УДК 512.542.62

П. М. Гудивок, И. В. Шапочка (Ужгородский гос. ун-т)

О ДИКОСТИ ЗАДАЧИ ОПИСАНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГРУПП

Let $G_{m,s,n}$ be an extension of the abelian group $M_{m,s}$ of type $(p^s,\dots,p^s)$ (m is the minimal number of generators of the group $M_{m,s}$) by the cyclic group H_n of order p^n. It's have been settled in the paper, that problem of the description up to isomorphism of all extensions $G_{m,s,n}$ ($s>1$, $n>1$, m is an arbitrary natural) is wild. Also it's have been shown, that problem of the description up to conjugation of finite p-subgroups of the group $GL(n,K)$ for some n is wild, where K is the ring of integers or the ring of p-adic integers.

Нехай $G_{m,s,n}$ — скінченна p-група, яка є розширенням абелевої групи $M_{m,s}$ типу $(p^s,\dots,p^s)$ (m — мінімальне число твірних групи $M_{m,s}$) за допомогою циклічної групи H_n порядку p^n. В роботі встановлюєтся, що задача описання з точністю до ізоморфізму всіх розширень виду $G_{m,s,n}$ ($s>1$, $n>1$, m — довільне натуральне число) є дикою. Показується також, що дикою є задача описання з точністю до спряженості скінченних p-підгруп групи $GL(n,K)$ при деяких n, де K — кільце цілих чисел або кільце цілих p-адичних чисел.

Конечные p-группы с абелевой подгруппой индекса p описаны в работах Секереша [1], В. С. Дроботенко [2], Л. А. Назаровой и А. В. Ройтера [3], Л. А. Назаровой, А. В. Ройтера, В. В. Сергейчука и В. М. Бондаренко [4], В. В. Сергейчука [5]. Естественно поставить вопрос: нельзя ли получить полную систему инвариантов для более широких классов групп, например для групп являющихся расширениями абелевой группы типа $(p^s,\dots,p^s)$ с помощью циклической p-группы.

Пусть p — произвольное простое число, M_m — внешнее прямое произведение циклических p-групп $A_i=\langle a_i\rangle$ порядка p^s ($i=1,\dots,m$; $m,s\in\mathbb{N}$), $H=\langle g\rangle$ — циклическая p-группа порядка p^n ($n\in\mathbb{N}$). Элементы группы M_m вида $(e_1,\dots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\dots,e_m)$ в дальнейшем будем отождествлять с элементами a_i ($i=1,\dots,m$) (e_i — единичный элемент группы A_i; $i=1,\dots,m$). Известно [6], что группа $\mathrm{Aut}(M_m)$ автоморфизмов группы M_m изоморфна полной линейной группе $GL(m,\mathbb{Z}_{p^s})$, где $\mathbb{Z}_{p^s}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^s. Если

$$C=\|\gamma_{ij}\|\in GL(m,\mathbb{Z}_{p^s})\quad(\gamma_{ij}\in\mathbb{Z}_{p^s};\ i,j=1,\dots,m),$$
$$a=a_1^{i_1}\cdots a_m^{i_m}\in M_m\quad(0\le i_r<p^s;\ r=1,\dots,m),$$

то

$$C[a]=a_1^{\sum_{k=1}^m\gamma_{1k}i_k}\cdots a_m^{\sum_{k=1}^m\gamma_{mk}i_k}.$$

Из теории расширений групп [6] вытекает, что всякое расширение G группы M_m с помощью циклической группы H определяется некоторым матричным представлением $\Gamma: g\to\Gamma(g)$ степени m группы H над кольцом $\mathbb{Z}_{p^s}$ и некоторым элементом a_0 группы M_m таким, что $\Gamma(g)[a_0]=a_0$. Обозначим через $\bar g$ представитель смежного класса группы G по подгруппе M_m, который соответствует элементу g группы H. Тогда элементы группы G имеют вид $\bar g^i a$ ($0\le i<p^n$, $a\in M_m$), причем

$$\bar g^i a\cdot\bar g^j a'=\bar g^k a_0^{\mu(i+j)}(\Gamma(g^j)[a])a'\qquad(0\le i,j<p^n;\ a,a'\in M_m),$$

