МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.Л.Рего

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО ІНТЕҐРУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

(*МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА З ЛАБОРАТОРНИХ ЗАНЯТЬ*)

УЖГОРОД 2006

ЗМІСТ

ВСТУП

Диференціальні рівняння досить часто зустрічаються при дослідженні різноманітних прикладних задач. При цьому в багатьох випадках доводиться мати справу з рівняннями, загальний розв’язок яких не знаходиться в квадратурах. Тому виникає необхідність застосовувати методи, які дозволяють знайти наближений розв’язок поставленої задачі.

Методи, які дають наближений розв’язок у вигляді аналітичного виразу, називають ***аналітичними***. Одним із найпростіших таких методів є метод послідовних наближень Пікара, котрий використовують, зокрема, для доведення існування розв’язку задачі Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

При цьому точний розв’язок одержується як границя послідовності $\{y_n(x)\}$, $n = \overline{0,\infty}$, де

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y_{n-1}(x)]dx, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Методи, які дають наближений розв’язок у вигляді таблиці значень шуканої функції у деякій послідовності точок заданого відрізка, називають ***числовими***. Курс "Числові методи наближеного інтеґрування звичайних диференціальних рівнянь" знайомить студентів з деякими найбільш поширеними на практиці числовими алґоритмами наближеного інтеґрування задач Коші та крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, такими як методи Ейлера, Рунґе-Кутта, Адамса, Ньютона, Штьормера, скінчено-різницеві методи тощо. Даються також варіанти індивідуальних завдань, згідно з якими студенти виконують лабораторні роботи з метою практичного застосування викладених методів.

Методи, які дозволяють подати шуканий розв’язок в аналітичному вигляді, але при цьому деякі його параметри чи коефіцієнти знаходяться числово, називають ***числово-аналітичними***. Один із розділів даного курсу охоплює ряд числово-аналітичних методів, детально викладених у курсі "Крайові задачі та методи їх інтеґрування", який читається паралельно, поскільки при наближеному інтеґруванні крайових задач за допомогою цих методів широко використовуються різноманітні числові алґоритми.

РОЗДІЛ 1
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$y' = f(x, y); \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Будемо вважати, що функція $f(x,y)$ справджує всі умови існування і єдиності розв'язку задачі (1),(2).

Нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (1),(2) на деякому відрізку $[a,b]$, де, як правило, $a = x_0$. Для побудови розв'язку застосовуватимемо різноманітні числові методи. За допомогою таких методів шукана функція знаходиться в певній послідовності точок заданого відрізка.

I. Метод Ейлера та його модифікації

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин. Одержимо послідовність точок $\{x_0, \quad x_1, \quad ..., \quad x_n\}$, де $x_0 = a$, $x_n = b$. Якщо позначити крок інтеґрування через $h = (b-a)/n$, то всі точки послідовності можна записати у вигляді

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{0, n}.$$

Виділимо деякий відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ між двома сусідніми точками послідовності та проінтеґруємо рівняння (1) по змінній x на цьому відрізку. Одержимо:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx.$$

Введемо позначення: $y(x_i) = y_i$. Тоді останню рівність можна записати у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx. \tag{3}$$

Формула (3) є вихідною для побудови алґоритмів ряду числових методів.

Метод Ейлера. Замінимо в формулі (3) функцію $f(x,y)$ її значенням на лівому кінці відрізка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i)dx.$$

Виконавши інтеґрування, одержимо розрахункову формулу методу Ейлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right), \quad i = \overline{0, n-1}. \qquad \text{(Iа)}$$

Формула (Iа) на кожному кроці дає похибку порядку $o\left(h^2\right)$.

Справді, нехай відоме значення розв'язку $y(x)$ в деякій точці x відрізка $[a,b]$ й потрібно знайти його значення в точці $x+h$. Тоді з очевидної рівності

$$y(x+h) - y(x) = \int_0^h y'(x+t)dt,$$

розклавши підінтеґральну функцію в ряд по степенях змінної t

$$y'(x+t) = y'(x) + ty''(\bar{x}) + \ldots, \quad \bar{x} \in [x, x+t],$$

одержимо:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + 0{,}5h^2 y''(\bar{x}) + \ldots$$

Беручи до уваги рівняння (1), матимемо

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + 0{,}5h^2 y''(\bar{x}) + \ldots$$

Поклавши в останній рівності $x = x_i$, одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + o\left(h^2\right).$$

Удосконалений метод Ейлера. Замінимо в формулі (3) функцію $f(x,y)$ її значенням у середній точці $x_{i+0,5}$ відрізка $[x_i, x_{i+1}]$:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+0,5}, y_{i+0,5})dx.$$

Виконавши інтеґрування (підінтеґральна функція, як і в попередньому випадку, є сталою), одержимо розрахункову формулу удосконаленого методу Ейлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+0,5}, y_{i+0,5}\right), \quad i = \overline{0, n-1}, \qquad \text{(Iб)}$$

де $x_{i+0,5} = 0{,}5\left(x_i + x_{i+1}\right)$. Значення $y_{i+0,5}$ обчислюють, користуючись методом Ейлера (Iа) з кроком $h/2$:

$$y_{i+0,5} = y_i + 0{,}5hf\left(x_i, y_i\right). \qquad (4)$$

Отже, при застосуванні удосконаленого методу Ейлера на кожному кроці спочатку слід обчислити значення $y_{i+0,5}$ згідно формули (4), а потім за допомогою формули (Iб) знайти y_{i+1}. Удосконалений метод Ейлера має похибку порядку $o\left(h^3\right)$.

Удосконалений метод Ейлера-Коші. Апроксимуємо в формулі (3) функцію $f(x,y)$ рівнянням прямої, яка проходить через точки $\left(x_i, f_i\right)$ та $\left(x_{i+1}, f_{i+1}\right)$, де $f_i = f\left(x_i, y_i\right)$, $f_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)$:

$$f(x,y) = f_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\left(f_{i+1} - f_i\right). \tag{5}$$

Підклавши вираз (5) у формулу (3) і виконавши інтеґрування, одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}5h\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right)\right]. \tag{6}$$

Формула (6) є основою для побудови методів типу Ейлера-Коші. Зокрема, удосконалений метод Ейлера-Коші полягає в наступному. На кожному кроці ітерацій спочатку за методом Ейлера (Іа) обчислюють значення

$$\widetilde{y}_{i+1} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right),$$

а потім знаходять y_{i+1} з використанням формули (6):

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}5h\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, \widetilde{y}_{i+1}\right)\right]. \tag{Ів}$$

Удосконалений метод Ейлера-Коші також має похибку порядку $o\left(h^3\right)$.

Удосконалений метод Ейлера-Коші з наступною ітераційною обробкою. Суть цього методу полягає в наступному. На кожному кроці спочатку обчислюють деяке нульове наближення значення y_{i+1} – наприклад, за допомогою методу Ейлера (Іа):

$$y_{i+1}^0 = y_i + hf\left(x_i, y_i\right). \tag{7}$$

Уточнення одержаного значення проводиться за формулою

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i + 0{,}5h\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^k\right)\right], \quad k = 0,1,\ldots \tag{Іг}$$

Процес уточнення (Іг) можна припинити, якщо два послідовні наближення y_{i+1}^k та y_{i+1}^{k+1} співпадатимуть з відповідною кількістю десяткових розрядів, або ж справджуватиметься нерівність

$$\left|y_{i+1}^{k+1} - y_{i+1}^k\right| < \varepsilon,$$

де ε – деяке наперед задане число.

Метод Ейлера-Ньютона. Замінимо в формулі (3) функцію $f(x,y)$ її значенням на правому кінці відрізка $\left[x_i, x_{i+1}\right]$:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1}, y_{i+1})dx.$$

Виконавши інтеґрування, одержимо:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+1}, y_{i+1}\right). \tag{8}$$

Введемо позначення: $y_{i+1} = z$. Тоді з (8) одержимо рівняння вигляду

$$F(z) \equiv z - y_i - hf\left(x_{i+1}, z\right) = 0.$$

Вибравши деяке нульове наближення z^0, значення кореня одержаного рівняння можна уточнити методом Ньютона за формулою

$$z^{k+1} = z^k - \frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Звідси випливає алґоритм методу Ейлера-Ньютона: узявши за нульове наближення y_{i+1}^0, наприклад, значення (7), уточнення проводять за формулою

$$y_{i+1}^{k+1} = y_{i+1}^k - \frac{y_{i+1}^k - y_i - hf\left(x_{i+1}, y_{i+1}^k\right)}{1 - hf'_y\left(x_{i+1}, y_{i+1}^k\right)}, \quad k = 0,1,... \tag{Ід}$$

до досягнення потрібної точності.

II. Методи Рунґе-Кутта

Розглянемо деякий відрізок $[x, x+h] \subset [a,b]$ і проінтеґруємо рівняння (1) по змінній x на цьому відрізку. Одержимо:

$$y(x+h) - y(x) = \int_x^{x+h} f(t, y(t))dt. \tag{9}$$

Введемо нову змінну інтеґрування α згідно закону $t = x + \alpha h, \;\; dt = hd\alpha.$ Тоді рівність (9) запишеться у вигляді

$$y(x+h) - y(x) = h\int_0^1 f(x + \alpha h, y(x + \alpha h))d\alpha.$$

Позначимо праву частину останньої рівності через $\Delta y \equiv y(x+h) - y(x).$ Тоді для знаходження $y(x+h)$ одержимо формулу

$$y(x+h) = y(x) + \Delta y. \tag{10}$$

Отже, якщо відоме значення $y(x)$, то для обчислення $y(x+h)$ необхідно спершу знайти $\Delta y = h\int_0^1 f(x + \alpha h, y(x + \alpha h))d\alpha.$

У методах типу Рунґе-Кутта (основна ідея методу, подана Рунґе, була уточнена Кутта і Хейном для випадку рівнянь першого порядку) розглядають три системи чисел:

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad ..., \quad \alpha_q;$$
$$\beta_{21}, \quad \beta_{31}, \quad \beta_{32}, \quad ..., \quad \beta_{q,1}, \quad \beta_{q,2}, \quad ..., \quad \beta_{q,q-1};$$
$$p_1, \quad p_2, \quad ..., \quad p_q,$$

а також вводять у розгляд величини:

$$k_1(h) = hf(x, y);$$
$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h; y + \beta_{21} k_1(h));$$
$$k_3(h) = hf(x + \alpha_3 h; y + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h));$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$k_q(h) = hf\left(x + \alpha_q h; y + \beta_{q,1} k_1(h) + ... + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)\right).$$

Будемо вважати, що $k_i(h) \approx hf\left(x + \alpha_i h, y\left(x + \alpha_i h\right)\right), \;\; i = \overline{2,q}.$ Апроксимуємо величину Δy в формулі (10) виразом

$$\widetilde{\Delta}y = \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h). \tag{11}$$

Замінимо в формулі (10) величину Δy виразом (11). Одержимо:

$$y(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h). \tag{12}$$

Формула (12) є вихідною для побудови числових алґоритмів методу Рунґе-Кутта.

Введемо в розгляд функцію

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h), \tag{13}$$

яка дає похибку розв’язку на одному кроці ітерацій. Якщо припустити, що $f(x,y)$ є достатньо гладкою функцією, то величини $k_i(h)$, $i = \overline{1,q}$, також є достатньо гладкими. Тоді функцію $\varphi(h)$ можна подати у вигляді ряду по степенях h в околі точки $h = 0$:

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \ldots + \frac{h^s \varphi^{(s)}(0)}{s!} + \frac{h^{s+1}\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!}, \tag{14}$$

де $\theta \in (0;1)$.

Якщо домогтися виконання умов

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0) = 0, \tag{15}$$

то на одному кроці ітерацій похибка методу буде

$$\varphi(h) = \frac{h^{s+1}\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} = o\left(h^{s+1}\right).$$

Число s називають порядком ітераційної схеми. Зауважимо, що для заданого s підлягає визначенню $\frac{1}{2}\left(s^2 + 3s - 2\right)$ коефіцієнтів методу Рунґе-Кутта відповідного порядку.

Метод Рунґе-Кутта першого порядку. Покладемо в формулі (13) $q = 1$. Тоді

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x,y).$$

Очевидно, що $\varphi(0) \equiv 0$. Домагатимемося виконання інших умов (15) відповідним вибором єдиного невідомого параметру p_1. Одержимо:

$$\varphi'(0) \equiv y'(x) - p_1 f(x,y) = (1 - p_1) f;$$
$$\varphi''(0) \equiv y''(x) = f'_y \cdot f + f'_x.$$

Вираз $\varphi'(0)$ перетворюється в нуль при значенні параметру $p_1 = 1$. Вираз $\varphi''(0)$ не містить параметрів, тому перетворити його в нуль не можна. Отже, похибка методу на одному кроці ітерацій буде

$$\varphi(h) = \frac{h^2 \varphi''(\theta h)}{2!} = o\left(h^2\right),$$

тобто порядок ітераційної схеми $s = 1$.

Підклавши в (12) $q=1$ і $p_1=1$, одержимо розрахункову формулу методу Рунґе-Кутта першого порядку:

$$y(x+h)=y(x)+hf(x,y).$$

Поклавши $x=x_i$, можна записати останню формулу у більш звичному вигляді

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),$$

аналоґічному формулі (Іа). Отже, метод Рунґе-Кутта першого порядку є метод Ейлера.

Метод Рунґе-Кутта другого порядку. Покладемо в формулі (13) $q=2$. Тоді

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(x)-p_1k_1(h)-p_2k_2(h)=y(x+h)-y(x)-p_1hf(x,y)-p_2hf(\bar{x},\bar{y}),$$

де $\bar{x}=x+\alpha_2 h,\ \bar{y}=y+\beta_{21}hf(x,y)$.

