УДК 517.9

С. Г. Хома-Могильська (Тернопільський нац. екон. ун-т)

ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

For boundary-value 2π-periodic problem $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ u(x,t+2\pi)=u(x,t),\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R}$, we established that unique classical solution may be in form $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde u(x,t)$, where $u^0(x,t)-$ is a solution of the corresponding homogeneous periodic problem and $\tilde u(x,t)-$ is a partial solution of the non-homogeneous equation such as $\tilde u(x,t+2\pi)=\tilde u(x,t)$, in the two cases: 1) $u(x,t)=\tilde u(x,t),\quad u^0(x,t)\equiv 0;\quad 2) u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde u(x,t),\quad u^0(x,t)\ne 0.$

Для крайової 2π-періодичної задачі $u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ u(x,t+2\pi)=u(x,t),\ 0\le x\le\pi,\ t\in\mathbb{R}$, встановлено, що єдиний класичний розв'язок може існувати у вигляді $u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde u(x,t)$, де $u^0(x,t)-$ розв'язок відповідної однорідної періодичної задачі, а $\tilde u(x,t)-$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння такий, що $\tilde u(x,t+2\pi)=\tilde u(x,t)$, у двох випадках: 1) $u(x,t)=\tilde u(x,t),\quad u^0(x,t)\equiv 0;\quad 2)\ u(x,t)=u^0(x,t)+\tilde u(x,t),\ u^0(x,t)\ne 0.$

Важливим етапом при дослідженні крайових задач є встановлення умов існування та побудова розв'язку. У роботі [1] вперше, на нашу думку, встановлено загальні умови розв'язності крайової $\omega-$ періодичної задачі вигляду

$$u_{tt}-u_{xx}=g(x,t),\qquad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x,t+\omega)=u(x,t),\quad 0\le x\le\pi,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Якщо припустити, що існує частинний розв'язок $\tilde u(x,t)$ задачі (1), (3) такий, що $\tilde u(x,t+\omega)=\tilde u(x,t)$, то умови існування розв'язку задачі (1)–(3) мають вигляд [1, с. 915]:

$$\begin{gathered} B+\sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k^1\cos\nu_k t+A_k^3\sin\nu_k t\big)+\tilde u(0,t)=0,\\ A\pi+B+\sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k^1\cos\nu_k\pi+A_k^2\sin\nu_k\pi\big)\cos\nu_k t+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\big(A_k^3\cos\nu_k\pi+A_k^4\sin\nu_k\pi\big)\sin\nu_k t+\tilde u(\pi,t)=0, \end{gathered} \tag{4}$$

де $A,\ B,\ A_k^i,\ i=1,2,3,4,\ k\in\mathbb{N},$ – невідомі коефіцієнти, $\nu_k=\frac{2\pi k}{\omega}$.

Зрозуміло, що система (4) може мати різну структуру в залежності від вибору періоду ω та частинного розв'язку $\tilde u(x,t)$ періодичної задачі (1), (3).

Побудуємо розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega=2\pi$ у випадку, коли замість розв'язку $\tilde u(x,t)$ покласти функцію

$$\tilde u_1(x,t)=-\tfrac12\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}g(\xi,\tau)\,d\tau\equiv\big(S_1g\big)(x,t). \tag{5}$$

Покладаючи $\omega=2\pi$ і враховуючи формулу (5), одержимо таку систему:

$$B + \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k^1 \cos kt + A_k^3 \sin kt \big) + 0 = 0,$$

$$A\pi + B + \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k^1 \cos k\pi + A_k^2 \sin k\pi \big) \cos kt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k^3 \cos k\pi + A_k^4 \sin k\pi \big) \sin kt + \tilde{u}_1(\pi, t) = 0,$$

З першого рівняння випливає, що $B = 0$, $A_k^1 = 0$, $A_k^3 = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів B, A_k^1, A_k^3, $k \in \mathbb{N}$, у друге рівняння, одержимо $A = -\frac{1}{\pi} \tilde{u_1}(\pi, t)$.