где

$$k\equiv(i+j)\,(\mathrm{mod}\ p^n),\quad 0\le k<p^n,\quad \mu(i+j)=\begin{cases}0, & \text{если } i+j<p^n;\\ 1, & \text{если } i+j\ge p^n.\end{cases}$$

Лемма 1 ([2]). *Пусть G и G_1 — расщепляемые расширения p-группы M_m с помощью циклической p-группы H. Если M_m — единственная нормальная подгруппа группы G, изоморфная M_m, то расширения G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им представления $\Gamma : g \to \Gamma(g)$ и $\Gamma_1 : g \to \Gamma_1(g)$ циклической p-группы H обобщенно эквивалентны, т. е. существует такие матрица $C \in GL(m, \mathbb{Z}_{p^s})$ и натуральное число r, не делящееся на p, что $C^{-1}\Gamma(g)C = \Gamma_1(g)^r$.*

Отсюда вытекает, что задача описания всех неизоморфных расщепляемых циклических расширений G группы M_m с помощью группы H таких, что M_m — единственная нормальная подгруппа группы G, изоморфная M_m, эквивалентна задаче описания с точностью до обобщенной эквивалентности $\mathbb{Z}_{p^s}$-представлений степени m группы H, которые определяют такие расширения.

В случае, когда M_m — прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p и H — циклическая группа порядка p^n ($n \in \mathbb{N}$) В. В. Сергейчук в [5] описал все неизоморфные расширения группы M_m с помощью группы H для произвольных натуральных m.

Определение 1. Пусть M_m — прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p^s, H — произвольная циклическая p-группа. Задача описания всех неизоморфных расширений группы M_m (m — произвольное натуральное число) с помощью группы H называется дикой, если она включает задачу о подобии пар $m \times m$-матриц над некоторым полем.

Из [7–9] вытекают следующие результаты:

1) *если M_m — прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p^s, H — циклическая группа порядка p^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) и $s \geq 2n$, то задача описания неизоморфных расширений группы M_m (m — произвольное натуральное число) с помощью группы H является дикой*;

2) *если M_m — прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p^2 и H — абелева p-группа типа (p, p), то задача описания неизоморфных расширений группы M_m (m — произвольное натуральное число) с помощью группы H является дикой.*

3) *задача классификации неизоморфных конечных p-групп экспоненты p, обладающих абелевой нормальной подгруппой индекса p^2 ($p > 3$) является дикой.*

Цель данной работы показать, что в случае, когда M_m — прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p^s, H — циклическая группа порядка p^n, s и n — произвольные натуральные числа, отличные от единицы, задача описания неизоморфных расширений группы M_m (m — произвольное натуральное число) с помощью группы H является дикой.

В дальнейшем, если не будет оговорено противное, p — произвольное простое число, m — произвольное натуральное число, s и n — произвольные натуральные числа, отличные от единицы.

Пусть M_m — прямое произведение циклических p-групп $\langle a_i \rangle$ порядка p^s ($i = 1, \ldots, m$), $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка p^n, $\Gamma : g \to \Gamma(g)$ — матричное $\mathbb{Z}_{p^s}$-представление степени m группы H. Для произвольной матрицы A над кольцом $\mathbb{Z}_{p^s}$ обозначим через $\operatorname{rank}(A(\operatorname{mod} p))$ ранг матрицы, полученной из A приведением ее по модулю максимального идеала кольца $\mathbb{Z}_{p^s}$.

Лемма 2. *Пусть G — расщепляемое расширение группы M_m с помощью группы H, заданное представлением $\Gamma : g \to \Gamma(g)$, и $\Gamma(g^{p^{n-1}}) = E + p^{s-1}D$, где E — единичная матрица порядка m, D — некоторая $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрица того же порядка. Если $\operatorname{rank}(D(\operatorname{mod} p)) > n$, то M_m — единственная абелева подгруппа группы G индекса p^n.*

Доказательство. Предположим, что $M^{(0)}$ — отличная от M_m абелева подгруппа группы G индекса p^n. Тогда $M^{(0)}$ содержит элемент группы G вида $\bar{g}^{p^{n-1}}a$ для некоторого элемента $a \in M_m$. Поскольку $M^{(0)}$ — абелева группа, то $M^{(0)}$ — подгруппа централизатора $C_G(\bar{g}^{p^{n-1}}a)$ элемента $\bar{g}^{p^{n-1}}a$ в группе G. Следовательно,

$$|G : C_G(\bar{g}^{p^{n-1}}a)| \leq p^n \tag{1}$$

($|G : C_G(\bar{g}^{p^{n-1}}a)|$ — индекс подгруппы $C_G(\bar{g}^{p^{n-1}}a)$ в группе G).