Очевидно, що $\varphi(0)\equiv 0$. Домагатимемося виконання інших умов (15) відповідним вибором чотирьох невідомих параметрів p_1, p_2, α_2 та β_{21}. Одержимо:

$$\varphi'(0)\equiv y'(x)-p_1f(x,y)-p_2f(x,y)=(1-p_1-p_2)f;$$

$$\varphi''(0)\equiv(1-2p_2\alpha_2)f'_x+(1-2p_2\beta_{21})f'_y\cdot f;$$

$$\varphi'''(0)\equiv(1-3p_2\alpha_2)f''_{xx}+2(1-3p_2\alpha_2\beta_{21})f''_{xy}\cdot f+\left(1-3p_2\beta_{21}^2\right)f''_{yy}\cdot f^2+y''(x)\cdot f'_y.$$

Вираз $\varphi'''(0)$ містить доданок, що не залежить від параметрів, тому перетворити його в нуль не можна. Прирівнявши до нуля вирази $\varphi'(0)$ та $\varphi''(0)$, одержимо систему трьох рівнянь для визначення чотирьох невідомих параметрів:

$$\begin{cases}1-p_1-p_2=0;\\ 1-2p_2\alpha_2=0;\\ 1-2p_2\beta_{21}=0.\end{cases}\qquad(16)$$

З системи (16) можна одержати безліч наборів з чотирьох параметрів, котрі даватимуть різні розрахункові формули. Найбільш застосовними з них є наступні алґоритми:

1) $p_1=0,\ p_2=1,\ \alpha_2=\frac{1}{2},\ \beta_{21}=\frac{1}{2}$ – удосконалений метод Ейлера (Іб);

2) $p_1=\frac{1}{2},\ p_2=\frac{1}{2},\ \alpha_2=1,\ \beta_{21}=1$ – удосконалений метод Ейлера-Коші (Ів);

3) при $p_1=\frac{1}{4},\ p_2=\frac{3}{4},\ \alpha_2=\frac{2}{3},\ \beta_{21}=\frac{2}{3}$ одержуємо розрахункову формулу

$$y(x+h)=y(x)+\frac{1}{4}\left[k_1(h)+3k_2(h)\right],\qquad(\text{IIa})$$

де

$$k_1(h)=hf(x,y);$$

$$k_2(h)=hf\left(x+\tfrac{2}{3}h;y+\tfrac{2}{3}k_1(h)\right)$$

тощо. Похибка всіх таких методів на одному кроці ітерацій буде

$$\varphi(h)=\frac{h^3\varphi'''(\theta h)}{3!}=o\left(h^3\right),$$

тобто порядок ітераційних схем $s=2$.

Метод Рунґе-Кутта третього порядку. Покладемо в формулі (13) $q=3$. Тоді

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(x)-p_1k_1(h)-p_2k_2(h)-p_3k_3(h)=$$
$$=y(x+h)-y(x)-p_1hf(x,y)-p_2hf(\bar{x},\bar{y})-p_3hf(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}),$$

де $\bar{x}=x+\alpha_2h$, $\bar{\bar{x}}=x+\alpha_3h$, $\bar{y}=y+\beta_{21}hf(x,y)$, $\bar{\bar{y}}=y+\beta_{31}hf(x,y)+\beta_{32}hf(\bar{x},\bar{y})$.

Очевидно, що $\varphi(0)\equiv 0$. Домагатимемося виконання інших умов (15) відповідним вибором вісьмох невідомих параметрів p_1, p_2, p_3, α_2, α_3, β_{21}, β_{31} та β_{32}. Одержимо:

$$\varphi'(0)\equiv y'(x)-p_1f(x,y)-p_2f(x,y)-p_3f(x,y)=(1-p_1-p_2-p_3)f;$$
$$\varphi''(0)\equiv(1-2p_2\alpha_2-2p_3\alpha_3)f'_x+[1-2p_2\beta_{21}-2p_3(\beta_{31}+\beta_{32})]f'_yf;$$
$$\varphi'''(0)\equiv\left(1-3p_2\alpha_2^2-3p_3\alpha_3^2\right)f''_{xx}+2[1-3p_2\alpha_2\beta_{21}-3p_3\alpha_3(\beta_{31}+\beta_{32})]f''_{xy}f+$$
$$+\left[1-3p_2\beta_{21}^2-3p_3(\beta_{31}+\beta_{32})^2\right]f''_{yy}f^2+(1-6p_3\alpha_2\beta_{32})f'_yf'_x+(1-6p_3\beta_{21}\beta_{32})f'^2_yf.$$

Вираз $\varphi^{(IV)}(0)$ намагатися перетворити в нуль недоцільно, поскільки, прирівнявши до нуля вирази $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ та $\varphi'''(0)$, для визначення вісьмох невідомих параметрів одержуємо систему вісьмох рівнянь:

$$\begin{cases}1-p_1-p_2-p_3=0;\\ 1-2p_2\alpha_2-2p_3\alpha_3=0;\\ 1-2p_2\beta_{21}-2p_3(\beta_{31}+\beta_{32})=0;\\ 1-3p_2\alpha_2^2-3p_3\alpha_3^2=0;\\ 1-3p_2\alpha_2\beta_{21}-3p_3\alpha_3(\beta_{31}+\beta_{32})=0;\\ 1-3p_2\beta_{21}^2-3p_3(\beta_{31}+\beta_{32})^2=0;\\ 1-6p_3\alpha_2\beta_{32}=0;\\ 1-6p_3\beta_{21}\beta_{32}=0.\end{cases} \tag{17}$$

Усі рівняння системи (17) справджуються, наприклад, при таких наборах параметрів (наведемо найбільш застосовні формули):

1) при $p_1=\frac{1}{6}$, $p_2=\frac{2}{3}$, $p_3=\frac{1}{6}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=1$, $\beta_{21}=\frac{1}{2}$, $\beta_{31}=-1$, $\beta_{32}=2$ відповідна розрахункова формула має вигляд

$$y(x+h)=y(x)+\frac{1}{6}[k_1(h)+4k_2(h)+k_3(h)], \tag{ІІб}$$

де

$$k_1(h)=hf(x,y);$$
$$k_2(h)=hf(x+0{,}5h;y+0{,}5k_1(h));$$
$$k_3(h)=hf(x+h;y+2k_2(h)-k_1(h));$$

2) при $p_1=\frac{1}{4}$, $p_2=0$, $p_3=\frac{3}{4}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$, $\alpha_3=\frac{2}{3}$, $\beta_{21}=\frac{1}{3}$, $\beta_{31}=0$, $\beta_{32}=\frac{2}{3}$ одержуємо розрахункову формулу

$$y(x+h)=y(x)+\frac{1}{4}\left[k_1(h)+3k_3(h)\right], \qquad \text{(IIв)}$$

де

$$k_1(h)=hf(x,y);$$
$$k_2(h)=hf\left(x+\tfrac{1}{3}h;\,y+\tfrac{1}{3}k_1(h)\right);$$
$$k_3(h)=hf\left(x+\tfrac{2}{3}h;\,y+\tfrac{2}{3}k_2(h)\right);$$

3) при $p_1=\frac{2}{3}$, $p_2=\frac{1}{3}$, $p_3=\frac{2}{9}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{3}{4}$, $\beta_{21}=\frac{1}{2}$, $\beta_{31}=0$, $\beta_{32}=\frac{3}{4}$ дістанемо формулу

$$y(x+h)=y(x)+\frac{1}{9}\left[4k_1(h)+3k_2(h)+2k_3(h)\right], \qquad \text{(IIг)}$$

де

$$k_1(h)=hf(x,y);$$
$$k_2(h)=hf\left(x+0{,}5h;\,y+0{,}5k_1(h)\right);$$
$$k_3(h)=hf\left(x+0{,}75h;\,y+0{,}75k_2(h)\right)$$

тощо. Похибка всіх таких методів на одному кроці ітерацій буде

$$\varphi(h)=\frac{h^4\varphi^{(IV)}(\theta h)}{4!}=o\left(h^4\right),$$

тобто порядок ітераційної схеми $s=3$.

Метод Рунґе-Кутта четвертого порядку. Покладемо в формулі (13) $q=4$. Тоді

$$\varphi(h)=y(x+h)-y(x)-p_1k_1(h)-p_2k_2(h)-p_3k_3(h)-p_4k_4(h)=$$
$$=y(x+h)-y(x)-p_1hf(x,y)-p_2hf(\bar{x},\bar{y})-p_3hf\left(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\right)-p_4hf\left(\bar{\bar{\bar{x}}},\bar{\bar{\bar{y}}}\right),$$

де $\bar{x}=x+\alpha_2h$, $\bar{\bar{x}}=x+\alpha_3h$, $\bar{\bar{\bar{x}}}=x+\alpha_4h$, $\bar{y}=y+\beta_{21}hf(x,y)$, $\bar{\bar{y}}=y+\beta_{31}hf(x,y)+\beta_{32}hf(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{\bar{\bar{y}}}=y+\beta_{41}hf(x,y)+\beta_{42}hf(\bar{x},\bar{y})+\beta_{42}hf\left(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}\right)$.

Очевидно, що $\varphi(0)\equiv 0$. Домагатимемося виконання інших умов (15) відповідним вибором тринадцяти невідомих параметрів p_1, p_2, p_3, p_4, α_2, α_3, α_4, β_{21}, β_{31}, β_{32} β_{41}, β_{42} та β_{43}. Одержимо:

$$\varphi'(0)\equiv y'(x)-\left(p_1+p_2+p_3+p_4\right)f(x,y)=\left(1-p_1-p_2-p_3-p_4\right)f;$$
$$\varphi''(0)\equiv\left(1-2p_2\alpha_2-2p_3\alpha_3-2p_4\alpha_4\right)f'_x+\left[1-2p_2\beta_{21}-2p_3B_3-2p_4B_4\right]f'_yf;$$
$$\varphi'''(0)\equiv\left(1-3p_2\alpha_2^2-3p_3\alpha_3^2-3p_4\alpha_4^2\right)f''_{xx}+2\left[1-3p_2\alpha_2\beta_{21}-3p_3\alpha_3B_3-3p_4\alpha_4B_4\right]f''_{xy}f+$$
$$+\left[1-3p_2\beta_{21}^2-3p_3B_3^2-3p_4B_4^2\right]f''_{yy}f^2+\left[1-6p_3\alpha_2\beta_{32}-6p_4\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)\right]f'_yf'_x+$$
$$+\left[1-6p_3\beta_{21}\beta_{32}-6p_4\left(\beta_{21}\beta_{42}+\beta_{43}B_3\right)\right]f_y'^2f;$$

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(\mathrm{IV})}(0) \equiv & \left(1-4p_2\alpha_2^3-4p_3\alpha_3^3-4p_4\alpha_4^3\right)f'''_{xxx}+3\left[1-4p_2\alpha_2^2\beta_{21}-4p_3\alpha_3^2\mathrm{B}_3-4p_4\alpha_4^2\mathrm{B}_4\right]f'''_{xxy}f+ \\
& +3\left[1-4p_2\alpha_2\beta_{21}^2-3p_3\alpha_3\mathrm{B}_3^2-3p_4\alpha_4\mathrm{B}_4^2\right]f'''_{xyy}f^2+\left[1-4p_2\beta_{21}^3-4p_3\mathrm{B}_3^3-4p_4\mathrm{B}_4^3\right]f'''_{yyy}f^3+ \\
& +\left[1-12p_3\alpha_2^2\beta_{32}-12p_4\left(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{42}\right)\right]f''_{xx}f'_y+ \\
& +3\left[1-8p_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}-8p_4\alpha_4\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)\right]f''_{xy}f'_x+ \\
& +3\left[1-8p_3\alpha_2\beta_{32}\mathrm{B}_3-8p_4\mathrm{B}_4\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)\right]f''_{yy}f'_xf+ \\
& +\left[5-24p_3\beta_{21}\beta_{32}\left(\alpha_2+\alpha_3\right)-24p_4\left(\left(\alpha_2+\alpha_4\right)\beta_{21}\beta_{42}+\left(\alpha_3+\alpha_4\right)\mathrm{B}_3\beta_{43}\right)\right]f''_{xy}f'_yf+ \\
& +4\left[1-3p_3\beta_{21}\beta_{32}\left(\beta_{21}+2\mathrm{B}_3\right)-3p_4\left(2\mathrm{B}_4\left(\beta_{42}\beta_{21}+\beta_{43}\mathrm{B}_3\right)+\beta_{42}\beta_{21}^2+\beta_{43}\mathrm{B}_3^2\right)\right]f''_{yy}f'_yf^2+ \\
& +\left(1-24\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}p_4\right)f'_xf'^2_y+\left(1-24\beta_{21}\beta_{32}\beta_{43}p_4\right)f'^3_yf,
\end{aligned}
$$

де $\mathrm{B}_3=\beta_{31}+\beta_{32}$, $\mathrm{B}_4=\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}$.

