УДК 519.17

М. Ф. Семенюта (Кировоградская летная академия НАУ)
Ж. Т. Черноусова (НТУУ "Киевский политехнический институт")

О ДИСТАНЦИОННОЙ МАГИЧЕСКОЙ РАЗМЕТКЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ГРАФОВ

In this article we solve the problem of the characteristics of such graphs operands, like a chain, a cycle if their Cartesian product is a distance magic graph. In addition we study the distance magic labeling of the chain link of cycles and graphs $< C_m : P_t : C_n >$, $P_m \circ P_n, P_m \circ C_n, C_m \circ P_n, C_m \circ C_n$.

У даній статті вирішується проблема характеристики таких графів операндів, як ланцюг, цикл, якщо їх декартовий добуток є дистанційним магічним графом. Крім цього, проведено дослідження на дистанційну магічність ланцюгового з'єднання циклів, а також графів $< C_m : P_t : C_n >, P_m \circ P_n, P_m \circ C_n, C_m \circ P_n, C_m \circ C_n$.

Введение

В теории разметок возникают такие ситуации, когда одна и та же терминология используется для разных понятий, или же некоторые из разметок были предложены разными авторами. Одним из таких случаев является дистанционная магическая разметка, которая была исследована под разными названиями, такими как сигма разметка и 1-вершинно магическая вершинная разметка. Это понятие синтезировано из магической разметки и разметок, связанных с расстоянием между двумя вершинами. Дистанционная магическая разметка вызывает не только теоретический интерес, она используется при планировании неполных круговых турниров, служит естественной моделью в проблеме распределения радиочастот в сетях связи [1].

В статье [2] приведен список открытых проблем, частично собранных из других статей, частично не опубликованных ранее. К одной из таких проблем относится характеристика графов G и H таких, что их декартово произведение $G \times H$ будет дистанционным магическим графом. Известно [3], что $K_n \times C_m$ не имеет дистанционной магической разметки, когда n четное, и $K_n \times C_3$ не дистанционный магический граф при нечетном n. В данной работе нами найдены условия существования дистанционной магической разметки графа $K_n \times C_m$ четного порядка с нечетным n. Кроме этого, мы полностью решили указанную проблему для $C_m \times P_n$, так как в [3] установлено лишь отсутствие дистанционной магической разметки у этого графа при нечетном $n, n \geq 2$ и $n \equiv 2(mod 4)$.

Вопрос существования дистанционной магической разметки нерегулярных графов является следующим направлением нашего исследования. Начало его изучения положено М. Миллер и др. в [4]. Они рассматривали полные мультидольные графы, деревья, колеса. В [5] представлены результаты, касающиеся композиций $P_m[P_n], P_m[C_n]$ и найдено одно из условий, при котором граф $G[H]$ не будет дистанционным магическим. Авторами [6] реализован способ построения некоторого дистанционного магического графа из заданного регулярного графа, с использованием массивов Котцига. В данной работе установлено, что цепное соединение циклов, а также графы $< C_m : P_t : C_n >$, $P_m \circ P_n, P_m \circ C_n, C_m \circ P_n, C_m \circ C_n$ не допускают дистанционную магическую разметку.

1. Предварительные сведения

Под графом $G = (V, E)$ мы понимаем конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, где $V = V(G)$ и $E = E(G)$ – множество вершин и множество ребер, соответственно. Пусть $deg(x)$ – степень вершины $x, N(x)$ – множество смежности вершины x. Для симметрической разности двух множеств A и B будем использовать обозначение $A \oplus B$.

Дистанционной магической разметкой графа $G = (V, E)$ порядка n называют биекцию $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$, для которой существует положительное целое число k такое, что для каждой вершины x выполняется равенство $k = \sum_{y \in N(x)} f(y)$. Постоянная k называется *магической постоянной* разметки f, сумма $\sum_{y \in N(x)} f(y)$ – *весом* вершины x и обозначается $w(x)$. Граф, допускающий дистанционную магическую разметку, называют *дистанционным магическим графом.*

Дистанционная магическая разметка f графа $G = (V, E)$ порядка n существует, если выполняется равенство $kn = \sum_{x \in V(G)} deg(x) f(x)$ [4].

