УДК 512.544

І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ НЕІЗОМОРФНИХ РОЗШИРЕНЬ ПОВНОЇ АБЕЛЕВОЇ 2-ГРУПИ З УМОВОЮ МІНІМАЛЬНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ АБЕЛЕВОЇ ГРУПИ ТИПУ (2,2)

Let $M^{(n)}$ be the direct sum of n copies of the quasicyclic 2-group M. Some non-isomorphic split extensions of 2-group $M^{(n)}$ by the Klein's four-group H are describing, using the Nazarova's description of matrix integral 2-adic representations of group H.

Нехай $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної 2-групи M. В роботі, використовуючи описані Л. О. Назаровою нееквівалентні матричні цілочислові 2-адичні зображення абелевої групи H типу (2,2), описуються деякі неізоморфні розщеплювані розширення 2-групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H.

Нехай $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи (n — натуральне число). Нагадаємо, група G називається p-групою Чернікова, якщо вона є розширенням p-групи $M^{(n)}$ (для деякого n) за допомогою скінченної p-групи H. Властивості черніковських p-груп досить добре вивчені (див. наприклад [1–6]). Основний вклад у вивчення цих груп внесли С. М. Черніков та його учні [1].

П. М. Гудивок, Ф. Г. Ващук, В. С. Дроботенко та автор [7–9] за допомогою теорії цілочислових p-адичних зображень скінченних груп описали всі неізоморфні розширення G p-групи $M^{(n)}$ за допомогою циклічної p-групи порядку p^r ($r \leq 2$) для довільного натурального n. Виявилось [7–11], що задача класифікації всіх неізоморфних розширень p-групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної p-групи H для довільного натурального n є дикою, якщо виконується одна з наступних умов: 1) H — нециклічна p-група ($p \neq 2$); 2) H — нециклічна 2-група порядку $|H| > 4$; 3) H — циклічна p-група порядку p^r ($r > 2$, $p \neq 2$); 4) H — циклічна 2-група порядку 2^r ($r > 3$). В [11], використовуючи описані Л. О. Назаровою [12, 13] нееквівалентні матричні цілочислові 2-адичні зображення абелевої групи H_0 типу $(2, 2)$, дана класифікація всіх нееквівалентних розширень довільної повної абелевої 2-групи з умовою мінімальності за допомогою групи H_0. У цій роботі дано описання неізоморфних розщеплюваних розширень 2-групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_0, в яких підгрупа $M^{(n)}$ не розкладається у пряму суму нормальних у цих розширеннях повних абелевих підгруп.

Добре відомо (див. наприклад [2]), що група $\operatorname{Aut} M^{(n)}$ автоморфізмів групи $M^{(n)}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Звідси та із теорії розширень груп [2] випливає, що всяке розщеплюване розширення G групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної групи H визначається деяким матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H. У цьому випадку розширення G будемо позначати через $G(M^{(n)}, H, \Gamma)$.

Введемо наступні позначення: E_n — одинична матриця порядку n; R_n, T_n — $n \times (n+1)$-матриці вигляду: $R_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \end{pmatrix}$, $T_n = \begin{pmatrix} E_n & 0 \end{pmatrix}$; U_n, V_n — матриці відповідно транспоновані до матриць T_n, R_n; $W_n = R_n U_n$; L_n — $2 \times (n+1)$-матриця, K_n — $(n+1) \times 2$-матриця відповідно вигляду:

$$L_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$L_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1. *Матричні $\mathbb{Z}_p$-зображення $\Gamma : h \to \Gamma_h$ і $\Delta : h \to \Delta_h$ степеня n скінченної групи H називаються узагальнено еквівалентними, якщо існує оборотна матриця $C \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ і автоморфізм φ групи H такі, що $C^{-1}\Gamma_h C = \Delta_{\varphi(h)}$ для довільного елемента $h \in H$.*

Теорема 1. *Всі нерозкладні матричні $\mathbb{Z}_2$-зображення абелевої 2-групи $H_0 = \langle a, b\rangle$ типу $(2,2)$ з точністю до узагальненої еквівалентності вичерпуються наступними зображеннями:*

$$\Lambda_1 : a \to 1, \quad b \to 1; \qquad \Lambda_2 : a \to -1, \quad b \to 1;$$

$$\Lambda_3^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & R_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_4^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & R_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -E_n & 0 & -T_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & -E_n \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_5^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & U_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_6^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & U_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -E_{n+1} & 0 & -V_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & -E_n \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_7 : a \to X, \quad b \to E_2; \qquad \Lambda_8 : a \to X, \quad b \to -E_2;$$

