УДК 517.95

О. Д. Власій[1,2], **Т. П. Гой**[1], **І. Я. Савка**[1,2] (Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника[1], Інститут прикладних проблем механіки і математики ім Я. С. Підстригача НАН України[2])

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДРУГОГО РОДУ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ФАКТОРИЗОВАНОГО ОПЕРАТОРА

We study the problem for the factorized hyperbolic equations of high order with constant coefficients with nonlocal conditions in time and periodic conditions in space variable. The investigations of this problem is associated with a problem of small denominators. For almost all (with respect to Lebesque measure) parameters of the problem we establish conditions for the existence of a unique classical solutions of the problem.

Розглянуто задачу з нелокальними умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовою змінною для гіперболічного факторизованого рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Дослідження задачі пов'язане з проблемою малих знаменників. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

1. Вступ. Протягом останніх десятиліть спостерігаємо значне зростання інтересу до нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. Це зумовлено як потребами побудови загальної теорії крайових задач, так і широким практичним застосуванням таких задач у моделюванні явищ і процесів математичної біології, фізики плазми, процесів коливань, дифузії тощо [1–4].

Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними є, взагалі, некоректними за Адамаром. Зазвичай їх розв'язність для обмежених областей є нестійкою щодо малих змін параметрів задачі та пов'язана з проблемою малих знаменників, для подолання якої ефективним виявився метричний підхід [5, 6].

Задачі з нелокальними двоточковими умовами, що узагальнюють умови періодичності, а також з нелокальними багатоточковими крайовими умовами для лінійних і квазілінійних (слабконелінійних) гіперболічних рівнянь і систем вивчались, зокрема, у [7–15].

У роботах [16, 17] досліджено задачі для факторизованого параболічного та гіперболічного за Гордінгом рівнянь з нелокальними умовами, які є лінійною комбінацією багатоточкових та інтегральних умов за часовою змінною, у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій.

У цій статті, яка ідейно близька до робіт [8, 9], встановлено умови однозначної розв'язності задачі з нелокальними крайовими умовами другого роду (умови містять співвідношення між значеннями шуканої функції та її похідними на межі області [18]) за виділеною змінною t для строго гіперболічного за Петровським факторизованого рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у класі функцій, 2π-періодичних за просторовою змінною.

2. Постановка задачі. В області $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega\}$, де $T > 0$, Ω — одиничне коло, досліджуємо задачу

$$P[u] \equiv \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_j \frac{\partial}{\partial x} - b_j \right) u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-j} c_{qj}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{q}\left(\mu_1 \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} + \mu_2\, \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\bigg|_{t=0} + \right.$$
$$\left. + \mu_3\, \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} - \mu_2\, \frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\bigg|_{t=T}\right) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

де a_j, $b_j \in \mathbb{R}$, $c_{qj}^s \in \mathbb{C}$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$, $\mu_2 \neq 0$, $\dfrac{\partial^{-1} u}{\partial t^{-1}} := \displaystyle\int_0^t u(\tau, x)d\tau$.

Усі виділені множники у лівій частині рівняння (1) вважаємо попарно різними (диференціальний оператор P — гіперболічний за Петровським). Припустимо також, що функція $f(t,x)$ неперервна за змінною t і досить гладка за змінною x в $\overline{Q}$.

У випадку $\mu_2 = 0$ задача (1), (2) досліджувалась у [8].

Через $C^{(0,m)}(\overline{Q})$ позначимо банахів простір функцій $f(t,x)$ з нормою

$$\|f\|_{C^{(0,m)}(\overline{Q})} = \sum_{0\leq s\leq m} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left|\frac{\partial^s f(t,x)}{\partial x^s}\right|,$$

а через $C^n(\overline{Q})$ — банахів простір функцій $u(t,x)$, які неперервні разом з усіма похідними до n-го порядку включно в $\overline{Q}$, з нормою

$$\|u\|_{C^n(\overline{Q})} = \sum_{0\leq r+s\leq n} \max_{(t,x)\in\overline{Q}} \left|\frac{\partial^{r+s} u(t,x)}{\partial t^r \partial x^s}\right|.$$

Вигляд області Q накладає умови 2π-періодичності за змінною x на шуканий розв'язок $u \in C^n(\overline{Q})$ і функцію $f \in C^{(0,m)}(\overline{Q})$.

3. Умови єдиності розв'язку. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) e^{ikx}. \tag{3}$$

Підставляючи ряд (3) у рівняння (1) та нелокальні умови (2), одержуємо, що кожен з коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, в (3) є розв'язком такої нелокальної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt} - \gamma_{jk}\right) u_k(t) = f_k(t), \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-j} c_{qj}^{s}(ik)^q \left(\mu_1 u_k^{(j)}(0) + \mu_2 u_k^{(j-1)}(0) + \mu_3 u_k^{(j)}(T) - \mu_2 u_k^{(j-1)}(T)\right) = 0,$$
$$s = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

де $f_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$,

$$\gamma_{jk} = a_j k i + b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Нехай $k = 0$ і $B_1, B_2, \ldots, B_v$ — попарно різні корені кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_v$ відповідно характеристичного рівняння $\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda - b_j) = 0$, тобто

$$\prod_{j=1}^{n}(\lambda - b_j) \equiv \prod_{j=1}^{v}(\lambda - B_j)^{n_j}, \quad n_1 + n_2 + \ldots + n_v = n.$$

У цьому випадку фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння $\prod\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}-b_j\right)u_0(t)=0$ утворюють функції $u_{qj}(t)=t^{q-1}e^{B_jt}$, $j=1,2,\ldots,v$; $q=1,2,\ldots,n_j$, а характеристичним визначником відповідної задачі є $\Delta_0=D_0U_0$, де

$$D_0=\det\left\|c^s_{0,l-1}\right\|_{s,l=1,2,\ldots,n},\quad U_0=\det\left\|U_s[u_{qj}(t)]\right\|_{\substack{s=1,2,\ldots,n\\ j=1,2,\ldots,v;\ q=1,2,\ldots,n_j}},$$

$$U_s[u]=\mu_1\frac{\partial^{s-1}u}{\partial t^{s-1}}\bigg|_{t=0}+\mu_2\,\frac{\partial^{s-2}u}{\partial t^{s-1}}\bigg|_{t=0}+\mu_3\,\frac{\partial^{s-1}u}{\partial t^{s-1}}\bigg|_{t=T}-\mu_2\,\frac{\partial^{s-2}u}{\partial t^{s-2}}\bigg|_{t=T},\ s=1,2,\ldots,n.$$