Вираз $\varphi^{(\mathrm{V})}(0)$ намагатися перетворити в нуль недоцільно, поскільки, прирівнявши до нуля вирази $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, $\varphi'''(0)$ та $\varphi^{(\mathrm{IV})}(0)$, для визначення тринадцяти невідомих параметрів одержуємо наведену нижче систему з дев'ятнадцяти рівнянь:

$$
\begin{cases}
1-p_1-p_2-p_3-p_4=0; \\
1-2p_2\alpha_2-2p_3\alpha_3-2p_4\alpha_4=0; \\
1-2p_2\beta_{21}-2p_3\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)-2p_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)=0; \\
1-3p_2\alpha_2^2-3p_3\alpha_3^2-3p_4\alpha_4^2=0; \\
1-3p_2\alpha_2\beta_{21}-3p_3\alpha_3\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)-3p_4\alpha_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)=0; \\
1-3p_2\beta_{21}^2-3p_3\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)^2-3p_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)^2=0; \\
1-6p_3\alpha_2\beta_{32}-6p_4\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)=0; \\
1-6p_3\beta_{21}\beta_{32}-6p_4\left[\beta_{21}\beta_{42}+\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)\beta_{43}\right]=0; \\
1-4p_2\alpha_2^3-4p_3\alpha_3^3-4p_4\alpha_4^4=0; \\
1-4p_2\alpha_2^2\beta_{21}-4p_3\alpha_3^2\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)-4p_4\alpha_4^2\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)=0; \\
1-4p_2\alpha_2\beta_{21}^2-4p_3\alpha_3\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)^2-4p_4\alpha_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)^2=0; \\
1-4p_2\beta_{21}^3-4p_3\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)^3-3p_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)^3=0; \\
1-12p_3\alpha_2^2\beta_{32}-12p_4\left(\alpha_2^2\beta_{42}+\alpha_3^2\beta_{43}\right)=0; \\
1-8p_3\alpha_2\alpha_3\beta_{32}-8p_4\alpha_4\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)=0; \\
1-8p_3\alpha_2\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)\beta_{32}-6p_4\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)\left(\alpha_2\beta_{42}+\alpha_3\beta_{43}\right)=0; \\
5-24p_3\left(\alpha_2+\alpha_3\right)\beta_{21}\beta_{32}-24p_4\left[\left(\alpha_2+\alpha_4\right)\beta_{21}\beta_{42}+\left(\alpha_3+\alpha_4\right)\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)\beta_{43}\right]=0; \\
1-3p_3\beta_{21}\beta_{32}\left[\beta_{21}+2\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)\right]-3p_4\Big[2\left(\beta_{41}+\beta_{42}+\beta_{43}\right)\left(\beta_{42}\beta_{21}+\beta_{43}\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)\right)+ \\
\qquad +\beta_{42}\beta_{21}^2+\beta_{43}\left(\beta_{31}+\beta_{32}\right)^2\Big]=0; \\
1-24p_4\alpha_2\beta_{32}\beta_{43}=0; \\
1-24p_4\beta_{21}\beta_{32}\beta_{43}=0.
\end{cases}
\tag{18}
$$

Усі рівняння системи (18) справджуються, наприклад, при таких наборах параметрів (наведемо найбільш застосовні формули):

1) при $p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2},$
$\beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 0, \quad \beta_{43} = 1$

одержимо розрахункову формулу класичного методу Рунґе-Кутта

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}\left[k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h)\right], \tag{IIґ}$$

де

$$k_1(h) = hf(x, y);$$
$$k_2(h) = hf(x + 0{,}5h; y + 0{,}5k_1(h));$$
$$k_3(h) = hf(x + 0{,}5h; y + 0{,}5k_2(h));$$
$$k_4(h) = hf(x + h; y + k_3(h));$$

2) при $p_1 = \frac{1}{8}, \quad p_2 = \frac{3}{8}, \quad p_3 = \frac{3}{8}, \quad p_4 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{21} = \frac{1}{3},$
$\beta_{31} = -\frac{1}{3}, \quad \beta_{32} = 1, \quad \beta_{41} = 1, \quad \beta_{42} = -1, \quad \beta_{43} = 1$

дістанемо формулу методу "три восьмих"

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{8}\left[k_1(h) + 3k_2(h) + 3k_3(h) + k_4(h)\right], \tag{IIд}$$

де

$$k_1(h) = hf(x, y);$$
$$k_2(h) = hf\left(x + \tfrac{1}{3}h; y + \tfrac{1}{3}k_1(h)\right);$$
$$k_3(h) = hf\left(x + \tfrac{2}{3}h; y - \tfrac{1}{3}k_1(h) + k_2(h)\right);$$
$$k_4(h) = hf(x + h; y + k_1(h) - k_2(h) + k_3(h));$$

3) при $p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{2}{3}, \quad p_4 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{21} = \frac{1}{4},$
$\beta_{31} = 0, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{41} = 1, \quad \beta_{42} = -2, \quad \beta_{43} = 2$

відповідна розрахункова формула має вигляд

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}\left[k_1(h) + 4k_3(h) + k_4(h)\right], \tag{IIе}$$

де

$$k_1(h) = hf(x, y);$$
$$k_2(h) = hf(x + 0{,}25h; y + 0{,}25k_1(h));$$
$$k_3(h) = hf(x + 0{,}5h; y + 0{,}5k_2(h));$$
$$k_4(h) = hf(x + h; y + k_1(h) - 2k_2(h) + 2k_3(h))$$

тощо. Зауважимо, що алґоритм класичного методу Рунґе-Кутта четвертого порядку (IIґ) є найбільш поширеним засобом числового інтеґрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь, покладеним в основу математичного забезпечення ЕОМ.

Підібравши інші розв’язки системи (18), можна будувати різні розрахункові формули. Похибка всіх таких методів на одному кроці ітерацій буде

$$\varphi(h)=\frac{h^5\varphi^{(V)}(\theta h)}{5!}=o\left(h^5\right),$$

тобто порядок ітераційної схеми $s=4$.

Аналоґічно будуються алґоритми методів Рунґе-Кутта більш високих порядків.

III. Багатокрокові методи

Багатокроковими називаються числові алґоритми, застосування яких вимагає від користувача знання кількох перших значень наближеного розв'язку задачі Коші (1),(2). Ці перші значення, як правило, обчислюють за допомогою інших числових методів (Ейлера, Рунґе-Кутта тощо), після чого для знаходження наступних значень наближеного розв'язку використовують уже багатокроковий алґоритм.

Нехай відомі m перших значень наближеного розв'язку $y_1,...,y_m$ у точках $x_i=x_0+ih,\ i=\overline{1,m}.$ Запишемо рівняння (1) в інтеґральній формі на проміжку $\left[x_{i-j},x_{i+1}\right]$, де $j\in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$:

$$y_{i+1}=y_{i-j}+\int\limits_{x_{i-j}}^{x_{i+1}}f(x,y)dx,\quad i=\overline{m,\infty}.$$

Наступні наближення шукатимемо з рівності

$$y_{i+1}=y_{i-j}+\int\limits_{x_{i-j}}^{x_{i+1}}P_m(x)dx,\quad i=\overline{m,\infty},\tag{19}$$

де $P_m(x)$ – інтерполяційний многочлен, значення якого в точках $x_0,x_1,...,x_m$ співпадають з відповідними значеннями $f\left(x_k,y_k\right)=f_k,\ k=\overline{0,m}.$

Ввівши нову змінну інтеґрування $t=h^{-1}\left(x-x_i\right)$, із (19) одержимо:

$$y_{i+1}=y_{i-j}+h\int\limits_{-j}^{1}P_m\left(x_i+th\right)dt,\quad i=\overline{m,\infty}.\tag{20}$$

Беручи в (20) різні значення j та форми інтерполяційних многочленів, можемо одержати різноманітні екстраполяційні формули, котрі дозволяють безпосередньо знаходити кожне наступне значення наближеного розв'язку за відомими попередніми значеннями. Якщо ж при побудові інтерполяційного многочлена використовується значення f_{i+1}, то одержимо інтерполяційні формули, де y_{i+1} знаходять з відповідного алґебраїчного чи трансцендентного рівняння найчастіше методом послідовних наближень.

Екстраполяційний метод Адамса. Візьмемо в (20) $j=0$, а за $P_m(x)$ – інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, починаючи з точки x_i:

$$P_m(x) = f_i + t\Delta f_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{m!}\Delta^m f_{i-m},$$

де $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Тоді з (20) одержимо загальну розрахункову формулу екстраполяційного методу Адамса:

$$\Delta y_i = q_i + \sum_{j=1}^{m} C_j \Delta^j q_{i-j}, \qquad \text{(IIIa)}$$

де

$$q_i = hf_i, \quad \Delta q_i = q_{i+1} - q_i, \quad \Delta^j q_i = \Delta\left(\Delta^{j-1} q_i\right), \quad C_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 [t(t+1)\ldots(t+j-1)]dt.$$

Перші значення сталих C_j рівні

$$C_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 t(t+1)dt = \frac{5}{12}, \quad C_3 = \frac{1}{6}\int_0^1 t(t+1)(t+2)dt = \frac{3}{8},$$

$$C_4 = \frac{251}{720}, \quad C_5 = \frac{95}{288}, \quad C_6 = \frac{19087}{60480}, \quad C_7 = \frac{5275}{17280}, \quad C_8 = \frac{1070017}{3628800}, \quad C_9 = \frac{1082753}{7257600}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (IIIa) можна одержати розрахункові формули різного вигляду. Зокрема, якщо в правій частині рівності (IIIa) обмежитися одним доданком, то одержимо формулу Ейлера (Ia). Якщо ж брати більшу кількість доданків, то будемо мати:

$$m = 1: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3f_i - f_{i-1}\right);$$

$$m = 2: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}\right);$$

$$m = 3: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right);$$

$$m = 4: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}\left(1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4}\right);$$

$$m = 5: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1440}\left(4277f_i - 7923f_{i-1} + 9982f_{i-2} - 7299f_{i-3} + 2877f_{i-4} - 475f_{i-5}\right)$$

тощо.

Інтерполяційний метод Адамса. Візьмемо в (19) за $P_m(x)$ – той же інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, але починаючи з точки x_{i+1}:

$$P_m(x) = f_{i+1} + t\Delta f_i + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-1} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{m!}\Delta^m f_{i+1-m},$$

де $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Ввівши нову змінну інтеґрування $t = h^{-1}\left(x - x_{i+1}\right)$, із (19) одержимо:

$$y_{i+1} = y_{i-j} + h\int_{-j-1}^{0} P_m\left(x_{i+1} + th\right)dt, \quad i = \overline{m,\infty}. \qquad (21)$$

Тоді, поклавши $j=0$, з (21) одержимо загальну розрахункову формулу інтерполяційного методу Адамса:

$$\Delta y_i = q_{i+1} + \sum_{j=1}^{m} D_j \Delta^j q_{i-j+1}, \tag{IIIб}$$

де

$$q_i = hf_i, \quad \Delta q_i = q_{i+1} - q_i, \quad \Delta^j q_i = \Delta\left(\Delta^{j-1} q_i\right), \quad D_j = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{0}\left[t(t+1)\ldots(t+j-1)\right]dt.$$

Перші значення сталих D_j рівні

$$D_1 = \int_{-1}^{0} t\,dt = -\frac{1}{2}, \quad D_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} t(t+1)\,dt = -\frac{1}{12}, \quad D_3 = \frac{1}{6}\int_{-1}^{0} t(t+1)(t+2)\,dt = -\frac{1}{24},$$

$$D_4 = -\frac{19}{720}, \quad D_5 = -\frac{3}{160}, \quad D_6 = -\frac{863}{60480}, \quad D_7 = -\frac{275}{24195}, \quad D_8 = -\frac{33953}{3628800}, \quad D_9 = -\frac{57281}{7257600}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (IIIб) можна одержати розрахункові формули різного вигляду, зокрема:

$$m=1: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_{i+1} + f_i\right);$$

$$m=2: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right);$$

$$m=3: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}\right);$$

$$m=4: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}\left(251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3}\right);$$

$$m=5: \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{1440}\left(475f_{i+1} + 142f_i - 798f_{i-1} + 482f_{i-2} - 174f_{i-3} + 27f_{i-4}\right)$$

тощо.

Інтерполяційний метод Адамса, подібно до інших інтерполяційних алґоритмів, використовується для уточнення наближеного розв'язку. Так, узявши значення y_{i+1}, одержане за допомогою деякого екстраполяційного m-крокового методу, за нульове наближення y_{i+1}^{0}, уточнені значення y_{i+1}^{k+1}, $k = 0,1,\ldots$, знаходять методом послідовних наближень із використанням формули (IIIб):

$$y_{i+1}^{k+1} = y_i + q_{i+1}^{k} + \sum_{j=1}^{p} D_j \Delta^j q_{i-j+1}^{k},$$

де $q_{i+1}^{k} = hf(x_i, y_{i+1}^{k})$, $\Delta q_i^{k} = q_{i+1}^{k} - q_i$, $\Delta^2 q_{i-1}^{k} = q_{i+1}^{k} - 2q_i + q_{i-1}$ тощо, а $p \ge m$. Процес уточнень припиняють при досягненні потрібної точності.

Екстраполяційний метод Ньютона. Візьмемо в (20) $j=1$, а за $P_m(x)$ – той же, що й у методі (IIIа), інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, починаючи з точки x_i :

$$P_m(x) = f_i + t\Delta f_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+m-1)}{m!}\Delta^m f_{i-m},$$

де $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Тоді з (20) одержимо загальну розрахункову формулу екстраполяційного методу Ньютона:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2q_i + \sum_{j=1}^{m} E_j \delta^j q_{i-0,5j}, \qquad \text{(IIIв)}$$

де

$$q_i = hf_i, \quad \delta q_i = q_{i+0,5} - q_{i-0,5}, \quad \delta^j q_i = \delta\left(\delta^{j-1} q_i\right), \quad E_j = \frac{1}{j!}\int_{-1}^{1}\left[t(t+1)\ldots(t+j-1)\right]dt.$$

Використовуючи зв'язок між центральними різницями $\delta^j q_i$ та скінченими різницями вперед $\Delta^j q_i$, формулу (IIIв) можна подати аналогічно до формул (IIIа) та (IIIб) у вигляді:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2q_i + \sum_{j=1}^{m} E_j \Delta^j q_{i-j}.$$

Перші значення сталих E_j рівні

$$E_1 = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0, \quad E_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t(t+1)dt = \frac{1}{3}, \quad E_3 = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} t(t+1)(t+2)dt = \frac{1}{3},$$

$$E_4 = \frac{29}{90}, \quad E_5 = \frac{28}{90}, \quad E_6 = \frac{18229}{60480}, \quad E_7 = \frac{35424}{120960}, \quad E_8 = \frac{1036064}{3628800}, \quad E_9 = \frac{2025472}{7257600}.$$

При цьому, виходячи з меж інтеґрування для однакових підінтеґральних функцій, легко бачити, що коефіцієнти екстраполяційного методу Ньютона зв'язані з коефіцієнтами методів Адамса співвідношенням $E_j = C_j + D_j$.

При різних значеннях m із загальної формули (IIIв) можна одержати розрахункові формули різного вигляду, зокрема:

$m = 1$: $\quad y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$;

$m = 2$: $\quad y_{i+1} = y_{i-1} + \dfrac{h}{3}\left(7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right)$;

$m = 3$: $\quad y_{i+1} = y_{i-1} + \dfrac{h}{3}\left(8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3}\right)$;

$m = 4$: $\quad y_{i+1} = y_{i-1} + \dfrac{h}{90}\left(269f_i - 266f_{i-1} + 294f_{i-2} - 146f_{i-3} + 29f_{i-4}\right)$;

$m = 5$: $\quad y_{i+1} = y_{i-1} + \dfrac{h}{90}\left(297f_i - 406f_{i-1} + 674f_{i-2} - 426f_{i-3} + 169f_{i-4} - 28f_{i-5}\right)$

тощо.

