УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, И. В. Шапочка (Ужгородский гос. ун-т)

О НЕПРИВОДИМЫХ МАТРИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ 2-ГРУПП НАД ЛОКАЛЬНЫМИ ФАКТОРИАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ

It is making up clear, when any irreducible matrix representation of a finite 2-group G of order $|G| > 2$ over a local factorial ring of characteristic zero with residue class field of characteristic 2 is irreducible over the field of fractions of ring K.

Виясняється, коли всяке незвідне матричне зображення скінченної 2-групи G порядку $|G| > 2$ над локальним факторіальним кільцем K характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 незвідне також над полем відношень кільця K.

В [1] получены такие результаты:

1) Пусть G — конечная p-группа порядка $|G| > 1$ $(p \neq 2)$, L — локальное факториальное кольцо характеристики нуль с полем вычетов характеристики p и $\varepsilon \in L$ $(\varepsilon^p = 1,\ \varepsilon \neq 1)$. Группа G тогда и только тогда не обладает неприводимым матричным L-представлением, которое приводимо над полем отношений кольца L, когда L — дискретно нормированное кольцо.

2) Пусть G — конечная 2-группа порядка $|G| > 1$, K — локальное факториальное кольцо характеристики нуль с полем вычетов характеристики 2 и 2 — непростой элемент кольца K. Группа G тогда и только тогда не обладает неприводимым матричным K-представлением, которое приводимо над полем отношений кольца K, когда K — дискретно нормированное кольцо.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для неприводимых K-представлений конечной 2-группы, если 2 — простой элемент кольца K.

Теорема. *Пусть G — конечная 2-группа порядка $|G| > 2$, K — локальное факториальное кольцо характеристики нуль с полем вычетов характеристики 2 и 2 — простой элемент кольца K. Произвольное неприводимое матричное K-представление группы G неприводимо над полем отношений F кольца K тогда и только тогда, когда K — дискретно нормированное кольцо.*

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая, когда G — группа порядка 4 и K — не дискретно нормированное кольцо. Если группа G обладает неприводимым матричным K-представлением степени $n \leq 3$, которое приводимо над полем F, то теорема уже доказана. Поэтому будем считать, что всякое неприводимое матричное K-представление степени $n \leq 3$ группы G неприводимо также и над полем F. Пусть u — простой элемент кольца K, взаимно простой с 2.

Рассмотрим сначала случай, когда $G = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка 4. Легко проверить, что отображение Γ вида:

$$a \to A = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 2 & 0 & -u^3 \\ -1-u^2 & -1-u^2 & u^3 & 0 \\ 0 & -u & 1+u^2 & -u^2 \\ u & 0 & 2 & -1-u^2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

является K-представлением группы $G = \langle a \rangle$. Нетрудно показать, что представление

Γ над полем F эквивалентно представлению Γ' вида:

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Пусть представление Γ приводимо над кольцом K. Тогда Γ K-эквивалентно одному их таких представлений:

$$\Gamma_1(\alpha) : a \to \begin{pmatrix} \alpha & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = B_\alpha, \tag{3}$$

$$\Gamma_2(\beta) : a \to \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = D_\beta, \tag{4}$$

где $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$; B_1, B_2, D_1 и D_2 — матрицы над кольцом K.

Пусть представление Γ K-эквивалентно представлению $\Gamma_1(1)$, т.е. существует такая обратимая матрица $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$ над кольцом K порядка 4, что $AC = CB_1$. Отсюда, из (1) и (3) получаем следующую систему уравнений:

$$u^2 c_{11} + 2c_{21} - u^3 c_{41} = 0,$$

$$-(1+u^2)c_{11} - (2+u^2)c_{21} + u^3 c_{31} = 0,$$

$$-uc_{21} + u^2 c_{31} - u^2 c_{41} = 0,$$

$$uc_{11} + 2c_{31} - (2+u^2)c_{41} = 0.$$

Из этой системы находим, что

$$c_{11} = u^2 c'_{11}, \qquad c_{21} = u^3 c'_{21},$$

$$c_{31} = uc'_{11} + (u^2+2)c'_{21}, \qquad c_{41} = uc'_{11} + 2c'_{21},$$

где $c'_{j1} \in K$ $(j = 1, 2)$. Следовательно, $c_{j1} \in \operatorname{Rad} K$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, где $\operatorname{Rad} K$ — радикал Джекобсона кольца K. Значит, матрица C необратима над кольцом K. Полученное противоречие показывает, что представление Γ не эквивалентно представлению $\Gamma_1(1)$ над кольцом K.