Нехай тепер $k\neq 0$. За припущенням гіперболічності рівняння $\gamma_{jk}\neq\gamma_{sk}$ для $j\neq s$, а тому відповідне (4) однорідне рівняння для кожного $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ має фундаментальну систему розв'язків $\left\{e^{\gamma_{jk}t}:\ j=1,2,\ldots,n\right\}$. Характеристичний визначник Δ_k задачі (4), (5) визначається формулою

$$\Delta_k=D_k\prod_{j=1}^{n}M_{jk}\prod_{1\leq p<q\leq n}\big(\gamma_{qk}-\gamma_{pk}\big),\tag{7}$$

де

$$D_k=\det\left\|\sum_{q=0}^{n+1-l}c^s_{q,l-1}(ik)^q\right\|_{s,l=1,2,\ldots,n},\tag{8}$$

$$M_{jk}=\begin{cases}\mu_1+\mu_3e^{\gamma_{jk}T}+\dfrac{\mu_2}{\gamma_{jk}}\big(1-e^{\gamma_{jk}T}\big), & \gamma_{jk}\neq 0,\\ \mu_1+\mu_3-\mu_2T, & \gamma_{jk}=0,\end{cases}\quad j=1,2,\ldots,n.\tag{9}$$

Зауважимо, що коли всі числа $b_1,b_2,\ldots,b_n$ є різними $(v=n)$, то

$$U_0=\prod_{j=1}^{n}M_{j0}\prod_{1\leq p<q\leq n}\big(b_q-b_p\big).$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n(\overline{Q})$ *необхідно й досить, щоб справджувались умови*

$$\begin{gathered}D_0\neq 0,\quad U_0\neq 0,\\ (\forall\,k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\})\quad D_k\neq 0,\quad M_{jk}\neq 0,\ j=1,2,\ldots,n.\end{gathered}\tag{10}$$

Доведення теореми 1 проводиться аналогічно до доведення теореми 5 з [6, §7] та випливає з єдиності розвинення 2π-періодичної функції у ряд Фур'є.

Розглянемо визначник D_k з (8), який є многочленом степеня $\frac{n(n+1)}{2}$ за змінною k. Нехай $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n(n+1)/2}$ — корені цього многочлена, а d_0 — коефіцієнт біля старшого степеня k. Очевидно, що

$$d_0=\det\left\|c^p_{n-q+1,q-1}\right\|_{p,q=1,2,\ldots,n}.$$

Лема 1. *Якщо* $d_0\neq 0$, *то для всіх* $|k|\geq K_1$ *справджується оцінка*

$$|D_k|\geq C_1\,|k|^{\frac{n(n+1)}{2}},\tag{11}$$

де $K_1=2\max\left\{|\theta_1|,|\theta_2|,\ldots,|\theta_{n(n+1)/2}|\right\}$, $C_1=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}|d_0|$.

Доведення. Оскільки $d_0 \neq 0$, то з (8), враховуючи умови леми, маємо

$$D_k = d_0(k-\theta_1)(k-\theta_2)\cdot \ldots \cdot (k-\theta_{n(n+1)/2}).$$

Тоді

$$|D_k| \geq |d_0|\cdot \big||k|-|\theta_1|\big|\cdot\big||k|-|\theta_2|\big|\cdot\ldots\cdot\big||k|-|\theta_{n(n+1)/2}|\big| =$$
$$= |d_0|\cdot\left|\frac{|k|}{2}+\frac{|k|}{2}-|\theta_1|\right|\cdot\left|\frac{|k|}{2}+\frac{|k|}{2}-|\theta_2|\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{|k|}{2}+\frac{|k|}{2}-|\theta_{n(n+1)/2}|\right|$$

і для всіх $|k| \geq 2\max\left\{|\theta_1|,\ldots,|\theta_{n(n+1)/2}|\right\}$ одержуємо оцінку (11).

Зауваження 1. *Якщо для коефіцієнтів d_s біля степеня $k^{\frac{n(n+1)}{2}-s}$ у многочлені D_k з (8) маємо $d_0 = 0$, $d_1 = 0, \ldots, d_{s-1} = 0$, але $d_s \neq 0$, то для всіх $|k| \geq K_{1s}$ справджується оцінка*

$$|D_k| \geq C_{1s}|k|^{\frac{n(n+1)}{2}-s},$$

де $C_{1s} = 2^{s-\frac{n(n+1)}{2}}|d_s|$,

$$K_{1s} = 2\max\left\{|\theta_1|,|\theta_2|,\ldots,|\theta_{n(n+1)/2-s}|\right\}, \quad s \in \left\{1,2,\ldots,\tfrac{n(n+1)}{2}\right\}.$$

З леми 1 та зауваження 1 випливає, що в теоремі 1 виконання умови $D_k \neq 0$ можна вимагати не для всіх цілих $k \in \mathbb{Z}$, а тільки для скінченної кількості значень $|k| < K_{1s}$.

4. Умови існування розв'язку. Розглянемо питання про існування класичного розв'язку задачі (1), (2). Надалі вважатимемо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}$ умови (10) справджуються. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі (4), (5), за допомогою якої розв'язок цієї задачі зображується формулою

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Розв'язок задачі (1), (2), з урахуванням (3), подається у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\, e^{ikx}, \tag{13}$$

умови збіжності якого будуть встановлені нижче.

У квадраті $\mathcal{K} = \{(t,\tau): 0 \leq t,\tau \leq T\}$, крім сторін $\tau = 0$ і $\tau = T$, функція Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, визначається формулами

$$G_0(t,\tau) = \frac{1}{U_0}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} g_0(t,\tau) & e^{B_1 t} & \ldots & t^{n_1-1}e^{B_1 t} & \ldots & e^{B_v t} & \ldots & t^{n_v-1}e^{B_v t} \\ U_1[g_0(t,\tau)] & U_1[e^{B_1 t}] & \ldots & U_1[t^{n_1-1}e^{B_1 t}] & \ldots & U_1[e^{B_v t}] & \ldots & U_1[t^{n_v-1}e^{B_v t}] \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ U_n[g_0(t,\tau)] & U_n[e^{B_1 t}] & \ldots & U_n[t^{n_1-1}e^{B_1 t}] & \ldots & U_n[e^{B_v t}] & \ldots & U_n[t^{n_v-1}e^{B_v t}] \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q e^{\gamma_{jk}t} S^j_{n-q,k}}{2M_{jk}A_{jk}} \sum_{s=1}^{n} \frac{\gamma^q_{sk}\sigma_{sk}e^{-\gamma_{sk}\tau} - 2\mu_3\delta_{q1}}{A_{sk}}, k \neq 0, \quad (15)$$