Зауважимо, що, обмежившись чотирма доданками суми в формулі (IIIв), часто беруть $E_4 = \frac{1}{3} \approx \frac{29}{90}$. Тоді для випадку $m = 4$ одержимо особливо зручну для застосування розрахункову формулу

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(9f_i - 9f_{i-1} + 10f_{i-2} - 5f_{i-3} + f_{i-4}\right).$$

Інтерполяційний метод Стірлінґа. Нехай у (20) $j = 1$, а за $P_m(x)$ візьмемо інтерполяційну формулу Стірлінґа:

$$P_m(x) = f_i + t\Delta f_{i-1} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 f_{i-2} + \frac{t\left(t^2-1\right)}{3!}\Delta^3 f_{i-3} + \frac{t^2\left(t^2-1\right)}{4!}\Delta^4 f_{i-4} + \ldots,$$

де $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Тоді з (20) одержимо загальну розрахункову формулу методу Стірлінґа:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2q_i + \sum_{j=1}^{m} F_j \delta^j q_i, \tag{22}$$

де

$$q_i = hf\left(x_i, y_i\right),\quad \delta q_i = q_{i+0,5} - q_{i-0,5},\quad \delta^j q_i = \delta\left(\delta^{j-1} q_i\right),\quad F_1 = \frac{1}{1!}\int_{-1}^{1} t dt = 0,$$

$$F_2 = \frac{1}{2!}\int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3},\quad F_3 = \frac{1}{3!}\int_{-1}^{1} t\left(t^2-1\right)dt = 0,\quad F_4 = \frac{1}{4!}\int_{-1}^{1} t^2\left(t^2-1\right)dt = -\frac{1}{90},\quad \ldots$$

Покладемо $F_0 = 2$. Тоді з урахуванням того, що коефіцієнти F_j формули (22) з непарними індексами $j = 2k+1$, $k = \overline{0,\infty}$ рівні нулеві (адже при непарних j інтеґрування по симетричному проміжку ведеться від непарної функції), можемо записати (22) у вигляді

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \sum_{j=0}^{m} F_{2j}\delta^{2j} q_i. \tag{IIIг}$$

Зауважимо, що через скінчені різниці вперед формула (22) запишеться як

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2q_i + \sum_{j=1}^{m} F_j \Delta^j q_{i-0,5j},$$

а формула (IIIг) матиме вигляд

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \sum_{j=0}^{m} F_{2j}\Delta^{2j} q_{i-j}.$$

Тоді при *m*=0 з (IIIг) одержимо екстраполяційну формулу

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i,$$

яка співпадає з наведеною вище екстраполяційною формулою Ньютона для значення *m*=1.

При *m*=1 з (IIIг) одержимо інтерполяційну формулу Стірлінґа

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}\right).$$

Цю формулу можна використовувати для уточнення наближеного розв’язку на кожному кроці ітерацій аналоґічно до інтерполяційних формул Адамса. Так, узявши значення y_{i+1}, одержане за допомогою деякого явного методу (Ейлера, Рунґе-Кутта, екстраполяційних алґоритмів тощо), за нульове наближення y_{i+1}^{0}, уточнені значення y_{i+1}^{k+1}, $k = 0,1,...$, знаходять методом послідовних наближень згідно інтерполяційної формули Стірлінґа:

$$y_{i+1}^{k+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i+1}^{k} + 4f_i + f_{i-1}\right),$$

де $f_{i+1}^{k} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{k})$. Процес уточнень припиняють при досягненні потрібної точності.

Зауважимо, що у випадку $m > 1$ формула (IIIг) не має практичного значення, бо вже при m=2 у праву частину рівності входитиме величина y_{i+2}.

Метод Мілна (IIIг). Ще одним багатокроковим методом розв'язування задачі Коші (1),(2) є метод Мілна, який має четвертий порядок точності.

Нехай відомі значення розв'язку $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,3}$. Значення розв'язку у вузлах $x_i,\ i \geq 4$, обчислюються за два кроки. Спочатку за першою формулою Мілна

$$y_i^{pred} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}\right), \quad i = 4,5,... \tag{23}$$

знаходиться значення-проґноз (*prediction*). Відтак за другою формулою Мілна здійснюється корекція (*correction*) y_i^{pred}:

$$y_i^{corr} = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(f_{i-2} + 4f_{i-1} + \bar{f}_i\right), \quad i = 4,5,..., \tag{24}$$

де $\bar{f}_i = f\left(x_i, y_i^{pred}\right)$. Одержане значення можна уточнити ще краще, використавши замість y_i^{pred} у формулі (24) y_i^{corr} і коректуючи знов.

Метод Мілна дозволяє на кожному кроці контролювати точність одержаного результату за формулою

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29}\left|y_i^{pred} - y_i^{corr}\right|.$$

Якщо $\varepsilon_i \leq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – задана гранична похибка розв'язку, то можна покласти $y_i \approx y_i^{corr}$ і $f_i \approx f\left(x_i, y_i^{corr}\right)$. Далі переходять до обчислення найближчого наступного значення y_{i+1}, повторюючи вказаний вище процес. Якщо ж $\varepsilon_i > \varepsilon$, то слід удвічі зменшити крок інтеґрування h і перерахувати початковий відрізок. Недоліком цього методу є досить вузька область стійкості.

Метод Хеммінґа (IIIд). Завдяки простій реалізації та стійкості в обчислювальній практиці застосовний також метод Хеммінґа [3]. Цей метод має четвертий порядок точності. Його особливістю є те, що він дозволяє уточнювати значення як проґнозу, так і корекції.

Згідно методу Хеммінґа проґноз наближеного значення розв'язку в точці x_i за стартовими значеннями y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, y_{i-4} відбувається за формулою

$$y_i^{(0)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}\right), \quad i = 4,5,...,$$

тобто за тією ж першою формулою Мілна (23). Знайдене значення прогнозу уточнюється згідно формули

$$\bar{y}_i^{(0)} = y_i^{(0)} + \frac{112}{121}\left(y_{i-1} - y_{i-1}^{(0)}\right).$$

Уточнення y_i здійснюється методом простої ітерації:

$$y_i^{(k+1)} = \frac{3h}{8}\left(f_i^{(k)} + 2f_{i-1} - f_{i-2}\right) + \frac{1}{8}\left(9y_{i-1} - y_{i-3}\right), \quad k = 0,1,...,$$

де $f_i^{(k)} = f\left(x_i, y_i^{(k)}\right)$.

Нижче подані основні формули багатокрокових методів Мілна і Хеммінґа. Усі вони мають четвертий порядок точності.

1. Неявні багатокрокові методи, формули Мілна:

а) $y_i = y_{i-2} + \frac{h}{3}\left(f_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}\right);$

б) $y_i = y_{i-3} + \frac{3h}{8}\left(f_i + 3f_{i-1} + f_{i-2} + f_{i-3}\right).$

2. Неявні багатокрокові методи, формули Хеммінґа:

в) $y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1} + y_{i-2}\right) + \frac{h}{48}\left(17f_i + 51f_{i-1} + 3f_{i-2} + f_{i-3}\right);$

г) $y_i = \frac{1}{3}\left(2y_{i-2} + y_{i-3}\right) + \frac{h}{72}\left(25f_i + 91f_{i-1} + 43f_{i-2} + 9f_{i-3}\right);$

ґ) $y_i = \frac{1}{3}\left(y_{i-1} + y_{i-2} + y_{i-3}\right) + \frac{h}{72}\left(26f_i + 73f_{i-1} + 30f_{i-2} + 10f_{i-3}\right).$

3. Явні багатокрокові методи, формули Мілна:

а) $y_i = y_{i-4} + \frac{4h}{3}\left(2f_{i-1} - f_{i-2} + 2f_{i-3}\right);$

б) $y_i = y_{i-3} + \frac{3h}{8}\left(7f_{i-1} - 3f_{i-2} + 5f_{i-3} - f_{i-4}\right).$

4. Явні багатокрокові методи, формули Хеммінґа:

в) $y_i = \frac{1}{2}\left(y_{i-1} + y_{i-2}\right) + \frac{h}{48}\left(119f_{i-1} - 99f_{i-2} + 69f_{i-3} - 17f_{i-4}\right);$

г) $y_i = \frac{1}{3}\left(2y_{i-2} + y_{i-3}\right) + \frac{h}{72}\left(191f_{i-1} - 107f_{i-2} + 109f_{i-3} - 25f_{i-4}\right);$

ґ) $y_i = \frac{1}{3}\left(y_{i-1} + y_{i-2} + y_{i-3}\right) + \frac{h}{36}\left(91f_{i-1} - 63f_{i-2} + 57f_{i-3} - 13f_{i-4}\right).$

ЗАВДАННЯ №1

Скласти проґраму побудови наближеного розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку вказаними методами у відповідності до варіанту індивідуального завдання. Усі обчислення виконувати в одній проґрамі. Результати роботи проґрами оформити у вигляді таблиці

x	y	$y1$	$y2$	$y3$	$y4$	$y5$

де x - значення арґументу, y - значення точного розв'язку, $y1 \ldots y5$ - значення наближеного розв'язку, одержаного за допомогою методів 1…5.

Варіант	**Методи**	**Постановка задачі**
1	Іа,д; ІІа; ІІІв(m=3),б(m=3)	$y' + \frac{y}{x} = y^4\left(1 - x^2\right); \quad y(1) = 1.$
2	Іб,д; ІІб; ІІІа(m=1),г(m=1)	$y' + xy = y^2(\sin x + x\cos x); \quad y(0) = 1.$
3	Ів,д; ІІв; ІІІг(m=0),б(m=4)	$x\,y' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}; \quad y(1) = 1.$
4	Іа,г; ІІг; ІІІґ	$2xydx + \left(y^2 - x^2\right)dy = 0; \quad y(1) = 1.$
5	Іб,г; ІІґ; ІІІд	$\left(3x^2 - y^2\right)dx - 2xydy = 0; \quad y(1) = \sqrt{2}.$
6	Ів,г; ІІд; ІІІв(m=2),б(m=4)	$x\,y'\ln x + y = 2\ln x; \quad y(e) = 0.$
7	Іа,д; ІІе; ІІІа(m=1),б(m=3)	$y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x; \quad y(0) = 1.$
8	Іб,д; ІІд; ІІІв(m=1),г(m=1)	$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = x\cos^2 x; \quad y(0) = 1.$
9	Ів,д; ІІб; ІІІв(m=1),б(m=5)	$ydx + \left(2x - 10y^3\right)dy = 0; \quad y(0) = 1.$
10	Іа,г; ІІв; ІІІд	$x\,y' + y = y^2\ln x; \quad y(1) = 1.$
11	Іб,г; ІІа; ІІІа(m=1),б(m=4)	$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x; \quad y(1) = 2$ (частинний розв'язок рівняння: $y_1 = x$).
12	Ів,г; ІІг; ІІІа(m=2),б(m=4)	$x^2y' + (xy - 2)^2 = 0; \quad y(1) = 4$ (частинний розв'язок рівняння: $y_1 = \frac{1}{x}$).

13	Іа,д; ІІе; ІІІґ	$y' + xy = x^3 y^3; \quad y(0) = 2.$
14	Іб,д; ІІг; ІІІг(m=0),б(m=5)	$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3; \quad y(1) = 4.$
15	Ів,д; ІІд; ІІІв(m=2),б(m=3)	$x\, y' = y + xy^2; \quad y(1) = -0{,}4.$
16	Іа,г; ІІе; ІІІа(m=3),б(m=3)	$y' + y\cos x = 0{,}5\sin 2x; \quad y(0) = 0.$
17	Іб,г; ІІа; ІІІґ	$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx; \quad y(1) = 0{,}75.$
18	Ів,г; ІІб; ІІІв(m=3),б(m=4)	$y' + \frac{1-2x}{x^2} y - 1 = 0; \quad y(1) = 1 - e.$
19	Іа,д; ІІг; ІІІа(m=2),б(m=2)	$y' - 2\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}; \quad y(1) = 0{,}5.$
20	Іб,д; ІІв; ІІІд	$\left(y^3 - x\right) y' = y; \quad y(6) = 3.$

ТАБЛИЦЯ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДО ЗАВДАННЯ №1

Варіант	Точний розв'язок
1	$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^3\ln\lvert x\rvert+0{,}5x\left(3-x^2\right)}}$
2	$y=\sec x$
3	$y=x\left(2^x-1\right)$
4	$x=2y-y^2$
5	$y=\sqrt{x^2+x^{-1}}$
6	$y=\ln\lvert x\rvert-\ln^{-1}\lvert x\rvert$
7	$y=\sin x+e^{x^2}$
8	$y=0{,}5x\sin 2x+\cos^2 x$
9	$x=2\left(y^3-y^{-2}\right)$
10	$y=\dfrac{1}{\ln\lvert x\rvert+1}$
11	$y=x+1$
12	$y=4x^{-1}$
13	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1+3e^x}}$
14	$y=0{,}5(x+1)^4-(x+1)^2$
15	$y=-\dfrac{2x}{x^2+4}$
16	$y=e^{-\sin x}+\sin x-1$
17	$y=x^2-0{,}25$
18	$y=x^2\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$
19	$y=2x^2-x-0{,}5$
20	$x=\dfrac{y^4-9}{4y}$

РОЗДІЛ 2
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

IV. Зведення диференціального рівняння *n*-го порядку до системи *n* рівнянь першого порядку

Задачу Коші для диференціального рівняння n-го порядку вигляду

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right),$$

$$y(a) = \gamma_0, \quad y'(a) = \gamma_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = \gamma_{n-1}$$

завжди можна подати у вигляді системи n рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} &y'(x) = z_1(x), \\ &z_1'(x) = z_2(x), \\ &\ldots \\ &z_{n-1}'(x) = f(x, y(x), z_1(x), \ldots, z_{n-1}(x)); \\ &y(a) = \gamma_0, \quad z_1(a) = \gamma_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}(a) = \gamma_{n-1}, \end{aligned}$$

або у векторному вигляді

$$Y'(x) = F(x, Y(x)), \quad Y(a) = \Gamma_a,$$

де Y, F і Γ_a – n-вимірні вектори:

$$\begin{aligned} &Y = \left(y(x) \quad z_1(x) \quad \ldots \quad z_{n-1}(x)\right), \\ &F = \left(z_1(x) \quad \ldots \quad z_{n-1}(x) \quad f(x, y(x), z_1(x), \ldots, z_{n-1}(x))\right), \\ &\Gamma_a = \left(\gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \ldots \quad \gamma_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Поскільки одержану систему можна розглядати як векторне диференціальне рівняння першого порядку, то до неї застосовні всі числові методи наближеного інтеґрування задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку I-III.

