

УДК 519.6

М. І. Глебена (Ужгородський нац. ун-т)

## ДО ПИТАННЯ ТОЧНОСТІ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ НЕКЛАСИЧНОЮ МАЖОРАНТОЮ НЬЮТОНА

In the article is suggested the question of the accuracy of approximation function of two real variables of non-classical Newtonian majorant.

Розглянуто питання точності наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона.

**Вступ.** В [1, 2] розроблено апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В [3] цей апарат використано для побудови формули для наближеного обчислення визначених подвійних інтегралів. В [4, 5], використовуючи властивості неklasичних мажорант і діаграм Ньютона, побудовано чисельні методи відшукування абсолютного екстремуму негладких логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. В [6] розглянуто оцінку точності апроксимації двічі неперервно диференційованої і логарифмічно опуклої функції  $f(x)$  визначеної на проміжку  $[a, b]$ , функцією  $g_n(f; x)$ , яка на кожному проміжку  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ), збігається з неklasичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції  $f(x)$  в двох точках  $x_i$  та  $x_{i+1}$ .

В даній роботі розглянуто питання точності апроксимації функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона.

**Постановка задачі.** Нехай функція двох дійсних змінних  $z = f(x, y)$  задана своїми значеннями в точках  $(x_i, y_j)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ):

$$f(x_i, y_j) = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m),$$

де  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ,  $y_1 < y_2 < \dots < y_m$ ,  $|z_{ij}| = a_{ij} \leq M$  і  $a_{11} \cdot a_{1m} \cdot a_{n1} \cdot a_{nm} \neq 0$ . В просторі  $xyz$  побудуємо точки зображення  $P_{ij}(x_i, y_j, -\ln a_{ij})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) і з кожної точки  $P_{ij}$  проведемо півпрямую в додатному напрямі осі  $Oz$ , перпендикулярно до площини  $xy$ . Множину точок цих півпрямих позначимо через  $S$ , а її опуклу оболонку – через  $C(S)$ . Для кожної точки  $(x, y) \in R$ , де  $R = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_n, y_1 \leq y \leq y_m\}$ , визначимо точку  $B(x, y, \kappa(x, y))$ , де

$$\kappa(x, y) = \inf_{(x, y, z) \in C(S)} z.$$

Множина точок  $B(x, y, \kappa(x, y))$ ,  $(x, y) \in R$ , утворює багатогранну поверхню, яка обмежує  $C(S)$  знизу. Ця поверхня називається неklasичною діаграмою Ньютона функції  $z = f(x, y)$  на  $R$ , а її рівняння  $z = \kappa(x, y)$ ,  $(x, y) \in R$ . Функція

$$M_f(x, y) = \exp(-\kappa(x, y)), \quad (x, y) \in R,$$

називається неklasичною мажорантою Ньютона функції  $z = f(x, y)$  на  $R$ .

В [2] знайдено явний вигляд  $M_f(x, y)$  для функції  $z = f(x, y)$ , заданої своїми значеннями у вершинах трикутника  $\Delta$  з вершинами  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ ,  $(a_3, b_3)$ . Якщо  $f(a_1, b_1) = A$ ,  $f(a_2, b_2) = B$ ,  $f(a_3, b_3) = C$ , то

$$M_f(x, y) = \left( |A|^{h_{32}(x,y)} |B|^{h_{13}(x,y)} |C|^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(a_2, b_2)}}, \quad (1)$$

де

$$h_{ij}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - a_i & y - b_i \\ a_j - a_i & b_j - b_i \end{array} \right|, \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

Використовуючи формулу (1), оцінимо точність наближення функції  $z = f(x, y)$  неklasичною мажорантою Ньютона.

**Розв'язування задачі.** Нехай областю, в якій треба наблизити неперервну функцію  $f(x, y)$ , є прямокутник

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Розіб'ємо область  $D$  на прямокутники прямими  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) і  $y = y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ), де  $x_{i+1} = x_i + h_1$ ,  $y_{j+1} = y_j + h_2$ ,  $h_1 = (b - a)/p$ ,  $h_2 = (d - c)/q$ . Кожен прямокутник діагонально розіб'ємо на два трикутники: верхній і нижній. Якщо прямокутник утворено перетином прямих  $x = x_{i-1}$ ,  $x = x_i$  і  $y = y_{j-1}$ ,  $y = y_j$ , то вершинами нижнього трикутника будуть точки  $(x_{i-1}, y_{j-1})$ ,  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$ , а верхнього  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$ . Нижній трикутник позначимо через  $D_{ij}^-$ , а верхній –  $D_{ij}^+$ .