$$\Lambda_9^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & T_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{10}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & V_n \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{11} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{12} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{13} : a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{14}: a \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{15}^{(n)}: a \to i\begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_{n+1} & U_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & V_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{16}^{(n)}: a \to i\begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & -E_{n+1} & U_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -E_{n+1} & 0 & -V_n & 0 \\ 0 & E_{n+1} & 0 & -E_{n+1} \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{17}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & R_n \\ 0 & -E_{n+1} & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{18}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 & -R_n \\ 0 & E_{n+1} & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & T_n & 0 \\ 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{19}: a \to \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & E_2 \\ 0 & -X \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{20}: a \to \begin{pmatrix} X & L_1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & K_1' \\ 0 & -Y \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{21}: a \to \begin{pmatrix} Y & L_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} Y & K_1 \\ 0 & -X \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{22}: a \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & K_1' \\ 0 & Y & L_1' & L_1 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} X & 0 & L_1 & 0 \\ 0 & Y & L_1 & L_1' \\ 0 & 0 & -E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{23}: a \to \begin{pmatrix} E_2 & 0 & K_1 & L_1 \\ 0 & -E_2 & K_1' & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_2 & 0 & K_1' & 0 \\ 0 & -E_2 & K_1 & K_1 \\ 0 & 0 & Y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{24}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & W_n \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{25}^{(n)}: a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & E_n \\ 0 & -E_n & W_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_f^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & \widetilde{f(x)} \\ 0 & -E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \ b \to \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & -E_n & 0 & E_n \\ 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}$$

($\widetilde{f(x)}$ — нормальна форма Фробеніуса, що відповідає многочлену $f(x)$, $f(x)$ пробігає множину всіх представників орбіт, на які розкладається множина Ω степенів всіх незвідних над полем з двох елементів многочленів, відмінних від x і $x+1$, під дією групи операторів множини Ω, породжених операторами вигляду: $g(x) \to g(x+1)$ і $g(x) \to x^{deg(g(x))} g(\frac{1}{x})$ ($g(x) \in \Omega$, $deg(g(x))$ — степінь $g(x)$));

$$\Lambda_{26}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{27}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_n & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & T_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & R_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & R_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{28}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix};$$

$$\Lambda_{29}^{(n)} : a \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_n & 0 & K_n \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & U_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & V_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & K_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X \end{pmatrix},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Для доведення теореми розглянемо ряд найбільш типових випадків.

Із [12, 13] слідує, що всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні $\mathbb{Z}_2$-зображення групи H_0, степені яких дорівнюють 1 за модулем 4, вичерпуються наступними зображеннями:

$$a \to \pm 1, \quad b \to \pm 1;$$

$$a \to \pm\Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to \pm\Lambda_3^{(n)}(b) \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$a \to \pm\Lambda_5^{(n)}(a), \quad b \to \pm\Lambda_5^{(n)}(b) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Очевидно, нерозкладні $\mathbb{Z}_2$-зображення першого степеня групи H_0 з точністю до узагальненої еквівалентності вичерпуються зображеннями:

$$\Lambda_1 : a \to 1, \quad b \to 1; \qquad \Lambda_2 : a \to -1, \quad b \to 1.$$

Покажемо, що нерозкладні зображення групи H_0 вигляду:

$$a \to -\Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to \Lambda_3^{(n)}(b);$$

$$a \to -\Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to -\Lambda_3^{(n)}(b)$$

узагальнено еквівалентні зображенню

$$\Lambda_3^{(n)} : a \to \Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to \Lambda_3^{(n)}(b).$$

Нехай S_n матриця порядку n вигляду

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1^0 & -C_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_2^0 & -C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & -C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & (-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-2} & (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix},$$

де C_k^l — число комбінацій з k по l. Покладемо

$$C^{(n)} = \begin{pmatrix} S_n & 0 & 0 & 0 \\ -S_n & -S_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{n+1} & 0 \\ -2S_n & 0 & -S_nT_n & -S_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно $C^{(n)}$ є оборотною матрицею і неважко обчислити, що

$$\left(C^{(n)}\right)^{-1}\left(-\Lambda_3^{(n)}(a)\right)C^{(n)} = \Lambda_3^{(n)}(\mu(a)), \quad \left(C^{(n)}\right)^{-1}\Lambda_3^{(n)}(b)C^{(n)} = \Lambda_3^{(n)}(\mu(b)),$$

де $\mu : a \to ab$, $b \to b$ — автоморфізм групи $H_0 = \langle a, b\rangle$. Таким чином, нерозкладне зображення групи H_0 вигляду:

$$a \to -\Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to \Lambda_3^{(n)}(b)$$

узагальнено еквівалентне зображенню

$$\Lambda_3^{(n)} : a \to \Lambda_3^{(n)}(a), \quad b \to \Lambda_3^{(n)}(b).$$

Далі, покладемо

$$D^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & A_n & 0 & 0 \\ A_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_n \end{pmatrix},$$