де

$$g_0(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2W_0(\tau)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} e^{B_1\tau} & \dots & \tau^{n_1-1}e^{B_1\tau} & \dots & e^{B_v\tau} & \dots & \tau^{n_v-1}e^{B_v\tau} \\ (e^{B_1\tau})' & \dots & (\tau^{n_1-1}e^{B_1\tau})' & \dots & (e^{B_v\tau})' & \dots & (\tau^{n_v-1}e^{B_v\tau})' \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (e^{B_1\tau})^{(n-2)} & \dots & (\tau^{n_1-1}e^{B_1\tau})^{(n-2)} & \dots & (e^{B_v\tau})^{(n-2)} & \dots & (\tau^{n_v-1}e^{B_v\tau})^{(n-2)} \\ e^{B_1t} & \dots & t^{n_1-1}e^{B_1t} & \dots & e^{B_vt} & \dots & t^{n_v-1}e^{B_vt} \end{vmatrix},$$

$$g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\gamma_{jk}(t-\tau)}}{A_{jk}}, \qquad A_{jk} = \prod_{p=1,\, p\neq j}^{n} \big(\gamma_{pk} - \gamma_{jk}\big),$$

$$\sigma_{jk} = \mu_1 - \mu_3 e^{\gamma_{jk}T} + \frac{\mu_2}{\gamma_{jk}}\big(1 + e^{\gamma_{jk}T}\big), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$W_0(\tau)$ — вронскіан функцій $u_{qj}(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, v$; $q = 1, 2, \dots, n_j$, $S^j_{n-q,k}$ — сума всіх можливих добутків виразів $\gamma_{1k}, \dots, \gamma_{j-1,k}, \gamma_{j+1,k}, \dots, \gamma_{nk}$ у кількості $n - q$ ($S^j_{0k} \equiv 1$), δ_{q1} — символ Кронекера.

На сторонах $\tau = 0$ і $\tau = T$ квадрата $\mathcal{K}$ функція Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}$, довизначається за неперервністю справа і зліва відповідно.

Збіжність ряду (13) у загальному випадку пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази $M_{jk}, j = 1, 2, \dots, n$, визначені формулами (9), які входять знаменниками у формулу (15), можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості цілих чисел k.

Встановлюючи умови існування класичного розв'язку задачі (1), (2), використаємо допоміжне твердження.

Лема 2. *Для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ справджуються оцінки*

$$|A_{jk}| \geq C_2\,|k|^{n-N}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

де $N = \max\{l_1, \dots, l_n\}$, l_j — кратність кореня $\lambda = a_j$ многочлена $\prod_{s=1}^{n}(\lambda - a_s)$ (a_s — коефіцієнти рівняння (1)), а стала C_2 не залежить від k.

Доведення. Оскільки $|\gamma_{pk} - \gamma_{jk}| = \sqrt{(a_p - a_j)^2k^2 + (b_p - b_j)^2}$, то

$$|\gamma_{pk} - \gamma_{jk}| \geq \begin{cases} |a_p - a_j|\,|k|, & a_p \neq a_j, \\ |b_p - b_j|, & a_p = a_j, \end{cases} \quad p \neq j, \ \ k \neq 0. \quad (17)$$

Нехай $\tilde{C}_1 = \min\limits_{\substack{1\leq p<q\leq n \\ a_p\neq a_q}} \{|a_p - a_q|\} > 0$, $\tilde{C}_2 = \min\limits_{\substack{1\leq p<q\leq n, \\ a_p=a_q}} \{|b_q - b_p|\} > 0$.

Добуток $A_{jk} = \prod\limits_{p=1,\, p\neq j}^{n} \big(\gamma_{pk} - \gamma_{jk}\big)$ містить $n-1$ множників, серед яких є рівно $l_j - 1$ множників, для яких $a_p = a_j$ при $p \neq j$. Звідси, враховуючи (17), маємо оцінку

$$|A_{jk}| \geq (\tilde{C}_2)^{l_j-1}\big(\tilde{C}_1|k|\big)^{n-l_j}, \quad k \neq 0,$$

з якої, позначивши $C_2 = \min\limits_{j=1,\dots,n} (\tilde{C}_2)^{l_j-1}(\tilde{C}_1)^{n-l_j}$, одержуємо потрібну оцінку (16).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (10) *та існують такі дійсні числа* $C_3 > 0$ *і* α, *що для всіх* (*крім скінченної кількості* $k \in \mathbb{Z}$) *виконуються нерівності*

$$|M_{jk}| \geq C_3|k|^{-\alpha}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Тоді, якщо $f \in C^{(0,[\alpha]+2N+2)}(\overline{Q})$, *де* $[\alpha]$ — *ціла частина числа* α, *а число* N *визначено у лемі 2, то існує єдиний розв'язок* $u \in C^n(\overline{Q})$ *задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функції* f.

Доведення. З формул (15) та нерівностей (16), (18) для достатньо великих значень $|k|$ випливають оцінки

$$|u_k^{(s)}(t)| \leq \max_{0\leq t\leq T} \left| \frac{d^s}{dt^s} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right| \leq \frac{C_4 \overline{f}_k}{(1+|k|)^{n-s-\alpha-2N}}, \; s = 0, 1, \ldots, n, \tag{19}$$

де $\overline{f}_k = \max\limits_{0\leq t\leq T} |f_k(t)|$, а додатна стала C_4 не залежить від k.

Оскільки за умовою теореми $f \in C^{(0,[\alpha]+2N+2)}(\overline{Q})$, то

$$\overline{f}_k \leq \frac{C_5}{(1+|k|)^{[\alpha]+2N+2}} ||f||_{C^{(0,[\gamma]+2N+2)}(\overline{Q})}. \tag{20}$$

Тоді з нерівностей (19), (20) отримуємо оцінку для норми класичного розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{gathered} ||u(t,x)||_{C^n(\overline{Q})} \leq \sum_{0\leq p+s\leq n} \sum_{|k|\geq 0} (1+|k|)^p \max_{0\leq t\leq T} \left| \frac{d^s}{dt^s} \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau) d\tau \right| \leq \\ \leq C_6 ||f(t,x)||_{C^n(\overline{Q})} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{\{\alpha\}-2} = C_7 ||f(t,x)||_{C^n(\overline{Q})} < +\infty, \end{gathered} \tag{21}$$

де $\{\alpha\}$ — дробова частина числа α.

