

УДК 519.21

**В. К. Ясинский, И. В. Юрченко** (Черновицкий нац. ун-т им. Ю. Федьковича)

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

It is proved the existence of the second moment of the strong solution of the stochastic Cauchy problem for the non-autonomous stochastic partial differential equation with continuous Markov process as a parameter. It is obtained the sufficient conditions of the asymptotic stability in the mean square with the help of Lyapunov function.

Для стохастичної задачі Коші неавтономного стохастичного рівняння в частинних похідних з неперервним марковським процесом в якості параметра доведено існування другого моменту сильного розв'язку, отримано достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному за допомогою стохастичної функції Ляпунова.

**Введение.** Доказательству существования и асимптотического поведения решений детерминированных уравнений в частных производных посвящено достаточное число работ, ссылки на которые можно найти в монографиях [1], [2], [3]. После введения понятий стохастического дифференциала и интеграла, замены переменных Ито для стохастического дифференциала, стохастического дифференциального уравнения (СДУ) как интегрального уравнения с интегралом Ито-Скорохода такими известными учеными как Гихман И.И., Скороход А.В., Хасьминский Р.З., Колмановский В.Б., Царьков Е.Ф. (см. [4]– [9]) стало возможным изучение асимптотического поведения сильного решения СДУ в частных производных (СДУВЧП) [10]– [14] и др.

Дальнейшее изучение СДУВЧП шло по пути рассмотрения в этих уравнениях случайных параметров, которые представляли бы более точную математическую модель реальных сложных систем [4], [5], [14] и др.

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения сильного решения линейного СДУВЧП с учетом непрерывного марковского процесса [14], [15].

**1. Постановка задачи.** На вероятностном базовом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$  [3] рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных (ЛСДУВЧП) [14]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ Q \left( A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] &= Q \left( B(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ Q \left( C(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$Q \left( A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \quad (2)$$

Здесь

$$Q(A(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j,$$

$$Q(B(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m b_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j,$$

$$Q(C(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j,$$

где  $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$  — матрицы размерности  $n \times m$ , содержащие соответствующие бэровские функции, которые зависят от  $t$  и  $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{Y}$  для произвольного  $t \geq t_0$ ,  $\omega \in \Omega$  — стохастически непрерывный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями на компактном фазовом пространстве  $\mathbb{Y}$  [15], [16].

Обозначим через  $w(t) \equiv w(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  — стандартный винеровский процесс,  $T > 0$  [8], а через  $\frac{dw(t, \omega)}{dt}$  обозначим "белый шум" (производная от  $w(t, \omega)$  с вероятностью единица не существует [16], [17]).

Обозначим далее через  $\mathfrak{M}_T$  пространство функций  $u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , измеримых по  $t$  и  $x$  с вероятностью единица относительно  $\sigma$ -алгебры борелевских множеств фазового пространства  $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$  и для которых существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\} dx < \infty \quad (3)$$

при любом  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  — знак математического ожидания.

Для дальнейших исследований введем нормы, свойства которых легко проверить [18]

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2R}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx, \quad (4)$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{2T}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt, \quad (5)$$

и

$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E}\{\|u(t, x, u)\|_{L_{2R}}^2\}. \quad (6)$$

Далее под  $L_{2R}, L_{2T}$  будем понимать пространства функций  $u(t, x, \omega)$ , имеющие соответствующие нормы (4), (5).

В пространстве  $\mathfrak{M}_T$ , наконец, введем норму согласно (6), а именно

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt. \quad (7)$$

Под решением задачи Коши для ЛСДУВЧП (1), (2) будем понимать случайную функцию  $u(t, x) \equiv u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , которая согласованна с фильтрацией  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  [19] и такую, что с вероятностью единица при каждом  $(t, x)$  удовлетворяет уравнению

$$Q\left(A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) = [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B(s, \xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x)ds + \int_0^t Q\left(C(s, \xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x)dw(s). \tag{8}$$

Отметим, что случайная функция  $u(t, x)$  с вероятностью 1 непрерывна по  $t \in [0, T]$  в силу конструкции  $Q(\cdot, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$  и непрерывности по  $t$  интеграла Ито и интеграла Римана, как функций верхнего предела.