Необходимое и достаточное условие существование регулярного дистанционного магического графа четного порядка сформулировано в теореме 1. Характеристика дистанционных магических регулярных графов нечетного порядка является более сложной задачей, не имеющей общего решения. Некоторые открытые проблемы, связанные с ней, приведены в [2].

Теорема 1 ([2]). *Для четного n, r-регулярный дистанционный магический граф порядка n существует тогда и только тогда, когда $2 \leq r \leq n - 2$, $r \equiv 0(mod 2)$ и $n \equiv 0(mod 4)$ или $r \equiv 0(mod 4)$.*

Следующие две теоремы дают возможность охарактеризовать графы без дистанционных магических разметок и используются в доказательстве теорем 7, 9–14.

Теорема 2 ([7], [8]). *Пусть u и v – вершины дистанционного магического графа G. Тогда $|N(u) \oplus N(v)| = 0$ или ≥ 3.*

Теорема 3 ([7], [8]). *Если граф G содержит цепь (u, v, w, t, p), и $deg(v) = deg(t) = 2$, тогда G не является дистанционным магическим графом.*

В разделах 2, 3 окажутся полезными сведения относительно дистанционной магичности отдельных классов графов. Пусть P_n – цепь порядка n, C_n – цикл порядка n, K_n – полный граф порядка n.

Теорема 4 ([4]). *Дистанционная магическая разметка дерева существует тогда и только тогда, когда дерево является цепью P_1 или P_3.*

Теорема 5 ([4]). *1) Дистанционная магическая разметка P_n существует тогда и только тогда, когда $n \in \{1, 3\}$. 2) Дистанционная магическая разметка C_n существует тогда и только тогда, когда $n = 4$. 3) Дистанционная магическая разметка K_n существует тогда и только тогда, когда $n \in \{1, 3\}$.*

Определим семейства графов и виды подграфов, нашедшие применение в третьем разделе.

Для любого подмножества S вершин графа G *порожденным подграфом* $< S >$ называют максимальный подграф графа G, множеством вершин которого является S. Две вершины из S смежны в $< S >$ тогда и только тогда, когда они смежны в G [[9], стр. 24].

Граф $< C_m : P_k : C_n >$ – это граф, полученный отождествлением концевых вершин цепи P_k с произвольной вершиной цикла C_n и произвольной вершиной цикла C_m.

Пусть графы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ $(k \geq 2)$ представляют собой k копий некоторого графа G. Тогда граф, полученный соединением ребром вершины графа G_i с соответствующей вершиной графа G_{i+1} для $i = 1, 2, \ldots, k-1$, называют *цепным соединением* графов $G_1, G_2, \ldots, G_k$.

Граф $G \circ H$ называют короной, если он получен из дизъюнктивного объединения графа G и n (где $n = |V(G)|$) копий графа H, посредством соединения i-ой вершины G с каждой вершиной i-ой копии H для $i = 1, 2, \ldots, n$.

2. Дистанционная магическая разметка графов $K_n \times C_m, C_m \times P_n$

В статье [7] были рассмотрены графы $P_n \times C_3, P_n \times C_4$ и доказано, что они не допускают дистанционной магической разметки. Это исследование послужило отправной точкой в решении общей проблемы характеристики графов операндов, для которых их декартово произведение представляет собой дистанционный магический граф. Авторы работ [10], [11] изучали ее для таких классов графов, как $C_m \times C_n, K_m \times K_n, P_m \times P_n$. Выяснилось, что $C_m \times C_n$, где $m, n \geq 3$, будет дистанционным магическим графом тогда и только тогда, когда $m = n \equiv 2(mod4)$, а также, что графы $K_m \times K_n$, где $m, n \geq 3$, и $P_m \times P_n$ не являются дистанционными магическими. Если G_1 и G_2 связные графы с $\delta(G_i) = 1, |V(G_i)| \geq 3$ для $i = 1, 2$, тогда $G_1 \times G_2$ – не дистанционный магический граф [11]. Лишь в этом результате отражены структурные свойства графов G_1 и G_2.