На основі отриманих результатів і враховуючи формулу (5), розв'язок крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ матиме вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt \big) \sin kx + \big(S_1 g \big)(x,t) - \frac{x}{\pi} \big(S_1 g \big)(\pi, t), \qquad (6)$$

де A_k^2, A_k^4, $k \in \mathbb{N}$, – довільні сталі. А це означає, що крайова періодична задача (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ має безліч розв'язків. На основі формули (6) стверджуємо, що розв'язок вказаної задачі буде єдиним, коли однозначно будуть визначені коефіцієнти A_k^2, A_k^4, $k \in \mathbb{N}$. А це можливо у двох випадках:

1)$A_k^2 = 0$, $A_k^4 = 0$, $k \in \mathbb{N}$;

2)A_k^2 та A_k^4– конкретні числа.

У першому випадку випливає справедливість результатів О.Вейводи–М.Штедри [2]– [4], а в другому – результат П.Рабиновича [5, 6].

Слід зазначити, що для визначення коефіцієнтів A_k^2 та A_k^4, $k \in \mathbb{N}$, не задано додаткових умов. Це спонукає до додаткових досліджень. З іншого боку, формула (6) не завжди є розв'язком рівняння (1), оскільки невідомо, яке значення набуває функція $\big(S_1 g \big)(x,t)$ при $x = \pi$.

Враховуючи вище зроблені зауваження відносно розв'язності крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$, нами встановлене наступне твердження.

Використовуючи для функції $\mu(t + 2\pi) = \mu(t)$ зображення

$$\frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\, d\alpha - \frac{x}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\, d\alpha \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \big(A_k^2 \cos kt + A_k^4 \sin kt \big) \sin kx,$$

де $A_k^2 = a_k/k$, $A_k^4 = b_k/k$, $k \in \mathbb{N}$, a_k, b_k– коефіцієнти ряду Фур'є функції

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kt + b_k \sin kt \big),$$

розв'язок (6) крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ можна записати так:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau + \\ &+ \frac{x}{2\pi}\left\{ \int\limits_{0}^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau - \int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha \right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Теорема. *Нехай* $g \in C^{0,1}\big([0,\pi]\times\mathbb{R}\big)$ *і* $g(x,t+2\pi) = g(x,t)$. *Тоді для кожної функції* $\mu(t) \in C^1\big(\mathbb{R}\big)$, $\mu(t+2\pi) = \mu(t)$, *яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_{0}^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau,$$

функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi,\tau)\,d\tau \equiv u^0(x,t) + \big(S_1 g\big)(x,t)$$

є єдиним класичним розв'язком крайової періодичної задачі (1)–(3) *при* $\omega = 2\pi$.

На основі сформульованої теореми можна зробити висновок, що існування розв'язків крайової періодичної задачі (1)–(3) при $\omega = 2\pi$ потрібно досліджувати і у вигляді $u(x,t) = u^0(x,t) + \big(S_1 g\big)(x,t)$, де $u^0(x,t)-$ розв'язок однорідного рівняння $u^0_{tt} - u^0_{xx} = 0$.

Це ілюструє наступний розв'язок

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha)\,d\alpha - \frac{1}{2} x \sin x \sin t,$$

де $\mu(t)-$ неперервна і $2\pi-$ періодична функція така, що $\int\limits_{t-\pi}^{t+\pi} \mu(\alpha)\,d\alpha = 0$, крайової $2\pi-$ періодичної задачі:

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = \cos x \sin t, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \\ &u(x,t+2\pi) = u(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1. *Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г.* Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку. I //Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 7. – С. 912–921.
2. *Vejvoda O.* Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension //Czech. Math. J. – 1964. – **14**, № 3. – P. 341–382.
3. *Vejvoda O.,Stedry M.* Periodic solutions to weakly nonlinear autonomous wave equations in one dimension //Czech. Math. J. – 1975. – **25**, № 4. – P. 536–555.

4. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения: Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений //Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 10. – С. 1733–1739.
5. *Rabinovitz P.* Periodic solutions of hyperbolic partial differential equations //Comm. Pure Appl.Math. – 1967. – **20**, № 1. – P. 145–205.
6. *Rabinovitz P.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations //Ibit. – 1969. – **22**, № 1. — P. 15–39.

Одержано 26.05.2014