Зауважимо, що сталі C_5, C_6, C_7 у нерівностях (20), (21) є додатними і не залежать від цілого k.

Таким чином, з оцінки (21) випливає доведення теореми.

5. Умови відсутності проблеми малих знаменників для задачі (1), (2). Розглянемо за змінною $k \in \mathbb{Z}$ квадратні тричлени вигляду

$$H_j(k) = \zeta_{0j}(a_j k)^2 + \zeta_{1j}\, a_j k + \zeta_{2j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

з відповідними коефіцієнтами

$$\zeta_{0j} = \zeta_{0j}(z, h, b_j, T) = |z|^2 - |h|^2 e^{2b_j T},$$

$$\zeta_{1j} = \zeta_{1j}(z, h, b_j, T) = -2\,\mathrm{Im}\big(z + h e^{2b_j T}\big),$$

$$\zeta_{2j} = \zeta_{2j}(z, h, b_j, T) = b_j^2(|z|^2 - |h|^2 e^{2b_j T}) + 2b_j \mathrm{Re}\big(z + h e^{2b_j T}\big) + 1 - e^{2b_j T},$$

де $(z, h) \in \mathbb{C}^2$.

Для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$, зафіксувавши b_j, T, позначимо у просторі $\mathbb{C}^2$ множини

$$\mathcal{O}_0^{b_j} = \left\{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : \, |z| = |h| e^{b_j T}\right\},$$

$$\mathcal{O}_1^{b_j} = \left\{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im}\bigl(z + he^{2b_jT}\bigr) = 0\right\},$$
$$\mathcal{O}_2^{b_j} = \left\{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : b_j^2\bigl(|z|^2 - |h|^2 e^{2b_jT}\bigr) + 2b_j\operatorname{Re}\bigl(z + he^{2b_jT}\bigr) + 1 - e^{2b_jT} = 0\right\},$$
$$\mathcal{O}_3^{b_j} = \left\{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : \frac{|1-e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}} \le |h| \le \frac{|1+e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}}\right\}, \quad b_j \neq 0.$$

Лема 3. *Якщо* $\mu_2 \neq 0$ *і* $a_j \neq 0$ *для деякого* $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, *то для цього* j *справджується оцінка*

$$|M_{jk}| \ge \begin{cases} c_{1j}, & (\mu_1,\mu_3) \in \mathbb{C}^2 \backslash \mathcal{O}_0^{b_j}, \quad |k| \ge 2\max\{|k_{1j}|, |k_{2j}|\}, \\ c_{2j}|k|^{-1}, & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_3}{\mu_2}\right) \in \mathcal{O}_0^{b_j} \backslash \mathcal{O}_1^{b_j}, \quad |k| \ge k_{3j}, \\ c_{3j}|k|^{-2}, & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_3}{\mu_2}\right) \in (\mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j}) \backslash \mathcal{O}_2^{b_j}, \quad b_j \neq 0,\, k \neq 0, \\ c_{4j}, & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_3}{\mu_2}\right) \in (\mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j} \cap \mathcal{O}_2^{b_j}) \backslash \mathcal{O}_3^{b_j}, \quad b_j \neq 0,\; |k| > k_{4j}, \end{cases} \tag{23}$$

де k_{1j}, k_{2j} *— корені квадратного рівняння* $H_j(k) = 0$, $k_{3j} = \frac{2|\zeta_{0j}|}{|\zeta_{1j}|}$, $k_{4j} = \frac{2(1+e^{b_jT})}{q_j|a_j|}$,

$$q_j = \begin{cases} e^{b_jT}(e^{b_jT}+1)\left(\frac{|1-e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}} - |h|\right), & |h| < \frac{|1-e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}}, \\ e^{b_jT}|e^{b_jT}-1|\left(|h| - \frac{1+e^{b_jT}}{2|b_j|e^{b_jT}}\right), & |h| > \frac{1+e^{b_jT}}{2|b_j|e^{b_jT}}, \end{cases}$$

а додатні величини c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}, c_{4j} *не залежать від* k.

Доведення. Оскільки за умовою леми $a_j \neq 0$ для деякого j, то $\gamma_{jk} \neq 0$ при $k \neq 0$, а вираз M_{jk} зображується формулою

$$M_{jk} = \mu_1 + \frac{\mu_2}{\gamma_{jk}} + \left(\mu_3 - \frac{\mu_2}{\gamma_{jk}}\right)e^{\gamma_{jk}T}, \quad k \neq 0,\; j \in \{1,2,\ldots,n\}. \tag{24}$$

Для $\mu_2 \neq 0$ позначимо допоміжний вираз

$$\tilde{M}_{jk} = \frac{\gamma_{jk}}{\mu_2}M_{jk} = z\gamma_{jk} + 1 + \Bigl(h\gamma_{jk} - 1\Bigr)e^{\gamma_{jk}T}, \tag{25}$$

де

$$z = z_1 + iz_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad h = h_1 + ih_2 = \frac{\mu_3}{\mu_2}.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{Re}\gamma_{jk} = b_j, \operatorname{Im}\gamma_{jk} = a_jk, \quad \operatorname{Re}z = z_1, \operatorname{Im}z = z_2, \quad \operatorname{Re}h = h_1, \operatorname{Im}h = h_2,$$

при $k \neq 0$ для виразу $\tilde{M}_{jk}$ з (25) отримуємо оцінку

$$|\tilde{M}_{jk}| \ge \Bigl||z\gamma_{jk}+1| - |h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT}\Bigr| = \frac{\Bigl||z\gamma_{jk}+1|^2 - |h\gamma_{jk}-1|^2e^{2b_jT}\Bigr|}{|z\gamma_{jk}+1| + |h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT}} =$$

$$= \frac{\Bigl|(z_1b_j+1-z_2a_jk)^2 + (z_2b_j+z_1a_jk)^2 - e^{2b_jT}(h_1b_j-1-h_2a_jk)^2 - e^{2b_jT}(h_2b_j+h_1a_jk)^2\Bigr|}{|z\gamma_{jk}+1| + |h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT}} =$$

$$= \frac{\Bigl|\left(|z|^2-|h|^2e^{2b_jT}\right)(a_j^2k^2+b_j^2) - 2a_j\left(z_2+h_2e^{2b_jT}\right)k + 2b_j\left(z_1+h_1e^{2b_jT}\right) + 1 - e^{2b_jT}\Bigr|}{|z\gamma_{jk}+1| + |h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT}} =$$

$$= \frac{1}{|z\gamma_{jk}+1|+|h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT}}\,|H_j(k)|\,.$$