Для r-регулярного дистанционного магического графа порядка n магическая постоянная определяется по формуле $k = r(n+1)/2$. Известно [4], r-регулярный граф с нечетным r не имеет дистанционной магической разметки. Граф $K_n \times C_m$ представляет собой $(n+1)$-регулярный граф порядка mn. Граф $K_n \times C_m$ при четном n и $K_n \times C_3$ при нечетном n не допускают дистанционную магическую разметку [3]. Если $n = 1$, то $K_1 \times C_m = C_m$ допускает дистанционную магическую разметку, когда $m = 1, 4$. При $n = 3$ получим граф $K_3 \times C_m = C_3 \times C_m$, который не является дистанционным магическим для любого натурального числа m. Таким образом, исследованию подлежит случай, когда n – нечетное, $n \geq 5$ и $m \geq 4$. Все допустимые результаты для графа $K_n \times C_m$ четного порядка представлены в теореме 6.

Теорема 6. *Граф $K_n \times C_m$ является дистанционным магическим для нечетного n, если $n = 1$ и $m = 1, 4$ или $m \equiv 0(mod4)$ и n – любое нечетное число, или $m \equiv 0(mod2)$ и $n \equiv 3(mod4)$.*

Доказательство. Выше отмечалось, что граф $K_1 \times C_m$ допускает дистанционную магическую разметку при $m = 1, 4$. Граф $K_3 \times C_m$ – не дистанционный магический для любого натурального числа m [3].

Рассмотрим r-регулярный граф $K_n \times C_m$, где $r = n+1$ и n – нечетное $(n \geq 5)$. Для него выполняются условия $2 \leq r \leq mn - 2$, $r \equiv 0(mod2)$ теоремы 1.

Пусть $m \equiv 0(mod4)$, т. е. $m = 4t$, $t \geq 1$. Для графа $K_n \times C_{4t}$ получим $mn = 4tn \equiv 0(mod4)$. Согласно теореме 1, $K_n \times C_{4t}$ является дистанционным магическим графом.

Пусть $m \equiv 0(mod2)$ и $n \equiv 3(mod4)$, т. е. $n = 4t + 3$, $t \geq 1$. Для графа $K_{4t+3} \times C_m$ получим $r = 4t + 4 \equiv 0(mod4)$. По теореме 1 граф $K_{4t+3} \times C_m$ – дистанционный магический.

Теорема доказана.

Авторы [3] рассмотрели граф $C_m \times P_n$ и доказали, что он не допускает дистанционную магическую разметку, если $n > 1$ и n – нечетное или $n \equiv 2(mod4)$. В продолжении этого исследования нами получены следующие две теоремы.

Теорема 7. *1) Граф $C_1 \times P_n$ является дистанционным магическим тогда и только тогда, когда $n = 1$ и $n = 3$.*

2) Граф $C_2 \times P_n$ является дистанционным магическим тогда и только тогда, когда $n = 2$.

Доказательство. 1) По теореме 5 граф $C_1 \times P_n = P_n$ допускает дистанционную магическую разметку только для $n = 1$ и $n = 3$.

2) Граф $C_2 \times P_1 = P_2$ – не дистанционный магический, а граф $C_2 \times P_2 = C_4$ допускает дистанционную магическую разметку. Обозначим через $V(C_m \times P_n) = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}, \ldots, u_{m1}, u_{m2}, \ldots, u_{mn}\}$ множество вершин графа $C_m \times P_n$. Пусть $m = 2$, $n > 2$, тогда $|N(u_{12}) \oplus N(u_{21})| = |\{u_{13}\}| = 1$. По теореме 2 $C_2 \times P_n$ не является дистанционным магическим графом.

Теорема доказана.

Оставшийся не рассмотренным случай $m \geq 3$, $n \equiv 0(mod4)$ представлен в теореме 8.

