УДК 512.544

И. В. Шапочка (Ужгородский гос. ун-т)

О КЛАССИФИКАЦИИ НЕИЗОМОРФНЫХ ЧЕРНИКОВСКИХ ГРУПП

Let p be an odd prime and H be a finite group with normal Sylow p-subgroup P. It's have been settled in the paper, that problem of the description up to isomorphism of all extensions of an arbitrary divisible abelian p-group with minimality condition by the group H is wild, when group P is not cyclic of order p^r $(r \leq 2)$.

Нехай p — непарне просте число, H — скінченна група з нормальною силовською p-підгрупою P. Показано, що задача описання всіх неізоморфних розширень довільної повної абелевої p-групи з умовою мінімальності за допомогою групи H є дикою, якщо P не є циклічною групою порядку p^r $(r \leq 2)$.

Исследованиям свойств черниковских групп посвящено много работ (см. [1–7]).

Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности. В [6, 7] на основании теории целочисленных p-адических представлений конечных групп изучаются черниковские p-группы $G(M, H)$, являющиеся расширениями группы M с помощью конечной p-группы H. В частности, с точностью до изоморфизма классифицированы все такие расширения, когда H — циклическая группа порядка p^r $(r \leq 2)$. Доказано также, что в случаи нечетного простого числа p задача описания всех неизоморфных черниковских p-групп вида $G(M, H)$, где H — конечная p-группа, отличная от циклической порядка p^r $(r \leq 2)$, является дикой задачей.

В настоящей статье показано, что для произвольного нечетного простого числа p описание всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p-группы M с условием минимальности с помощью конечной группы H с нормальной силовской p-подгруппой P является дикой задачей, если P не является циклической группой порядка p^r $(r \leq 2)$.

Пусть M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p-группы T, т. е.

$$M = M_1 \dot{+} \cdots \dot{+} M_n, \tag{1}$$

где $M_i = T$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Известно [2], что группа $\operatorname{Aut} M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, где $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Отсюда и из теории расширений групп [2, 8] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью конечной группы H определяется некоторым матричным представлением Γ степени n группы H над кольцом $\mathbb{Z}_p$ и некоторой системой факторов $\{\mu_{u,v}\}$ $(u, v \in H;\ \mu_{u,v} \in M)$. Обозначим такое расширение через $G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$.

Пусть $\{a_r \,|\, r = 0, 1, 2, \ldots\}$ — образующие элементы группы T, причем $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ $(r \in \mathbb{N})$. Если $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p)$, и $m = (m_1, \ldots, m_n)$ $(m_i \in M_i = T,\ i = 1, \ldots, n)$, $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \cdots$, $m_j = y_0^{(j)} a_0 + y_1^{(j)} a_1 + \cdots + \cdots + y_{k_j}^{(j)} a_{k_j}$ $(0 \leq x_{ij}^{(r)}, y_i^{(s)} < p)$, то $A(m) = (m'_1, \ldots, m'_n)$, где

$$m'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Определение 1. Матричные $\mathbb{Z}_p$-представления $\Gamma : h \to \Gamma_h$ и $\Delta : h \to \Delta_h$ степени n конечной группы H называются обобщенно эквивалентными, если существуют такие матрица $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ и автоморфизм ψ группы H, что

$$C\Gamma_h = \Delta_{\psi(h)}C \qquad (h \in H). \tag{2}$$

Пусть далее M — p-группа вида (1), H — произвольная конечная группа. Имеют место следующие леммы.

Лемма 1 ([7]). *Из изоморфизма групп $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ и $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu'_{u,v}\})$ вытекает обобщенная эквивалентность представлений Γ и Δ.*

Лемма 2 ([7]). *Пусть $\mathbb{Z}_p$-представления Γ и Δ степени n группы H обобщенно эквивалентны, т. е. существуют такие $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ и $\psi \in \operatorname{Aut} H$, что имеет место* (1). *Тогда группа $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ изоморфна группе $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu'_{u,v}\})$, где $\mu'_{u,v} = C(\mu_{\psi^{-1}(u),\psi^{-1}(v)})$ $(u, v \in H)$.*

Лемма 3. *Группы $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ и $G_2 = G(M, H, \Gamma, \{\nu_{u,v}\})$ изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся такие матрица $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ и автоморфизм ψ группы H, что $C\Gamma_h = \Gamma_{\psi(h)}C$ $(h \in H)$ и системы факторов $\{\mu_{u,v}\}$, $\{C^{-1}(\nu_{\psi(u),\psi(v)})\}$ $(u, v \in H)$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть f — изоморфное отображение группы G_1 на G_2 и h' (h'') — представитель смежного класса группы G_1 (G_2) по подгруппе M, соответствующий элементу h группы H. Тогда $f(M) = M$ и $f(h') = \psi(h)''m_h$, для некоторого автоморфизма ψ группы H и $m_h \in M$, $h \in H$. Обозначим через C ограничение f на M. Легко видеть, что $G_2 = G(M, H, \Gamma^{(\psi)}, \{\nu'_{u,v}\})$, где $\Gamma^{(\psi)} : h \to \Gamma_{\psi(h)}$ $(h \in H)$, $\nu'_{u,v} = \nu_{\psi(u),\psi(v)}$ $(u, v \in H)$. Следовательно, $f : G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\}) \cong G(M, H, \Gamma^{(\psi)}, \{\nu'_{u,v}\})$, причем в силу лемы 1 $C\Gamma_h = \Gamma^{(\psi)}_h C$ $(h \in H)$ и f переводит друг в друга смежные классы групп G_1 и G_2 по подгуппе M, соответствующие одному и тому же элементу группы H. Так как $C^{-1}\Gamma^{(\psi)}_h = \Gamma_h C^{-1}$ $(h \in H)$, то по лемме 2 существует такой изоморфизм f' группы $G_2 = G(M, H, \Gamma^{(\psi)}, \{\nu'_{u,v}\})$ на группу $G_3 = G(M, H, \Gamma, \{C^{-1}(\nu'_{u,v})\})$, что ограничение f' на M совпадает с C^{-1} и f' переводит друг в друга смежные классы групп G_2 и G_3 по подгуппе M, соответствующие одному и тому же элементу группы H. Отсюда следует, что расширения G_1 и G_3 эквивалентны, а, следовательно, эквивалентны соответствующие им системы факторов.