Тоді з нерівностей

$$|\gamma_{jk}| \le c_{5j}|k|, \quad c_{5j} = \sqrt{a_j^2+b_j^2},$$

$$|z\gamma_{jk}+1|+|h\gamma_{jk}-1|e^{b_jT} \le c_{6j}|k|, \quad c_{6j} = \max_{j=1,\dots,n}\left(c_{4j}(|z|+|he^{b_jT}|)+1+e^{b_jT}\right),$$

$$|M_{jk}| = \frac{|\mu_2||\tilde{M}_{jk}|}{|\gamma_{jk}|} \ge \frac{|\mu_2|}{c_{5j}c_{6j}|k|^2}|H_j(k)|,$$

$$|H_j(k)| \ge \begin{cases} \zeta_{0j}|k|^2/4, & (z,h)\in\mathbb{C}^2\backslash\mathcal{O}_0^{b_j}, & |k|\ge 2\max\{|k_{1j}|,|k_{2j}|\},\\ \zeta_{1j}|k|/2, & (z,h)\in\mathcal{O}_0^{b_j}\backslash\mathcal{O}_1^{b_j}, & |k|\ge k_{3j},\\ \zeta_{2j}, & (z,h)\in(\mathcal{O}_0^{b_j}\cap\mathcal{O}_1^{b_j})\backslash\mathcal{O}_2^{b_j}, & k\ne 0,\end{cases}$$

отримуємо перші три нерівності (23), якщо

$$c_{1j} = \frac{|\mu_2\zeta_{0j}|}{4c_{5j}c_{6j}}, \quad c_{2j} = \frac{|\mu_2\zeta_{1j}|}{2c_{5j}c_{6j}}, \quad c_{3j} = \frac{|\mu_2\zeta_{2j}|}{c_{5j}c_{6j}}.$$

Якщо $(z,h)\in\mathcal{O}_0^{b_j}\cap\mathcal{O}_1^{b_j}\cap\mathcal{O}_2^{b_j}$ при $b_j\ne 0$, то у цьому випадку, враховуючи, що

$$z+he^{2b_jT} = \tfrac{1-e^{2b_jT}}{2b_j},$$

одержуємо

$$\frac{\tilde{M}_{jk}}{\gamma_{jk}} = \frac{1-e^{2b_jT}}{2b_j} - h\Big(e^{2b_jT}-e^{\gamma_{jk}T}\Big) + \frac{1-e^{\gamma_{jk}T}}{\gamma_{jk}}. \tag{26}$$

Оскільки

$$\left|\tfrac{|1-e^{2b_jT}|}{2|b_j|} - |h||e^{2b_jT}-e^{\gamma_{jk}T}|\right| \ge \left|\tfrac{|1-e^{2b_jT}|}{2|b_j|} - |h|e^{b_jT}(e^{b_jT}+1)\right| =$$

$$= e^{b_jT}(e^{b_jT}+1)\Big(\tfrac{|1-e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}} - |h|\Big) = q_j > 0 \text{ при } |h| < \tfrac{|1-e^{b_jT}|}{2|b_j|e^{b_jT}},$$

$$\left||h||e^{2b_jT}-e^{\gamma_{jk}T}| - \tfrac{|1-e^{2b_jT}|}{2|b_j|}\right| \ge \left||h|e^{b_jT}|e^{b_jT}-1| - \tfrac{|1-e^{2b_jT}|}{2|b_j|}\right| =$$

$$= e^{b_jT}|e^{b_jT}-1|\Big(|h| - \tfrac{1+e^{b_jT}}{2|b_j|e^{b_jT}}\Big) = q_j > 0 \text{ при } |h| > \tfrac{1+e^{b_jT}}{2|b_j|e^{b_jT}},$$

$$|\gamma_{jk}| = \sqrt{b_j^2+a_j^2k^2} \ge |a_j||k|, \quad a_j\ne 0,$$

то для $(z,h)\in(\mathcal{O}_0^{b_j}\cap\mathcal{O}_1^{b_j}\cap\mathcal{O}_2^{b_j})\backslash\mathcal{O}_3^{b_j}$, $b_j\ne 0$, та достатньо великих $|k|$ виконується нерівність

$$\frac{|M_{jk}|}{|\mu_2|} = \frac{|\tilde{M}_{jk}|}{|\gamma_{jk}|} \ge \left|\frac{|1-e^{2b_jT}|}{2|b_j|} - |h|\Big|e^{2b_jT}-e^{\gamma_{jk}T}\Big| - \frac{|1-e^{\gamma_{jk}T}|}{|\gamma_{jk}|}\right| \ge$$

$$\ge \left|q_j - \frac{1+e^{b_jT}}{|a_j||k|}\right| = \left|\frac{q_j}{2}+\frac{q_j}{2}-\frac{1+e^{b_jT}}{|a_j||k|}\right| \ge \frac{\zeta_5^j}{2} > 0, \quad |k| \ge \frac{2(1+e^{b_jT})}{q_j|a_j|} = k_{4j},$$

з якої випливає остання з нерівностей (23) при $c_{4j} = \frac{|\mu_2|q_j}{2}$. Лему доведено.

Зауважимо, що при $a_j = 0$ справджується рівність

$$M_{jk} = \mu_1 + \mu_3 e^{b_j T} + \frac{\mu_2}{b_j}\Big(1 - e^{b_j T}\Big), \quad b_j \neq 0.$$

Таким чином, якщо $\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_3}{\mu_2}\right) \notin \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}^{b_j}$, де

$$\mathcal{O}^{b_j} = \begin{cases} \mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j} \cap \mathcal{O}_2^{b_j} \cap \mathcal{O}_3^{b_j}, & a_j \neq 0, b_j \neq 0, \\ \mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j}, & a_j \neq 0, b_j = 0, \end{cases}$$

то для задачі (1), (2) проблема малих знаменників відсутня, оскільки на підставі леми 3 нерівності (18) виконуються для певних $\alpha \in \{0, 1, 2\}$.