Теорема 8. *Пусть $n \equiv 0(mod4)$, $m \geq 3$. Если граф $C_m \times P_n$ допускает дистанционную магическую разметку, то $4m \equiv 2(mod(n + 2))$.*

Доказательство. Пусть $n \equiv 0(mod4)$ и $m \geq 3$. Пусть $V(C_m \times P_n) = \{u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}, \ldots, u_{m1}, u_{m2}, \ldots, u_{mn}\}$ – множество вершин графа $C_m \times P_n$. Предположим, что $C_m \times P_n$ является дистанционным магическим графом с разметкой f. Обозначим $f(u_{ij}) = f_{ij}$, $w_{ij} = w(u_{ij})$ – вес вершины u_{ij} и $S_j = f_{1j} + f_{2j} + f_{3j} + \cdots + f_{mj}$ – сумма меток вершин j-ой копии C_m в графе $C_m \times P_n$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Для $n = 4$ получим граф $C_m \times P_4$, найдем веса его вершин

$$\begin{array}{cc}
k = w_{11} = f_{12} + f_{21} + f_{m1}, & k = w_{12} = f_{11} + f_{13} + f_{22} + f_{m2}, \\
k = w_{21} = f_{22} + f_{11} + f_{31}, & k = w_{22} = f_{21} + f_{23} + f_{12} + f_{32}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k = w_{m1} = f_{m2} + f_{11} + f_{m-1,1}, & k = w_{m2} = f_{m1} + f_{m3} + f_{12} + f_{m-1,2},
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
k = w_{13} = f_{12} + f_{14} + f_{23} + f_{m3}, & k = w_{14} = f_{13} + f_{24} + f_{m4}, \\
k = w_{23} = f_{22} + f_{24} + f_{13} + f_{33}, & k = w_{24} = f_{23} + f_{14} + f_{34}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k = w_{m3} = f_{m2} + f_{m4} + f_{13} + f_{m-1,3}, & k = w_{m4} = f_{m3} + f_{14} + f_{m-1,4},
\end{array}$$

где k – магическая постоянная.

Следовательно,

$$mk = \sum_{i=1}^{m} w_{i1} = \sum_{i=1}^{m} w_{i2} = \sum_{i=1}^{m} w_{i3} = \sum_{i=1}^{m} w_{i4}$$

или

$$mk = S_2 + 2S_1 = S_1 + S_3 + 2S_2 = S_2 + S_4 + 2S_3 = S_3 + 2S_4.$$

Из $S_2 + 2S_1 = S_1 + S_3 + 2S_2$ и $S_2 + S_4 + 2S_3 = S_3 + 2S_4$ определим $S_1 = S_2 + S_3$ и $S_4 = S_2 + S_3$, т.е. $S_1 = S_4$. Тогда из $S_1 + S_3 + 2S_2 = S_2 + S_4 + 2S_3$ получим $S_2 = S_3$. Учитывая, что $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 3S_1 = 4m(1 + 4m)/2$, находим $S_1 = 2m(1 + 4m)/3$. Согласно необходимому условию существования дистанционной магической разметки, имеем $4mk = 3(S_1 + S_4) + 4(S_2 + S_3)$. Тогда $k = 5S_1/2m$ или $k = 5(1 + 4m)/3$. Таким образом, если граф $C_m \times P_4$ допускает дистанционную магическую разметку, то $m \equiv 2(mod3)$.

Аналогичным образом, для $n = 8$ имеем $mk = S_2+2S_1 = S_1+S_3+2S_2 = S_2+S_4+2S_3 == S_3+S_5+2S_4 = S_4+S_6+2S_5 = S_5+S_7+2S_6 = S_6+S_8+2S_7 = S_7+2S_8$. Тогда $S_1 = S_2+S_3 = S_4+S_5 = S_6+S_7 = S_8$. Следовательно, $S_1 = 4m(1+8m)/5$ и $k = 9(1+8m)/5$. Граф $C_m \times P_8$ допускает дистанционную магическую разметку при $m \equiv 3(mod5)$.