Пусть $D = \|d_{ij}\|$ и $\operatorname{rank}(D(\operatorname{mod} p)) > n$. Тогда существуют $i_1, \ldots, i_{n+1}$ ($1 \leq i_r \leq m$, $r = 1, \ldots, n+1$) такие, что векторы $(d_{1i_1}, \ldots, d_{mi_1})(\operatorname{mod} p), \ldots, (d_{1i_{n+1}}, \ldots, d_{mi_{n+1}})(\operatorname{mod} p)$ являются линейно независимыми над полем из p элементов. Это в свою очередь означает, что для произвольных значений $j_1, \ldots, j_{n+1}$ ($0 \leq j_r \leq p-1$, $r = 1, \ldots, n+1$), одновременно не равных нулю,

$$a_{i_1}^{j_1} \cdots a_{i_{n+1}}^{j_{n+1}} \notin C_G(g^{p^{n-1}}a).$$

Отсюда $|G : C_G(g^{p^{n-1}}a)| \geq p^{n+1}$, что противоречит неравенству (1). Следовательно, M_m — единственная абелева подгруппа группы G индекса p^n.

Лемма 3. *Пусть M_{4m} — прямое произведение циклических p-групп $\langle a_i \rangle$ порядка p^s ($i = 1, \ldots, 4m$), где $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $m \in \mathbb{N}$, p — произвольное простое число; $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка p^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $s > n$; $\Gamma_m(A, B) : g \to \Gamma_m(A, B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{p^s}$-представление группы H вида*

$$\Gamma_m(A, B) : g \to \begin{pmatrix} E & p^{s-n}E & 0 & 0 \\ 0 & E & p^{s-n}E & 0 \\ 0 & p^{s-1}B & E & p^{s-1}E \\ p^{s-1}A & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где E — единичная матрица порядка m, A, B — произвольные $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрицы порядка m. Для произвольного натурального m большего n в расширении G группы M_{4m} с помощью группы H, заданном представлением $\Gamma_m(A, B)$, M_{4m} — единственная нормальная подгруппа, изоморфная M_{4m}.

Доказательство. Положим

$$Q(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & p^{n-1}B & 0 & p^{n-1}E \\ p^{n-1}A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда (2) можно переписать в виде $\Gamma_m(A, B) : g \to E' + p^{s-n}Q(A, B)$, где E' — единичная матрица порядка $4m$. Легко видеть, что для произвольного натурального r

$$\Gamma_m(A, B)(g^r) = E' + C_r^1 p^{s-n} Q(A, B) + C_r^2 p^{2(s-n)} Q_0,$$

где C_i^j — количество комбинаций из i по j. Отсюда получаем

$$\Gamma_m(A,B)(g^{p^{n-1}}) = E' + p^{s-1}(Q(A,B) + p^{s-n-\delta_{2,p}}Q_0)$$

($\delta_{2,p}$ — символ Кронеккера). Так как при $m > n$ имеет место неравенство

$$\operatorname{rank}((Q(A,B) + p^{s-n-\delta_{2,p}}Q_0)(\operatorname{mod} p)) > n,$$

то из леммы 2 вытекает, что для произвольного натурального m большего n M_{4m} — единственная абелева подгруппа группы G индекса p^n. Следовательно, M_{4m} — единственная нормальная подгруппа группы G, изоморфная M_{4m}.