Зокрема, якщо $\big(\mu_1, \mu_3\big) \in \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_0^{b_j}$, то

$$|M_{jk}| \geq c_{1j} > 0, \quad |k| \geq 2\max\{|k_{1j}|, |k_{2j}|\}, j = 1, 2, \ldots, n,$$

тобто у нерівностях (18) $C_3 = \min\limits_{j=1,\ldots,n} c_{1j}$, $\alpha = 0$. У цьому випадку справджується теорема 3.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови:*
1) $U_0 \neq 0$;
2) *рівняння* $D_k = 0$ *не має розв'язків у цілих числах* k;
3) $\big(\mu_1, \mu_3\big) \in \mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{O}_0^{b_j}$;
4) $M_{jk} \neq 0$ *для всіх* $|k| < 2\max\{|k_{1j}|, |k_{2j}|\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$;
5) $f \in C^{(0,2N+2)}(\overline{Q})$,

де число N *визначене у лемі 2. Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C^n(\overline{Q})$ *задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функції* f.

6. Метричні оцінки малих знаменників. Якщо $\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\mu_3}{\mu_2}\right) \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{O}^{b_j}$, то розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників M_{jk}, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для її розв'язання застосуємо метричний підхід, який дозволяє встановити виконання оцінок (18) з деяким показником α для множини повної міри Лебега параметрів (коефіцієнтів) задачі (1), (2).

Оцінки в термінах коефіцієнтів рівняння та нелокальних умов.
Випадок $b_j \neq 0$. Тоді множина $\mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j} \cap \mathcal{O}_2^{b_j}$ є кривою Γ^{b_j} у просторі $\mathbb{C}^2$:

$$\Gamma^{b_j} := \mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j} \cap \mathcal{O}_2^{b_j} = \left\{(z, h) \in \mathbb{C}^2 : \, h \in \mathcal{K}^{b_j}, z = -he^{2b_j T} + \tfrac{e^{2b_j T} - 1}{2b_j}\right\},$$

де $\mathcal{K}^{b_j}$ ($\mathcal{K}^{b_j} \subset \mathbb{C}$) — коло радіуса $(2|b_j|e^{b_j T})^{-1}$ з центром у точці $(\frac{1}{2b_j}, 0)$, тобто

$$\mathcal{K}^{b_j} = \left\{h \in \mathbb{C} : \, \big(h_1 - \tfrac{1}{2b_j}\big)^2 + h_2^2 = (2|b_j|e^{b_j T})^{-2}\right\}.$$

Теорема 4. *Якщо* $b_j \neq 0$ *для деякого* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно індукованої міри Лебега на* Γ^{b_j}) *точок* $(z, h) \in \Gamma^{b_j} \cap \mathcal{O}_3^{b_j}$ *нерівність*

$$|M_{jk}| \geq \frac{e^{b_j T}|e^{b_j T} - 1|}{|\mu_2|}|k|^{-\alpha} \tag{27}$$

виконується для всіх (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbb{Z}$ *при* $\alpha > 1$.

Доведення. Крива Γ^{b_j} у просторі $\mathbb{C}^2$ складається з двох віток $\Gamma^{b_j}_{\pm}$, які можна задати за допомогою параметра $\tau \in I_j$:

$$\begin{cases} z_1 = z_1(\tau) = -\tau e^{2b_jT} + \frac{e^{2b_jT}-1}{2b_j}, \\ z_2 = z_2(\tau) = \mp e^{2b_jT}\sqrt{\left(2|b_j|e^{b_jT}\right)^{-2} - \left(\tau - \frac{1}{2b_j}\right)^2}, \\ h_1 = h_1(\tau) = \tau, \\ h_2 = h_2(\tau) = \pm\sqrt{\left(2|b_j|e^{b_jT}\right)^{-2} - \left(\tau - \frac{1}{2b_j}\right)^2}, \end{cases} \tag{28}$$

де $I_j = [I_{1j}, I_{2j}]$ — відрізок параметризації з кінцями

$$I_{1j} = \tfrac{1}{2b_j} - \tfrac{1}{2|b_j|e^{b_jT}}, \quad I_{2j} = \tfrac{1}{2b_j} + \tfrac{1}{2|b_j|e^{b_jT}}.$$

Тепер за допомогою параметризації (28) представимо вираз $\tilde{M}_{jk}$ як функцію незалежного параметра τ на відрізку I_j :

$$\tilde{M}_{jk}(\tau) = \gamma_{jk}(e^{\gamma_{jk}T} - e^{2b_jT})(\tau + ih_2(\tau)) + \tfrac{1-e^{2b_jT}}{2b_j}\gamma_{jk} + 1 - e^{\gamma_{jk}T}, \quad \tau \in I_j.$$

Позначимо

$$\overline{M}_{jk}(\tau) = \frac{\tilde{M}_{jk}(\tau)}{\gamma_{jk}(e^{\gamma_{jk}T} - e^{2b_jT})} = \tau + ih_2(\tau) + \chi_{jk}, \quad \tau \in I_j,$$

де

$$\chi_{jk} = \frac{1 - e^{2b_jT}}{2b_j\left(e^{2b_jT} - e^{\gamma_{jk}T}\right)} + \frac{1 - e^{\gamma_{jk}T}}{\gamma_{jk}\left(e^{2b_jT} - e^{\gamma_{jk}T}\right)}.$$

Запровадимо для кожного k множини

$$\overline{N}_{jk} = \left\{\tau \in I_j : |\overline{M}_{jk}(\tau)| < |k|^{-\alpha}\right\}, \quad N_{jk} = \left\{\tau \in I_j : |\tau + \mathrm{Re}\chi_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\},$$

а також N_j — множину тих точок $\tau \in I_j$, для яких безліч разів (стосовно k) виконується нерівність $|\overline{M}_{jk}(\tau)| < |k|^{-\alpha}$.

Оскільки $\overline{N}_{jk} \subset N_{jk}$,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\overline{N}_{jk} \le \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}N_{jk} \le 2|k|^{-\alpha},$$

то ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}}N_{jk}$ є збіжним для $\alpha > 1$. На підставі леми Бореля – Кантеллі маємо, що множина тих точок $\tau \in I_j$, які потрапляють у нескінченну кількість множин N_{jk}, $k \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві, тобто $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}N_j = 0$.

Тоді з нерівностей

$$\frac{|\mu_2||M_{jk}|}{|e^{2b_jT} - e^{\gamma_{jk}T}|} = |\overline{M}_{jk}(\tau)| \ge |h_1 + \mathrm{Re}\chi_k|$$

маємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau \in I_j$ нерівності (27) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ при $\alpha > 1$.

Із параметричного задання (28) кривої Γ^{b_j} у просторі $\mathbb{C}^2$ випливає, що нерівності (27) виконуються для майже всіх (стосовно індукованої міри Лебега на Γ^{b_j}) точок (z, h) на відрізку кривої $\Gamma^{b_j} \cap \mathcal{O}^{b_j}_3$, що й треба було довести.