Обобщим результаты, учитывая, что $n \equiv 0(mod4)$. Имеем

$$mk = S_2+2S_1 = S_1+S_3+2S_2 = S_2+S_4+2S_3 = S_3+S_5+2S_4 = \ldots = S_{n-1}+2S_n.$$

Тогда

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_4 + S_5 = \ldots = S_{n-2} + S_{n-1} = S_n.$$

Из $S_1(n + 2)/2 = mn(1 + mn)/2$ находим $S_1 = mn(1 + mn)/(n + 2)$.
Пусть $n = 4t$, так как $mnk = 2(n + 1)S_1$ или $4mtk = 2(4t + 1)S_1$, получим $k = (4t + 1)(1 + 4mt)/(2t + 1)$. Следовательно, $4mt + 1 \equiv 0(mod(2t + 1))$ или $2m \equiv 1(mod(2t + 1))$. Тогда $4m \equiv 2(mod(n + 2))$. Теорема доказана.

3. Дистанционная магическая разметка и некоторые конструкции графов

В этом разделе представим несколько конструкций графов, не являющихся дистанционными магическими.

Рассмотрим графы $< S_1 >, < S_2 >, < S_3 >$, которые являются порожденными подграфами множеством вершин $S_i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G_i)$ графа G_i. $E(< S_1 >) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_1, u_4), (u_2, u_5)\}$,
$E(< S_2 >) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_1, u_4), (u_2, u_5), (u_3, u_5)\}$,
$E(< S_3 >) = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_1, u_4), (u_2, u_5), (u_3, u_5), (u_4, u_5)\}$.
Пусть каждый из графов G_1, G_2, G_3 представляет собой объединение соответствующего графа $< S_1 >, < S_2 >, < S_3 >$ с произвольным графом H. При этом $< S_i >$ и H имеют единственную общую вершину u_5 $(i = 1, 2, 3)$.

Лемма 1. *Если граф G содержит в качестве подграфа один из графов G_1, G_2, G_3 и $< S_1 >, < S_2 >, < S_3 >$ являются порожденными подграфами множеством вершин $S_i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G)$ графа G, то он не допускает дистанционной магической разметки.*

Доказательство. Пусть G содержит в качестве подграфа один из графов G_1, G_2, G_3 и $< S_1 >, < S_2 >, < S_3 >$ являются порожденными подграфами множеством вершин $S_i = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\} \subseteq V(G)$ графа G. Предположим, что G является дистанционным магическим графом с разметкой f.

Тогда $w(u_2) = f(u_1) + f(u_3) + f(u_5) = w(u_4) = f(u_1) + f(u_3)$ для G_1 или G_2. Для G_3 будет выполняться $w(u_1) = f(u_2)+f(u_4) = w(u_3) = f(u_2)+f(u_4)+f(u_5)$.

В каждом из рассмотренных случаев пришли к противоречию, следовательно, G – не дистанционный магический граф.

Лемма доказана.

Теорема 9. *Граф $G =< C_m : P_t : C_n >$, отличный от $< C_2 : P_1 : C_2 >$, не является дистанционным магическим графом, где $t \geq 1, m \geq 2$ и $n \geq 2$ – натуральные числа.*

Доказательство. Пусть $G =< C_m : P_t : C_n >$ является дистанционным магическим графом. Обозначим $V(C_m) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$,
$V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – множества вершин циклов C_m и C_n, соответственно. Пусть u_1 и v_1 концевые вершины цепи P_t.

1) Рассмотрим $t = 1$, т. е. $u_1 = v_1$, и $m \geq 3$ и $n \geq 3$. Найдем мощность множества $N(u_2) \oplus N(v_2)$, являющегося симметрической разностью множеств $N(u_2)$ и $N(v_2)$: $|N(u_2) \oplus N(v_2)| = 2$. Согласно теореме 2
граф $G =< C_m : P_1 : C_n >$ не является дистанционным магическим графом.

Пусть или $m = 2$, или $n = 2$. Не нарушая общности, будем считать $m = 2$, тогда $|N(u_2) \oplus N(v_2)| = 1$. Следовательно, $G =< C_2 : P_1 : C_n >$,
$G =< C_m : P_1 : C_2 >$ не являются дистанционными магическими графами.

