

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

ЗВ'ЯЗОК ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ПРОСТОРАМИ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ A relationship between the spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ and Orlicz spaces random variables are studied.Досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вступ. Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ були введені Єрмаковим і Островським в роботі [1]. Робота [2], присвячена детальному вивченню цих просторів. Дана стаття є продовженням роботи [2]. Тут досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та знаходяться умови за яких для просторів Орліча випадкових величин виконується умова **H**.

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В другому розділі розглядаються основні властивості просторів Орліча випадкових величин. В третьому розділі досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

1. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 1 (див. [2]). *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{u \geq 1} \frac{(E |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [1]. Але в ній вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядалися випадкові величини, такі що $E |\xi|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Доведено [1], що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E |\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Зауваження 1. *Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, очевидно, є лінійним нормованим простором, і те, що він є простором Банаха, доводиться аналогічно доведенню, що простір Орліча випадкових величин є банаховим [1].*

Теорема 1 (див. [2]). *Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}.$$

Означення 2 (див. [2]). *Додатно неспадна числова послідовність $\chi(n)$, $n \geq 1$ називається M -характеристикою (мажоруючою характеристикою)*

простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ із цього простору виконується нерівність:

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Означення 3 (див. [2]). Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ будемо називати простором $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, якщо для функції $\psi(u)$ виконується умова:

$$\sup_{u \geq 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} < \infty,$$

де $v > 0$ – будь-яке число.

Означення 4 (див. [2]). Нехай S_k – зростаюча числова послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ таку, що $\psi(u) \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_{S_k, \psi, r}(\Omega)$, якщо виконується умова:

$$\sup_{k \geq r} \frac{(E |\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty,$$

де число r – таке, що $S_r \geq 1$.

Як і в попередньому випадку легко довести, що простори $\mathbf{F}_{S_k, \psi, r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k, \psi, r} = \sup_{k \geq r} \frac{(E |\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Означення 5 (див. [2]). Скажемо, що для просторів Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин виконується умова **H**, якщо існує абсолютна константа C_B така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із $B(\Omega)$ виконується нерівність:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \leq C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2.$$

Константу C_B назвемо масштабною константою простору $B(\Omega)$. Для всіх просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ константу $C_{\mathbf{F}_\psi(\Omega)}$ будемо позначати C_ψ .

Наслідок 1 (див. [2]). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – незалежні центровані випадкові величини з простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. Якщо ξ_i – симетричні випадкові величини і при $k \geq \max(r, 2)$ виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad l = \overline{1, k-1}, \quad (1)$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq \hat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова **H** із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$, де $\widehat{\psi}_r = \max(\overline{\psi}_r, \widetilde{C}_r)$, $\overline{\psi}_r = \sup_{u \geq r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)}$, $\widetilde{C}_r = \sup_{1 \leq u \leq S_r} \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)}$.

Якщо відмовитись від умови симетричності, тоді при умові (1) справеджується нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq 4\widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2$$

і в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ теж виконується умова **H** із константою $C_\psi = 4\widehat{\psi}_r^2$.

Якщо ξ_i – не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \left(1 + \frac{k}{3}\right) \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad l = \overline{1, k-1},$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2,$$

або, аналогічно попереднім випадкам, для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ виконується умова **H** із константою $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$.

Лема 1. Нерівність

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}}$$

справедлива при $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$.

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}.$$

За формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} &= \frac{(2k)! l! (k-l)!}{(2l)! (2k-2l)! k!} = \frac{k^{2k} l^l (k-l)^{k-l}}{\sqrt{2} l^{2l} (k-l)^{2(k-l)} k^k} \exp\{\theta_{2k} + \theta_{2l} + \theta_k + \theta_l + \theta_{k-l}\} \leq \\ &\leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{24k} + \frac{1}{24l} + \frac{1}{24(k-l)} + \frac{1}{12k} + \frac{1}{12l} + \frac{1}{12(k-l)}\right\} \leq \\ &\leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1\right)\right\} \leq \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}}, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

Приклад 1. Розглянемо простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\theta$, $\theta \geq \frac{1}{2}$. Доведемо, що в цьому випадку виконується умова (1). Оскільки

$$\begin{aligned} C_{2k}^{2l} \frac{(2l)^{2l\theta} (2k-2l)^{(2k-2l)\theta}}{(2k)^{2k\theta}} &= C_{2k}^{2l} \left(\frac{l^{2l} (k-l)^{(2k-2l)\theta}}{k^{2k}} \right)^\theta \leq \\ &\leq C_k^l \frac{k^k}{l^l (k-l)^{k-l}} \left(\frac{l^{2l} (k-l)^{(2k-2l)\theta}}{k^{2k}} \right)^\theta = C_k^l \left(\frac{l^l (k-l)^{k-l}}{k^k} \right)^{2\theta-1}, \end{aligned}$$

а також

$$\left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1} = \left(\frac{l^l}{k^l} \frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leq 1,$$

тоді при $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$ маємо, що $\left(\frac{l^l}{k^l}\right)^{2\theta-1} \leq 1$ і $\left(\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \leq 1$.

