УДК 519.63

І. В. Шапочка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ НІЛЬПОТЕТННИХ ЧЕРНІКОВСЬКИХ *p*-ГРУП

The criterion of isomorphism of nilpotent Chernikov p-groups, which are the extensions of the direct sum of quasi-cyclic p-groups by a finite elementary abelian p-group, is given in the paper.

У роботі приводиться критерій ізоморфізму нільпотетних черніковських p-груп, які є розширеннями прямої суми кваціциклічних p-груп за допомогою скінченної елементарної абелевої p-групи.

Група G називається черніковською групою, якщо вона є розширенням прямої суми скінченного числа квазіциклічних p-груп, можливо по різним простим p, за допомогою скінченної групи. Основний внесок у дослідження цих груп зробили С. М. Черніков та його учні. В [1] показано, що черніковська група є нільпотентною групою тоді і тільки тоді, коли вона розкладається в пряму суму своїх силовських нільпотентних p-підгруп. В свою чергу розширення G прямої суми M скінченного числа квазіциклічних p-груп за допомогою скінченної p-групи H є нільпотентною групою тоді і тільки тоді, коли M — підгрупа центру групи G, тобто G є центральним розширенням групи M. У цій роботі приводиться критерій ізоморфізму нільпотетних черніковських p-груп, які є розширеннями прямої суми кваціциклічних p-груп за допомогою скінченної елементарної абелевої p-групи.

Нехай $M^{(n)}$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи C_{p^∞}, тобто

$$M^{(n)} = M_1 \dotplus \cdots \dotplus M_n,$$

де $M_i = C_{p^\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Добре відомо [2], що група автоморфізмів $\operatorname{Aut} M^{(n)}$ групи $M^{(n)}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ та довільного елемента $m \in M^{(n)}$ через $A(m)$ позначатимемо образ елемента m при автоморфізмі, що відповідає матриці A. Нехай $\{a_r\}$ — твірні елементи групи C_{p^∞} $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, причому $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Якщо $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbb{Z}_p)$ $(\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}_p)$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$ $(m_i \in M_i,\ i = 1, \ldots, n)$,

$$\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \cdots ,$$

$$m_j = y_0^{(j)} a_0 + y_1^{(j)} a_1 + \cdots + y_{k_j}^{(j)} a_{k_j}.$$

$(0 \le x_{ij}^{(r)}, y_i^{(s)} < p)$, то $A(m) = (m'_1, \ldots, m'_n)$, де

$$m'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s.$$

Отже, із теорії розширень груп [2] випливає, що всяке розширення G групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної групи H визначається матричним $\mathbb{Z}_p$-зображенням Γ степеня n групи H і деякою системою факторів $\{\mu_{a,b}\}$ $(a, b \in H,\ \mu_{a,b} \in M^{(n)})$. Позначимо таке розширення через $G(M^{(n)}, H, \Gamma, \{\mu_{a,b}\})$.

Множина $A(M^{(n)}, H, \Gamma)$ усіх систем факторів, якими визначаються розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи G, що відповідають $\mathbb{Z}_p$-зображенню Γ, утворюють групу відносно операції додавання систем факторів. Позначимо через $B(M^{(n)}, H, \Gamma)$ підгрупу групи $A(M^{(n)}, H, \Gamma)$, елементи якої є системи факторів, що визначають розщеплювані розширення.

Означення 1. *Факторгрупа*

$$A(M^{(n)}, H, \Gamma)/B(M^{(n)}, H, \Gamma)$$

називаєтьcя групою розширень групи $M^{(n)}$ за допомогою скінченної групи H, що відповідає $\mathbb{Z}_p$-зображенню Γ.