Если $m = 2$ и $n = 2$, то $G = P_3$ – дистанционный магический граф (см. теорема 5).

2) Если $t \geq 2, m = 4$ и (или) $n = 4$, то согласно лемме 1, $G =< C_m : P_t : C_n >$ не является дистанционным магическим графом.

3) Рассмотрим случай $t \geq 2, m \neq 4$ и $n \neq 4$. Пусть f – дистанционная магическая разметка $G =< C_m : P_t : C_n >$. В случае $m > 4$ или $m = 3$ для цикла C_m имеем:

$$w(u_2) = f(u_1) + f(u_3) = k, w(u_m) = f(u_1) + f(u_{m-1}) = k.$$

Таким образом, $f(u_3) = f(u_{m-1})$. Аналогично для $n > 4$ или $n = 3$.

При $m = 2$ и $n = 2$ имеем цепь P_{t+2}, которая по теореме 5 дистанционным магическим графом не является.

Следовательно, $G =< C_m : P_t : C_n >$ не является дистанционным магическим графом. Теорема доказана.

Теорема 10. *Граф G, являющийся цепным соединением t копий цикла C_m, не допускает дистанционной магической разметки для любых натуральных $t \geq 2, m \geq 2$.*

Доказательство. Если $m = 2$, тогда G – дерево порядка $2t$, отличное от P_1 и P_3, и следовательно, не является дистанционным магическим графом (см. теорема 4).

При $t = 2$ получим граф $G =< C_m : P_2 : C_m >$, не допускающий дистанционной магической разметки для любого натурального числа $m \geq 2$.

Пусть $t \geq 3, m \geq 5$, тогда G содержит цепь (u, v, w, l, p) с $deg(v) = deg(l) = 2$, значит граф G не дистанционный магический (см. теорема 3).

Пусть $t \geq 3, m = 3$ и G является дистанционным магическим графом. Приходим к противоречию, так как две вершины степени 2 каждой копии цикла C_3 будут иметь равные метки.

При $t \geq 3$ цепное соединение t копий цикла C_4 $(m = 4)$, согласно лемме 1, не допускает дистанционной магической разметки. Теорема доказана.

Рассмотрим короны $P_m \circ P_n, P_m \circ C_n, C_m \circ P_n$ и $C_m \circ C_n$.

Теорема 11. *Корона $P_m \circ P_n$ не является дистанционным магическим графом для любых натуральных m и n.*

Доказательство. Пусть $n = 1$, тогда $P_m \circ P_1$ – дерево, отличное от P_1 и P_3, не дистанционный магический граф.

При $n = 2$ корона $P_m \circ P_2$ будет цепным соединением m копий цикла C_3. По теореме 10, $P_m \circ P_2$ не допускает дистанционной магической разметки для натурального $m \geq 2$, а для $m = 1$ цикл C_3 не является дистанционным магическим (см. теорема 5).

Обозначим $V(P_m \circ P_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}, \ \ldots, v_{m1}, v_{m2}, \ldots, v_{mn}\}$, где $V(P_m) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ и $\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}\}$ – множество вершин i-ой копии P_n, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть корона $P_m \circ P_n$ является дистанционным магическим графом с разметкой f. Если $n \geq 4$, то $|N(v_{11}) \oplus N(v_{1n})| = 2$.

Для $P_1 \circ P_3$ имеем $|N(u_1) \oplus N(v_{12})| = 2$.

Пришли к противоречию (см. теорема 2).