Лемма 4. *Пусть $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, n, $m \in \mathbb{N}$, $n > s$, p — произвольное простое число, $m_1 = (p^{n-s}+2)(n+1)m$; $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка p^n; $\Delta_m(A,B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрица порядка m_1 вида*

$$\Delta_m(A,B)(g) = \begin{pmatrix} E & E & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & E & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E & E & 0 \\ 0 & p^{s-1}R_0 & 0 & \dots & 0 & E & p^{s-1}E \\ p^{s-1}R(A,B) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица порядка $(n+1)m$; R_0, $R(A,B)$ — $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрицы порядка $(n+1)m$ вида

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & 0 & \dots & 0 \\ A & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где E_1 — единичная матрица порядка m; A, B — произвольные $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрицы порядка m. Для произвольного натурального m отображение

$$\Delta_m(A,B) : H \to GL(m_1, \mathbb{Z}_{p^s}), \tag{3}$$

определенное по правилу $\Delta_m(A,B)(g^i) = (\Delta_m(A,B)(g))^i$ $(i = 0,\dots,p^n-1)$, является $\mathbb{Z}_{p^s}$-представлением группы H.

Доказательство. Очевидно, чтобы доказать лемму, достаточно показать, что $(\Delta_m(A,B)(g))^{p^n} = E'$, где E' — единичная матрица порядка m_1. Нетрудно методом математической индукции доказать справедливость следующего равенства для прозвольных натуральных r

$$(\Delta_m(A,B)(g))^r = L_r + p^{s-1}K_r,$$

где L_r и K_r матрицы вида

$$L_r = \begin{pmatrix} C_r^0E & C_r^1E & C_r^2E & \dots & C_r^{p^{n-s}-1}E & C_r^{p^{n-s}}E & 0 \\ 0 & C_r^0E & C_r^1E & \dots & C_r^{p^{n-s}-2}E & C_r^{p^{n-s}-1}E & 0 \\ 0 & 0 & C_r^0E & \dots & C_r^{p^{n-s}-3}E & C_r^{p^{n-s}-2}E & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_r^0E & C_r^1E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_r^0E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_r^0E \end{pmatrix},$$

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & C_r^{p^{n-s}+1}R_0 & C_r^{p^{n-s}+2}R_0 & \dots & C_r^{2p^{n-s}}R_0 & C_r^{p^{n-s}+1}E \\ 0 & C_r^{p^{n-s}}R_0 & C_r^{p^{n-s}+1}R_0 & \dots & C_r^{2p^{n-s}-1}R_0 & C_r^{p^{n-s}}E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & C_r^1 R_0 & C_r^2 R_0 & \dots & C_r^{p^{n-s}}R_0 & C_r^1 E \\ C_r^1 R(A,B) & C_r^2 R(A,B) & C_r^3 R(A,B) & \dots & C_r^{p^{n-s}+1}R_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из того, что $C_{p^j}^i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p^{j-i'})$, где $(i, p^j) = p^{i'}$, получаем

$$(\Delta_m(A,B)(g))^{p^{n-1}} = E' + p^{s-1}K',$$

где $\mathrm{rank}(K'(\mathrm{mod}\, p)) \geq (n+1)m > n$. В частности, $(\Delta_m(A,B)(g))^{p^n} = E'$.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия леммы 4; M_{m_1} — прямое произведение циклических p-групп $\langle a_i \rangle$ порядка p^s $(i = 1, \dots, m_1)$; $\Delta_m(A,B) : g \to \Delta_m(A,B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{p^s}$-представление группы H. Для произвольного натурального m в расширении G группы M_{m_1} с помощью группы H, заданном представлением $\Delta_m(A,B)$, M_{m_1} — единственная нормальная подгруппа, изоморфная M_{m_1}.*

Доказательство леммы вытекает из леммы 2 и доказательства предыдущей леммы.

Лемма 6. *Пусть M_{4m} — прямое произведение циклических p-групп $\langle a_i \rangle$ порядка p^s $(i = 1, \dots, 4m)$, $m \in \mathbb{N}$, p — произвольное нечетное простое число, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка p^s; $\Theta_m(A,B) : g \to \Theta_m(A,B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{p^s}$-представление группы H вида*

$$\Theta_m(A,B) : g \to \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & p^{s-1}B & E & p^{s-1}E \\ p^{s-1}A & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где E — единичная матрица порядка m; A, B — произвольные матрицы порядка m. Для произвольного натурального m большего s в расширении G группы M_{4m} с помощью группы H, заданном представлением $\Theta_m(A,B)$, M_{4m} — единственная нормальная подгруппа, изоморфная M_{4m}.