де A_n — матриця порядку n вигляду

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видно, що $D^{(n)}$ є оборотною матрицею і

$$\left(D^{(n)}\right)^{-1}\left(-\Lambda_3^{(n)}(a)\right)D^{(n)}=\Lambda_3^{(n)}(\nu(a)),\quad \left(D^{(n)}\right)^{-1}\left(-\Lambda_3^{(n)}(b)\right)D^{(n)}=\Lambda_3^{(n)}(\nu(b)),$$

де $\nu: a\to b,\ b\to a$ — автоморфізм групи $H_0=\langle a,\,b\rangle$. Це в свою чергу означає, що нерозкладне зображення групи H_0 вигляду:

$$a\to -\Lambda_3^{(n)}(a),\quad b\to -\Lambda_3^{(n)}(b)$$

узагальнено еквівалентне зображенню

$$\Lambda_3^{(n)}: a\to \Lambda_3^{(n)}(a),\quad b\to \Lambda_3^{(n)}(b).$$

Розглянемо тепер матрицю

$$\bar{C}^{(n)}=\left(\begin{array}{cccc} -S_n' & -S_n' & 0 & 0\\ 0 & S_n' & 0 & 0\\ 0 & 0 & S_{n+1}' & 0\\ 0 & 2S_n' & -S_n'R_n & -S_n' \end{array}\right),$$

де $S_n'=A_nS_nA_n$. Тоді

$$\left(\bar{C}^{(n)}\right)^{-1}\Lambda_3^{(n)}(a)\bar{C}^{(n)}=\Lambda_3^{(n)}(\nu\mu\nu(a)),\quad \left(\bar{C}^{(n)}\right)^{-1}\Lambda_3^{(n)}(b)\bar{C}^{(n)}=\Lambda_3^{(n)}(\nu\mu\nu(b)).$$

Оскільки група $\operatorname{Aut}H_0=\langle\mu,\nu\rangle$ автоморфізмів групи H_0 ізоморфна групі діедра 6-го порядку, то з вище сказаного випливає, що нерозкладне зображення

$$\Lambda_3^{(n)}: a\to \Lambda_3^{(n)}(a),\quad b\to \Lambda_3^{(n)}(b)$$

не є узагальнено еквівалентним жодному із нерозкладних зображень вигляду:

$$a\to \Lambda_3^{(n)}(a),\quad b\to -\Lambda_3^{(n)}(b);$$

$$a\to \pm\Lambda_5^{(n)}(a),\quad b\to \pm\Lambda_5^{(n)}(b).$$

Інші випадки доводяться аналогічно.

Теорема 2. *Всі неізоморфні 2-групи Чернікова, що є напівпрямими добутками повної абелевої 2-групи M з умовою мінімальності та абелевої групи H_0 типу $(2,2)$ і в яких підгрупа M не розкладається у пряму суму нетривіальних нормальних повних абелевих підгруп, вичерпуються розщеплюваними розширеннями вигляду $G(M,H_0,\Gamma)$, де Γ пробігає множину всіх нерозкладних матричних $\mathbb{Z}_2$-зображень групи H_0, перерахованих у теоремі 1.*

Доведення. Очевидно у розширенні $G=G(M,H_0,\Gamma)$ підгрупа M не розкладається у пряму суму нормальних повних абелевих підгруп групи G тоді і тільки тоді, коли матричне $\mathbb{Z}_2$-зображення Γ групи H_0 є нерозкладним. Тому доведення теореми відразу випливає із теореми 1 і леми 3 [10].

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. –384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finitness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.

4. *Kegel O., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
5. *Baumslag G., Blackburn N.* Groups with cyclic upper central factors // Proc. London Math. Soc. – 1960. – **10**. – P. 531–544.
6. *Hartley B.* A dual approach to Chernikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215–239.
7. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С.* Про циклічні розширення повних абелевих груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – № 10. – С. 1239–1242.
8. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 26. – С. 742–753.
9. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О расширениях абелевых p-групп // Доп. НАН України. – 1995.– № 2. – С. 8–9.
10. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских р-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3. – С. 291–304.
11. *Шапочка І. В.* Про розширення довільної повної абелевої 2-групи з умовою мінімальності за допомогою групи типу (2,2) // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. ма-тем. – 1997. – Вип. 2. – С. 124–133.
12. *Назарова Л. А.* Целочисленные представления четверной группы // Докл. АН СССР. – 1961. – **140** № 5. – С. 1011–1014.
13. *Назарова Л. А.* Представления четвериады группы // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – **31**. – С. 1361–1379.