При $n = 3$ и $m \geq 2$ воспользуемся необходимым условием существования дистанционной магической разметки. Предположим, что существует дистанционная магическая разметка f короны $P_m \circ P_3$.
Учитывая, что $f(v_{i2}) = f(v_{i1}) + f(v_{i3})$ получим $4km = 5(f(u_2) + f(u_3) + \ldots + f(u_{m-1})) + 4(f(u_1) + f(u_m)) + 5(f(v_{12}) + f(v_{22}) + \ldots + f(v_{m2}))$, где k – магическая постоянная. Так как $f(u_i) = k - f(v_{i2})$ последнее равенство примет вид

$$4km = k(5m - 2) + f(v_{12}) + f(v_{m2})$$

или

$$f(v_{12}) + f(v_{m2}) = -(m - 2)k.$$

Для $m \geq 2$ получаем противоречие. Следовательно, $P_m \circ P_3$ не является дистанционным магическим графом для любого натурального m.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Веер F_n не допускает дистанционной магической разметки для любого натурального n.*

Доказательство. Учитывая, что веер F_n – это корона $P_1 \circ P_n$, следовательно, F_n – не дистанционный магический граф для любого натурального n.

Теорема 12. *Корона $P_m \circ C_n$ является дистанционным магическим графом тогда и только тогда, когда $m = 1$ и $n = 4$.*

Доказательство. Графы $P_m \circ C_1 = P_m \circ P_1, P_m \circ C_2 = P_m \circ P_2$ – не дистанционные магические.

Пусть $m \geq 1, n \geq 3$ и $n \neq 4$, тогда найдутся такие две вершины, что мощность симметрической разности множеств смежности этих вершин будет равна 2. Согласно теореме 2, $P_m \circ C_n$ не является дистанционным магическим графом.

Пусть $n = 4$, воспользуемся необходимым условием существования дистанционной магической разметки. Предположим, что существует дистанционная магическая разметка f короны $P_m \circ C_4$.
Учитывая, что $f(v_{i1}) + f(v_{i3}) = f(v_{i2}) + f(v_{i4})$ получим

$5km = 6(f(u_2) + \ldots + f(u_{m-1})) + 5(f(u_1) + f(u_m)) + 6((f(v_{11}) + f(v_{13})) + + (f(v_{21}) + f(v_{23})) + \ldots + (f(v_{m1}) + f(v_{m3})))$, где k – магическая постоянная. Так как $f(u_i) = k - (f(v_{i1}) + f(v_{i3}))$ последнее равенство примет вид

$$f(v_{11}) + f(v_{13}) + f(v_{m1}) + f(v_{m3}) = -(m-2)k.$$

Оно не верно для всех $m \geq 2$. Следовательно, $P_m \circ C_4$ не является дистанционным магическим графом.

Пусть $m = 1$, $n = 4$ и $f(v_{11}) = 1, f(v_{12}) = 2, f(v_{13}) = 4, f(v_{14}) = 3, f(u_1) = 5$. Таким образом, для графа $P_1 \circ C_4$ разметка f является дистанционной магической.

Теорема доказана.

Теорема 13. *Корона $C_m \circ P_n$ не является дистанционным магическим графом для любых натуральных m и n.*

Доказательство. Графы $C_1 \circ P_n = P_1 \circ P_n, C_2 \circ P_n = P_2 \circ P_n$ – не дистанционные магические.

Обозначим $V(C_m \circ P_n) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n}, v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n}, \ \ldots, v_{m1}, v_{m2}, \ldots, v_{mn}\}$, где $V(C_m) = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ и $\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}\}$ – множество вершин i-ой копии P_n, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть $m \geq 3, n \geq 1$.

Если $n = 1$, тогда $|N(u_2) \oplus N(v_{11})| = 2$. Для $n \geq 4$ также найдутся такие две вершины, что мощность симметрической разности множеств смежности этих вершин будет равна 2 или 1. Согласно теореме 2, $C_m \circ P_n$ не является дистанционным магическим графом.

Пусть $n = 2$, предположим, что корона $C_m \circ P_2$ является дистанционным магическим графом с разметкой f.
Тогда $w(v_{11}) = f(v_{12}) + f(u_1) = w(v_{12}) = f(v_{11}) + f(u_1)$ и $f(v_{11}) = f(v_{12})$. Пришли к противоречию, таким образом, $C_m \circ P_2$ – не дистанционный магический граф.