V. Методи Адамса для диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$y'' = f(x, y, y'); \tag{23}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \tag{24}$$

Будемо вважати, що функція $f(x, y, y')$ справджує всі умови існування і єдиності розв'язку задачі (23),(24).

Нехай потрібно знайти розв'язок задачі Коші (23),(24) на деякому відрізку $[a,b]$, де, як правило, $a = x_0$. Побудуємо деякі числові алґоритми відшукання наближеного розв'язку, використовуючи той же спосіб, що й при побудові багатокрокових алґоритмів для рівняння першого порядку.

Екстраполяційний метод Адамса. Нехай відомі значення функцій $y(x)$ та $y'(x)$ в точках $x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-m}$. Знаходимо значення $f_i, f_{i-1}, ..., f_{i-m}$, де $f_i = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$, і будуємо інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, починаючи з точки x_i :

$$P_m(x) = f_i + t\Delta f_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-2} + ... + \frac{t(t+1)...(t+m-1)}{m!}\Delta^m f_{i-m},$$

де $t = h^{-1}(x - x_i)$, $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Замінивши в рівнянні (23) $f(x, y, y')$ побудованим інтерполяційним многочленом $P_m(x)$ і проінтеґрувавши одержану рівність по змінній t в межах $[0;\xi]$, одержимо:

$$y'(x_i + \xi h) = y_i' + h\int_0^{\xi} P_m(x_i + ht)dt. \tag{25}$$

Поклавши $\xi = 1$, із (25) будемо мати:

$$y_{i+1}' = y_i' + q_i + \sum_{j=1}^{m} C_j \Delta^j q_{i-j}, \tag{26}$$

де $q_i = hf_i$, а $C_1, ..., C_m$ – коефіцієнти екстраполяційного методу Адамса (IIIa). Із рівності (26) можна знайти значення y_{i+1}'.

Інтеґруючи рівність (25) по змінній ξ на проміжку [0;1], одержимо загальну розрахункову формулу екстраполяційного методу Адамса для рівняння другого порядку:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + h^2 \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \Delta^j f_{i-j}, \tag{Va}$$

де

$$\alpha_j = \frac{1}{j!}\int_0^1\int_0^{\xi} t(t+1)...(t+j-1)dtd\xi, \quad y_i' = y'(x_i).$$

Перші значення сталих α_j рівні

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{8}, \quad \alpha_3 = \frac{19}{180}, \quad \alpha_4 = \frac{3}{32}, \quad \alpha_5 = \frac{863}{10080}, \quad \alpha_6 = \frac{275}{3556}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (Va) можна одержати розрахункові формули різного вигляду.

$m = 0$: $\quad y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} f_i;$

$$m=1:\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{6}(4f_i-f_{i-1});$$

$$m=2:\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{24}(19f_i-10f_{i-1}+3f_{i-2});$$

$$m=3:\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{360}(323f_i-264f_{i-1}+159f_{i-2}-38f_{i-3});$$

$$m=4:\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{1440}(1427f_i-1616f_{i-1}+1456f_{i-2}-692f_{i-3}+135f_{i-4});$$

$$m=5:\quad y_{i+1}=y_i+hy'_i+\frac{h^2}{10080}(10852f_i-15627f_{i-1}+18822f_{i-2}-13474f_{i-3}+ \\ +5260f_{i-4}-863f_{i-5})$$

тощо.

Інтерполяційний метод Адамса. Нехай відомі значення функцій $y(x)$ та $y'(x)$ в точках $x_i, x_{i-1},...,x_{i-m}$. Знаходимо значення $f_i, f_{i-1},...,f_{i-m}$, де $f_i=f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$, і будуємо інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, але починаючи з точки x_{i+1}:

$$P_m(x)=f_{i+1}+t\Delta f_i+\frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 f_{i-1}+...+\frac{t(t+1)...(t+m-1)}{m!}\Delta^m f_{i-m+1},$$

де $t=h^{-1}(x-x_{i+1})$, $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$.

Замінивши в рівнянні (23) $f(x,y,y')$ побудованим інтерполяційним многочленом $P_m(x)$ і проінтеґрувавши одержану рівність по змінній t в межах $[0;\xi]$, одержимо:

$$y'(x_{i+1}+\xi h)=y'_{i+1}+h\int_0^{\xi} P_m(x_{i+1}+ht)dt. \quad (27)$$

Поклавши $\xi=-1$, із (27) будемо мати:

$$y'_{i+1}=y'_i+q_{i+1}+\sum_{j=1}^{m} D_j\Delta^j q_{i-j+1}, \quad (28)$$

де $q_i=hf_i$, а $D_1,...,D_m$ – коефіцієнти інтерполяційного методу Адамса (IIIб). Рівність (28) можна використовувати для уточнення значень y'_{i+1}.

Інтеґруючи рівність (27) по змінній ξ на проміжку $[-1;0]$, одержимо загальну розрахункову формулу інтерполяційного методу Адамса для рівняння другого порядку:

$$y_{i+1}=y_i+hy'_{i+1}+h^2\sum_{j=0}^{m}\beta_j\Delta^j f_{i-j+1}, \quad (\text{Vб})$$

де

$$\beta_j=\frac{1}{j!}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\xi} t(t+1)...(t+j-1)dtd\xi, \quad y'_i=y'(x_i).$$

Перші значення сталих β_j рівні

$$\beta_0 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{6}, \quad \beta_2 = \frac{1}{24}, \quad \beta_3 = \frac{1}{45}, \quad \beta_4 = \frac{7}{480}, \quad \beta_5 = \frac{107}{10080}, \quad \beta_6 = \frac{199}{24192}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (Vб) можна одержати розрахункові формули різного вигляду.

$$m = 0: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{2} f_{i+1};$$

$$m = 1: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{6}\left(2f_{i+1} + f_i\right);$$

$$m = 2: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{24}\left(7f_{i+1} + 6f_i - f_{i-1}\right);$$

$$m = 3: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{360}\left(97f_{i+1} + 104f_i - 39f_{i-1} + 8f_{i-2}\right);$$

$$m = 4: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{1440}\left(253f_{i+1} + 956f_i - 976f_{i-1} + 572f_{i-2} - 135f_{i-3}\right);$$

$$m = 5: \quad y_{i+1} = y_i + hy'_{i+1} - \frac{h^2}{10080}\left(1664f_{i+1} + 7227f_i - 7902f_{i-1} + 5074f_{i-2} - \right.$$
$$\left. - 1480f_{i-3} + 107f_{i-4}\right)$$

тощо.

VI. Методи Штьормера

Розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку, розв’язаного відносно старшої похідної, яке не містить першої похідної $y'(x)$

$$y'' = f(x, y) \tag{29}$$

з початковими умовами (24). Будемо вважати, що функція $f(x, y)$ справджує всі умови існування і єдиності розв’язку задачі (29),(24).

Зауважимо, що для знаходження наближеного розв’язку задачі (29),(24), можна застосовувати алґоритми методів Адамса аналоґічно до більш загальної задачі (23),(24). Проте для рівняння (29), яке не містить першої похідної $y'(x)$, недоцільно на кожному кроці шукати значення y'_{i+1}.

Екстраполяційний метод Штьормера. Інтеґруючи рівність (25) по змінній ξ на проміжку $[-1;0]$, одержимо:

$$y_i = y_{i-1} + hy'_i + h^2 \sum_{j=0}^{m} \beta_j \Delta^j f_{i-j}. \tag{30}$$

Віднявши рівність (30) від (Va), одержимо загальну розрахункову формулу екстраполяційного методу Штьормера, яка не містить значень y'_i:

$$\Delta^2 y_{i-1} \equiv y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \Delta^j f_{i-j}, \qquad \text{(VIa)}$$

де

$$\gamma_j = \alpha_j - \beta_j = \frac{1}{j!} \int_0^1 \int_{-\xi}^{\xi} t(t+1)\ldots(t+j-1) dt d\xi.$$

Перші значення сталих γ_j рівні

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_4 = \frac{19}{240}, \quad \gamma_5 = \frac{3}{40}, \quad \gamma_6 = \frac{863}{12096}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (VIa) можна одержати розрахункові формули різного вигляду. Зауважимо лишень, що для випадків m=0 і m=1 формули співпадатимуть, поскільки $\gamma_1 = 0$.

$m = 1: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f_i;$

$m = 2: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{12}(13f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2});$

$m = 3: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{12}(14f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3});$

$m = 4: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{240}(299f_i - 176f_{i-1} + 194f_{i-2} - 96f_{i-3} + 19f_{i-4});$

$$m = 5: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h^2}{240}(317f_i - 266f_{i-1} + 374f_{i-2} - 276f_{i-3} + \\ + 109f_{i-4} - 18f_{i-5});$$

$$m = 6: \quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h^2}{60480}(84199f_i - 92922f_{i-1} + 158973f_{i-2} - 155852f_{i-3} + \\ + 92193f_{i-4} - 30426f_{i-5} + 4315f_{i-6})$$

тощо.

Інтерполяційний метод Штьормера. Нехай відомі значення функцій $y(x)$ та $y'(x)$ в точках $x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-m}$. Знаходимо значення $f_i, f_{i-1}, \ldots, f_{i-m}$, де $f_i = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$, і будуємо інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполювання назад, починаючи з точки x_{i+1}, цього разу у вигляді

$$P_m(x) = f_{i+1} + (t-1)\nabla f_{i+1} + \frac{(t-1)t}{2!}\nabla^2 f_{i+1} + \ldots + \frac{(t-1)t\ldots(t+m-2)}{m!}\nabla^m f_{i+1},$$

де $t = h^{-1}(x - x_i)$; $\nabla f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$ – скінчена різниця назад.

Замінивши в рівнянні (23) $f(x, y, y')$ побудованим інтерполяційним многочленом $P_m(x)$ і проінтеґрувавши одержану рівність по змінній t в межах $[0; \xi]$, одержимо:

$$y'(x_i + \xi h) = y'_i + h\int_0^{\xi} P_m(x_i + ht)dt. \tag{31}$$

Проінтеґрувавши рівність (31) по змінній ξ на проміжках $[-1;0]$ та $[0;1]$ і віднявши одержані відповідні рівності, дістанемо загальну розрахункову формулу інтерполяційного методу Штьормера, яка також не містить значень y'_i :

$$\nabla^2 y_{i+1} \equiv y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 \sum_{j=0}^{m} \theta_j \nabla^j f_{i+1}, \tag{VIб}$$

де

$$\theta_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 \int_{-\xi}^{\xi} (t-1)t(t+1)\ldots(t+j-2)dtd\xi.$$

Перші значення сталих θ_j рівні

$$\theta_0 = 1,\quad \theta_1 = -1,\quad \theta_2 = \frac{1}{12},\quad \theta_3 = 0,\quad \theta_4 = -\frac{1}{240},\quad \theta_5 = -\frac{1}{240},\quad \theta_6 = -\frac{148}{15120}.$$

При різних значеннях m із загальної формули (VIб) можна одержати розрахункові формули різного вигляду. Зауважимо лишень, що для випадків m=2 і m=3 формули співпадатимуть, поскільки $\theta_3 = 0,$ а при m=1 одержимо вже відому екстраполяційну формулу Штьормера (див. вище).

$m = 0$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f_{i+1};$

$m = 1$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + h^2 f_i;$

$m = 2$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{12}(f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1});$

$m = 4$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{240}(19f_{i+1} + 204f_i + 14f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3});$

$m = 5$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{240}(18f_{i+1} + 209f_i + 4f_{i-1} + 14f_{i-2} - 6f_{i-3} + f_{i-4});$

$m = 6$: $\quad y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \dfrac{h^2}{15120}(986f_{i+1} + 14055f_i - 1968f_{i-1} + 3842f_{i-2} -$

$$- 2598f_{i-3} + 951f_{i-4} - 148f_{i-5})$$

тощо.

Процес обчислень за формулами (VIa) та (VIб) іде так само, як і для диференціальних рівнянь першого порядку, лише замість $q = hf(x, y)$ беруть $r = h^2 f(x, y)$.

Зауваження. Як відомо, загальне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$z''(x) + p_1(x)z'(x) + p_2(x)z(x) = p_3(x)$$

підстановкою

$$z(x) = y(x)e^{-0,5\int p_1(x)dx}$$

зводиться до канонічного (який не містить першої похідної) вигляду

$$y''(x) + f_1(x)y(x) = f_2(x).$$

Звідси випливає, що методи Штьормера застосовні до будь-якого лінійного диференціального рівняння другого порядку, проте спершу це рівняння необхідно подати в канонічному вигляді.

ЗАВДАННЯ №2

Скласти проґраму побудови наближеного розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку вказаними методами у відповідності до варіанту індивідуального завдання. Усі обчислення виконувати в одній проґрамі. Результати роботи проґрами оформити у вигляді таблиці

x	$y(x)$	$y6$	$y7$	$y8$

де x – значення арґументу, $y(x)$ – значення точного розв'язку, $y6...y8$ – значення наближеного розв'язку, одержані за допомогою методів 6...8.