**2. Существование решения стохастической задачи Коши для ЛСДУВЧП (1), (2).** Будем рассматривать задачу о существовании решения стохастической задачи Коши (1), (2) в среднем квадратичном в пространстве  $\mathfrak{M}_T^1 \subset \mathfrak{M}_T$ , для элементов которого для произвольной матрицы  $A(t, y)$ ,  $y \in \mathbb{Y}$ , имеет место включение

$$Q\left(A(t, y), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) \in \mathfrak{M}_T.$$

**Лемма 1.** Преобразование Фурье по  $x$  для случайной функции  $u(t, x) \equiv u(t, x, \omega)$ , а именно

$$v(t, \sigma) \equiv v(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \tag{9}$$

не выводит ее из пространства  $\mathfrak{M}_T$  для произвольного конечного  $0 < T < \infty$  с вероятностью единица.

**Доказательство.** Существование с вероятностью единица преобразования Фурье [20], [21] следует из принадлежности  $u(t, x)$  пространству  $L_{2R}$  для произвольного  $t \in [0, T]$ , поскольку верно неравенство Чебышева [16]

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)| dx > N\right\} \leq \frac{\mathbb{E}u(t)}{N} \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow +\infty$ . По теореме Планшереля [18] имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx,$$

т.е.  $\|v(t, \sigma)\|_{L_{2R}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t, x)\|_{L_{2R}}$ .

Значит,  $\|v(t, \sigma)\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t, x)\|_{\mathfrak{M}_T}$ , что и доказывает лемму 1.

**Теорема 1.** Пусть:

1) выполнены требования постановки задачи пункта 1 и условия Липшица на коэффициенты уравнения (1);

2) бэрсовские функции  $a_{kj}(t, y)$ ,  $b_{kj}(t, y)$ ,  $c_{kj}(t, y)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ;  $j = \overline{1, m}$  удовлетворяют глобальному условию ограниченности модулей  $|a_{kj}(t, y)|^2 + |b_{kj}(t, y)|^2 + |c_{kj}(t, y)|^2 \leq L \forall y \in \mathbb{Y}$ ;

3)  $\mathbb{E}\{\|[Qy]_0\|_{\mathfrak{M}_T}^l\} \leq K$ ;  $l > 1$ .

Тогда с вероятностью единица существует непрерывное решение стохастической задачи Коши  $u(t, x) \equiv u(t, x, \omega)$ , причем существует второй момент  $\mathbb{E}\{\|u(t, x)\|_{\mathfrak{M}_T}^2\} \leq K_1$ , а для случайной функции  $v(t, \sigma) \equiv v(t, \sigma, \omega)$  (см. (9)) существует  $l$ -й момент ( $l > 1$ ) как решение задачи СДУ (10), (11) (см. ниже).

**Доказательство.** Применив преобразование Фурье [20] по переменной  $x \in \mathbb{R}^1$  к левой и правой части ЛСДУВЧП (1), (2), получим "формальное" линейное стохастическое дифференциальное уравнение, уже не содержащее частных производных, для случайной функции  $v(t, \sigma) \equiv v(t, \sigma, \omega)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ Q(A(t, \xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma)v(t, \sigma) \right] &= Q(B(t, \xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma)v(t, \sigma) + \\ &+ Q(C(t, \xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma)v(t, \sigma) \frac{dw(t)}{dt}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q(A(t, \xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma)v(t, \sigma)v(t, \sigma) \Big|_{t=0} = [Qv]_0. \quad (11)$$

Полученную задачу Коши для ЛСДУ (10), (11) следует понимать как стохастическое интегральное уравнение [6], [19]

$$\begin{aligned} v(t, \sigma) &= v_0(t, \sigma) + \int_0^t Q(B(s, \xi(s)), \cdot, i\sigma)v(s, \sigma)ds + \\ &+ \int_0^t Q(C(s, \xi(s)), \cdot, i\sigma)v(s, \sigma)dw(s) \end{aligned} \quad (12)$$

с начальным условием(11).