Випадок $b_j = 0$. У цьому випадку множина $\mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j}$ є об'єднанням двох двовимірних поверхонь

$$\Gamma_1^0 = \{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : z = -h,\}, \quad \Gamma_2^0 = \{(z,h) \in \mathbb{C}^2 : z = \bar{h} = h_1 - ih_2\},$$

тобто $\mathcal{O}_0^{b_j} \cap \mathcal{O}_1^{b_j} = \Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0$.

Позначимо через $J_1, J_2, \ldots, J_n$ відрізки дійсної прямої.

Теорема 5. *Якщо $z = -h$, $h \neq 0$, $b_j = 0$ для деякого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_j \in J_j$ нерівність*

$$|M_{jk}| \geq |k|^{-\alpha} \tag{29}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ при $\alpha > 0$.

Доведення. За умов теореми

$$M_{jk} = \mu_2 \left(h - \tfrac{1}{ia_j k} \right) (e^{ia_j kT} - 1).$$

Тоді для $|k| > \frac{2}{|a_j||h|}$ модуль виразу M_{jk} можна оцінити знизу:

$$|M_{jk}| \geq |\mu_2|\,|h| \left| \sin \tfrac{a_j Tk}{2} \right| \geq \tfrac{2|\mu_2|\,|h|}{\pi} \left| \tfrac{a_j Tk}{2} - \pi d_k \right| =$$

$$= \tfrac{T|\mu_2|\,|h|\,|k|}{\pi} \left| a_j - \tfrac{2\pi d_k}{Tk} \right|,$$

де d_k — ціле число, для якого

$$\left| \frac{a_j Tk}{2} - \pi d_k \right| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки для $\alpha > 0$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \left\{ a_j \in J_j : \left| a_j - \tfrac{2\pi d_k}{Tk} \right| < \tfrac{\pi}{T|\mu_2|\,|h|} |k|^{-\alpha-1} \right\} \leq \tfrac{2\pi}{T|\mu_2|\,|h|} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{-\alpha-1} < \infty,$$

то з леми Бореля – Кантеллі випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a_j \in J_j$ нерівність

$$\left| a_j - \frac{2\pi d_k}{Tk} \right| \geq \frac{\pi}{T|\mu_2|\,|h|} |k|^{-\alpha-1}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ при $\alpha > 0$. Теорему доведено.

Позначимо через Π прямокутник, що є декартовим добутком довільних фіксованих відрізків Π_1 і Π_2 дійсної прямої, тобто $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$.

Теорема 6. *Якщо $z = \bar{h}$, $b_j = 0$ для деякого фіксованого j, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) чисел $(h_1, h_2) \in \Pi$ нерівність (29) виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ при $\alpha > 1$.*

Доведення. За умов теореми вираз M_{jk} має вигляд

$$\begin{gathered} M_{jk} = (\bar{h} + he^{ia_jkT}) + \tfrac{1-e^{ia_jkT}}{ia_jk} = \\ = h_1(e^{ia_jkT}+1) + ih_2(e^{ia_jkT}-1) + \tfrac{1-e^{ia_jkT}}{ia_jk}. \end{gathered} \tag{30}$$

Для фіксованих a_j і T позначимо

$$\mathcal{E}_1 = \left\{k \in \mathbb{Z} : \left|\cos\tfrac{a_jkT}{2}\right| > \tfrac{1}{2}\right\}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathbb{Z}\backslash\mathcal{E}_1.$$

Якщо $k \in \mathcal{E}_1$, то для фіксованого $h_2 \in \Pi_2$ для такого k

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\left\{h_1 \in \Pi_1 : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\} \le \tfrac{2|k|^{-\alpha}}{|e^{ia_jkT}+1|} = \tfrac{2|k|^{-\alpha}}{2\left|\cos\frac{a_jkT}{2}\right|} < 2|k|^{-\alpha},$$

звідки, інтегруючи за змінною h_2, за теоремою Фубіні отримуємо оцінку

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^2}\left\{(h_1,h_2) \in \Pi : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\} \le 2\,\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\Pi_2\,|k|^{-\alpha}, \quad k \in \mathcal{E}_1.$$

Якщо $k \in \mathcal{E}_2$, то для фіксованого $h_1 \in \Pi_1$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\left\{h_2 \in \Pi_2 : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\} \le \tfrac{2|k|^{-\alpha}}{|e^{ia_jkT}-1|} = \tfrac{2|k|^{-\alpha}}{2\left|\sin\frac{a_jkT}{2}\right|} < \frac{2}{\sqrt{3}}|k|^{-\alpha},$$

звідки, інтегруючи вже за змінною h_2, за теоремою Фубіні аналогічно отримуємо оцінку

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^2}\left\{(h_1,h_2) \in \Pi : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\} \le \frac{2\,\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\Pi_1}{\sqrt{3}}\,|k|^{-\alpha}, \quad k \in \mathcal{E}_2.$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^2}\left\{(h_1,h_2) \in \Pi : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\right\}$ мажорується збіжним рядом при $\alpha > 1$. На підставі леми Бореля – Кантеллі маємо, що множина тих точок $(h_1,h_2) \in \Pi$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $\{(h_1,h_2) \in \Pi : |M_{jk}| < |k|^{-\alpha}\}$, $k \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві. Теорему доведено.

Зауваження 2. *Теорему 6 можна сформулювати для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}$) чисел h.*

Зауваження 3. *Якщо $z = \bar{h}$, aT/π — ціле число, то нерівність (18) виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ при $\gamma = 0$.*

Оцінки в термінах параметра T. Нехай $R(\lambda)$ — многочлен степеня n вигляду

$$R(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} r_j\lambda^{n-j}, \quad r_1, r_2 \ldots, r_n \in \mathbb{C}, \tag{31}$$

а $Q(t)$ — квазімногочлен

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{z_jt}p_j(t), \tag{32}$$

де $z_1, z_2, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, $z_j \ne z_q$ $(j \ne q)$, а $p_1(t)$, $p_2(t), \ldots,$ $p_n(t)$ — многочлени степенів $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_m - 1$ відповідно $(n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N})$.