Варіант	Методи	Постановка задачі
1	IV Iв Va(m=1) VIб(m=5)	$\left(x^2+1\right)y''-2xy'+2y=0,$ $y(0)=0, \quad y'(0)=2.$
2	IV IIв Vб(m=2) VIa(m=4)	$x^2y''=2y,$ $y(1)=0, \quad y'(1)=1.$
3	IV IIб Va(m=3) VIб(m=3)	$x(x-1)y''+(1-2x)y'+2y=0,$ $y(2)=1, \quad y'(2)=2.$
4	IV Iб Vб(m=4) VIa(m=2)	$y''\cos^2 x-2y=0,$ $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
5	IV IIa Va(m=5) VIб(m=4)	$y''+(1-x)^{-1}y'=0,$ $y(0)=0, \quad y'(0)=2.$
6	IV Ia Vб(m=4) VIa(m=5)	$\left(1+x^2\right)y''-2y=0,$ $y(0)=0, \quad y'(0)=2.$
7	IV Iв Va(m=3) VIб(m=2)	$(1+2x)y''+4xy'-4y=0,$ $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
8	IV IIг Vб(m=3) VIa(m=4)	$x^2(x+1)y''-2y=0,$ $y(1)=-6, \quad y'(1)=3.$
9	IV Ia Va(m=2) VIб(m=6)	$\left(4-x^2\right)y''+(x-2)y'-y=0,$ $y(3)=0, \quad y'(3)=5.$

10	IV Iб Vб(m=5) VIa(m=2)	$4x^2y'' + y = 4x\sqrt{x}$, $y(1)=1, \quad y'(1)=-1{,}5.$
11	IV IIe Va(m=2) VIб(m=3)	$(\cos x + \sin x)y'' - 2\cos xy' + (\cos x - \sin x)y = 0$, $y(0) = -1, \quad y'(0) = 3.$
12	IV Ia Vб(m=1) VIa(m=4)	$x^2y'' - 6y = 0$, $y(1)=2, \quad y'(1)=1.$
13	IV IIг Va(m=4) VIб(m=2)	$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
14	IV Iв Vб(m=2) VIa(m=5)	$4(x-1)y'' + (x-4)y = 0$, $y(2)=1, \quad y'(2)=0.$
15	IV IIв Va(m=3) VIб(m=4)	$(1-x)y'' + xy' - y = 0$, $y(0)=1, \quad y'(0)=0.$
16	IV Iб Vб(m=5) VIa(m=3)	$x^2y'' - 2(1+2x+2x^2)y = 0$, $y(1)=5, \quad y'(1)=18.$
17	IV IIд Va(m=4) VIб(m=3)	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y(0)=-2, \quad y'(0)=0.$
18	IV Iв Vб(m=3) VIa(m=4)	$4x^2y'' - (4x^2 - 4x + 3)y = 0$, $y(1)=-6, \quad y'(1)=5.$
19	IV IIe Va(m=6) VIб(m=1)	$(x^2-1)y'' + (x-3)y' - y = 0$, $y(2)=-4, \quad y'(2)=2.$
20	IV Ia Vб(m=1) VIa(m=6)	$4y'' + (\mathrm{tg}^2 x + 10)y = 0$, $y(0)=0, \quad y'(0)=-4.$

ТАБЛИЦЯ ТОЧНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ДО ЗАВДАННЯ №2

Варіант	Точний розв’язок
1	$y = 2x$
2	$y = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$
3	$y = (x-1)^2$
4	$y = 1 + x\,\mathrm{tg}\,x$
5	$y = 1 - (1-x)^2$
6	$y = x + \left(x^2 + 1\right)\mathrm{arctg}\,x$
7	$y = 2x + e^{-2x}$
8	$y = -3\left(1 + x^{-1}\right)$
9	$y = 4(x-3) + (x-2)\ln\lvert x-2\rvert$
10	$y = \sqrt{x}\left(x - 3\ln\lvert x\rvert\right)$
11	$y = 3e^x - 4\cos x$
12	$y = x^3 + x^{-2}$
13	$y = 1 - x\ln\sqrt{\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert}$
14	$y = \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$
15	$y = e^x - x$
16	$y = \left(8x - 4 + x^{-1}\right)e^{2(x-1)}$
17	$y = -2\left(2x + e^{-2x}\right)$
18	$y = -\frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}}(2x+1)$
19	$y = x - 3 - \frac{9}{x+1}$
20	$y = -4\sin x\sqrt{\cos x}$

РОЗДІЛ 3
ЧИСЛОВО-АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Подані нижче числово-аналітичні методи розв'язування крайових задач детально викладені в курсі за вибором "Крайові задачі та методи їх інтеґрування" [13].

VII. Методи зведення крайової задачі до задач Коші

VIIа. Розв'язок крайової задачі

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_a, \tag{2}$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_b \tag{3}$$

шукаємо у вигляді

$$y(x) = u(x) + Cv(x), \tag{4}$$

де $u(x)$ – розв'язок неоднорідного рівняння (1), а $v(x)$ – розв'язок відповідного однорідного рівняння. Початкові умови для функцій $u(x)$ і $v(x)$ вибираємо таким чином, щоб функція (4) справджувала одну з крайових умов (2) або (3) при довільному значенні сталої C. Для інтеґрування одержаних задач Коші можна застосувати будь-який із методів IV-VI. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ знайдені, то з невикористаної крайової умови можна визначити сталу C, а потім за формулою (4) – розв'язок крайової задачі.

VIIб. Інший спосіб зведення крайової задачі (1)-(3) до задач Коші має назву методу стрільби і полягає в наступному. Спершу робимо два "пробні постріли" – задаємо навмання дві пари початкових значень

$$y_i(a) = \eta_i, \quad y_i'(a) = \xi_i, \quad i = 0,1 \tag{5}$$

таких, щоб кожна з пар значень справджувала крайову умову (2). Інтеґруючи дві задачі Коші для рівняння (1) з початковими умовами (5) до точки $x = b$ (при цьому можна застосувати будь-який із методів IV-VI), одержимо відповідні розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Тоді точне значення розв'язку крайової задачі (1)-(3) в точці $x = a$ знаходиться за формулою січних

$$y(a) = y_1(a) - \frac{\{y_1(a) - y_0(a)\}[\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) - \gamma_b]}{\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) - [\beta_0 y_0(b) + \beta_1 y_0'(b)]},$$

а значення $y'(a)$ визначаємо з крайової умови (2). Іноді доцільно робити й навпаки: визначати $y'(a)$ за формулою січних, а $y(a)$ – з крайової умови (наприклад, у випадку $\alpha_1 = 0$). Проінтеґрувавши задачу Коші для рівняння (1) зі знайденими початковими умовами, одержимо розв'язок крайової задачі (1)-(3).

Зауважимо, що "пробні постріли" можна робити аналоґічним чином і в точці $x = b$. Тоді інтеґрування трьох задач Коші вестиметься справа наліво, а формула січних матиме вигляд

$$y(b) = y_1(b) - \frac{\{y_1(b) - y_0(b)\}[\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) - \gamma_a]}{\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) - [\alpha_0 y_0(a) + \alpha_1 y_0'(a)]}.$$

VIII. Метод прогонки

Крайова задача для звичайного диференціального рівняння другого порядку, поданого в канонічному вигляді (див. VI)

$$y'' + p(x)y = q(x),$$
$$y'(a) + \alpha_{00} y(a) = \alpha_{10},$$
$$y'(b) + \beta_{00} y(b) = \beta_{10},$$

еквівалентна задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку

$$y' + \alpha_0(x) y = \alpha_1(x),$$
$$y(b) = \frac{\beta_{10} - \alpha_1(b)}{\beta_{00} - \alpha_0(b)},$$

де функції $\alpha_0(x)$ і $\alpha_1(x)$ – розв’язки задач Коші

$$\alpha_0' - \alpha_0^2 = p(x), \qquad \alpha_1' - \alpha_0 \alpha_1 = q(x),$$
$$\alpha_0(a) = \alpha_{00}; \qquad \alpha_1(a) = \alpha_{10}.$$

Для інтеґрування одержаних трьох задач Коші можна застосувати будь-який із методів I-III.

IX. Метод послідовних наближень

Крайову задачу

$$y'' = f(x, y),$$
$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_a,$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_b,$$

використавши формулу обернення крайових задач, можна подати в інтеґральному вигляді

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

де $G(x, \xi)$ – функція Ґріна відповідної однорідної крайової задачі, а $\varphi(x)$ – розв’язок однорідного рівняння $\varphi''(x) = 0$, який справджує неоднорідні крайові умови. Тоді, узявши за нульове наближення розв’язку крайової задачі

$y^0(x)=\varphi(x)$, наступні наближення (ітерації) можна шукати за рекурентною формулою

$$y^{p+1}(x)=\varphi(x)+\int_a^b G(x,\xi)f\left(\xi,y^p(\xi)\right)d\xi,\quad p=\overline{0,\infty}. \tag{6}$$

Для числової реалізації відповідно одержимо формулу

$$y_i^{p+1}=y_i^0+\int_a^b G(x_i,\xi)f\left(\xi,y^p(\xi)\right)d\xi,\quad i=\overline{0,n},\quad p=\overline{0,\infty}.$$

Для обчислення інтеґрала можна використати одну з наступних числових формул:

$$\int_a^b f(\xi)d\xi=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{n-1}hf_i & \text{(формула лівих прямокутників);}\\ \sum\limits_{i=1}^{n}hf_i & \text{(формула правих прямокутників);}\\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}hf_{i+0,5} & \text{(формула середніх прямокутників);}\\ 0{,}5h\left(f_0+f_n\right)+\sum\limits_{i=1}^{n-1}hf_i & \text{(формула трапецій),}\end{cases}$$

де $f_i=f(\xi_i)$, $\xi_0=a$, $\xi_n=b$.

У випадку крайової задачі для рівняння другого порядку більш складного вигляду

$$\ell_2(y)\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x,y)$$

з крайовими умовами (2),(3) послідовні наближення також будуються згідно формули (6); тоді функція $\varphi(x)$ повинна бути розв'язком рівняння $\ell_2(\varphi)=0$ і справджувати крайові умови (2),(3). Аналоґічно можна будувати послідовні наближення до розв'язків крайових задач для рівнянь вищих порядків загального вигляду

$$\ell_n(y)\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^{(k)}(x)=f(x,y),\quad x\in(a,b);$$

$$U_j(y)\equiv\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{jk}y^{(k)}(a)+\beta_{jk}y^{(k)}(b)\right]=\gamma_j,\quad j=\overline{1,n},$$

якщо тільки відповідна однорідна крайова задача не має нетривіальних розв'язків, тобто виконується умова існування функції Ґріна для заданої крайової задачі.

ЗАВДАННЯ №3

Скласти проґраму побудови наближеного розв’язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку вказаним методом у відповідності до варіанту індивідуального завдання. Усі обчислення виконувати в одній проґрамі. Результати роботи проґрами оформити у вигляді поданих нижче таблиць:

а) для методу зведення до задачі Коші

x	$y(x)$	u	v	$y9$

б) для методу стрільби

x	$y(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$	$y10$

в) для методу прогонки

x	$y(x)$	α_0	α_1	$y11$

г) для методу послідовних наближень

x	$y(x)$	y_0	y_1	...	$y12$

де x – значення арґументу, $y(x)$ – значення точного розв’язку задачі, $y9...y12$ – значення наближеного розв’язку, одержані за допомогою методів 9...12. У методі послідовних наближень виконати не менш ніж три ітерації $y_1...y_3$.

Варіант	Методи	Постановка задачі
1	VIIа (IV Iб) VIII (IIIв m=3) IX	$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 4x^2 + 4x + 2,$ $y'(0) + 2y(0) = -1, \quad y'(1) = -1.$
2	VIIб (IV IIг) VIII (IIIа m=3) IX	$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0,$ $y'(1) = 1, \quad y'(2) = 0.$
3	VIIб (IV Iв) VIII (IIIв m=5) IX	$xy'' + 2y' - xy = 0,$ $y'(1) = -2e^2(e^2-1)^{-1}, \quad y'(2) = -e(e^2-1)^{-1}.$
4	VIIа (IV IIв) VIII (IIIа m=2) IX	$(e^x+1)y'' - 2y' - e^x y = 2 + xe^x,$ $y'(0) = 2\,\mathrm{th}1, \quad y'(1) = 1 + 8e^2(e-1)^{-1}(e+1)^{-2}.$
5	VIIб (IV Iа) VIII (IIIа m=5) IX	$xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0,$ $4y'(1) + y(1) = 9, \quad y'(2) = 0.$
6	VIIб (IV IIа) VIII (IIIв m=4) IX	$y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0,$ $y'(0) = 0, \quad y'(1) = -2.$

7	VIIа (IV Iб) VIII (IIIа m=4) IX	$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0,$ $y'(1) - 2y(1) = -4, \quad y'(2) = 4.$
8	VIIа (IV IIе) VIII (IIIв m=2) IX	$x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 4,$ $y'(1) = 0, \quad y'(2) = 1.$
9	VIIб (IV Iв) VIII (IIIа m=3) IX	$x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0,$ $y'(1) = \frac{5}{11}, \quad y'(2) = 1.$
10	VIIб (IV Iа) VIII (IIIв m=4) IX	$x(x^2+6)y'' - 4(x^2+3)y' + 6xy = 0,$ $y'(-2) = 16, \quad y'(-1) + y(-1) = 1.$
11	VIIа (IV IIг) VIII (IIIа m=4) IX	$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 6x,$ $y'(1) = 3, \quad y'(2) = -1.$
12	VIIа (IV Iб) VIII (IIIв m=5) IX	$(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x,$ $y'(3) = -2, \quad y'(4) = -5.$
13	VIIб (IV IIд) VIII (IIIв m=3) IX	$x^2 y'' - 2y = 0,$ $y'(1) = 0, \quad y(2) + y'(2) = 4.$
14	VIIа (IV Iб) VIII (IIIа m=2) IX	$x(2-x)y'' - (2-x^2)y' - 2(x-1)y = 0,$ $y'(-2) = y(-2) - 18, \quad y'(0) - y(0) = 0.$
15	VIIб (IV Iв) VIII (IIIв m=2) IX	$(\cos x - \sin x)y'' + 2\cos x y' + (\cos x + \sin x)y = 0,$ $y'(0) = -2, \quad y'(-2) + y(-2) = 3(\cos 2 + \sin 2).$
16	VIIа (IV IIг) VIII (IIIа m=5) IX	$\cos x y'' + 2\sin x y' = \sin x \cos x,$ $y'(0) + y(0) = 1, \quad y'(1{,}5) = 0.$
17	VIIа (IV IIв) VIII (IIIа m=4) IX	$xy'' + y' = 8x,$ $y'(1) + 3y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$
18	VIIа (IV IIг) VIII (IIIв m=5) IX	$\mathrm{ch}\, x y'' - \mathrm{sh}\, x y' = 1,$ $y'(0) = 1, \quad y'(1) - y(1) = 3.$
19	VIIб (IV IIа) VIII (IIIа m=2) IX	$x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 0,$ $y'(2) = 2y(2), \quad y'(3) = 4.$
20	VIIб (IV Iа) VIII (IIIв m=3) IX	$(\cos x + x\sin x)y'' - x\cos x y' + \cos x y = 0,$ $y'(0) = -1, \quad y'(2) = 0.$

