УДК 517.95

З. М. Нитребич[1], **Б. Й. Пташник**[1,2], **С. М. Репетило**[2] ([1]Нац. ун-т "Львівська політехніка", [2]ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У СМУЗІ

We find the classes of univalent solvability of the problem with Dirichlet-Neumann conditions in time variable for hyperbolic equation homogeneous with respect to the order of differentiation, in a strip. These classes contain entire functions of order not higher than the first. Using the differential-symbol method we construct a solution of the problem in the form of action of differential expressions (generally of infinite order), whose symbols are right-hand sides of the Dirichlet-Neumann conditions and the equation, onto some meromorphic functions of parameters.

Знайдено класи однозначної розв'язності задачі з умовами Діріхле-Неймана за часом для гіперболічного рівняння, однорідного за порядком диференціювання, у смузі. Ці класи містять цілі функції порядку, не вище першого. За допомогою диференціально-символьного методу побудовано розв'язок задачі у вигляді дії диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів.

Вступ. Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь, взагалі, є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1, 2] та бібліографію в них). Щоб забезпечити коректність таких задач, на шуканий розв'язок накладають певні додаткові умови. У випадках, коли область є смугою чи шаром, такими умовами є, наприклад: додаткові умови за часовою змінною [3], умови періодичності, майже періодичності [4-6] або певні умови щодо поведінки розв'язку на нескінченності [7-10] за просторовими координатами.

У даній праці знайдено класи однозначної розв'язності задачі Діріхле–Неймана для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння порядку $2n$ $(n \in \mathbb{N})$ зі сталими коефіцієнтами у смузі. Цими класами є цілі функції, порядок яких не перевищує одиниці. Для дослідження задачі та побудови її розв'язку використано диференціально-символьний метод [11].

1. Формулювання задачі. В області $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 :\ 0<t<h,\ x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x\right) := \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n-2s} \partial x^{2s}} = f\left(t, x\right), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2} u}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0} = \varphi_r\left(x\right), \quad \left.\frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=h} = \varphi_{n+r}\left(x\right), \quad r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

де $a_s \in \mathbb{R}$, $s \in \{0, \ldots, n\}$, $a_0 = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським, тобто всі корені рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{2n-2s} = 0 \tag{3}$$

є дійсними та різними, а отже, і відмінними від нуля. Нехай λ_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, — додатні корені рівняння (3), причому $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Поряд із задачею (1), (2) розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\,(t,x)=0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}u}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^{2r-1}u}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=h}=0, \quad r\in\{1,\dots,n\}. \tag{5}$$

2. Основні результати. Розв'язок неоднорідної задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним. Наприклад, однорідна задача

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0, \quad u|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=h}=0$$

має нетривіальні розв'язки $u(t,x)=\sin\dfrac{(2k+1)\pi t}{2h}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2h}$, де $k\in\mathbb{Z}$, тому відповідна неоднорідна задача не може мати єдиного розв'язку.

Розв'язок задачі (1), (2) зобразимо у вигляді суми

$$u\,(t,x)=v\,(t,x)+w\,(t,x)\,, \tag{6}$$

де $v\,(t,x)$ — розв'язок задачі (1), (5), а $w\,(t,x)$ — розв'язок задачі (4), (2).

2.1. Задача для однорідного рівняння та неоднорідних умов. Дослідимо задачу (4), (2). Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)T\,(t,\nu)=0, \tag{7}$$

яке одержуємо з (4) формальною заміною $\dfrac{\partial}{\partial x}$ на ν, де ν — деякий параметр, $\nu\in\mathbb{C}$.

Випадок $\nu\neq 0$**.** Фундаментальна система розв'язків рівняння (7) є такою:

$$\Big\{\exp\left[\nu\lambda_j t\right],\ \exp\left[-\nu\lambda_j t\right], \quad j\in\{1,\dots,n\}\Big\}.$$

Загальний розв'язок рівняння (7) визначає формула

$$T\,(t,\nu)=\sum_{l=1}^{n}\left(C_l(\nu)\exp\left[\nu\lambda_l t\right]+C_{n+l}(\nu)\exp\left[-\nu\lambda_l t\right]\right),$$

де $C_l(\nu)$, $l\in\{1,\dots,2n\}$, — довільні функції параметра ν.