**Теорема 1.** Якщо виконуються умови

$$1 \leq f(x, y) \leq M, \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D, \quad (2)$$

то точність наближення функції  $f(x, y)$  мажорантою Ньютона  $M_f(x, y)$  визначається нерівністю

$$|f(x, y) - M_f(x, y)| \leq 2hL(1 + M),$$

де  $h = \max(h_1, h_2)$ .

**Доведення.** На кожному нижньому трикутнику  $D_{ij}^-$  ( $i = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, q$ ), використовуючи формулу (1), наблизимо функцію  $f(x, y)$  неklasичною мажорантою Ньютона.

$$M_{f,i,j}^-(x, y) = \left( f(x_{i-1}, y_{j-1})^{h_{32}(x,y)} f(x_{i-1}, y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i, y_{j-1})^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(x_{i-1}, y_j)}}, \text{ де}$$

$$h_{32}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_{j-1} \\ x_{i-1} - x_i & y_j - y_{j-1} \end{array} \right| = h_1(y - y_{j-1}) + h_2(x - x_i),$$

$$h_{13}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - x_{i-1} & y - y_{j-1} \\ x_i - x_{i-1} & y_{j-1} - y_{j-1} \end{array} \right| = -h_1(y - y_{j-1}),$$

$$h_{21}(x, y) = \left| \begin{array}{cc} x - x_{i-1} & y - y_j \\ x_{i-1} - x_{i-1} & y_{j-1} - y_j \end{array} \right| = -h_2(x - x_{i-1}),$$

$$h_{13}(x_{i-1}, y_j) = \left| \begin{array}{cc} x_{i-1} - x_{i-1} & y_j - y_{j-1} \\ x_i - x_{i-1} & y_{j-1} - y_{j-1} \end{array} \right| = -h_1 h_2.$$

Отже,

$$M_{f,i,j}^-(x, y) = f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}.$$

Розглянемо похибку

$$z_{ij}^-(x, y) = f(x, y) - M_{f,i,j}^-(x, y), \quad (x, y) \in D_{ij}^-.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |z_{ij}^-(x, y)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| + |f(x, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1})| + \\ &\quad + |f(x_{i-1}, y_{j-1}) - \\ &\quad - f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &|f(x_{i-1}, y_{j-1}) - \\ &- f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}}| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - \right. \\ &\quad \left. - f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} + f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - \right. \\ &\quad \left. - f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| \leq \\ &\leq f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| + \\ &+ f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \left| 1 - f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \right| = \\ &= f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| + \\ &+ f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y_{j-1}-y}{h_2}} \left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} - \right. \end{aligned}$$

$$- f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \Big|$$

i

$$|f(x, y) - f(x, y_{j-1})| \leq L|y - y_{j-1}|,$$

$$|f(x, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1})| \leq L|x - x_{i-1}|,$$

$$\left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} - f(x_i, y_{j-1})^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} \right| \leq |f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| \leq L|x_{i-1} - x_i|,$$

$$\left| f(x_{i-1}, y_{j-1})^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{y-y_{j-1}}{h_2}} \right| \leq |f(x_{i-1}, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq L|y_{j-1} - y_j|,$$

то врахувавши умови (2), одержимо

$$\begin{aligned} |z_{ij}^-(x, y)| &\leq Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + M^{\frac{x_i-x}{h_1} + \frac{x-x_{i-1}}{h_1}} Lh_2 = \\ &= L(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2) = L(h_1 + h_2)(1 + M). \end{aligned}$$

Аналогічно для похибки

$$z_{ij}^+(x, y) = f(x, y) - M_{f,i,j}^+(x, y), \quad (x, y) \in D_{ij}^+,$$

у верхньому елементарному трикутнику одержуємо оцінку

$$|z_{ij}^+(x, y)| \leq L(h_1 + h_2)(1 + M),$$

де

$$M_{f,i,j}^+(x, y) = \left( f(x_{i-1}, y_j)^{h_{32}(x,y)} f(x_i, y_j)^{h_{13}(x,y)} f(x_i, y_{j-1})^{h_{21}(x,y)} \right)^{\frac{1}{h_{13}(x,y)}},$$

$$h_{32}(x, y) = h_2(x - x_i), \quad h_{13}(x, y) = -h_2(x - x_{i-1}) - h_1(y - y_j),$$

$$h_{21}(x, y) = h_1(y - y_j), \quad h_{13}(x_i, y_j) = -h_1h_2.$$

Справді,

$$M_{f,i,j}^+(x, y) = f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y-y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j-y}{h_2}}.$$