ТАБЛИЦЯ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДО ЗАВДАННЯ №3

Варіант	Точний розв'язок
1	$y = e^{2(1-x)} - x + x^2$
2	$y = 0{,}2e^{x-1}\left(8 - x^2\right)$
3	$y = \dfrac{e^{3-x} - e^{x-1}}{x\left(e^2 - 1\right)}$
4	$y = x + \dfrac{4\left(e^2 - e^{2x}\right)}{\left(1 - e^2\right)\left(1 + e^x\right)}$
5	$y = e^{2x} + 0{,}5(3x+1)e^{6-x}$
6	$y = e^{1-x^2}$
7	$y = 2x + 1 + e^{2(x-2)}$
8	$y = \dfrac{4}{3}\left(1 + x + x^{-1}\right) - 2$
9	$y = \dfrac{1}{11}\left(3x^2 - x - 2\right)$
10	$y = x^3 - x^2 - 2$
11	$y = 3x + x^2 - \dfrac{2}{3}x^3$
12	$y = -1{,}5x^2 + 7x - 7{,}5$
13	$y = \dfrac{x^3 + 2}{3x}$
14	$y = 3x^2 - 2e^x$
15	$y = 3\cos x - e^{-x}$
16	$y = \sin x - 1 - \cos^3 \frac{3}{2} \operatorname{tg} x$
17	$y = 2\left(x^2 + 1 - 8\ln\|x\|\right)$
18	$y = e^x - 3$
19	$y = (x-1)^2$
20	$y = -x - \dfrac{\cos x}{\sin 2}$

РОЗДІЛ 4
РІЗНИЦЕВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розглянемо крайову задачу

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(k)}(x) = f(x), \quad x \in (a,b); \tag{1}$$

$$U_j(y) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha_{jk} y^{(k)}(a) + \beta_{jk} y^{(k)}(b)\right] = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $p_k(x), f(x) \in C_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$, причому $p_n(x) \neq 0$; α_{jk}, β_{jk} – задані сталі.

Поділимо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин довжини $h = (b-a)/n$. Позначимо точки поділу (вузли сітки) через $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,n}$. Через $y(x_i)$ будемо позначати значення шуканої функції – точного розв'язку $y(x)$ крайової задачі (1),(2) – в точках x_i, а через y_i – наближені значення в цих точках.

Загальна ідея різницевих методів полягає в заміні похідних у рівнянні (1) і крайових умовах (2) певними скінчено-різницевими співвідношеннями і знаходженні наближених значень розв'язку крайової задачі (1),(2) у вузлах сітки з одержаної алґебраїчної системи.

X. Метод скінчених різниць

Замінимо похідні, що входять у диференціальне рівняння (1), різницевими формулами:

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \; y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

тощо. В загальному з похибкою $o(h^2)$ будемо мати

$$y^{(k)}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^k} \Delta^k y_{i-0,5k}, & k = 2m; \\[2ex] \dfrac{1}{2h^k}\left(\Delta^k y_{i-0,5(k+1)} + \Delta^k y_{i-0,5(k-1)}\right), & k = 2m-1, \end{cases} \tag{3}$$

де $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – скінчена різниця вперед.

Підклавши в диференціальне рівняння (1) замість похідних відповідні скінчено-різницеві співвідношення (3), одержимо так зване скінчено-різницеве рівняння. Вчинивши те саме з крайовими умовами (2), зводимо інтеґрування крайової задачі (1),(2) до розв'язування алґебраїчної системи рівнянь відносно значень y_i. Такі системи можна розв'язувати різноманітними числовими методами, деякі з яких наведені нижче.

Ітераційні методи Якобі та Зейделя. Лінійну алгебраїчну систему відносно m невідомих $y_1, \ldots, y_m$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1,m} \tag{4}$$

попередньо зводимо до вигляду, розв'язаного відносно невідомих (при цьому вважаємо всі коефіцієнти $a_{ii} \neq 0$):

$$y_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Позначимо через y_i^n n-у ітерацію значення y_i.

У методі Якобі, виходячи з запису системи у вигляді (5), ітерації визначають згідно закону

$$y_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad n = \overline{0,N}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Початкові значення y_i^0, $i = \overline{1,m}$ задаються довільним чином. Закінчення ітерацій визначається або заданням максимальної кількості ітерацій N, або ж умовою

$$\max_i \left| y_i^{n+1} - y_i^n \right| < \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – наперед задане число.

Ітераційний метод Зейделя для системи у вигляді (5) має вигляд:

$$y_i^{n+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} y_j^n + \frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,m}, \quad n = \overline{0,N}.$$

На відміну від методу Якобі, схема методу Зейделя використовує кожну тільки-но одержану ітерацію для знаходження наступної ітерації. Значення y_i^{n+1} знаходяться послідовно, починаючи з i=1.

Схема Гаусса з вибором головного елемента. Нехай у системі (4) $a_{11} = \max\limits_{i,j} \left| a_{ij} \right| \neq 0$. Помножимо перше рівняння системи на коефіцієнт $a_{i,1} a_{11}^{-1}$, $i = \overline{2,m}$, і віднімемо одержані рівності відповідно від i-х рівнянь системи. У перетвореній таким чином системі невідоме y_1 буде виключене з усіх рівнянь, за винятком першого. Нумерацію інших рівнянь змінимо таким чином, щоб максимальний за модулем коефіцієнт опинився на місці a_{22} і наведеним вище способом виключаємо наступне невідоме. Повторюючи цей процес m-1 разів, врешті-решт зводимо систему (4) до трикутного вигляду (прямий хід)

$$\tilde{a}_{ii} y_i + \sum_{j=i+1}^{m} \tilde{a}_{ij} y_j = \tilde{f}_j, \quad i = \overline{1,m},$$

з якої послідовно визначаємо значення невідомих y_m, y_{m-1}, …, y_1 (зворотний хід схеми Гаусса).

Метод прогонки розв'язування різницевих систем для рівняння другого порядку. Розглянемо крайову задачу: знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку, заданого в канонічному вигляді

$$y'' + p(x)y(x) = q(x), \quad x \in (a,b), \tag{6}$$

де $p(x) \ge 0$, який справджує крайові умови

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{7}$$

Замінимо в (6) другу похідну y'' різницевим співвідношенням $y''(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$, тоді для знаходження значень y_i одержимо лінійну алгебраїчну систему

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - p_i y_i = q_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{8}$$

Подамо першу з крайових умов (7) у вигляді $y_0 = C_0 y_1 + \varphi_0$, де $C_0 = 0$, $\varphi_0 = y_a$. Підклавши $y_0 = C_0 y_1 + \varphi_0$ у різницеве рівняння

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} - p_1 y_1 = q_1,$$

одержане з (8) при $i = 1$, дістанемо алгебраїчне рівняння, котре пов'язує значення y_1 та y_2. Розв'язавши це рівняння відносно y_1, одержимо: $y_1 = C_1 y_2 + \varphi_1$, де $C_1 = \left(2 + p_1 h^2\right)^{-1}$, $\varphi_1 = C_1\left(y_0 - f_1 h^2\right)$. Підклавши $y_1 = C_1 y_2 + \varphi_1$ у друге рівняння системи (8), дістанемо алгебраїчне рівняння, котре пов'язує значення y_2 та y_3 тощо.

Нехай уже одержане співвідношення

$$y_i = C_i y_{i+1} + \varphi_i. \tag{9}$$

Тоді з (i+1)-го рівняння системи (8)

$$\frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2} - p_{i+1} y_{i+1} = q_{i+1},$$

підклавши (9) та розв'язавши відносно y_{i+1}, одержимо:

$$y_{i+1} = C_{i+1} y_{i+2} + \varphi_{i+1},$$

де

$$C_{i+1} = \left(2 + p_{i+1} h^2 - C_i\right)^{-1}, \quad \varphi_{i+1} = C_{i+1}\left(\varphi_i - f_{i+1} h^2\right). \tag{10}$$

Отже, коефіцієнти рівнянь (9), що пов'язують послідовні значення y_i та y_{i+1}, можна визначати з рекурентних співвідношень (10) з початковими умовами $C_0 = 0$, $\varphi_0 = y_a$. Поскільки значення $y_n = y_b$ відоме, то після знаходження всіх коефіцієнтів C_i, φ_i (прямий хід прогонки) можна послідовно визначити $y_{n-1}, y_{n-2}, \ldots, y_1$ зі співвідношень (9) (зворотний хід прогонки).

Окрім наведених, можна використовувати й інші методи розв'язування лінійних алгебраїчних систем (див. у літературі).

XI. Покращений різницевий метод

При числовому інтеґруванні крайових задач звичайним методом скінчених різниць, взагалі кажучи, можна одержати вірне уявлення про поведінку точного розв'язку задачі при порівняно негроміздких обчисленнях. Щоб одержати більш точний наближений розв'язок, крок сітки зменшують, проте при необмеженому зменшенні кроку процес збігається, як правило, досить повільно. Тому для досягнення потрібної точності обчислення часто доводиться проводити з дуже малим кроком h, що значно збільшує обсяг обчислень. Натомість у багатьох випадках доцільніше застосовувати так званий покращений різницевий метод, ідея якого викладена нижче.

Для більш точного наближення розв'язку крайової задачі (1),(2) похідні замінюють не найпростішими різницевими співвідношеннями (3), а більш загальними "скінченими виразами", котрі апроксимують похідні з більшою точністю, ніж формули (3). Загалом лінійний диференціальний вираз $\ell_n(y)$ замінюємо різницевими виразами вигляду

$$A(y) = \sum_{k=1}^{\nu} C_k y\left(x_i + \alpha_k h\right), \tag{11}$$

де C_k, α_k – деякі сталі, $\nu \in \mathrm{N}$.

Кажуть, що скінчений вираз (11) має в точці x_i порядок точності s відносно лінійного диференціального виразу $\ell_n(y)$, якщо розклад виразу $A(y)$ в ряд Тейлора в околі точки $x = x_i$ містить похідні $y^{(j)}\left(x_i\right)$ при $j \le n$ з коефіцієнтами $p_j\left(x_i\right)$ і не містить похідних $y^{(j)}\left(x_i\right)$ при $n+1 \le j \le n+s$.

Має силу наступне твердження: для довільного лінійного диференціального виразу $\ell_n(y)$ і заданого натурального числа s в будь-якій точці $x = x_i$ існує скінчений вираз вигляду (11) s-го порядку точності, причому таких виразів є нескінчено багато. При довільному виборі $q = s+n+1$ абсцис $x = x_i + \alpha_k h,\ k = \overline{1,q}$, можна підібрати сталі C_k таким чином, щоб для будь-якої неперервної з похідними до q-го порядку включно в точці x_i функції $y(x)$ справджувалася рівність

$$A(y) \equiv \sum_{k=1}^{q} C_k y\left(x_i + \alpha_k h\right) = \ell_n\left[y\left(x_i\right)\right] + D\theta \frac{h^{s+1}\left|y^{(q)}\right|}{q!},$$

де $|\theta| < 1$, D – поліном від h степеня не вищого за n, що не залежить від y; $\left|y^{(q)}\right|$ – максимальне значення модуля q-ї похідної на відрізку, який містить усі точки $x_i + \alpha_k h,\ k = \overline{1,q}$.

Коефіцієнти C_k знаходяться з цілком визначеної системи лінійних алґебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha_k^m C_k = \begin{cases} \dfrac{m!}{h^m} p_m(x_i), & 0 \le m \le n; \\ 0, & n+1 \le m \le n+s, \end{cases} \qquad (12)$$

яка одержується при розкладі виразу (11) в ряд Тейлора. Система (12) завжди розв’язна, поскільки її визначником є детермінант Вандермонда, який, як відомо, відмінний від нуля.

Деякі формули для похідних вигляду (11) подані нижче в таблиці.

	Формули	Найближчий відмінний від нуля член розкладу в ряд Тейлора	Кількість вузлів сітки
y'	$y_i' = h^{-1}(y_{i+1} - y_i)$	$-0{,}5hy_i''$	2
	$y_i' = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$	$-\frac{1}{6}h^2 y_i'''$	3
	$y_i' = \frac{1}{12h}(-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2})$	$\frac{1}{30}h^4 y_i^{(\mathrm{V})}$	5
	$y_i' = \frac{1}{60h}(y_{i+3} - 9y_{i+2} + 45y_{i+1} - 45y_{i-1} + 9y_{i-2} - y_{i-3})$	$-\frac{1}{140}h^6 y_i^{(\mathrm{VII})}$	7
y''	$y_i'' = h^{-2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$	$-\frac{1}{12}h^2 y_i^{(\mathrm{IV})}$	3
	$y_i'' = \frac{1}{12h^2}(-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2})$	$\frac{1}{90}h^4 y_i^{(\mathrm{VI})}$	5
	$y_i'' = \frac{1}{180h^2}(2y_{i+3} - 27y_{i+2} + 270y_{i+1} - 490y_i +$ $+ 270y_{i-1} - 27y_{i-2} + 2y_{i-3})$	$-\frac{1}{560}h^6 y_i^{(\mathrm{VIII})}$	7
y'''	$y_i''' = \frac{1}{2h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2})$	$-\frac{1}{4}h^2 y_i^{(\mathrm{V})}$	5
	$y_i''' = \frac{1}{8h^3}(-y_{i+3} + 8y_{i+2} - 13y_{i+1} + 13y_{i-1} - 8y_{i-2} +$ $+ y_{i-3})$	$\frac{7}{120}h^4 y_i^{(\mathrm{VII})}$	7
$y^{(\mathrm{IV})}$	$y_i^{(\mathrm{IV})} = h^{-4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2})$	$-\frac{1}{6}h^2 y_i^{(\mathrm{VI})}$	5
	$y_i^{(\mathrm{IV})} = \frac{1}{6h^4}(-y_{i+3} + 12y_{i+2} - 39y_{i+1} + 56y_i -$ $-39y_{i-1} + 12y_{i-2} - y_{i-3})$	$\frac{7}{240}h^4 y_i^{(\mathrm{VIII})}$	7

XII. Багатоточковий метод скінчених різниць

Ідея багатоточкового різницевого методу полягає у використанні диференціальних виразів вигляду

$$P = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \left(a_j y_j + A_j y_j^{(k)} \right), \qquad (13)$$

які є лінійними комбінаціями значень функції $y(x)$ та її похідної деякого порядку k в точках x_j, $j = \overline{-\nu, \nu}$. Сталі a_j і A_j підбираються таким чином, щоб розклад виразу (13) в ряд Тейлора в околі кожної з точок x_i мав у цій точці нуль якнайвищого порядку, тобто

$$P(x_i) = P'(x_i) = \ldots = P^{(s)}(x_i) = 0.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \qquad (14)$$

Складемо вирази вигляду (13) і для $y^{(n)}$ запишемо рівняння

$$\sum_{j=-\nu}^{\nu} \left(a_j y_j + A_j y_j^{(n)}\right) = 0 \qquad (15)$$

в усіх внутрішніх точках x_i, $i = \overline{1, n-1}$.