В условиях теоремы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение  $v(t, \sigma) \equiv v(t, \sigma, \omega)$  при  $\sigma \neq 0$  ЛСДУ (10), (11) с  $\mathbb{E}\{\|v(t, \sigma)\|_{\mathfrak{M}_T}^l\} < \infty$ ,  $l > 1$ , [6], [9], а в силу леммы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение  $u(t, x) \equiv u(t, x, \omega)$  ЛСДУВЧП (1), (2) с  $\mathbb{E}\{\|u(t, \sigma)\|_{\mathfrak{M}_T}^2\} < \infty$ . ■

**3. Асимптотическое поведение тривиального решения рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений.** Вначале обсудим асимптотику поведения ЛСДУ (12) тривиального решения  $v(t, \sigma) \equiv 0$  при  $\sigma \neq 0$  с начальным условием (11). Отметим, что при постановке задачи пункта 1 применяется метод стохастической функции Ляпунова [4] для исследования

асимптотической устойчивости в среднем квадратичном,  $l$ -устойчивости ( $l > 1$ ), экспоненциальной  $l$ -устойчивости, глобальной экспоненциальной  $l$ -устойчивости, глобальной экспоненциальной  $l$ -устойчивости в целом [16] (раздел 8, с.543–558).

Дадим соответствующие определения устойчивости тривиального решения  $v(t, \sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \neq 0$  СДУ (10), (11) со следующими ограничениями на коэффициенты

$$\begin{aligned} Q(B(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma) &\equiv 0 \quad \forall y \in \mathbb{Y}, t \in [-, \infty), \\ Q(C(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma) &\equiv 0 \quad \forall y \in \mathbb{Y}, t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (13)$$

**Определение 1.** Тривиальное решение  $v(t, \sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \neq 0$  задачи (10), (11) назовем:

– стохастически устойчивым, если  $\forall \varepsilon_1 > 0 \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta > 0$ , что из неравенства  $|Qv|_0 < \delta$  для  $t_0 > 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  следует неравенство

$$\mathbb{P}\{\omega : \sup_{t \geq 0} |Q(D(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma)| \geq \varepsilon_1\} < \varepsilon_2 \quad (14)$$

где  $D$  имеет конструкцию  $D(\xi(t)) \equiv \{d_{kj}(\xi(t))\}_{k,j=1}^{n,m}$ ,  $d_{kj}(\cdot)$  – бэрвские функции.

– асимптотически стохастически устойчивым, если выполнено условие (14) и существует такое  $\delta_1 > 0$ , что для  $t_0 \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $|Qv|_0 < \delta_1$  имеет место соотношение

$$\mathbb{P}\{\omega : \lim_{t \rightarrow \infty} |Q(D(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma)| = 0\} = 1. \quad (15)$$

**Определение 2.** Тривиальное решение  $v(t, \sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \neq 0$  задачи (10), (11) назовем:

–  $l$ -устойчивым, если

$$\lim_{|Qv|_0 \rightarrow 0} \sup_{t \geq t_0 \geq 0} \mathbb{E}\{|Q(D(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma)|^l\} = 0, \quad (16)$$

– асимптотически  $l$ -устойчивым, если решение  $l$ -устойчиво и существует такое  $v > 0$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbb{E}\{|Q(D(y, t), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma)|^l\}| = 0 \quad (17)$$

$\forall t_0 > 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $|[Qv]_{t_0}| < \delta$ .

**Определение 3.** Тривиальное решение  $v(t, \sigma) \equiv 0$ ,  $\sigma \neq 0$  задачи (10), (11) назовем:

– экспоненциально  $l$ -устойчивым, если существуют такие  $\delta > 0$ ,  $M > 0$  и  $\gamma > 0$ , что для произвольных  $t \geq t_0 \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $|[Qv]_{t_0}| < \delta$  имеет место неравенство

$$\mathbb{E}\{|Q(D(t, y), \cdot, i\sigma)v(t, \sigma)|^l\} \leq M e^{-\gamma(t-t_0)|[Qv]_0|^l}, \quad (18)$$

– глобально экспоненциально  $l$ -устойчивым, если условие (18) выполняется для всех  $t \geq t_0 \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $[Qv]_0 \in \mathbb{R}^1$ .