Аналогично доказывается, что представление Γ не может быть K-эквивалентно предсталению $\Gamma_1(-1)$.

Пусть, далее, представление Γ K-эквивалентно представлению $\Gamma_2(1)$. Тогда существует такая обратимая матрица $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$ над кольцом K порядка 4, что $A = D_1$. Из этого равенства, из (1) и (4) получаем такую систему уравнений:

$$u^2 c_{41} - (1+u^2)c_{42} + uc_{44} = 0,$$

$$2c_{41} - (2+u^2)c_{42} - uc_{43} = 0,$$

$$u^3 c_{42} + u^2 c_{43} + 2c_{44} = 0,$$

$$u^3 c_{41} + u^2 c_{43} + (2+u^2)c_{44} = 0.$$

Из этой системы следует, что

$$c_{41} = uc'_{41}, \qquad c_{42} = u^2 c'_{42},$$

$$c_{44} = u^2 c'_{44}, \qquad c_{43} = -2c'_{44} - uc'_{42},$$

где $c'_{4j} \in K$ $(j = 1, 2, 4)$. Значит, $c_{4j} \in \operatorname{Rad} K$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$, т.е. матрица C необратима над кольцом K. Полученное противоречие показывает, что представление Γ не эквивалентно представлению $\Gamma_2(1)$ над кольцом K. Легко проверить, что представление Γ также не эквивалентно представлению $\Gamma_2(-1)$ над кольцом K.

Таким образом представление Γ группы $G = \langle a \rangle$ неприводимо над кольцом K. В силу (2) оно приводимо над полем отношений кольца K.

Пусть, далее, $G = \langle a, b \rangle$ — абелева группа типа $(2, 2)$: $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$. Рассмотрим следующее K-представление Δ группы G:

$$a \to A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & u^3 \\ u & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to B = \begin{pmatrix} 1+u^2 & 2 & 0 & -u^3 \\ -u^2 & -1-u^2 & u^3 & 0 \\ 0 & -u & 1+u^2 & -u^2 \\ u & 0 & 2 & -1-u^2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что представление Δ приводимо над кольцом K. Тогда Δ K-эквивалентно представлению Δ' вида:

$$a \to A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}, \quad b \to B' = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in K$. Следовательно, существует такая обратимая матрица $C = \|c_{ij}\|$ $(c_{ij} \in K)$ над кольцом K порядка 4, что

$$AC = CA', \qquad BC = CB'.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{gathered} (1+\alpha_{11})c_{11} = 0, \qquad (1+u^2-\beta_{11})c_{11} + 2c_{21} - u^3 c_{41} = 0, \\ (1+\alpha_{11})c_{21} - u^3 c_{41} = 0, \qquad -u^2 c_{11} - (1+u^2+\beta_{11})c_{21} + u^3 c_{31} = 0, \\ uc_{11} + (1-\alpha_{11})c_{31} = 0, \qquad -uc_{21} + (1+u^2-\beta_{11})c_{31} - u^2 c_{41} = 0, \\ (1-\alpha_{11})c_{41} = 0, \qquad uc_{11} + 2c_{31} - (1+u^2+\beta_{11})c_{41} = 0. \end{gathered}$$

Из этой системы вытекает, что $c_{j1} \in \operatorname{Rad} K$ $(j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Следовательно, матрица C необратима над кольцом K. Полученное противоречие показывает, что представление Δ неприводимо над кольцом K. Очевидно, представление Δ приводимо над полем F. Теорема доказана.

1. *Гудивок П. М., Иванов М. Г.* О неприводимых матричных представлениях конечных p-групп над локальными факториальными кольцами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 84-88.

Получено 10.07.2000