Очевидно, що при $\theta \geq \frac{1}{2}$ і $k > 2$ має місце нерівність (1). Тобто для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^\theta$ виконується умова **H** і справджується така нерівність:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq 4 \cdot 9^\theta \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Зауважимо, що при $\theta < \frac{1}{2}$ для простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ умова **H** не виконується.

2. Основні властивості просторів Орліча

Означення 6 (див. [3]). Неперервна парна опукла функція $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *C-функцією*, якщо $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$ і $U(0) = 0$.

Приклад 2. Прикладами *C-функцій Орліча* є такі функції:

- 1) $U(x) = A|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $A > 0, \alpha \geq 1$;
- 2) $U(x) = C(\exp\{B|x|^\beta\} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $C > 0, B > 0, \beta \geq 1$;
- 3) $U(x) = C(\exp\{\varphi(x)\} - 1)$, $x \in \mathbb{R}, C > 0$ та $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – довільна *C-функція*;
- 4) $U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1$;
- 5) $U(x) = D|x|^\alpha \ln(|x| + 1)$, $x \in \mathbb{R}, D > 0, \alpha \geq 1$.

Означення 7 (див. [3]). Нехай U – довільна *C-функція*. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається сім'я таких випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує константа $r_\xi > 0$, для якої виконується умова:

$$EU \left(\frac{\xi}{r_\xi} \right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf \left\{ r > 0 : EU \left(\frac{\xi}{r} \right) \leq 1 \right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Лема 2 (див. [3]). Нехай $\xi \in L_U(\Omega)$ і $\|\xi\|_U > 0$. Тоді для всіх $x > 0$ справедлива нерівність

$$P \{ |\xi| \geq x \} \leq \frac{1}{U(x/\|\xi\|_U)}.$$

Означення 8 (див. [3]). Скажемо, що C -функція U задовольняє g -умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ має місце нерівність:

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Означення 9 (див. [3]). C -функція Орліча $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча (N -функція), якщо виконуються такі умови:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{U(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 10 (див. [3]). Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – N -функція. Функція φ^* , яка визначається умовою

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y))$$

називається перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ .

Приклад 3 (див. [4]). Функція $U(x) = a|x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\alpha \geq 1$ задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$.

C -функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $x \in \mathbb{R}$, де $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – довільна C -функція, яка задовольняє g -умову при $K = 1$, $A = 1$, $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \geq 1$, тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Лема 3 (див. [4]). Нехай m – деяка константа. Тоді для будь-якого простору Орліча $m \in L_U(\Omega)$ і $\|m\|_U = \frac{|m|}{U^{(-1)}(1)}$.

Лема 4 (див. [4]). Нехай ξ належить простору $L_U(\Omega)$. Тоді існує така константа d_U , що $E|\xi| \leq d_U \|\xi\|_U$.

Приклад 4 (див. [4]). Для функції $U(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ маємо $d_U = 1$. Для $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$ є N -функцією, маємо $d_U = \frac{2}{\varphi^{*(-1)}(1)}$. Тут $\varphi^{*(-1)}(x)$ – обернена функція до $\varphi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$ є перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi(x)$.

Наприклад: якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$, тоді $\varphi^*(x) = \frac{|x|^\beta}{\beta}$, де $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, $\varphi^{*(-1)}(x) = (x\beta)^{1/\beta}$ і $\varphi^{*(-1)}(1) = (\beta)^{1/\beta}$. Якщо $\alpha = 2$, тоді $\beta = 2$ і $d_U = \sqrt{2}$. Якщо $\alpha = 4$, тоді $\beta = \frac{4}{3}$ і $d_U = \frac{3^{3/4}}{4^{1/4}}$.