Знайдемо розв'язки $\widetilde{T}_j\,(t,\nu)$, $j\in\{1,\dots,2n\}$, рівняння (7), які задовольняють умови

$$\left.\frac{d^{2r-2}\widetilde{T}_j}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\delta_{r,j}, \quad \left.\frac{d^{2r-1}\widetilde{T}_j}{dt^{2r-1}}\right|_{t=h}=\delta_{n+r,j}, \quad r\in\{1,\dots,n\}, \tag{8}$$

де $\delta_{r,j}=\begin{cases}1, & r=j,\\ 0, & r\neq j.\end{cases}$

Ці розв'язки зображаємо формулами

$$\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}(\nu)\exp\left[\nu\lambda_l t\right]+C_{j,n+l}(\nu)\exp\left[-\nu\lambda_l t\right]\right\},\quad j\in\left\{1,\ldots,2n\right\},$$

де $C_{j,l}:=C_{j,l}(\nu)$, $j,l\in\left\{1,...,2n\right\}$, — функції параметра ν, які визначаємо зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}+C_{j,n+l}\right\}\left(\nu\lambda_l\right)^{2r-2}=\delta_{r,j},\\ \sum\limits_{l=1}^{n}\left\{C_{j,l}\exp\left[\nu\lambda_l h\right]-C_{j,n+l}\exp\left[-\nu\lambda_l h\right]\right\}\left(\nu\lambda_l\right)^{2r-1}=\delta_{n+r,j},\end{array}\right.\quad r\in\left\{1,\ldots,n\right\}. \quad (9)$$

Головний визначник $\Delta\left(h,\nu\right)$ системи (9) є визначником матриці

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1 & 1 & \ldots & 1\\ (\nu\lambda_1)^2 & \ldots & (\nu\lambda_n)^2 & (\nu\lambda_1)^2 & \ldots & (\nu\lambda_n)^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\nu\lambda_1)^{2(n-1)} & \ldots & (\nu\lambda_n)^{2(n-1)} & (\nu\lambda_1)^{2(n-1)} & \ldots & (\nu\lambda_n)^{2(n-1)}\\ \nu\lambda_1 e^{\nu\lambda_1 h} & \ldots & \nu\lambda_n e^{\nu\lambda_n h} & -\nu\lambda_1 e^{-\nu\lambda_1 h} & \ldots & -\nu\lambda_n e^{-\nu\lambda_n h}\\ (\nu\lambda_1)^3 e^{\nu\lambda_1 h} & \ldots & (\nu\lambda_n)^3 e^{\nu\lambda_n h} & -(\nu\lambda_1)^3 e^{-\nu\lambda_1 h} & \ldots & -(\nu\lambda_n)^3 e^{-\nu\lambda_n h}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\nu\lambda_1)^{2n-1} e^{\nu\lambda_1 h} & \ldots & (\nu\lambda_n)^{2n-1} e^{\nu\lambda_n h} & -(\nu\lambda_1)^{2n-1} e^{-\nu\lambda_1 h} & \ldots & -(\nu\lambda_n)^{2n-1} e^{-\nu\lambda_n h}\end{pmatrix}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta\left(h,\nu\right)=(-2)^n\nu^{2n^2-n}\prod_{1\le s<l\le n}\left(\lambda_s^2-\lambda_l^2\right)^2\prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\operatorname{ch}\left[\nu\lambda_j h\right]\right). \quad (10)$$

Запишемо множину M тих значень ν, для яких визначник $\Delta\left(h,\nu\right)$ обертається в нуль, тобто

$$M=\left\{\frac{\left(2m+1\right)\pi}{2\lambda_j h}i,\quad m\in\mathbb{Z},\quad i=\sqrt{-1},\quad j\in\left\{1,\ldots,n\right\}\right\}. \quad (11)$$

Для всіх $\nu\in\mathbb{C}\backslash M$ система рівнянь (9) має єдиний розв'язок і ми отримуємо розв'язки задач (7), (8):

$$\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)=\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\Delta_{j,l}\left(h,\nu\right)}{\Delta\left(h,\nu\right)}\exp\left[\nu\lambda_l t\right]+\frac{\Delta_{j,n+l}\left(h,\nu\right)}{\Delta\left(h,\nu\right)}\exp\left[-\nu\lambda_l t\right]\right),$$

де $\Delta_{j,l}\left(h,\nu\right)$, $j,l\in\{1,...,2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta\left(h,\nu\right)$.

Спростивши вирази, отримуємо, що для всіх $\nu\in\mathbb{C}\backslash M$ шукані розв'язки задач (7), (8) $\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right),\widetilde{T}_{n+j}\left(t,\nu\right), j\in\left\{1,\ldots,n\right\}$, набувають вигляду

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)&=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{ch}\left[\nu\lambda_l\left(h-t\right)\right]}{\nu^{2n-2}\operatorname{ch}\left[\nu\lambda_l h\right]\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{n}\left(\lambda_l^2-\lambda_s^2\right)},\\ \widetilde{T}_{n+j}\left(t,\nu\right)&=\sum_{l=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{n+j}S_{n-j}^{(l)}\operatorname{sh}\left[\nu\lambda_l t\right]}{\nu^{2n-1}\lambda_l\operatorname{ch}\left[\nu\lambda_l h\right]\prod\limits_{s=1,s\neq l}^{n}\left(\lambda_l^2-\lambda_s^2\right)},\end{aligned} \quad (12)$$

де $S_q^{(l)}$ — сума всіх можливих добутків елементів $(\nu\lambda_1)^2$, ..., $(\nu\lambda_{l-1})^2$, $(\nu\lambda_{l+1})^2$, ... , $(\nu\lambda_n)^2$, узятих по $q \geq 1$ штук у кожному добутку, $S_0^{(l)} \equiv 1$, $l \in \{1, \ldots, n\}$.