Величини $y_j^{(n)}$ можуть бути виключеними з (15), якщо їх виразити з рівняння (14) через значення $y_j^{(n-1)}$, $y_j^{(n-2)}$, …, y_j, котрі надалі можна розглядати як невідомі.

Кожну з похідних $y_j^{(s)}$, $s = \overline{1, n-1}$, у свою чергу, можна виразити через похідні нижчих порядків і y_j в усіх внутрішніх точках. Таким чином, в кожній з точок x_i одержимо систему рівнянь:

$$\sum_{j=-\nu}^{\nu} \left[a_{j,k} y_j + A_{j,k} y_j^{(n-k)}\right] = 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \qquad (16)$$

З рівняння (15) з урахуванням диференціального рівняння (14), крайових умов і системи (16) знаходять значення шуканої функції в точках x_i.

У наведеній нижче таблиці подані вирази вигляду (13) зі спеціально підібраними коефіцієнтами a_j і A_j для похідних до 4-го порядку включно.

Розглянемо питання про оцінку похибки методів скінчених різниць. Зауважимо, що звичайний і покращений різницеві методи є частинними випадками багатоточкового методу, тому обмежимося оцінкою похибки багатоточкового методу скінчених різниць.

Усі алгебраїчні рівняння, що одержуються при застосуванні цього методу, є лінійними співвідношеннями, котрі пов’язують значення y_i, y_i', …, $y_i^{(n-1)}$. Таким чином, доводиться розглядати систему алґебраїчних рівнянь вигляду

$$\Lambda_m \equiv \sum_{j,k} a_{j,k}^{(m)} y_j^{(k)} = f_m, \quad m = \overline{1, n}, \qquad (17)$$

де $a_{j,k}^{(m)}$, f_m – задані, n – кількість вузлів. Припускатимемо, що крайова задача (1),(2) має єдиний розв’язок, а система (17) однозначно розв’язна.

	Формули	Найближчий відмінний від нуля член розкладу в ряд Тейлора	Кількість вузлів сітки
y'	$y'_{i+1}+y'_i-2h^{-1}\left(y_{i+1}-y_i\right)=0$	$\frac{1}{6}h^2 y'''_i$	2
	$y'_{i+1}+4y'_i+y'_{i-1}-\frac{3}{h}\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)=0$	$\frac{1}{30}h^4 y_i^{(\mathrm{V})}$	3
	$y'_{i+1}+3y'_i+y'_{i-1}-\frac{1}{12h}\left(y_{i+2}+28y_{i+1}+28y_{i-1}-\right.$ $\left.-\,y_{i-2}\right)=0$	$-\frac{1}{420}h^6 y_i^{(\mathrm{VII})}$	5
y''	$y''_{i+1}+10y''_i+y''_{i-1}-\frac{12}{h^2}\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)=0$	$\frac{1}{20}h^4 y_i^{(\mathrm{VI})}$	3
	$2y''_{i+1}+11y''_i+2y''_{i-1}+\frac{3}{4h^2}\left(y_{i+2}+16y_{i+1}-34y_i+\right.$ $\left.+16y_{i-1}+y_{i-2}\right)=0$	$-\frac{23}{7!}h^6 y_i^{(\mathrm{VIII})}$	5
y'''	$y'''_{i+1}+2y'''_i+y'''_{i-1}-\frac{2}{h^3}\left(y_{i+2}-2y_{i+1}+2y_{i-1}-y_{i-2}\right)=0$	$\frac{1}{60}h^4 y_i^{(\mathrm{VIII})}$	5
$y^{(\mathrm{IV})}$	$y_{i+1}^{(\mathrm{IV})}+4y_i^{(\mathrm{IV})}+y_{i-1}^{(\mathrm{IV})}-\frac{6}{h^4}\left(y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-\right.$ $\left.-4y_{i-1}+y_{i-2}\right)=0$	$\frac{1}{120}h^4 y_i^{(\mathrm{VIII})}$	5

Для точного розв’язку крайової задачі $y(x)$ складемо аналогічні до (17) вирази

$$\mathrm{Y}_m=\sum_{j,k}a_{j,k}^{(m)}y^{(k)}\left(x_j\right),\quad m=\overline{1,n}.$$

Розкладемо вираз Y_m згідно формули Тейлора в околі точки $x=x_m$ з урахуванням диференціального рівняння (1) та крайових умов (2). Одержимо:

$$\mathrm{Y}_m\equiv\sum_{j,k}a_{j,k}^{(m)}y^{(k)}\left(x_j\right)=R_m+\theta_m h^{\nu_m}D_m y^{(\nu_m)}\left(\xi_m\right),\quad m=\overline{1,n},\tag{18}$$

де $|\theta_m|<1$; R_m, D_m, ν_m – відомі величини, а ξ_m – деяка біжуча точка. Позначимо шукану похибку через

$$\varphi_j^{(k)}=y^{(k)}\left(x_j\right)-y_j^{(k)}.$$

Порівнюючи вирази (17) і (18), легко побачити, що ця похибка справджуватиме систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j,k}a_{j,k}^{(m)}\varphi_j^{(k)}=-f_m+R_m+\theta_m h^{\nu_m}D_m y^{(\nu_m)}\left(\xi_m\right).\tag{19}$$

Визначник цієї системи рівний визначникові системи (17), тому система (19) також є розв’язною. Таким способом можливо одержати оцінку похибки багатоточкового методу скінчених різниць у кожному конкретному випадку.

ЗАВДАННЯ №4

Скласти проґраму побудови наближеного розв'язку крайової задачі для звичайного диференціального рівняння вказаними методами у відповідності до варіанту індивідуального завдання. Усі обчислення виконувати в одній проґрамі. Результати роботи проґрами оформити у вигляді таблиці

x	$y(x)$	$y13\ldots y15$

де x - значення арґументу, $y(x)$ - значення точного розв'язку, $y13\ldots y15$ - значення наближеного розв'язку, одержаного за допомогою методів 13…15.

Варіант	**Методи (вузли)**	**Постановка задачі**
1	X XI (7) XII (3)	$y'' + 3y' - 4y = 25e^{-4x} + 36xe^{-x}$, $y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 6e^{-1}$.
2	X XI (7) XII (5)	$y'' + y = x\sin x$, $y(0) = 0, \quad y(2) = 0{,}5\sin 2 - \cos 2$.
3	X XI (5) XII (5)	$y'' + 3y' + 2y = \left(e^x + 1\right)^{-1}$, $2y'(0) + 3y(0) = 2, \quad y(1) = e^{-2}(e+1)\ln(e+1)$.
4	X XI (7) XII (5)	$y^{(IV)} + y'' = 2\cos x, \quad y(0) = -2$, $y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'(2) - y(2) = 3\sin 2 - 1$.
5	X XI (7) XII (3)	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$, $y'(-1) = 0, \quad y(0) = 0$.
6	X XI (5) XII (5)	$y''' - 4y'' + 3y' = -9x^2 + 4xe^{2x}$, $y(0) = 0, \quad y''(0) = -4, \quad y(-3) = 16 + 7e^{-6}$.
7	X XI (7) XII (5)	$y''' + y' = \sin x + x\cos x$, $y(0) = 3, \quad y'(0) = 4, \quad y(-1) = 0$.
8	X XI (5) XII (5)	$y'' + 4y = 48\cos x \cdot \cos 3x$, $y'(0) + 12y(0) = 0, \quad y'(1) = 8\sin 4$.
9	X XI (7) XII (5)	$x^2 y'' - 2y = \sin\ln x$, $y(1) = 0, \quad 2y'(2) + 3y(2) = -0{,}1 - \sin\ln 2$.

10	X XI (5) XII (5)	$y^{(IV)}+5y''+4y=240\sin x\cdot\cos 2x,\quad y(0)=-20,$ $y'(0)=26,\quad y''(0)=20,\quad y(1)=6\sin 1\cos 2.$
11	X XI (5) XII (3)	$y''+2y'+5y=e^{-x}\left(\cos^2 x+\operatorname{tg} x\right),$ $y(0)=\frac{1}{8},\quad y'(2)+y(2)=e^{-2}\left(\frac{17}{8}\sin 4-\sin^2 2\right).$
12	X XI (3) XII (5)	$y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x,$ $y'(1)-2y(1)=-0{,}1\cos 2,\quad y(0)=0{,}35.$
13	X XI (5) XII (5)	$y'''-3y'-2y=9e^{2x},$ $y(0)=0,\quad y'(0)=-3,\quad y(1)=0.$
14	X XI (7) XII (3)	$y''-2x^{-2}y=3\ln(-x),$ $y'(-2)+y(-2)=\frac{1}{3}-\ln 4,\quad y(-1)=1.$
15	X XI (7) XII (5)	$y'''-y'=4x,$ $y(0)=3,\quad y'(0)=-3,\quad y'(1)+y(1)=-4.$
16	X XI (7) XII (5)	$x^2y''-2y=3x^2(x+1)^{-1},$ $y'(1)+y(1)=0,\quad y(2)=8{,}5\ln 2-4{,}5\ln 3.$
17	X XI (7) XII (3)	$y''-9y=e^{-3x}\left(9x^2+11\sin 3x\right),$ $y(0)=\frac{1}{2},\quad y'(1)+3y(1)=-0{,}75e^{-3}(2\sin 3-\cos 3).$
18	X XI (7) XII (5)	$y^{(IV)}+y''=6(x-\cos x),\quad y(0)=6,$ $y'(0)=0,\quad y''(0)=6,\quad y'(1)-y(1)=3\cos 1-4.$
19	X XI (5) XII (5)	$x^2y''-6y=5x^3+8x^2,$ $y(1)=1,\quad y'(2)=8\ln 2-11.$
20	X XI (3) XII (5)	$x^2y''-xy'+y=x^{-1}\ln x,$ $y'(1)=-\frac{3}{16},\quad y(2)=0.$

ТАБЛИЦЯ ТОЧНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ДО ЗАВДАННЯ №4

Варіант	Точний розв’язок
1	$y = -2e^{x} + e^{-4x}(3-5x) - e^{-x}(6x+1)$
2	$y = 0{,}25x(\sin x - x\cos x)$
3	$y = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln\left(e^{x}+1\right)$
4	$y = x(1-\sin x) - 2\cos x$
5	$y = 0{,}8e^{-x}\left(2x - 1 + \sqrt{(x+1)^5}\right)$
6	$y = (1-2x)e^{2x} - x^3 - 4x^2 - \frac{26}{3}x - 1$
7	$y = 4(x+1)\sin x + 3\left(1-x^2\right)\cos x$
8	$y = 3\cos 2x - 2\cos 4x + 6(x-1)\sin 2x$
9	$y = 0{,}1\left(\cos\ln x - x^{-1}\right) - 0{,}3\sin\ln x$
10	$y = 6\sin x\cos 2x + 20(x-1)\cos x$
11	$y = \dfrac{e^{-x}}{8}\left[1 - 4x\cos 2x + \left(x + 4\ln\dfrac{\lvert\cos x\rvert}{\cos 2}\right)\sin 2x\right]$
12	$y = \left(0{,}3e^{2(x-1)} + 0{,}05\right)\sin 2x + 0{,}25e^{2x} + 0{,}1\cos 2x$
13	$y = (x-1)\left(e^{2x} - e^{-x}\right)$
14	$y = x^2\left[1 - \frac{1}{3}\ln(-x) + \frac{1}{2}\ln^2(-x)\right]$
15	$y = 2\left(1-x^2\right) + e^{-x}$
16	$y = x^2\ln\dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{x+1}{2}$
17	$y = \dfrac{25}{72}\left[e^{3(x-2)} - e^{-3(x+2)}\right] + \dfrac{e^{-3x}}{12}\left(6\cos 3x - 3\sin 3x - 6x^3 - 3x^2 - x\right)$
18	$y = 3x\sin x + x^3 + 6$
19	$y = 4x^{-2} - 2x^2 + x^3\left(\ln\lvert x\rvert - 1\right)$
20	$y = \dfrac{(1+\ln x)\left(4-x^2\right)}{4x}$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: МГУ, 1990. – 336 с. (www.srcc.msu.su)
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы, т. I. – М: Наука, 1973. – 632 с.
3. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* – Численные методы. – М.: Наука, 1987.
4. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений, т.II. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
5. *Волков Е.А.* Численные методы. – М.: Наука, 1987.
6. *Воробьёва Г.Н., Данилова А.Н.* Практикум по численным методам. – М.: Высшая школа, 1979. – 184 с.
7. *Калиткин Н.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 584 с.
9. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1953.
10. *Копчёнова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
11. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983.
12. *Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А.* Методы вычислений. – К.: Вища школа, 1977.
13. *Маринець В.В., Рего В.Л.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. – Ужгород: УжНУ, 2006. – 144 с.
14. Математический практикум (под ред. Г.Н.Положего). – М.: Наука. – 512 с.
15. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
16. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
17. Числові методи. Лабораторний практикум (ч. I). – Чернівці: Вид-во ЧНУ, 2002. – 52 с.