} = e^{-t^2 c_1},$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c} > 0$.

Нехай $|t| > T_1$.

$$|f(t)| \le e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega(t) \le e^{-\frac{1}{2}(-2\ln\kappa_0(m))} + |t|\left(\kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m)\right) \le$$

$$\le \kappa_0(m) + 2|t|\kappa_0(m) = \kappa_0(m)(1+2|t|) \le \kappa_0(m)\left(2 + \frac{1}{2\ln 2}\right)^{|t|} < 3\kappa_0(m)|t|.$$

Розглянемо тепер $\kappa_0(m) > c$ (при цьому $\kappa_0^{(2)}(m) \le c$) і $|t| \le T_2 = \left(\frac{c}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{1}{m-1}}$

$$|f(t)| \le e^{-\frac{t^2}{2}} + \omega(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{-\frac{t^2}{2}}\omega(t)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{2}{m-2}}}\left(\frac{t^{m+1}}{m!}\kappa_0^{(1)}(m) + \frac{|t|^m}{(m-1)!}\kappa_0^{(2)}(m)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sqrt{e}\, t^2\left(\frac{T_2^{m-1}}{m!}\kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2T_2^{m-2}}{(m-1)!}c\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sqrt{e}\, t^2\left(\frac{c}{\kappa_0 m!}\kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2c}{(m-1)!}\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \sqrt{e}\, t^2\left(\frac{c}{m!} + \frac{2c}{(m-1)!}\right)\right) \le e^{-\frac{t^2}{2}} e^{\sqrt{e}\, t^2\left(\frac{c}{m!} + \frac{2c}{(m-1)!}\right)} =$$

$$= e^{-t^2\left(\frac{1}{2} - \sqrt{e}\, c\left(\frac{1}{m!} + \frac{2}{(m-1)!}\right)\right)} = e^{-t^2 c_2},$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{e}\, c > 0$.

Доведення теореми. Використаємо нерівність із [5]

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)|\frac{dt}{t} + \frac{24\sup|G'(x)|}{\pi T},$$

у якій покладемо $F(x) = \Phi_n(x)$, а $G(x) = P(x)$, $T = \frac{c}{\kappa_0(m)} n^{\frac{m-1}{2}}$. Тоді

$$\sup_x |\Phi_n(x) - P(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}\,T}. \qquad (1)$$

У нерівності $|U^n - V^n| \le |U - V|\sum_{k=1}^{n}|U|^{k-1}|V|^{n-k}$ покладемо $U = f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, $V = e^{-\frac{t^2}{2n}}$. Тоді із леми 1

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|^{k-1} e^{-\frac{t^2}{2}(n-k)} \le$$

$$\leq \left(\frac{|t|^{m+1}}{n^{\frac{m+1}{2}}(m+1)!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{n^{\frac{m}{2}} m!} \kappa_0^{(2)}(m) \right) \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^{k-1} e^{-\frac{t^2}{2}(n-k)}. \tag{2}$$

Нехай $n \geq 2$, $\kappa_0(m) \leq c$, $|t| \leq T_1\sqrt{n}$, тоді із леми 1 і (2) одержуємо

$$\left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \left(\frac{|t|^{m+1}}{n^{\frac{m+1}{2}}(m+1)!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{n^{\frac{m}{2}} m!} \kappa_0^{(1)}(m) \right) \sum_{k=1}^{n} e^{-c_1 \frac{t^2}{n}(k-1)} e^{-\frac{t^2}{2n}(n-k)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{|t|^{m-1}}{n^{\frac{m+1}{2}}(m+1)!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{n^{\frac{m}{2}} m!} \kappa_0^{(2)}(m) \right) e^{-c_1 t^2 \frac{n-1}{n}}. \tag{3}$$

Нехай $T' = \min(T_1\sqrt{n}, T)$. Тоді з (1)

$$\sup_x |\Phi_n(x) - P(x)| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{T} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^n \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{T} e^{-\frac{t^2}{t}} \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{cn^{\frac{m-2}{2}}}. \tag{4}$$

Із (3) для I_1 при $n \leq 2$ одержуємо

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left(\frac{t^m}{n^{\frac{m-1}{2}} m!} \kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2t^{m-1}}{n^{\frac{m-2}{2}}(m-1)!} \kappa_0^{(2)}(m) \right) e^{-\frac{1}{2}t^2 c_1} dt \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi m!} \frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} \int_0^{T'} t^m e^{-\frac{1}{2}t^2 c_1} dt + \frac{2\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}(m-1)!\pi} \int_0^{T'} t^{m-1} e^{-\frac{t^2}{2}c_1} dt \leq$$

$$\leq C_3 \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} \right). \tag{5}$$

Нехай виконується умова Г. Крамера: $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) \leq 1$. Вважаємо, що $T' = T_1\sqrt{n}$, бо інакше $T' = T$, $I_2 = 0$ й $I_3 = 0$. Із леми 2

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{T} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right|^n \frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f\left(\frac{t}{\sigma} \right) \right|^n \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} b^n \frac{1}{T_1} \int_{T'}^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{2b^n}{\pi} \ln|t| \Big|_{T'}^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \leq \frac{2b^n}{\pi} \ln\left| \frac{T}{\sqrt{n}} \right| = \frac{2b^n}{\pi} \left(\ln \frac{c}{\kappa_0(n)} n^{\frac{m-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{2b^n}{\pi} \ln\left(\left(\frac{c}{\kappa_0(m)} \right)^{\frac{m-2}{m-1}} n^{\frac{m-2}{2}} \right).$$