Випадок $\nu = 0$. Рівняння (7) набуває вигляду

$$\frac{d^{2n}T(t,0)}{dt^{2n}} = 0, \tag{13}$$

а $\left\{t^{j-1}, \quad j \in \{1, \ldots, 2n\}\right\}$ є фундаментальною системою його розв'язків. Розв'язки задачі (13), (8) є такими поліномами:

$$\widetilde{T}_j\,(t,0) = \sum_{l=1}^{2n} C_{j,l} t^{l-1}, \quad j \in \{1, \ldots, 2n\},$$

де сталі $C_{j,l}$, $j,l \in \{1, ..., 2n\}$, для кожного $j \in \{1, \ldots, 2n\}$ визначаються зі системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} C_{j,2r-1}(2r-2)! = \delta_{r,j}, \\ \sum\limits_{l=2r}^{2n} C_{j,l}\dfrac{(l-1)!}{(l-2r)!}h^{l-2r} = \delta_{n+r,j}, \end{cases} r \in \{1, \ldots, n\}, \tag{14}$$

з головним визначником $\Delta(h)$ вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2h & \cdots & (n-1)h^{n-2} & \cdots & (2n-1)h^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2\cdot 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)(n-2)(n-3)h^{n-4} & \cdots & (2n-1)(2n-2)(2n-3)h^{2n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & (2n-1)(2n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 \end{vmatrix},$$

який обчислюється за формулою

$$\Delta(h) = 1!\,2!\,\cdots\,(2n-1)!.$$

Розв'язуючи систему (14), знаходимо шукані функції:

$$\widetilde{T}_j(t,0) = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\Delta_{j,l}\,(h)}{\Delta\,(h)} t^{l-1}, \quad j \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{15}$$

де $\Delta_{j,l}\,(h)$, $j,l \in \{1, ..., 2n\}$, — алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині j-го рядка та l-го стовпця у визначнику $\Delta\,(h)$.

Зауваження 1. *Формули* (15) *можна одержати з* (12) *шляхом граничного переходу при* $\nu \to 0$. *Надалі вважатимемо, що параметр* ν *може набувати довільного значення з множини* $\mathbb{C}\backslash M$ *і на цій множині визначені функції* $\widetilde{T}_1(t,\cdot), \ldots, \widetilde{T}_{2n}(t,\cdot)$ *формулами* (12).

Позначимо через $A_{1,d}$ клас цілих функцій, порядок яких не перевищує одиниці, причому функції першого порядку мають тип менший, ніж d, $d > 0$, а через $\mathbf{A}_d$ позначимо клас цілих функцій $g(t,x)$, які для кожного фіксованого $t \in [0,h]$ належать класу $A_{1,d}$.

Для встановлення класу однозначної розв'язності задачі (4), (2) нам знадобиться наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $P(z)$ — аналітична функція в крузі $B_d = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < d\}$, а $f(z)$ належить класу $A_{1,d}$. Тоді $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z)$ належить класу $A_{1,d}$.*

Доведення. Якщо $P(z) = \sum\limits_{s\geq 0} a_s z^s$ — довільна аналітична в B_d функція, то функція $\widetilde{P}(z) = \sum\limits_{s\geq 0} |a_s| z^s$ також є аналітичною в B_d. Оскільки ціла функція $f(z) = \sum\limits_{r\geq 0} b_r z^r$ належить класу $A_{1,d}$, то

$$\forall d_1 \in (0,d) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall r > N \quad |b_r| < \frac{d_1^r}{r!}.$$

Зобразимо дію виразу $P\left(\frac{d}{dz}\right)$ на $f(z)$ у вигляді $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z) = M_1(z) + M_2(z)$, де $M_1(z) = \sum\limits_{0\leq r\leq N} a_r f^{(r)}(z)$, $M_2(z) = \sum\limits_{r>N} a_r f^{(r)}(z)$.

Функція $M_1(z)$ належить класу $A_{1,d}$ як дія диференціального полінома на $f(z)$ з класу $A_{1,d}$. Покажемо, що функція $M_2(z)$ також належить класу $A_{1,d}$. Оцінимо зверху за модулем коефіцієнти c_s, $s \geq 0$, степеневого ряду $M_2(z) = \sum\limits_{s\geq 0} c_s z^s$, що обчислюються [12] за формулами $c_s = \sum\limits_{r>N} a_r b_{r+s} \dfrac{(r+s)!}{s!}$, $s \geq 0$:

$$|c_s| \leq \sum_{r>N} |a_r||b_{r+s}| \frac{(r+s)!}{s!} \leq \sum_{r>N} |a_r| \frac{d_1^{r+s}}{(r+s)!} \frac{(r+s)!}{s!} = \sum_{r>N} |a_r| d_1^r \frac{d_1^s}{s!} = \widetilde{P}(d_1) \frac{d_1^s}{s!}.$$