Далее рассмотрим скалярную непрерывную функцию Ляпунова [7], [16] по всем переменным

$$\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad (19)$$

для которой выполнено глобальное условие Липшица

$$|\mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y)| \leq L|v_1 - v_2| \quad (20)$$

для всех  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^1$  и условие глобальной ограниченности  $\forall y \in \mathbb{Y}$

$$\sup_{t \geq 0} |\mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y)| = \alpha(y) < \infty. \quad (21)$$

**Определение 4.** Оператор  $(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y)$  назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), если функция  $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$  непрерывна по  $s, v, y$ , ограничена на каждом множестве  $[t_1, t_2] \times U_\delta(0) \times \mathbb{Y}$ ,  $U_\delta(0) \equiv |v(t, \sigma)| < \delta$ ;  $\sigma \neq 0$  и выполняется условие:  $\forall s \geq 0, y \in \mathbb{Y}$  и  $v \in \mathbb{R}^1$  найдется такое  $\Delta > 0$ , что выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq \Delta} \frac{1}{t} |\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, \sigma), \xi(t)) - \mathbb{V}(s, v(s, \sigma), \xi(t))\}| \leq K < \infty$$

равномерно по аргументу  $v$ , а также существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, y), \xi(s)) - \mathbb{V}(s, v, y)\}] \equiv (\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y). \quad (22)$$

Для использования определения 4 введем обозначение  $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_1)$ . Если непрерывный функционал  $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}^1$  удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу  $v$  и условию равномерной ограниченности по первому аргументу  $t$ , то оператор  $\mathcal{L}$  полностью определяется правой частью СДУ (10) и слабым инфинитезимальным оператором марковского процесса  $\xi(t)$  [15], [16]  $\mathcal{L}\mathbb{V} = \tilde{\mathcal{L}}_1\mathbb{V} + \tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V}$ , где

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{L}}_2\mathbb{V})(s, v, y) &= (\nabla\mathbb{V})(s, v, y)Q(B(y), \frac{d}{dt}, i\sigma) + \\ &+ \frac{1}{2}(\nabla^2\mathbb{V})(s, v, y)Q^2(C(y), \frac{d}{dt}, \mathfrak{B}\sigma). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $\nabla\mathbb{V}$  — первая производная  $\nabla_v$ ;  $\nabla^2\mathbb{V}$  — вторая производная  $\nabla_{v,2}$  [16].

**Определение 5.** Оператор  $\mathcal{L}(\mathbb{V})(s, v, y)$  назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), а значит, в силу леммы 1 и на решениях СДУ (1), (2), если функция Ляпунова  $\mathbb{V}(s, v, y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$  непрерывна по всем трем аргументам, ограничена на каждом множестве  $[t_1, t_2] \times \mathbb{U}_r(0) \times \mathbb{Y}$  и выполняются условия определения 4, где  $\mathbb{U}_r(0) \equiv \{v \in \mathbb{R}^1 : \|v\| < r\}$ ,  $r > 0$ . Обозначим это, как и ранее,  $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ .

**Определение 6.** В условиях определения 5 верхней производной Ляпунова [7] назовем соотношение

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{0 < t \leq \Delta} \frac{1}{t} [\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, u(s), y), \xi(s))\} - \mathbb{V}(s, v(s), y)] \equiv (\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y), \quad (24)$$

если для всех достаточно малых  $\Delta > 0$  в каждой окрестности  $U_r(0) \times Y$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta} |\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + \Delta, v(s + \Delta), \xi(\Delta))\} - \mathbb{V}(s, v, y)| < g_r(s, v, y), \tag{25}$$

где  $g_r(s, v, y)$  является непрерывной функцией своих аргументов и ограничена по второму аргументу  $v$  в каждой окрестности  $U_r(0)$ .

Отметим, что при наложенных ограничениях на функцию Ляпунова  $\mathbb{V}$  выполняется неравенство Дынкина [15].

**Лемма 2** ([15]). *Если непрерывная по всем аргументам функция Ляпунова  $\mathbb{V}(s, v, y)$  удовлетворяет условиям (20), (21), то выполняется неравенство Дынкина*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + \tau_r(t), v(s + \tau_r(t), v(s, u(s), \xi(\tau_r(t))))), \xi(\tau_r(t)))\} \leq \\ & \leq \mathbb{V}(s, v, y) + \mathbb{E}\left\{ \int_0^{\tau_r(t)} (\mathcal{L}\mathbb{V})(s + z, v(s + z, u(s), y), \xi(z)) dz \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Доказательство можно найти в [16] (с.550–551).