Наслідок 2 (див. [3]). Нехай C -функція задовольняє g -умову з константами A , K і z_0 . Послідовність $(\varkappa(n), n \geq 1)$ є мажоруючою характеристикою простору $L_U(\Omega)$, якщо

$$\varkappa(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо } n \leq U(z_0), \\ K(1 + U(z_0)) \max\{1, A\} U^{(-1)}(n), & \text{якщо } n > U(z_0). \end{cases}$$

3. Зв'язок просторів $F_\psi(\Omega)$ з просторами Орліча

Означення 11 (див. [4]). Скажемо, що для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова **H**, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із простору $L_U(\Omega)$ виконується така нерівність:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U – деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, для яких має місце умова **H** [4]:

- простори $L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, де $C_U = C_p = \sqrt{2} (\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi})^{1/p}$;
- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C -функції, що існують $p > q \geq 2$, для яких $U(\sqrt[q]{x})$ – опукла, а $U(\sqrt[p]{x})$ – увігнута і $C_U = 2B_p$, де $B_p = 2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p ;
- простори Орліча породжені C -функцією $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, де $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha \geq 2$ для цих просторів умова **H** не виконується.

Доведемо, що умова **H** виконується для таких просторів Орліча $L_U(\Omega)$, у яких функція $U(x)$ зростає як експонента при $x \rightarrow \infty$.

Розглянемо C -функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \leq x_\alpha; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \quad (2)$$

де $x_\alpha = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ – простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\{|x|^\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$. Позначимо символом $\mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ – сім'ю ξ , для яких існує r така, що виконується $EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} = \inf \left\{ r > 0; EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2 \right\}.$$

Лема 5 (див. [2]). Для того щоб $\xi \in L_U(\Omega)$, необхідно й достатньо, щоб $\xi \in \mathfrak{S}_{U_1}(\Omega)$ і справджувалися нерівності:

$$\|\xi\|_U \leq (e^{2/\alpha+2}) \langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1},$$

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \leq \|\xi\|_U (e^{2/\alpha} + 1)^{1/\alpha}.$$

Лема 6 (див. [2]). Справедлива нерівність

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \geq \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \right)$$

при $0 < \alpha < 1$.

Лема 7 (див. [2]). При $0 < \alpha < 1$ має місце нерівність

$$\langle\langle \xi \rangle\rangle_{U_1} \leq \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \right).$$

Теорема 2. Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана у вигляді (2), містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, причому норми в цих просторах – еквівалентні та мають місце нерівності:

$$\|\xi\|_U \leq C_{\psi U} \|\xi\|_\psi, \quad (3)$$

$$\|\xi\|_U \geq C_{U\psi} \|\xi\|_\psi, \quad (4)$$

де $C_{\psi U} = e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$, $C_{U\psi} = \frac{1}{2^{1/\alpha}} (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$.

Доведення. Теорема випливає з лем 5, 6 і 7. Із лем 5, 7 маємо, що

$$\|\xi\|_U \leq e^{2/\alpha+2} \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

а з лем 5, 6 випливає нерівність

$$\|\xi\|_U \geq (e^{2/\alpha} + 1)^{-1/\alpha} \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Легко бачити, що $\sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \leq \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} = \|\xi\|_\psi$. Тоді

$$\begin{aligned} \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} &\leq \sup_{n \geq 2} \sup_{n-1 \leq u \leq n} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leq \\ &\leq \sup_{n \geq 2} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{(n-1)^{1/\alpha}} \leq 2^{1/\alpha} \sup_{n \geq 1} \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}, \end{aligned}$$

тому справджуються нерівності (3) і (4).

Теорема 3. Для простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задана у вигляді (2), справджується умова **H** із константою

$$C_U = 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{C_{\psi U}}{C_{U\psi}}\right)^2,$$

де $C_{\psi U}$ та $C_{U\psi}$ визначені у теоремі 2.

Доведення. Нехай ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ – незалежні випадкові величини з простору Орліча $L_U(\Omega)$, тоді з теореми 2 випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2 \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_\psi^2, \quad (5)$$

де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$. Із викладок у прикладі 1 маємо:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2. \quad (6)$$

Із теореми 2 та нерівностей (5) і (6) випливає нерівність:

$$\left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2 \cdot 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{C_{U\psi}^2} \sum_{k=1}^n \|\xi_k\|_U^2,$$

що й треба було довести.

Висновки. В роботі сформульовані деякі відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і властивості просторів Орліча. Встановлено зв'язок між просторами Орліча і просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знайдено умови при яких для досліджуваного простору Орліча виконується умова **H**.

1. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНТИ, №3752-В.86.0.
2. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С. 92–107.
3. *V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes, AMS, Providence, RI, 2000.
4. *Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – P. 155–168.

Одержано 04.06.2014