Доказательство. Нетрудно показать, что для произвольного натурального r

$$\Theta_m(A,B)(g^r) = \begin{pmatrix} E & C_r^1 E & C_r^2 E & 0 \\ 0 & E & C_r^1 E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} + p^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & C_r^3 B & C_r^4 B & C_r^3 E \\ 0 & C_r^2 B & C_r^3 B & C_r^2 B \\ 0 & C_r^1 B & C_r^2 B & C_r^1 E \\ C_r^1 A & C_r^2 A & C_r^3 A & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\Theta_m(A,B)(g^{p^{s-1}}) = E' + p^{s-1}K$, где E' — единичная матрица порядка $4m$, K — матрица, удовлетворяющая условию $\mathrm{rank}(K(\mathrm{mod}\, p)) > s$ для произвольного натурального m большего s. Следовательно, из леммы 2 вытекает, что для произвольного натурального m большего s M_{4m} — единственная нормальная подгруппа группы G, изоморфная M_{4m}.

Лемма 7. *Пусть $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка 2^s, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $\Lambda_m(A,B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{2^s}$-матрица порядка $8m$ вида*

$$\Lambda_m(A,B)(g) = \begin{pmatrix} E' & E' \\ 0 & E' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ U & V(A,B) \end{pmatrix},$$

где E' — единичная матрица порядка $4m$; U, $V(A,B)$ — $\mathbb{Z}_{2^s}$-матрицы порядка $4m$ вида

$$U = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & E \\ A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица порядка m; A, B — произвольные $\mathbb{Z}_{2^s}$-матрицы порядка $m \in \mathbb{N}$. Для произвольного натурального m отображение

$$\Lambda_m(A,B) : H \to GL(8m, \mathbb{Z}_{2^s}), \tag{5}$$

определенное по правилу $\Lambda_m(A,B)(g^i) = (\Lambda_m(A,B)(g))^i$ $(i = 0, \ldots, 2^s - 1)$, является $\mathbb{Z}_{2^s}$-представлением группы H.

Доказательство. Поскольку $C^i_{2^k} \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^{k-i'})$, где $(i, 2^k) = 2^{i'}$ и

$$\Lambda_m(A,B)(g^2) = \begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} U & E' + V(A,B) \\ 2(E' + V(A,B))U & U + 2(V(A,B) + V(A,B)^2) \end{pmatrix},$$

то

$$\Lambda_m(A,B)(g^{2^{s-1}}) = \begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix} + 2^{s-1} \begin{pmatrix} U + (1 - \delta_{2,s})U^2 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\Lambda_m(A,B)(g^{2^s}) = \begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & E' \end{pmatrix},$$

что является достаточным условием для доказательства леммы.

Лемма 8. *Пусть выполняются условия леммы 7; M_{8m} — прямое произведение циклических 2-групп $\langle a_i \rangle$ порядка 2^s $(i = 1, \ldots, 8m)$; $\Lambda_m(A,B) : g \to \Lambda_m(A,B)(g)$ — $\mathbb{Z}_{2^s}$-представление группы H. Для произвольного натурального m большего s в расширении G группы M_{8m} с помощью группы H, заданном представлением $\Lambda_m(A,B)$, группа M_{8m} — единственная нормальная подгруппа, изоморфная M_{8m}.*

Доказательство. Поскольку для произвольного натурального m большего s $\mathrm{rank}((U + (1 - \delta_{2,s})U^2)(\mathrm{mod}\, 2)) > s$, то из леммы 2 и доказательства предыдущей леммы вытекает доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть M_m — внешнее прямое произведение m экземпляров циклической группы порядка p^s, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, p — произвольное простое число, $H = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка p^n, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Задача описания всех неизоморфных расширений группы M_m (m — произвольное натуральное число) с помощью группы H является дикой.*

Доказательство. Пусть M_m и H — группы, удовлетворяющие условию теоремы. Очевидно, задача описания всех неизоморфных расширений группы M_m с помощью группы H включает задачу описания неизоморфных расщепляемых расширений G группы M_m с помощью группы H. В силу леммы 1 последняя задача при условии, что M_m — единственная нормальная подгруппа группы G, изоморфная M_m, эквивалентна задаче описания с точностью до обобщенной эквивалентности $\mathbb{Z}_{p^s}$-представлений степени m группы H, которые определяют такие расширения. Покажем, что это дикая задача. Для этого ввиду лемм 3–8 достаточно показать, что описание $\mathbb{Z}_{p^s}$-представлений вида (2–5) с точностью до обобщенной эквивалентности является дикой задачей. Приведем подробное доказательство данного утверждения только для представлений вида (2). В остальных случаях даказательства аналогичные.