Оскільки $|c_s| \leq \widetilde{P}(d_1)\frac{d_1^s}{s!}$ для довільного $s \geq 0$, то функція $M_2(z)$ належить класу $A_{1,d}$. Отже, функція $P\left(\frac{d}{dz}\right) f(z)$ як сума цілих функцій з класу $A_{1,d}$ є цілою функцією з цього ж класу. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай $\varphi_r \in A_{1,d}$, $r \in \{1,\ldots,2n\}$, де $d = \pi\left(2h\lambda_n\right)^{-1}$. Тоді у класі цілих функцій $\mathbf{A}_d$, існує єдиний розв'язок задачі* (4), (2), *який можна подати у вигляді*

$$w\left(t,x\right) = \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Bigg|_{\nu=0}, \tag{16}$$

де $\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, — функції вигляду (12).

Доведення. Диференціальні вирази $\varphi_r\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, нескінченного порядку визначимо шляхом заміни x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у рядах Маклорена для функцій $\varphi_r\left(x\right)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$. Тоді вираз (16) є деяким рядом. Цей ряд визначає цілу функцію $w\left(t,x\right)$, яка є цілою функцією за змінною t і для кожного фіксованого $t \in [0,h]$ належить класу $A_{1,d}$, що випливає з рівностей

$$\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\nu=0} = \widetilde{T}_j\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_j(x), \quad j \in \{1,\ldots,2n\},$$

та леми 1. Отже, $w \in \mathbf{A}_d$.

Покажемо тепер, що функція (16) є розв'язком задачі (4), (2) і у класі $\mathbf{A}_d$ не існує інших розв'язків.

Доведемо, що функція (16) задовольняє рівняння (4). З того, що функції (12) є розв'язками рівняння (7), випливає

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right) w(t,x) = L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\exp[\nu x]\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right) L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\exp[\nu x]\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\exp[\nu x]\, L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_j(t,\nu)\right\}\Big|_{\nu=0} = 0.$$

Враховуючи, що функції (12) задовольняють умови (8), і що для цілих функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, справджуються рівності $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu x]\}|_{\nu=0} = \varphi_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, отримуємо

$$\frac{\partial^{2r-2}w}{\partial t^{2r-2}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}\left[\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j(t,\nu)\exp[\nu x]\right\}\Big|_{\nu=0}\right]\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}\widetilde{T}_j(t,\nu)\right]\Big|_{t=0}\exp[\nu x]\right\}\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\{\delta_{r,j}\exp[\nu x]\}\Big|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^{2n}\delta_{r,j}\varphi_j(x) = \varphi_r(x), \quad r \in \{1,\ldots,n\}.$$

Подібно доводимо, що функція (16) задовольняє умови (2) у точці $t = h$.

Застосовуючи методику праці [7] до задачі (1), (2), доводимо, що задача (4), (2) не може мати двох різних розв'язків у класі функцій, які для кожного $t \in [0,h]$ зростають на нескінченності не швидше, ніж $\exp(d\,|x|)$, $d = \pi\,(2h\lambda_n)^{-1}$. Позначимо цей клас функцій через E_d.

Оскільки $\mathbf{A}_d \subset E_d$, то з вище сказаного випливає, що клас цілих функцій $\mathbf{A}_d$ є класом однозначної розв'язності задачі (4), (2). Теорему доведено.

Нехай K_L — клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)\exp[\alpha_j x], \tag{17}$$

де $\alpha_j \in L \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j,k \in \{1,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $Q_j(x)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, — поліноми.

Зауважимо, що кожний квазіполіном $\varphi(x)$ вигляду (17) визначає диференціальну операцію $\sum\limits_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)$ скінченного порядку на класі цілих функцій $\Phi(\nu)$, а саме

$$\varphi\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu+\alpha_j),$$

зокрема,

$$\varphi\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=0}=\sum_{j=1}^{m}Q_j\left(\frac{d}{d\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=\alpha_j}. \tag{18}$$

Позначимо через $K_{\mathbb{C},\,L}$ клас квазіполіномів двох змінних

$$f\,(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{N}P_{l,j}\,(t,x)\exp\left[\beta_l t+\alpha_j x\right],$$

де $P_{l,j}\,(t,x)$ — поліноми змінних t та x, $\beta_l\in\mathbb{C}$, $\alpha_j\in L$, $\beta_l\neq\beta_r$ для $l\neq r$, $l,r\in\{1,\ldots,N\}$, $\alpha_k\neq\alpha_j$ для $k\neq j$, $k,j\in\{1,\ldots,m\}$, $m,N\in\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Нехай $\varphi_r\in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, де M — множина* (11). *Тоді у класі квазіполіномів $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus M}$ існує єдиний розв'язок задачі* (4), (2), *який можна подати у вигляді* (16).