Исходя из вышеупомянутых жестких условий на функцию Ляпунова  $\mathbb{V}$ , можно установить [16] следующие вспомогательные неравенства для решения  $v(t, \sigma, \omega)$  задачи Коши для СДУ (10), (11), а значит и для решения  $u(t, x, \omega)$  задачи Коши (1), (2) для ЛСДУВЧП (1), (2) согласно лемме 1. Следует воспользоваться этими условиями и неравенством Гроцуолла.

**Лемма 3** ([16]). *Пусть выполняются локальные условия Липшица для коэффициентов искомого решения  $u(t, x, \omega)$  уравнения (1), (2), а значит и для коэффициентов искомого решения  $v(t, \sigma, \omega)$  уравнения (10), (11). Тогда решение задачи (10), (11) ((1), (2)) допускает оценку  $\forall T \geq 0, s \geq 0, y \in Y$  и  $v_0 \in \mathbb{R}^1$  ( $u_0 \in \mathbb{R}^1$ )*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |v(t + s, s, v_0, y)| = (\|v_0\| + \alpha KT)e^{KT}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1, t_2 \in [s, s+T]} |v(t_2, s, v_0, y) - v(t_1, s, v_0, y)| \leq \\ & \leq K[(\|v_0\| + \alpha KT)e^{KT} + \alpha]|t_2 - t_1|, \end{aligned} \tag{28}$$

где в леммах 2, 3  $v(t, s, v_0, y)$  обозначено решение задачи (10), (11) в момент времени  $t \in [0, T]$ , считая начальным момент  $s$  и в этот момент значение решения  $v_0$  и значение марковского процесса  $y \in Y$ .

Исходя из связи  $u$  задачи (1), (2) и  $v$  задачи (10), (11), для решения  $u$  задачи (1), (2) будут выполняться неравенства типа (27), (28).

**Теорема 2.** *Пусть:*

- 1) *выполняются локальные условия Липшица для коэффициентов уравнения (10), (11);*
- 2) *выполняется условие ограниченности для коэффициентов т.н. "подлинного" роста;*

3) существует функция Ляпунова  $\mathbb{V}(s, v, y)$  с оценкой снизу и сверху

$$c_1|v|^{l_1} \leq \mathbb{V}(s, v, y) \leq c_2|v|^{l_2} \quad (29)$$

для всех  $c_1, c_2 > 0$ ,  $l_2 \geq l_1 > 0$ , всех  $s \in \mathbb{R}_+$ ,  $y \in \mathbb{V}$ ,  $v \in \mathbb{R}^1$ ;

4) для функции Ляпунова  $\mathbb{V}(s, v, y)$  в силу СДУ (10), (11) выполняется неравенство

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) \leq -c_3|v|^l \quad (30)$$

для всех  $s \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $v \in \mathbb{R}^1$ .

Тогда тривиальное решение задачи Коши для СДУ (10), (11) асимптотически  $l$ -устойчиво ( $l > 1$ ), а тривиальное решение задачи (1), (2) для ЛСДУвЧП асимптотически устойчиво в *l.i.m.*

**Доказательство.** Заметим, что в силу линейности СДУ (10) выполняется условие тождественного равенства нулю коэффициентов этого уравнения при  $v \equiv 0$ . Поэтому в теореме 2 и в ниже приведенных утверждениях исследоваться на устойчивость будет тривиальное решение  $v \equiv 0$ .

Поскольку  $\mathbb{P}\{\omega : \lim_{r \rightarrow 0} \tau_r(t) = t\} = 1$  для всех  $t > 0$ , в (26) вместо  $\tau_r(t)$  можно использовать  $t$ .

Значит, вместе с неравенством Дынкина (26) и неравенством (27) для  $t \geq \tau$  можно записать неравенство

$$\begin{aligned} c_1 \mathbb{E}\{|v(t+s, s, v_0, y)|^{l_1}\} &\leq \mathbb{E}\{|\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(s))|\} \leq \\ &\leq c_2 \mathbb{E}\{|v(s+\tau, v_0, y)|^{l_2}\} - c_3 \int_{\tau}^t \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^l\} dz \leq \\ &\leq c_2 |v_0|^{l_2} \exp\{l_2 KT\} - c_3 \int_{\tau}^t \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^l\} dz. \end{aligned}$$

Отсюда, согласно определения 3, следует  $l$ -устойчивость тривиального решения  $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$  задачи (10), (11) для  $l \leq l_1$  и сходимости интеграла

$$\int_{\tau}^{\infty} \mathbb{E}\{|v(s+z, s, v_0, y)|^l\} dz < \infty. \quad (31)$$

Таким образом, из сходимости интеграла (31) следует асимптотическая  $l$ -сходимость тривиального решения задачи (10), (11) ( $l > 1$ ).