Надалі через H_k будемо позначати елементарну абелеву p-групу вигляду

$$H_k = \langle h_1 \rangle \dotplus \langle h_2 \rangle \dotplus \cdots \dotplus \langle h_k \rangle, \quad ph_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

а через $M_p^{(n)}$ — максимальну елементарну p-підгрупу групи $M^{(n)}$, тобто підгрупу групи $M^{(n)}$, що складається з усіх елементів групи $M^{(n)}$, порядок яких ділить p. Нехай KS_k — множина всіх кососиметричних матриць порядку k, складених з елементів групи $M_p^{(n)}$. Очевидно, KS_k є групою відносно звичайної операції додавання матриць.

Теорема 1. *Нехай $\Gamma : h \to E$ $(h \in H_k)$ — одиничне зображення степеня n групи H_k. Тоді група центральних розширень $A(M^{(n)}, H_k, \Gamma)/B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$ групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_k ізоморфна групі KS_k.*

Доведення. Нехай $\{\mu_{a,b}\} \in A(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$ — деяка система факторів, що визначає центральне розширення G групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_k і нехай $\bar{h}_i$ — представник суміжного класу групи G за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідає елементу h_i групи H_k $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ (див. 1). Покладемо

$$t_{ij} = [\bar{h}_i, \bar{h}_j] = -\bar{h}_i - \bar{h}_j + \bar{h}_i + \bar{h}_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

де $[x, y]$ — комутатор елементів x, y групи H_k. Оскільки

$$\bar{h}_i + \bar{h}_j = \overline{h_i + h_j} + \mu_{h_i,h_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

то

$$\begin{aligned} t_{ij} &= -(\bar{h}_j + \bar{h}_i) + (\bar{h}_i + \bar{h}_j) = \\ &= -(\overline{h_j + h_i} + \mu_{h_j,h_i}) + (\overline{h_i + h_j} + \mu_{h_i,h_j}) = \\ &= -\mu_{h_j,h_i}) - \overline{h_j + h_i} + \overline{h_i + h_j} + \mu_{h_i,h_j} = \mu_{h_i,h_j} - \mu_{h_j,h_i}. \end{aligned} \tag{2}$$

Позначимо через $\tau(\{\mu_{a,b}\})$ матрицю порядку k вигляду

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{k1} & t_{k2} & \ldots & t_{kk} \end{pmatrix}.$$

Із (2) випливає, що

$$t_{ij} = -t_{ji}, \qquad t_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким чином $\tau(\{\mu_{a,b}\})$ — кососиметрична матриця, складена з елементів групи $M^{(n)}$. Оскільки,

$$pt_{ij} = p[\bar{h}_i, \bar{h}_j] = [p\bar{h}_i, \bar{h}_j] = 0,$$

то $\tau(\{\mu_{a,b}\}) \in KS_k$.

Легко бачити, що відображення $\tau : A(M^{(n)}, H_k, \Gamma) \to KS_k$, визначене за правилом

$$\tau : \{\mu_{a,b}\} \to \tau(\{\mu_{a,b}\})$$

є гомоморфним відображенням. Покажемо спочатку, що τ — епіморфізм. Нехай $T = \|t_{ij}\|$ — довільна кососиметрична матриця із групи KS_k. Для довільних елементів u і v групи H_k вигляду

$$u = i_1h_1 + i_2h_2 + \cdots + i_kh_k, \quad v = j_1h_1 + j_2h_2 + \cdots + j_kh_k, \tag{3}$$

де $i_q,\ j_r \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ p-1\}$ $(q,\ r = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ покладемо

$$\mu_{u,v} = \sum_{q>r} i_qj_rt_{qr} = \sum_{r=1}^{k}\sum_{q=r+1}^{k} i_qj_rt_{qr}. \tag{4}$$