Наоборот, если для некоторой матрицы $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ и некоторого автоморфизма ψ группы H имеем, что $C\Gamma_h = \Gamma_{\psi(h)}C$ $(h \in H)$ и системы факторов $\{\mu_{u,v}\}$, $\{C^{-1}(\nu_{\psi(u),\psi(v)})\}$ $(u, v \in H)$ эквивалентны, то расширения G_1 и G_3 эквивалентны, а, следовательно, изоморфны. Лемма доказана.

Из леммы 3 сразу как следствие получаем лемму.

Лемма 4 ([7]). *Пусть M — p-группа вида* (1), *H — произвольная конечная группа, G_1, G_2 — расщепляемые расширения группы M с помощью группы H, определяющиеся соответственно $\mathbb{Z}_p$-представлениями Γ и Δ группы H. Группы G_1 и G_2 изоморфны тогда и только тогда, когда представления Γ и Δ обобщенно эквивалентны.*

Лемма 5. *Пусть H — конечная группа с нормальной силовской p-подгруппой P. Если задача описания всех не обобщенно эквивалентных матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы P является дикой, то и задача описания всех не обобщенно эквивалентных матричных $\mathbb{Z}_p$-представлений группы H является дикой.*

Доказательство. Пусть у группы P существует матричное $\mathbb{Z}_p$-представление $\Gamma(A_1, A_2)$, зависящее от произвольных $n \times n$-матриц A_1 и A_2 над кольцом $\mathbb{Z}_p$ (n

— произвольное натуральное число). Причем такое, что из обобщенной эквивалентности представлений $\Delta_1 = \Gamma(A_1, A_2)$ и $\Delta_2 = \Gamma(B_1, B_2)$, где B_1, B_2 — произвольные $n{\times}n$-матрицы над $\mathbb{Z}_p$, следует что пары матриц $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ и $(\bar{B}_1, \bar{B}_2)$ подобны над полем $F_p = \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ ($\bar{A}$ — матрица над полем F_p, полученная из матрицы A над $\mathbb{Z}_p$ приведением ее элементов по модулю идеала $p\mathbb{Z}_p$). Обозначим через Δ_i^H $\mathbb{Z}_p$-представление группы H, индуцированное представлением Δ_i подгруппы P $(i = 1, 2)$. Тогда из [9] вытекает, что ограничение $(\Delta_i^H)_P$ $\mathbb{Z}_p$-представления Δ_i^H группы H на подгруппу P эквивалентно представлению вида

$$\Theta_i : h \to \begin{pmatrix} \Delta_i(h) & 0 \\ 0 & \Delta_i'(h) \end{pmatrix} \quad (h \in P),$$

где $\Delta_i' : h \to \Delta_i'(h)$ — некоторое матричное $\mathbb{Z}_p$-представление группы P, $i = 1, 2$. Предположим теперь, что представления Δ_1^H и Δ_2^H группы H обобщенно эквивалентны. Тогда из характеристичности нормальной силовской p-подгруппы P группы H следует, что представления Θ_1 и Θ_2 обобщенно эквивалентны, т.е. для некоторого автоморфизма φ группы P представления Θ_1 и $\Theta_2' : h \to \Theta_2(\varphi(h))$ группы P эквивалентны. Отсюда и из справедливости теоремы Крулля-Шмидта для $\mathbb{Z}_p$-представлений группы P (см. [10]) получаем утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть H — конечная группа с нормальной силовской p-подгруппой P, которая не является циклической группой порядка p^r $(r \le 2,\ p \ne 2)$. Описание всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p-группы с условием минимальности с помощью группы H дикая задача.*

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы в [7] показано, что задача классификации всех $\mathbb{Z}_p$-представлений группы P с точностью до обобщенной эквивалентности является дикой. Отсюда и из лемм 4, 5 сразу вытекает доказательство теоремы.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980.– 384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finitness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
5. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
6. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, №6.– С. 742–753.
7. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3.– С. 291–304.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
9. *Higman D. G.* Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 377–381.
10. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп. – Ужгород: Ужгородский ун-т, 1978. – 82 с.

Получено 23.08.99