Далее, согласно лемме 1, существует связь (9) между  $v(t, \sigma)$  и  $u(t, x, \omega)$ , а значит, согласно теореме Планшереля [18], [20] при  $l = 2$  асимптотическая 2-устойчивость тривиального решения задачи Коши (1), (2)  $\forall t_0, y \in \mathbb{Y}$  и  $v \in \mathbb{U}_{\delta}(0)$ . ■

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 с  $l_2 = l_1 = l > 0$ . Тогда тривиальное решение  $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$  задачи (10), (11), а также тривиальное решение  $u(t, x, \omega) \equiv 0$  задачи Коши (1), (2) глобально экспоненциально устойчиво.



**Доказательство.** На решениях СДУ (10), (11) и с переходной вероятностью  $p(t, y, dz)$  марковского процесса  $\xi(t) \in \mathbb{R}^1$  определим при условии непрерывности по всем переменным  $\mathbb{V}$  линейный оператор [15]

$$(T(t)\mathbb{V})(s, v, y) \equiv \int_{\mathbb{Y}} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), z)\} \mathbb{P}(t, y, dz) \quad (32)$$

со свойствами [15], [16]:

I) Результат действия оператора  $T(t)$  на  $\mathbb{V}(t, v, \xi)$  является непрерывной функцией по аргументам, т.е.  $C(\tilde{\mathbb{Y}}) \rightarrow C(\tilde{\mathbb{Y}})$ , где  $\tilde{\mathbb{Y}} \equiv [0, \infty) \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$ .

II) Оператор  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , образует полугруппу

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0.$$

III) Семья линейных операторов на фазовом пространстве  $\tilde{\mathbb{Y}}$  определяет стохастически непрерывный марковский процесс  $C$  непрерывными справа реализациями.

Обозначив  $z(t) \equiv (C(t)\mathbb{V}(s, v, y))$ , перепишем неравенство Дынкина (26) в виде

$$z(t_2) \leq z(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}\{(\mathcal{L}\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(t)))\} dt. \quad (33)$$

Если  $\mathbb{V}$  удовлетворяет условиям теоремы 2, то из неравенства (33) и очевидных соотношений

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) \leq -c_3|v(0)|^l \leq -\frac{c_3}{c_1}\mathbb{V}(s, v, y)$$

получим неравенство

$$z(t_2) - z(t_1) \leq -\frac{c_3}{c_1} \int_{t_1}^{t_2} z(t) dt.$$

Таким образом, учитывая доказанное выше неравенство, получим цепочку тривиальных неравенств

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|v(s+t, s, v_0, y)|^l\} &\leq \frac{1}{c_1} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, v_0, y), \xi(t))\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau, v(s+\tau, v_0, y), \xi(t))\} \exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\} \leq \\ &\leq \frac{c_2}{c_1} \exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\} \exp\{p_2Kh|v_0|^l\} \end{aligned} \quad (34)$$

для всех  $v_0 \in \mathbb{R}^1$ ,  $s \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{Y}$  и  $t \geq \tau$ .

Очевидно, что согласно лемме 1, имеем при  $l = 2$  экспоненциальную устойчивость в l.i.m. тривиального решения задачи Коши СДУвЧП (1), (2). ■

**Теорема 4.** Пусть:

1) выполнены локальные условия Липшица для коэффициентов ЛСДУвЧП (1);

2) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 3), 4) теоремы 2.

Тогда:

а) нулевое решение  $v(t, \cdot, \omega) \equiv 0$  задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2) асимптотически стохастически устойчиво.