Покажемо, що $\{\mu_{u,v}\}$ є елементом групи $A(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$. Для цього крім елементів u, v вигляду (3) розглянемо ще один довільний елемент

$$w = l_1h_1 + l_2h_2 + \cdots + l_kh_k \quad (l_q \in \{0, 1, \ldots, p-1)$$

групи H_k. Обчислимо

$$\mu_{u,v} + \mu_{u+v,w} = \sum_{q>r} i_qj_rt_{qr} + \sum_{q>r}(i_q + j_q)l_rt_{qr} =$$

$$= \sum_{q>r} i_qj_rt_{qr} + \sum_{q>r} i_ql_rt_{qr} + \sum_{q>r} j_ql_rt_{qr},$$

$$\mu_{u,v+w} + \mu_{v,w} = \sum_{q>r} i_q(j_r + l_r)t_{qr} + \sum_{q>r} j_ql_rt_{qr} =$$

$$= \sum_{q>r} i_qj_rt_{qr} + \sum_{q>r} i_ql_rt_{qr} + \sum_{q>r} j_ql_rt_{qr}.$$

Порівнюючи праві частини цих формул, одержимо, що

$$\mu_{u,v} + \mu_{u+v,w} = \mu_{u,v+w} + \mu_{v,w}$$

для довільних елементів u, v, w групи H_k. Звідси та із означення системи факторів випливає, що $\{\mu_{u,v}\} \in A(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$.

Знайдемо тепер ядро $\operatorname{Ker}\tau$ епіморфізма τ. Нехай $\{\mu_{a,b}\} \in \operatorname{Ker}\tau$. Тоді $\tau(\{\mu_{a,b}\}) = \|t_{ij}\| = 0$. Звідси $[\bar{h}_i, \bar{h}_j] = t_{ij} = 0$. Це в свою чергу означає, що розширення $G(M^{(n)}, H_k, \Gamma, \{\mu_{a,b}\})$ є абелевою групою. Добре відомо, що тоді група $G(M^{(n)}, H_k, \Gamma, \{\mu_{a,b}\})$ розкладається у пряму суму повної підгрупи $M^{(n)}$ та скінченної підгрупи $\bar{H}$, яка ізоморфна H_k. Таким чином $G(M^{(n)}, H_k, \Gamma, \{\mu_{a,b}\})$ — розщеплюване розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_k. Звідки слідує, що $\{\mu_{a,b}\} \in B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$. Отже $\operatorname{Ker}\tau$ є підгрупою групи $B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$.

Навпаки, нехай $\{\mu_{a,b}\} \in B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$. Тоді із означення групи $B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$ випливає, що

$$\mu_{a,b} = \lambda(a) + \lambda(b) - \lambda(a+b) \quad (a, b \in H_k),$$

де $\lambda : a \to \lambda(a)$ — деяке відображення групи H_k в групу $M^{(n)}$. Оскільки групи H_k і $M^{(n)}$ — абелеві, то

$$\tau(\{\mu_{a,b}\}) = \|\mu_{h_i,h_j} - \mu_{h_j,h_i}\|_{i,j=1,\dots,k} =$$
$$= \|\lambda(h_i) + \lambda(h_j) - \lambda(h_i + h_j) - (\lambda(h_j) + \lambda(h_i) - \lambda(h_j + h_j))\| = \|0\|.$$

Тому $\operatorname{Ker}\tau = B(M^{(n)}, H_k, \Gamma)$. Теорема доведена.

Із теореми 1 випливає, що будь-яке центральне розширення повної абелевої p-групи $M^{(n)}$ за допомогою елементарної абелевої p-групи H_k визначається деякою кососиметричною матрицею T із групи KS_k і, навпаки, будь-яка така матриця визначає однозначно з точністю до еквівалентності деяке розширення групи $M^{(n)}$ за допомогою групи H_k. Тому надалі центральне розширення повної абелевої p-групи $M^{(n)}$ за допомогою елементарної абелевої p-групи H_k, яке визначається кососиметричною матрицею $T \in KS_k$ будемо позначати через $G(M^{(n)}, H_k, T)$.