Тому

$$\begin{aligned} |z_{ij}^+(x, y)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_{j-1})| + |f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| + \\ &+ \left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j)^{\frac{x_i-x}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{x-x_{i-1}}{h_1}} f(x_i, y_j)^{\frac{y-y_j}{h_2}} f(x_i, y_{j-1})^{\frac{y_j-y}{h_2}} \right|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
 & \left| f(x_i, y_{j-1}) - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x-x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y-y_j}{h_2} f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} \right| = \\
 & = f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x-x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y-y_j}{h_2} \right| = \\
 & = f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} + f(x_i, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - \right. \\
 & \quad \left. - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x-x_{i-1}}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{y-y_j}{h_2} \right| \leq \\
 & \leq f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} \right| + \\
 & + f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} f(x_i, y_j) \frac{y-y_j}{h_2} \left| f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} f(x_i, y_j) \frac{x-x_{i-1}}{h_1} \right| = \\
 & = f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} \left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} \right| + \\
 & + f(x_i, y_{j-1}) \frac{y_j-y}{h_2} f(x_i, y_j) \frac{y-y_j}{h_2} f(x_i, y_j) \frac{x-x_{i-1}}{h_1} \left| f(x_i, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} \right|
 \end{aligned}$$

i

$$|f(x, y) - f(x, y_{j-1})| \leq L|y - y_{j-1}|,$$

$$|f(x, y_{j-1}) - f(x_i, y_{j-1})| \leq L|x - x_i|,$$

$$\left| f(x_i, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} - f(x_{i-1}, y_j) \frac{x_i-x}{h_1} \right| \leq |f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)| \leq L|x_i - x_{i-1}|,$$

$$\left| f(x_i, y_{j-1}) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} - f(x_i, y_j) \frac{y-y_{j-1}}{h_2} \right| \leq |f(x_i, y_{j-1}) - f(x_i, y_j)| \leq L|y_{j-1} - y_j|,$$

то, врахувавши умови (2), одержимо

$$\begin{aligned}
 |z_{ij}^+(x, y)| & \leq Lh_2 + Lh_1 + MLh_1 + MLh_2 = \\
 & = L(h_1 + h_2 + Mh_1 + Mh_2) = L(h_1 + h_2)(1 + M).
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$M_f(x, y) = \begin{cases} M_{f,i,j}^-, & (x, y) \in D_{ij}^-, \\ M_{f,i,j}^+, & (x, y) \in D_{ij}^+, \end{cases}$$

де  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, q$ , наближення функції  $f(x, y)$  у всьому прямокутнику  $D$ , а через

$$z(x, y) = \begin{cases} z_{ij}^-, & (x, y) \in D_{ij}^-, \\ z_{ij}^+, & (x, y) \in D_{ij}^+, \end{cases}$$

де  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, q$ , його похибку. Тоді

$$|f(x, y) - M_f(x, y)| \leq 2hL(1 + M),$$

де  $h = \max(h_1, h_2)$ .

**Висновки.** В даній роботі розглянуто питання точності наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона. Доведено теорему про точність наближення функції двох дійсних змінних неklasичною мажорантою Ньютона.

1. Цегелик Г. Г. Апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. -1998. -Вип.50. С.209-211.
2. Цегелик Г. Г. До побудови апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. -1999. -Вип.52. С.111-116.
3. Цегелик Г. Г. Нова формула мажорантного типу для наближеного обчислення подвійних інтегралів / Г.Г. Цегелик, Н.В.Федчишин // Волинський матем. вісник. -2000. -Вип.7. С.159-164.
4. Глебена М. І. Чисельний метод відшукування екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних. / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". -2007. -Вип. 5.- С. 17-21.
5. Цегелик Г. Г. Чисельний метод мажорантного типу відшукування абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г. Цегелик, М.І.Глебена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформат. -2010. -Вип.16. -С.63-70.
6. Глебена М. І. Про точність деяких чисельних методів, одержаних внаслідок апроксимації функцій неklasичною мажорантою Ньютона / М.І.Глебена, Г.Г.Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. - 2012.- Вип. 23 №.2 С. 31-34.

Одержано 17.04.2014