**Доказательство.** а) Пусть  $\tau_r$  — момент первого выхода решения  $v(t, x, \omega)$  ЛСДУ (10) из сферы  $\mathbb{U}_r(0)$ . Тогда для  $\forall t \geq 0$  и  $\forall r > 0$  по формуле Дынкина [15] и определению функции Ляпунова, очевидно, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} c_1 \mathbb{E}\{|v(s + \tau_r(t), s, v_0, y)|^l\} &\leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + \tau_r(t), v(s + \tau_r(t), s, v_0), \xi(\tau_r(t)))\} \leq \\ &\leq \mathbb{V}(s, v_0, y) \leq c_1 |v_0|^l. \end{aligned} \quad (35)$$

Поскольку  $\lim_{t \rightarrow 0} \tau_r(t) = t$ , то существует

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, \xi(t)))\} < \infty$$

для всех  $t \geq 0$ ,  $v_0 \in \mathbb{R}^1$ ,  $s \geq 0$  и  $y \in \mathbb{Y}$ .

Пусть  $\mathcal{F}_t$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, относительно которой измеримы все  $\xi(s)$  для  $s \in [0, t]$ .

Тогда  $\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, y), \xi(t))$  тоже  $\mathcal{F}_t$ -измеримо, а марковское свойство для произвольного  $z \in [0, t]$  обеспечивает выполнение основного равенства в определении марковского процесса

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, y), \xi(t)) | \mathcal{F}_z\} &= \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s_1 + (t - z), v(s_1 + (t - z), s, v_1, h), \xi(t - z))\}, \end{aligned}$$

где правая часть должна быть вычислена при  $s_1 = s + z$ ,  $h = \xi(z)$ ,  $v_1 = v(s + z, s, v_0, y)$ .

Далее, из неравенства (30) можно получить неравенство

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, y), \xi(t)) | \mathcal{F}_z\} \leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + z, v(s + z, s, v_0, y), \xi(t))\}.$$

А это по определению супермартингала [16] означает, что  $\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, \xi(t)))$  является неотрицательным супермартингалом для  $t \geq 0$ . Значит, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, y), \xi(t)) = \eta(\omega) \geq 0$$

с вероятностью единица.

Далее, из неравенств (29), (30) теоремы 2 можно получить неравенства

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + t, v(s + t, s, v_0, y), \xi(t))\} &\leq \\ &\leq c_2 |v_0|^l - c_3 \int_0^t \mathbb{E}\{|v(s + s_1, s, v_0, y)|^l\} ds_1 \leq \\ &\leq c_2 |v_0|^l - \frac{c_3}{c_1} \int_0^t \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s + s_1, v(s + s_1, s, v_0, y), \xi(s_1))\} ds_1. \end{aligned}$$

А это обозначает, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\eta(\omega)\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t))\} \leq \\ &\leq c_2|v_0|^l \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0. \end{aligned}$$

Откуда сразу следует  $\mathbb{P}\{\omega : \eta\omega = 0\} = 1$ .

Для завершения доказательства следует учесть основное неравенство для супермартингалов [16], [20], на основании которого при  $\forall \varepsilon > 0$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega : \sup_{t \geq T} |v(s+t, s, v_0, y)| \geq \varepsilon\} &\leq \\ &\leq \mathbb{P}\{\omega : \sup_{t \geq T} \frac{1}{T} \mathbb{V}(s+t, v(s+t, s, v_0, y), \xi(t)) \geq \varepsilon^l\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1 \varepsilon^l} \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+T, v(s+T, s, v_0, y), \xi(T))\} \leq \frac{c_2|\varphi|^l}{c_1 \varepsilon^l} \exp\{-\frac{c_3}{c_1}T\} \end{aligned}$$

для всех  $T > 0, \varepsilon > 0, v_0 \in \mathbb{R}^1, s > 0, y \in \mathbb{Y}$ .

Осталось рассмотреть предел при  $T \rightarrow \infty$  и пункт а) теоремы 4 доказан.

Для доказательства пункта б) следует учесть лемму 1. ■

**4. Устойчивость ЛСДУВЧП с дискретными марковскими параметрами.** Дискретный марковский параметр в ЛСДУВЧП (1), (2) может выступать в следующих структурных характеристиках.