Доведення. Згідно з формулою (18) за умов теореми випливає, що функції $\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_j\,(t,\nu)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\nu=0}$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, належать до $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$. Оскільки функція (16) задовольняє рівняння (4) і умови (2), то в класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ вона є розв'язком задачі (4), (2).

Єдиність розв'язку задачі (4), (2) у парі класів $K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ доведемо методом від супротивного. Припустимо, що для $\varphi_r\in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, у класі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$ існує два розв'язки $u_1\,(t,x)$, $u_2\,(t,x)$ задачі (4), (2) у смузі S; тоді їх можна подати у вигляді

$$u_1\,(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{1,j}\,(t,\nu)\exp\left[\nu x\right]\right\}\bigg|_{\nu=0},$$

$$u_2\,(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widetilde{T}_{2,j}\,(t,\nu)\exp\left[\nu x\right]\right\}\bigg|_{\nu=0},$$

де $\widetilde{T}_{1,j}\,(t,\nu)$, $\widetilde{T}_{2,j}\,(t,\nu)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, — деякі розв'язки рівняння (7). Різниця цих функцій

$$\tilde{u}\,(t,x)=u_1\,(t,x)-u_2\,(t,x)=\sum_{j=1}^{2n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\left(\widetilde{T}_{1,j}\,(t,\nu)-\widetilde{T}_{2,j}\,(t,\nu)\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\bigg|_{\nu=0}$$

задовольняє у смузі S рівняння (4) і умови (5).

Оскільки $\varphi_r\in K_{\mathbb{C}\setminus M}$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, то, згідно з (18) квазіполіном $\tilde{u}\,(t,x)$ належить до $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus M}$. Цей квазіполіном містить значення $\widetilde{T}_{1,r}\,(t,\nu)-\widetilde{T}_{2,r}\,(t,\nu)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, та значення їх відповідних похідних за ν в точках (t,ν), де $\nu\in\mathbb{C}\setminus M$, $t\in[0,h]$. Оскільки $\widetilde{T}_{1,r}\,(t,\nu)-\widetilde{T}_{2,r}\,(t,\nu)$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$,— розв'язки рівняння (7), які задовольняють однорідні умови (8), і $\nu\in\mathbb{C}\setminus M$, то $\Delta(h,\nu)\neq 0$ і ці розв'язки є нульовими, тобто $\widetilde{T}_{1,r}\,(t,\nu)-\widetilde{T}_{2,r}\,(t,\nu)\equiv 0$, $r\in\{1,\ldots,2n\}$, на $[0,h]\times(\mathbb{C}\setminus M)$. Отже, $u_1(t,x)\equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено.

2.2. Задача для неоднорідного рівняння та однорідних умов. Нехай $\Big\{T_k(t,\nu),k\in\{0,\ldots,2n-1\}\Big\}$ — нормальна в точці $t=0$ фундаментальна система розв'язків рівняння (7). Розглянемо визначену на множині $[0,h]\times\mathbb{C}^2$ функцію

$$\Phi\left(t,\lambda,\nu\right)=\frac{\exp\left[\lambda t\right]-\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\lambda^k T_k\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)},\tag{19}$$

яка є розв'язком задачі Коші

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Phi=\exp\left[\lambda t\right],\quad \left.\frac{d^k\Phi}{dt^k}\right|_{t=0}=0,\quad k\in\{0,\ldots,2n-1\},\tag{20}$$

та визначену на $[0,h]\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus M)$ функцію

$$F\left(t,\lambda,\nu\right)=\frac{\exp\left[\lambda t\right]-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)-\exp\left[\lambda h\right]\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}\widetilde{T}_{n+j}\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)},\tag{21}$$

де $\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, — функції (12).

Лема 2. *Функцію $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ можна подати у такому вигляді:*

$$F\left(t,\lambda,\nu\right)=\Phi\left(t,\lambda,\nu\right)-\sum_{m=1}^{n}\left.\frac{d^{2m-1}\Phi}{dt^{2m-1}}\right|_{t=h}\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu).\tag{22}$$

Доведення. Елементи нормальної фундаментальної системи розв'язків $\Big\{T_k(t,\nu),k\in\{0,\ldots,2n-1\}\Big\}$ подамо у вигляді лінійної комбінації елементів фундаментальної системи $\Big\{\widetilde{T}_j(t,\nu),j\in\{1,\ldots,2n\}\Big\}$:

$$T_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\Big(c_{j,m}(\nu)\widetilde{T}_m(t,\nu)+d_{j,m}(\nu)\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu)\Big),\quad j\in\{0,\ldots,2n-1\}.\tag{23}$$