Остался случай $n = 3$. Доказательство проведем аналогично случаю $P_m \circ P_3$ теоремы 11. Предположим, что существует дистанционная магическая разметка f короны $C_m \circ P_3$. Тогда $f(v_{i2}) = f(v_{i1}) + f(v_{i3})$ и $4km = 5(f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_m)) + 5(f(v_{12}) + f(v_{22}) + \ldots + f(v_{m2}))$, где k – магическая постоянная. Так как $f(u_i) = k - f(v_{i2})$ последнее равенство примет вид $4km = 5km$.

Следовательно, $C_m \circ P_3$ не является дистанционным магическим графом.

Теорема доказана.

Теорема 14. *Корона $C_m \circ C_n$ не является дистанционным магическим графом для любых натуральных $m > 1$ и $n \geq 1$.*

Доказательство. Пусть $m \geq 3, n \geq 3$, иначе получим короны, рассмотренные в предыдущих теоремах. Рассмотрим случай $m \geq 3, n = 3$ и предположим, что $C_m \circ C_3$ является дистанционным магическим графом. Тогда две смежные вершины каждой копии цикла C_3 будут иметь равные метки. Приходим к противоречию.

При $m \geq 3, n \geq 5$ найдутся такие две вершины, что мощность симметрической разности множеств смежности этих вершин будет равна 2. Согласно теореме 2, $C_m \circ C_n$ не является дистанционным магическим графом.

При $m \geq 3, n = 4$ доказательство проведем аналогично случаю $P_m \circ C_4$ теоремы 12.

Пусть существует дистанционная магическая разметка f короны $C_m \circ C_4$. Учитывая, что $f(v_{i1}) + f(v_{i3}) = f(v_{i2}) + f(v_{i4})$ получим $5km = 6(f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_m)) + 6((f(v_{11}) + f(v_{13})) + (f(v_{21}) + f(v_{23})) + \ldots + (f(v_{m1}) + f(v_{m3}))$, где k – магическая постоянная. Так как $f(u_i) = k - (f(v_{i1}) + f(v_{i3}))$ последнее равенство примет вид $5km = 6km$. Пришли к противоречию, следовательно, $C_m \circ C_4$ не является дистанционным магическим графом.

Теорема доказана.

1. *Kovar P., Froncek D., Kovarova T.* A note on 4-regular distance magic graphs // Australasian journal of combinatorics. – 2012. – Vol. 54. – P. 127–132.
2. *Arumugam S., Froncek D., Kamatchi N.* Distance magic graphs – a survey // J. Indones. Math. Soc., Special Edition. – 2011. – P. 1–9.
3. *Seoud M.A., Abdel Maqsoud A.E.I., Aldiban Y.I.* New classes of graphs with and without 1-vertex magic vertex labeling // Proc. Pakistan Acad. Sci. – 46(3). – 2009. – P. 159–174.
4. *Miller M., Rodger C., Simanjuntak R.* Distance magic labelings of graphs // Australian Journal of combinatorics. – 2003. – Vol. 28. – P. 305–315.
5. *Семенюта М.Ф. Черноусова Ж.Т.* Дистанційна магічна розмітка графів // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 119–124.
6. *Sugeng K.A., Froncek D., Miller M., Ryan J., Walker J.* On distance magic labeling of graphs // JCMCC – 2009. – Vol. 71. – P. 39–48.
7. *Jinnah M.I.* $\sum$-labelled graphs // In technical Proceedings of Group Discussion on Graph Labeling Problems / eds. B.D. Acharya and S.M. Hedge, 1999. – P. 71–77.
8. *Vilfred V.* $\sum$-labelled graph and circulant graphs / Ph. D. Thesis. – University of Kerala, Trivandrum, India, 1994.
9. *Харари Ф.* Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
10. *Rao S.B, Singh T. and Parameswaran V.* Some sigma labelled graphs I // In Graphs, Combinatorics, Algorithms and Applications / eds. S. Arumugam, B.D. Acharya and S.B. Rao, Narosa Publishing House. – New Delhi, 2004. – P. 125–133.
11. *Beena S.* On $\sum$ and $\sum'$ labelled graphs // Discrete Math. – 2009. – 309. – P. 1783–1787.

Получено 18.05.2014