Для $R(\lambda)$ і $Q(t)$ позначимо

$$\mathrm{A}_R = 1 + \max_{j=1,\ldots,n} |r_j|^{1/j}, \quad \mathrm{Z}_Q = 1 + \max_{j=1,\ldots,m} |z_j|.$$

Лема 4. [19] *Нехай* $R(\lambda)$, $Q(t)$ *— многочлен і квазімногочлен, визначені рівностями* (31), (32) *відповідно. Якщо для всіх* $t \in [a, b]$

$$|R\,(d/dt)\,Q(t)| \geq \delta > 0,$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)\mathrm{A}_R^n}\right]$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a, b] : |Q(t)| < \varepsilon\} \leq C_9\, \mathrm{Z}_Q\, (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $C_9 \equiv C_9(n, n_0, b-a)$, $n_0 = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.

Теорема 7. *Якщо* $|\mu_1| + |\mu_2| \neq 0$, $a_j \neq 0$ *для деякого* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T \in [T_1, T_2]$, *де* $0 < T_1 < T_2 < +\infty$, *нерівність* (29) *виконується для всіх (крім скінченної кількості)* $k \in \mathbb{Z}$ *при* $\alpha > 2 - \operatorname{sgn}|\mu_1|$.

Доведення. Для кожного фіксованого k і j розглянемо вираз M_{jk} як функцію змінної T на відрізку $[T_1, T_2]$:

$$M_{jk}(T) \equiv M_{jk}, \quad T \in [T_1, T_2],$$

та множини

$$N_{jk} = \left\{T \in [T_1, T_2] : |M_{jk}(T)| < |k|^{-\alpha}\right\}, \quad \alpha > 1.$$

Через N_j позначимо множину тих точок $T \in [T_1, T_2]$, для яких безліч разів (стосовно k) виконується нерівність $|M_{jk}(T)| < |k|^{-\alpha}$.

Очевидно, що функція $M_{jk}(T)$ є квазімногочленом вигляду (32) при $m = 2$, $z_1 = 0$, $z_2 = \gamma_{jk}$, $p_1(T) = \mu_1 + \frac{\mu_2}{\gamma_{jk}}$, $p_2(T) = \mu_3 - \frac{\mu_2}{\gamma_{jk}}$ і розв'язком звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$R_{kj}\left(\frac{d}{dT}\right) M_{jk} \equiv \frac{dM_{jk}(T)}{dT} - \gamma_{jk} M_{jk}(T) = -\mu_1\gamma_{jk} - \mu_2,$$

де $R_{kj}(\lambda) = \lambda - \gamma_{jk}$.

Для оцінки міри множини N_{jk} застосуємо лему 4. Оскільки

$$|R_{kj}\,(d/dT) M_{jk}(T)| \geq \frac{|\mu_1 a_j|}{2}|k|, \quad \text{якщо } |k| \geq \tfrac{2|\mu_2 + b_j\mu_1|}{|\mu_1 a_j|},\ \mu_1 \neq 0,$$

$$|R_{kj}\,(d/dT) M_{jk}(T)| = |\mu_2|, \quad \text{якщо } \mu_1 = 0,$$

$$\mathrm{A}_{R_{kj}} = \mathrm{Z}_{M_{jk}} = 1 + |\gamma_{jk}|,$$

$$0 < |k|^{-\alpha} < \tfrac{|\mu_1 a_j k|}{8\mathrm{A}_{R_{kj}}}, \quad \text{якщо } |k|^{\alpha} > \tfrac{8(1+2\max\{|a_j|,|b_j|\})}{|\mu_1 a_j|},\ \alpha > 1,\ \mu_1 \neq 0,$$

$$0 < |k|^{-\alpha} < \tfrac{|\mu_2|}{4\mathrm{A}_{R_{kj}}}, \quad \text{якщо } |k|^{\alpha-1} \geq \tfrac{4(1+2\max\{|a_j|,|b_j|\})}{|\mu_2|},\ \alpha > 1,\ \mu_1 = 0,$$

то для досить великих значень $|k|$ залежно від значення μ_1 отримуємо оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} N_{jk} \leq 2C_9|\mu_1 a_j|^{-1}\big(1 + |\gamma_{jk}|\big)|k|^{-\alpha-1} \leq$$

$$\leq 2C_9|\mu_1 a_j|^{-1}\big(1 + 2\max\{|a_j|, |b_j|\}\big)|k|^{-\alpha}, \quad \text{якщо}\, \mu_1 \neq 0;$$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} N_{jk} \leq 2C_9|\mu_2|^{-1}(1+|\gamma_{jk}|)|k|^{-\alpha} \leq$$
$$\leq 2C_9|\mu_2|^{-1}(1+2\max\{|a_j|,|b_j|\})|k|^{-\alpha+1}, \quad \text{якщо}\, \mu_1 = 0.$$

Оскільки ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} N_{jk}$ збіжний для $\alpha > 2 - \mathrm{sgn}|\mu_1|$, то на підставі леми Бореля – Кантеллі маємо, що множина тих точок $T \in [T_1, T_2]$, які потрапляють у нескінченну кількість множин N_{jk}, $k \in \mathbb{Z}$, дорівнює нулеві, тобто $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} N_j = 0$ для деякого числа $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М. : Высш. шк., 1995. – 301 с.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, №1. – С. 92–101.
4. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. – Нальчик : Изд-во КБНЦ РАН, 2011. – 196 с.
5. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №12. – С. 1624–1650.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К. : Наукова думка, 2002. – 416 с.
7. *Власій О. Д., Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами в головній частині оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, №4. – С. 101–109.
8. *Гой Т. П.* Нелокальна крайова задача для гіперболічного факторизованого оператора зі сталими коефіцієнтами, збуреного нелінійним доданком// Вісник Прикарпат. ун-ту. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – **2**. – С. 16–23.
9. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь// Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, №2. – С. 186–195.
10. *Ільків В. С.* Гладкість розв'язків задач з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь // Карпат. мат. публ. – 2009. – **1**, №1. – С. 47–58.
11. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з нелокальними багатоточковими умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 107–115.
12. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна–Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними // Прикл. пробл. мех. і мат. – 2010. – **2**. – С. 41–53.
13. *Поліщук В. М., Пташник Б. Й.* Періодична крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними в лінійній частині оператора коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, №2. – С. 25–31.
14. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь // Нелин. гран. задачи. – 2001. – **11**. – С. 161–167.
15. *Goy T. P., Ptashnyk B. Yo.* Nonlocal boundary value problem for quasilinear hyperbolic equations // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – **8**. – P. 114–120.
16. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2012. – **2**, №7. – С. 25–33.
17. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265.
18. *Пулькина Л. С.* Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Матем. – 2012. – **4**. – С. 74–83.
19. *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. — Львів, 2005. – 193 с.

Одержано 28.04.2014