Визначимо коефіцієнти $c_{j,m}(\nu)$, $d_{j,m}(\nu)$ на підставі умов (8):

$$\left.\frac{d^{2r-2}T_j}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\delta_{j,2r-2}=\sum_{m=1}^{n}c_{j,m}(\nu)\delta_{r,m}=c_{j,r}(\nu),$$

$$\left.\frac{d^{2r-1}T_j}{dt^{2r-1}}\right|_{t=h}=\sum_{m=1}^{n}d_{j,m}(\nu)\delta_{n+r,n+m}=d_{j,r}(\nu),r\in\{1,\ldots,n\},j\in\{0,\ldots,2n-1\}.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів $c_{j,r}(\nu)$, $d_{j,r}(\nu)$, $r\in\{1,\ldots,n\}$, $j\in\{0,\ldots,2n-1\}$, у вирази (23), одержуємо такі співвідношення:

$$T_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\Big(\delta_{j,2m-2}\widetilde{T}_m(t,\nu)+T_j^{(2m-1)}(h,\nu)\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu)\Big),j\in\{0,\ldots,2n-1\}.\tag{24}$$

Домноживши обидві частини рівності (24) на λ^j та підсумувавши за j, одержуємо

$$\sum_{j=0}^{2n-1}\lambda^jT_j(t,\nu)=\sum_{m=1}^{n}\lambda^{2m-2}\tilde{T}_m(t,\nu)+\sum_{m=1}^{n}\tilde{T}_{n+m}(t,\nu)\sum_{j=0}^{2n-1}\lambda^jT_j^{(2m-1)}(h,\nu).\tag{25}$$

Здійснимо перетворення правої частини формули (22):

$$\Phi\left(t,\lambda,\nu\right)-\sum_{m=1}^{n}\left.\frac{d^{2m-1}\Phi}{dt^{2m-1}}\right|_{t=h}\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu)=$$

$$=\frac{\exp[\lambda t]-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^{j}T_{j}(t,\nu)}{L(\lambda,\nu)}-\sum_{m=1}^{n}\frac{\lambda^{2m-1}\exp[\lambda h]-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^{j}T_{j}^{(2m-1)}(h,\nu)}{L\left(\lambda,\nu\right)}\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu)=$$

$$=\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\lambda^{2m-2}\widetilde{T}_{m}\left(t,\nu\right)+\sum\limits_{m=1}^{n}\widetilde{T}_{n+m}(t,\nu)\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^{j}T_{j}^{(2m-1)}\left(h,\nu\right)-\sum\limits_{j=0}^{2n-1}\lambda^{j}T_{j}\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}+$$

$$+F\left(t,\lambda,\nu\right). \qquad (26)$$

Із (26), на підставі формули (25), одержуємо рівність (22). Лему доведено.

Позначимо через $\mathbf{A}_d^M$ клас цілих функцій $g(t,x)$, які для кожного фіксованого $t\in[0,h]$ належать класу $A_{1,d}\bigcup K_{\mathbb{C}\setminus M}$.

Теорема 3. *Нехай $f\left(t,x\right)$ належить класу $\mathbf{A}_d^M$, де $d=\pi\left(2h\lambda_n\right)^{-1}$, а M — множина* (11)*. Тоді у класі цілих функцій $\mathbf{A}_d^M$ існує єдиний розв'язок задачі* (1), (5)*, який можна подати у вигляді*

$$v\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}, \qquad (27)$$

де функцію $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ визначає формула (21).

Доведення. Згідно з теоремою Пуанкаре [13, с. 59] про аналітичну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів, функція $\Phi\left(t,\lambda,\nu\right)$, яка визначена рівністю (19), як розв'язок задачі (20) є цілою стосовно λ і ν. З леми 2 випливає, що $F\left(t,\lambda,\nu\right)$ — мероморфна стосовно ν функція, полюсами якої є точки множини M, а стосовно λ є цілою функцією першого порядку скінченного типу. За цілою функцією $f(t,x)$ визначаємо диференціальний вираз нескінченного порядку $f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ шляхом формальної заміни t на $\frac{\partial}{\partial\lambda}$, а x на $\frac{\partial}{\partial\nu}$ у ряді Маклорена для функції $f(t,x)$. Тоді вираз (27) є рядом, що подібно до доведення теореми 1 визначає цілу функцію $v\left(t,x\right)$, яка є цілою за змінною t, а для кожного $t\in[0,h]$ є цілою функцією класу $A_{1,d}$, тобто $v\left(t,x\right)$ належить класу $\mathbf{A}_d^M$.