Пусть s, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $n < s$; p — произвольное простое число; $m = 4m_0$; $m_0 \in \mathbb{N}$; $m_0 > n$; A, A_1, B, B_1 — произвольные $\mathbb{Z}_{p^s}$-матрицы порядка m_0. Предположим, что $\mathbb{Z}_{p^s}$-представления $\Gamma_{m_0}(A,B)$ и $\Gamma_{m_0}(A_1,B_1)$ (см. обозначение (2)) группы H — обобщенно эквивалентны, т. е. существуют натуральное число r, не делящееся на p, и матрица $S \in GL(m, \mathbb{Z}_{p^s})$, для которых имеет место равенство

$$\Gamma_{m_0}(A,B)(g)S = S[\Gamma_{m_0}(A_1,B_1)(g)]^r. \tag{6}$$

Представим матрицу S в блочном виде, т. е. пусть $S = \|S_{ij}\|$, где S_{ij} — матрицы порядка m_0 $(i,j = 1,2,3,4)$. Из (6) и доказательства леммы 3 вытекает, что

$$p^{s-n}S_{21} = C_r^1 p^{s-1} S_{14}A_1, \quad p^{s-n}S_{31} = C_r^1 p^{s-1} S_{24}A_1, \quad p^{s-1}AS_{11} = C_r^1 p^{s-1}S_{44}A_1,$$

$$p^{s-n}S_{22} = C_r^1 p^{s-n}S_{11} + C_r^1 p^{s-1}S_{13}B_1, \quad p^{s-n}S_{32} = C_r^1 p^{s-n}S_{21} + C_r^1 p^{s-1}S_{23}B_1,$$

$$p^{s-1}BS_{22} + p^{s-1}S_{42} = C_r^1 p^{s-n}S_{31} + C_r^1 p^{s-1}S_{33}B_1, \quad p^{s-1}AS_{12} = C_r^1 p^{s-n}S_{41} + C_r^1 p^{s-1}S_{43}B_1,$$

$$p^{s-n}S_{33} = C_r^2 p^{2(s-n)}S_{21} + C_r^1 p^{s-n}S_{22}, \quad p^{s-1}AS_{13} = C_r^1 p^{2(s-n)}S_{41} + C_r^1 p^{s-n}S_{42},$$

$$p^{s-n}S_{24} = C_r^1 p^{s-1}S_{13}, \quad p^{s-n}S_{34} = C_r^1 p^{s-1}S_{23}, \quad p^{s-1}BS_{24} + p^{s-1}S_{44} = C_r^1 p^{s-1}S_{33}.$$

Отсюда

$$AS_{11} \equiv r^4 S_{11}A_1 \pmod{p\mathbb{Z}_{p^s}}, \qquad BS_{11} \equiv r^2 S_{11}B_1 \pmod{p\mathbb{Z}_{p^s}},$$

$$S \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & * & * & * \\ 0 & rS_{11} & * & 0 \\ 0 & 0 & r^2S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & * & r^3S_{11} \end{pmatrix} \pmod{p\mathbb{Z}_{p^s}}. \tag{7}$$

Ввиду произвольности матриц A_1, B_1 и обратимости матрицы S из (7) получаем, что описание представлений $\Gamma_{m_0}(A,B)$ группы H с точностью до обобщенной эквивалентности включает задачу описания с точностью до подобия пар матриц порядка m_0 над полем из p элементов для произвольных натуральных m_0 больших n. Очевидно, последняя задача является дикой. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть K — кольцо целых чисел либо кольцо целых p-адических чисел и $\mathcal{W}$ — множество некоторых конечных p-подгрупп группы $GL(m,K)$. Задача описания с точностью до сопряженности подгрупп из множества $\mathcal{W}$ является дикой, если выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathcal{W}$ — множество всех циклических p-подгрупп группы $GL(m,K)$, где $m = p^4n$ либо $m = 2p^3n$ при $p \neq 2$ (n — произвольное натуральное число);

2) $\mathcal{W}$ — множество всех конечных абелевых 2-подгрупп группы $GL(m,K)$, где $m = 6n$ (n — произвольное натуральное число);

3) $\mathcal{W}$ — множество всех конечных нециклических p-подгрупп группы $GL(m,K)$ ($p \neq 2$), где $m = (5p-4)n$ (n — произвольное натуральное число).