**4.1.** Рассмотрим скалярный процесс  $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ , который является однородной цепью Маркова с конечным числом состояний  $\mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ , причем известны параметры  $q_{ij}$  с условиями

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \tag{36}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t + \Delta t) = y_i | \xi(t) = y_i\} = q_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \tag{37}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) = y_i, t \leq \tau \leq t + \Delta t | \xi(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{38}$$

Пусть эта цепь Маркова  $\xi(t) \in \mathbb{Y}$  является параметром задачи Коши для ЛСДУВЧП (1), (2).

Допустим, что в момент  $\tau > 0$  скачкообразной смены структуры фазовый вектор  $u(\tau) \in \mathbb{R}^1$  однозначно определяется состоянием, в котором находилась динамическая система непосредственно перед сменой структуры, вызываемой переходом из состояния  $\xi(\tau - 0) = y_i$  в состояние  $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$ . Это означает выполнение равенства

$$u(\tau) = \varphi_{ij}(u(\tau - 0)), \quad i \neq j, \tag{39}$$

где  $\varphi_{ij}(u) \in \mathbb{R}^1$ , причем  $\varphi_{ij}(0) = 0$ .

С учетом формулы (23) в случае цепи Маркова слабый инфинитезимальный оператор на решениях ЛСДУВЧП (10), (11) имеет вид [15], [18]

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) = \frac{\partial \mathbb{V}(s, v, y)}{\partial s} + (\nabla \mathbb{V})(s, v, y)Q(B(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(\nabla^2 \mathbb{V})(s, v, y)Q^2(C(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma) + \\
& + \sum_{j \neq i}^k [\mathbb{V}(s, \varphi_{ij}(v), y_j) - \mathbb{V}(s, v, y_j)]q_{ij}.
\end{aligned} \tag{40}$$

В этом случае верны теоремы 2, 3 и 4 об устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ (10), (11), а, значит, в силу леммы 1 и устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУВЧП (1), (2).

**4.2.** Пусть  $\xi(t) \in \mathbb{Y}$  — чисто разрывный скалярный марковский процесс  $\forall t \in [t_1, t_2]$  такой, что допускает разложение

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t + \Delta t) \in (\beta, \beta + \Delta\beta) | \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t), \tag{41}$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) \equiv \alpha, \tau \in (t, t + \Delta) | \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t). \tag{42}$$

Тогда слабый инфинитезимальный оператор примет вид [15], [18] на решениях ЛСДУВЧП (10), (11)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, \xi(s)) & = \frac{\partial \mathbb{V}(s, v, \xi(s))}{\partial s} + (\nabla \mathbb{V}(s, v, \xi(s)))Q(B(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma) + \\
& + \frac{1}{2}(\nabla^2 \mathbb{V})(s, v, y)Q^2(C(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma) + \\
& + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\mathbb{V}(s, v, \beta) - \mathbb{V}(s, v, \alpha)]p(t, \alpha, \beta)d\beta.
\end{aligned} \tag{43}$$

Заметим, что и в этом случае теоремы 2, 3, 4 об устойчивости тривиального решения  $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$  ЛСДУ (10), (11) имеют место, а, следовательно, в силу леммы 1 имеют место те же утверждения и для тривиального решения  $u(t, x, \omega) \equiv 0$  ЛСДУВЧП (1), (2).

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1997. — 495 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 521 с.
3. Эйдельман С.Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 445 с.
4. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 333 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — К.: Наук. думка, 1977. — 251 с.
6. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложение. — К.: Наук. думка, 1982. — 612 с.
7. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
8. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 301 с.
10. Гихман И.И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. — 1980. — 32, № 3. — С.367–377.
11. Гихман И.И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. — 1979. — 31, № 5. — С.31–38.
12. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С.25–59.

13. *Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г.* Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, №1. – С.13–20.
14. *Перун Г.М., Ясинский В.К.* Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, №9. – С.1773–1781.
15. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз., 1969. – 859 с.
16. *Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. – 798 с.
17. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
18. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 541 с.
19. *Булдинский А.В., Ширяев А.Н.* Теория случайных процессов. – М.: Физматлит, 2005. – 408 с.
20. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
21. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Иностранная литература, 1962. – 463 с.
22. *Царков Е.Ф.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применение. – 1976. – Вып.4. – С.871–875.
23. *Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения // Укр. мат. журн. – 1980. – 32, №1. – С.78–98.

Получено 14.04.2014