Покажемо, що функція (27) задовольняє рівняння (1):

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\left(t,x\right)=L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right)=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{F\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\nu x\right]L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F\left(t,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}. \qquad (28)$$

Оскільки функції (12) задовольняють рівняння (7), то

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)F\left(t,\lambda,\nu\right)=$$

$$=L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\frac{\exp\left[\lambda t\right]-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)-\exp\left[\lambda h\right]\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}\widetilde{T}_{n+j}\left(t,\nu\right)}{L\left(\lambda,\nu\right)}=$$

$$=L^{-1}\left(\lambda,\nu\right)\left\{L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\exp\left[\lambda t\right]-\sum_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_j\left(t,\nu\right)-\right.$$

$$\left.-\exp\left[\lambda h\right]\sum_{j=1}^{n}\lambda^{2j-1}L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\widetilde{T}_{n+j}\left(t,\nu\right)\right\}=L^{-1}\left(\lambda,\nu\right)L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\exp\left[\lambda t\right]=\exp\left[\lambda t\right].\tag{29}$$

Із (28) та (29) випливає

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)v\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\lambda t+\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}=f(t,x).$$

Покажемо, що функція (27) справджує умови (5). Дійсно, враховуючи (8) і (21), для $r\in\{1,\ldots,n\}$ отримуємо

$$\left.\frac{\partial^{2r-2}v}{\partial t^{2r-2}}\right|_{t=0}=\left[\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}\right]\Bigg|_{t=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[\left\{\exp\left[\nu x\right]\frac{\partial^{2r-2}}{\partial t^{2r-2}}F\left(t,\lambda,\nu\right)\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0}\right]\Bigg|_{t=0}=$$

$$=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\nu x\right]\frac{\lambda^{2r-2}-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda^{2j-2}\delta_{r,j}-0}{L\left(\lambda,\nu\right)}\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\ \nu=0}=0.$$

Подібно показуємо, що функція (27) задовольняє умови (5) також у точці $t=h$.

Встановимо єдиність розв'язку задачі (1), (5) у класі функцій $\mathbf{A}_d^M$. У підкласі функцій, які для кожного фіксованого $t\in[0,h]$ належать до $A_{1,d}$, єдиність доводимо подібно до доведення єдиності розв'язку в теоремі 1.

Покажемо тепер, що у підкласі $K_{\mathbb{C},\,\mathbb{C}\setminus\mathrm{M}}$ класу $\mathbf{A}_d^M$ немає інших розв'язків задачі (1), (5), окрім (27). Припустимо, що для $f\in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus\mathrm{M}}$ у класі $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}\setminus M}$ існує два розв'язки $v_1\left(t,x\right)$, $v_2\left(t,x\right)$ задачі (1), (5) у смузі S; тоді їх можна подати у вигляді

$$v_1\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F_1\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0},$$

$$v_2\left(t,x\right)=f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{F_2\left(t,\lambda,\nu\right)\exp\left[\nu x\right]\right\}\Big|_{\lambda=0,\ \nu=0},$$

де $F_1(t,\lambda,\nu)$, $F_2(t,\lambda,\nu)$ — деякі розв'язки рівняння $L\left(\dfrac{d}{dt},\nu\right)F=\exp[\lambda t]$, які задовольняють однорідні умови

$$\left.\frac{d^{2r-2}F}{dt^{2r-2}}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^{2r-1}F}{dt^{2r-1}}\right|_{t=h}=0.$$

Функція $\tilde v(t,x)=v_1(t,x)-v_2(t,x)$ у смузі S задовольняє рівняння (4) та умови (5). Провівши далі міркування, аналогічні доведенню єдиності в теоремі 2, отримуємо, що $F_1(t,\lambda,\nu)-F_2(t,\lambda,\nu)\equiv 0$ на $[0,h]\times\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\backslash M)$. Отже, $v_1(t,x)\equiv v_2(t,x)$. Теорему доведено.

2.3. Розв'язність задачі (1), (2). Оскільки розв'язок задачі (1), (2) ми можемо подати у вигляді (6), то з теорем 1–3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* $\varphi_j\in A_{1,d}\bigcup K_{\mathbb{C}\backslash M}$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, $f\in\mathbf{A}_d^M$, *де* M *— множина* (11), *а* $d=\pi\left(2h\lambda_n\right)^{-1}$. *Тоді у класі* $\mathbf{A}_d^M$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який є сумою функцій* (16) *та* (27).

3. Приклад. У смузі S розв'язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\exp[x+t], \tag{30}$$

$$u|_{t=0}=\exp[x],\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=h}=\cos[x]. \tag{31}$$

▼ Для побудови розв'язку задачі (30), (31) скористаємось загальними формулами (16) та (27), зауваживши, що в задачі (30), (31)

$$\varphi_1(x)=\exp[x],\quad \varphi_2(x)=\cos[x],\quad f(t,x)=t\exp[x+t],$$

$$\widetilde{T}_1(t,\nu)=\frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)]}{\operatorname{ch}[\nu h]},\quad \widetilde{T}_2(t,\nu)=\frac{\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu\operatorname{ch}[\nu h]},$$

$$F(t,\lambda,\nu)=\frac{1}{\lambda^2-\nu^2}\left(\exp[\lambda t]-\frac{\nu\operatorname{ch}[\nu(h-t)]+\lambda\exp[\lambda h]\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu\operatorname{ch}[\nu h]}\right).$$