Для оцінки I_3 використаємо нерівність

$$\int\limits_a^\infty t^p e^{-\frac{t^2}{2}} dt \le a^{p-1} e^{-\frac{a^2}{2}} \text{ при } a > 0 \text{ і } p < 1.$$

Тепер

$$I_3 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1\sqrt{n}}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi} \int\limits_{T_1\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi} (T_1\sqrt{n})^{-2} e^{-\frac{(T_1\sqrt{n})^2}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{T_1^2 n} e^{\frac{n}{2} 2 \ln \kappa_0(m)} = \frac{2}{\pi n T_1^2} (\kappa_0(m))^n.$$

Оскільки $T_1 > 2$, $\kappa_0(m) \le c_1$, то

$$I_3 \le \frac{2}{2\pi n \cdot 2} \kappa_0(m) \cdot \frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}} \cdot n^{\frac{m-1}{2}} (\kappa_0(m))^{n-1} \le$$

$$\le \frac{\kappa_0(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} n^{\frac{m-3}{2}} c^{n-1} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{\kappa_0(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot n^{\frac{m-3}{2}} c^n \le$$

$$\le \frac{\kappa_0(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} C_5 \le C_5 \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} \right).$$

Отже, при $n \ge 2$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le C_6 \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}} \right).$$

А якщо $n = 1$

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F(x\sigma) - \Phi(x)| = \sup_x \left| \int\limits_{-\infty}^{x} d\left(F(\sigma y) - \Phi(y)\right) \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |d(F(\sigma y) - \Phi(y)| \le \kappa_0^{(1)}(m) + \kappa_0^{(2)}(m).$$

Тобто при $\kappa_0(m) \le c$ теорема доведена.

Якщо тепер $\kappa_0(m) > c$. Оскільки існують μ_n, $\kappa_0^{(1)}(m)$ і $\kappa_0^{(1)}(m)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \kappa_0^{(2)}(m) = 0$. Тобто, починаючи з якогось номера, $\kappa_0^{(2)}(m) \le c$.

Нехай $T'' = \min(T_2\sqrt{n}, T)$. З (1) слідує

$$\sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{T''} \left| f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int\limits_{T''}^{T} \left| f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right|^n \frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_{T''}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa_0(m)}{cn^{\frac{m-1}{2}}} = I_1'' + I_2'' + I_3'' + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{\kappa_0(m)}{cn^{\frac{m-1}{2}}}. \qquad (6)$$

При $|t| \le T_2\sqrt{n}$

$$\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| \le \left(\frac{|t|^{m+1}}{n^{\frac{m-1}{2}}(m+1)!}\kappa_0^{(1)}(m) + \frac{2|t|^m}{n^{\frac{n-2}{2}}m!}\kappa_0^{(1)}(m)\right)e^{-c_2t^2\frac{n-1}{n}},$$

а

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{T''}\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t} \le C_7\left(\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(m)}{n^{\frac{m-2}{2}}}\right). \tag{7}$$

Якщо $m = 2$, то $T_2\sqrt{n} = T$ і $I_2'' = 0$ та $I_3'' = 0$. Якщо $\kappa_0^{(2)}(2) \le c$, то остання нерівність справедлива. Якщо ж $\kappa_0^{(2)}(2) > c$, то твердження теореми стає очевидним.

При $m \ge 3$ використаємо умову Крамера $\lim\limits_{|t|\to\infty}|f(t)| < 1$, звідки слідує, що існує число $b \in (0,1)$ таке, що при $|t| > T_2$ $\left|f\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right| \le b$. Тоді

$$I_2'' = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T''}^{T}\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right|\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_2}^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right|\frac{dt}{t} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T_2}^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\left|f^n\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right|\frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2b^n}{\pi}\cdot\int\limits_{T_2}^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\frac{dt}{t} = \frac{2b^n}{\pi}\ln|t|\Bigg|_{T_2}^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \le \frac{2b^n}{\pi}\ln\frac{T}{\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{2b^n}{\pi}\left(\ln\frac{c}{\kappa_0(m)}n^{\frac{m-1}{2}}n^{-\frac{1}{2}} - \ln\left(\frac{c}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right) = \frac{2b^n}{\pi}\ln\left(\left(\frac{c}{\kappa_0(m)}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}n^{\frac{m-1}{2}}\right). \tag{8}$$

І зрештою

$$I_3'' = \frac{2}{\pi}\int\limits_{T''}^{T}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int\limits_{T''}^{T}\left(\frac{t}{T''}\right)^{m-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{c}\cdot\frac{1}{n^{\frac{m-1}{2}}}\int\limits_0^{\infty}t^{m-2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \le C_8\frac{\kappa_0^{(1)}(m)}{n^{\frac{m-1}{2}}}. \tag{9}$$

Таким чином, із (6), (7), (8), (9) випливає твердження теореми.

1. *Студнев Ю. П.* Об одной форме оценки скорости сходимости к нормальному закону // УМЖ. – 1968.– Т. 20. – № 2. – С. 281–285.
2. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Слюсарчук П. В., Поляк І. Й.* Деякі оцінки швидкості збіжності в центральній граничній теоремі // Науковий вісник Ужгород. нац. ун-ту. Серія матем.– 1997.– Вип. 2.– С. 104–107.
4. *Боярищева Т. В.* Оцінка швидкості збіжності до нормального закону функцій розподілу сум випадкових величин // Тези X Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука. – Київ, 2004. – С. 574.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. – 720 с.

Одержано 10.02.2014