Доказательство. В случае 1)–2) доказательство теоремы следует из [10–13].

Рассмотрим далее случай 3). Введем сначала некоторые обозначения. Пусть ε — первообразный корень степени p из 1; $\tilde{\varepsilon}$ — матрица, соответствующая оператору умножению на ε в K-базисе 1, ε, ..., ε^{p-2} кольца $K[\varepsilon]$; E_n — единичная матрица порядка n; $D^{(n)} = D \otimes E_n$ — тензорное произведение матриц D и E_n; $r = p-1$; $\langle\delta\rangle$ — $r \times 1$-матрица вида

$$\langle\delta\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \qquad (\delta = \alpha_1 + \alpha_2\varepsilon + \cdots + \alpha_r\varepsilon^{r-1} \in K[\varepsilon],\ \alpha_i \in K;\ i = 1, \ldots, r);$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 & E_{rn} & 0 & \langle A\rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & E_{rn} & 0 & \langle E_n\rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & E_{rn} & 0 & \langle B\rangle \\ 0 & 0 & 0 & E_{rn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \langle A\rangle \\ 0 & (\tilde{\varepsilon}^2)^{(n)} & 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & \langle\lambda A\rangle \\ 0 & 0 & E_{rn} & -E_{rn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda = 1+\varepsilon$, A и B — произвольные необратимые матрицы порядка n над кольцом K, $\langle S\rangle = \|\langle\delta_{ij}\rangle\|$ $(S = \|\delta_{ij}\|,\ \delta_{ij} \in K[\varepsilon])$. Используя [10], нетрудно проверить, что

$$D_1^p = E_m, \quad D_2^p = E_m, \quad D_1D_2 = D_2D_1, \tag{8}$$

где $m = (5p-4)n$. Следовательно, $H = \langle D_1, D_2\rangle$ является абелевой группой типа (p,p) $(p \neq 2)$. Используя [10, 11], можно показать, что описание с точностью до сопряженности подгрупп вида (8) группы $GL(m, K)$ является дикой задачей. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 2 и [14] вытекает, что описание с точностью до изоморфизма m-мерных кристаллографических групп при произвольном m является дикой задачей.

1. *Szekeres G.* Determination of a certain family of finite metabelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**.– P. 11–43.
2. *Дроботенко В. С.* Розширення абелевої групи типу $(p^s, \ldots, p^s)$ за допомогою циклічної групи порядку p // Доп. АН УРСР. – 1966. – №4. – С. 430–433.
3. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Конечнопорожденные модули над диадой двух локальных дедекиндовых колец и конечные группы, обладающие абелевым нормальным делителем индекса p // Изв. АН СССР. – 1969. – **33**. – С. 65–89.
4. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимо аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
5. *Сергейчук В. В.* Конечные p-группы, являющиеся расширением абелевой группы при помощи циклической. – К., 1974. – 44 с. (Препринт / Ин-т мат. АН УССР; №ИМ-74-5).

6. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
7. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцами классов вычетов. -К.: Мат. сб. Наукова думка. – 1976. – С. 275–277.
8. *Сергейчук В. В.* О классификации метабелевых p-групп. – К.: Темат. сб. Матричные задачи. Ин-т мат. АН УССР, 1977. – С. 150–161.
9. *Пилявская О. С.* О классификации групп экспоненты p с абелевой нормальной подгруппой индекса p^2. – К.: Сб. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Ин-т мат. АН Украины, 1993. – С. 210–226.
10. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**, №4. – С. 875-910.
11. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
12. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №26. – С. 742–753.
13. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О расширениях абелевых p-групп // Доп. НАН України. – 1995. – №2. – С. 8–9.
14. *Zassenhaus H.* Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen // Comment. Math. Helvetici. – 1948. – **21**, №2. – P. 117–141.