Тоді отримаємо

$$u(t,x)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left.\left\{\widetilde{T}_1(t,\nu)\exp[\nu x]\right\}\right|_{\nu=0}+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left.\left\{\widetilde{T}_2(t,\nu)\exp[\nu x]\right\}\right|_{\nu=0}+$$

$$+f\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left.\{F(t,\lambda,\nu)\exp[\nu x]\}\right|_{\lambda=0,\,\nu=0}=$$

$$=\exp\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\right]\left.\left\{\frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)]}{\operatorname{ch}[\nu h]}\exp[\nu x]\right\}\right|_{\nu=0}+\cos\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\right]\left.\left\{\frac{\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu\operatorname{ch}[\nu h]}\exp[\nu x]\right\}\right|_{\nu=0}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\lambda}\exp\left[\frac{\partial}{\partial\nu}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\left.\left\{\frac{\nu\exp[\lambda t]\operatorname{ch}[\nu h]-\nu\operatorname{ch}[\nu(h-t)]-\lambda\exp[\lambda h]\operatorname{sh}[\nu t]}{\nu(\lambda^2-\nu^2)\operatorname{ch}[\nu h](\exp[\nu x])^{-1}}\right\}\right|_{\lambda=0,\,\nu=0}=$$

$$=\left.\left\{\frac{\operatorname{ch}[\nu(h-t)]\exp[\nu x]}{\operatorname{ch}[\nu h]}\right\}\right|_{\nu=1}+\frac{1}{2}\left(\left.\left\{\frac{\operatorname{sh}[\nu t]\exp[\nu x]}{\nu\operatorname{ch}[\nu h]}\right\}\right|_{\nu=i}+\left.\left\{\frac{\operatorname{sh}[\nu t]\exp[\nu x]}{\nu\operatorname{ch}[\nu h]}\right\}\right|_{\nu=-i}\right)+$$

$$+\left\{\exp[\nu x]\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\nu\exp[\lambda t]\,\mathrm{ch}\,[\nu h]-\nu\,\mathrm{ch}\,[\nu\,(h-t)]-\lambda\exp[\lambda h]\,\mathrm{sh}\,[\nu t]}{\nu\,(\lambda^2-\nu^2)\,\mathrm{ch}\,[\nu h]}\right\}\Bigg|_{\lambda=1,\,\nu=1}. \quad (32)$$

Провівши обчислення у (32), отримуємо таку формулу для розв'язку задачі (30), (31):

$$u\,(t,x)=\frac{\mathrm{ch}\,[h-t]}{\mathrm{ch}\,[h]}\exp[x]+\frac{\sin[t]\cos[x]}{\cos[h]}+$$
$$+\frac{(t^2-t)\,\mathrm{ch}[h]\exp[t]-(h^2+h-1)\,\mathrm{sh}[t]\exp[h]}{4\,\mathrm{ch}[h]}\exp[x].$$

На підставі теорем 1–3 знайдений розв'язок є єдиним у класі $\mathbf{A}_d^M$, де $d=\frac{\pi}{2h}$, а $M=\left\{\frac{\pi i}{h}\left(m+\frac{1}{2}\right),\ m\in\mathbb{Z}\right\}$. ▲

Висновки. За допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачу з умовами Діріхле-Неймана за часом для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння порядку $2n$ ($n\in\mathbb{N}$) зі сталими коефіцієнтами у смузі. Встановлено, що клас цілих функцій, порядок яких не перевищує одиниці, є класом однозначної розв'язності досліджуваної задачі. При цьому розв'язок задачі зображено у вигляді дії в околі нуля диференціальних виразів (загалом нескінченного порядку), символами яких є праві частини крайових умов та рівняння, на деякі мероморфні функції параметрів. Нульове значення параметра не є полюсом цих функцій.

1. *Пташник Б. И.* Некорректные краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
3. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 40. – С. 78–86.
4. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 15–28.
5. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – **22**, № 4. – С. 669–678.
6. *Rudakov I. A.* A nontrivial periodic solutions of the nonlinear wave equations with homogeneous boundary conditions // Different. equations. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1467–1475.
7. *Борок В. М., Перельман М. А.* О класах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое // Изв. вузов. Математика. – 1973. – № 8. – С. 29–34.
8. *Нитребич З. М.* Крайова задача для неоднорідного гіперболічного рівняння із частинними похідними // Вісн. ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – № 346. – С. 35–39.
9. *Nytrebych Z. M.* A boundary-value problem in an unbounded strip // J. Math. Sciences. – 1996. – **79**, № 6. – P. 1388–1392.
10. *Kengne E.* Nonlocal boundary value problem for partial differential equations with variable coefficients // Focus on African Diaspora Math. – 2008. – P. 97–108.
11. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка“, 2002. – 292 с.
12. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Про дію диференціального виразу нескінченного порядку у класах цілих функцій багатьох комплексних змінних // Доп. НАН України. – 2007. – № 6. – С. 11–16.
13. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.

Одержано 24.10.2014