Нехай F_p — поле з p елементів, S — довільна оборотна матриця порядку k над полем F_p, тобто S — елемент повної лінійної групи $GL(k, F_p)$. Визначимо операції множення зліва та справа елементів групи $GL(k, F_p)$ на елементи групи KS_k наступним чином:

$$S \cdot T = \left\| \sum_{r=1}^{k} s_{ir} t_{rj} \right\|, \qquad T \cdot S = \left\| \sum_{r=1}^{k} s_{rj} t_{ir} \right\|,$$

де

$$S = \|s_{ij}\| \quad (s_{ij} \in F_p), \qquad T = \|t_{ij}\| \quad (t_{ij} \in M_p^{(n)}).$$

Означення 2. *Матриці Q_1 і Q_2 групи KS_k назвемо F_p-конгруентними, якщо існує оборотна матриця $S \in GL(k, F_p)$ така, що $Q_1 = S^T Q_2 S$, де S^T — матриця транспонована до матриці S.*

Теорема 2. *Нехай $G_1 = G(M^{(n)}, H_k, Q_1)$ та $G_2 = G(M^{(n)}, H_k, Q_2)$ — центральні розширення прямої суми $M^{(n)}$ n екземплярів квазіциклічної p-групи за допомогою елементарної абелевої p-групи H_k рангу k, що визначаються відповідно кососиметричними матрицями Q_1 і Q_2 із KS_k. Групи G_1 та G_2 ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм φ групи $M^{(n)}$ такий, що матриці $\varphi(Q_1)$ та Q_2 F_p-конгруентні, де $\varphi(Q_1) = \|\varphi(q_{ij})\|$ $(Q_1 = \|q_{ij}\|)$.*

Доведення. Нехай центральні розширення $G_1 = G(M^{(n)}, H_k, Q_1)$ та $G_2 = G(M^{(n)}, H_k, Q_2)$ — ізоморфні і ψ — ізоморфне відображення G_1 на G_2. Оскільки $M^{(n)}$ — єдина повна підгрупа скінченного індексу в обох групах G_1 і G_2, то $\psi(M^{(n)}) = M^{(n)}$, а тому ψ індукує ізоморфне відображення $\hat{\psi}$ факторгрупи $G_1/M^{(n)}$ на факторгрупу $G_2/M^{(n)}$, яке в свою чергу можна трактувати, як автоморфізм групи H_k. Нехай

$$\hat{\psi}(h_i) = s_{1i}h_1 + s_{2i}h_2 + \dots + s_{ki}h_k \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{5}$$

де $s_{ij} \in F_p$. Добре відомо [2], що $S = \|s_{ij}\| \in GL(k, F_p)$.

Нехай $Q_1 = \|q_{ij}\|$, $Q_2 = \|q'_{ij}\|$; $\bar{h}_i$ $(\bar{h}'_i)$ — представник суміжного класу групи G_1 (G_2) за підгрупою $M^{(n)}$, що відповідає елементу h_i групи H_k $(i = 1, 2, \dots, k)$, причому вибраний таким чином, що

$$[\bar{h}_i, \bar{h}_j] = q_{ij} \qquad ([\bar{h}'_i, \bar{h}'_j] = q'_{ij})$$

для довільних $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Із формул (5) слідує, що

$$\psi(\bar{h}_i) = s_{1i}\bar{h}'_1 + s_{2i}\bar{h}'_2 + \dots + s_{ki}\bar{h}'_k + m_i \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

для деякого $m_i \in M^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Для довільних $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ справедливі рівності

$$\psi(q_{ij}) = \psi([\bar{h}_i, \bar{h}_j]) = [\psi(\bar{h}_i), \psi(\bar{h}_j)] = \left[\sum_{u=1}^{k} s_{ui}\bar{h}'_u + m_i, \sum_{v=1}^{k} s_{vj}\bar{h}'_v + m_j\right] =$$

$$= \left[\sum_{u=1}^{k} s_{ui}\bar{h}'_u, \sum_{v=1}^{k} s_{vj}\bar{h}'_v\right] = \sum_{u,v=1}^{k} s_{ui}s_{vj}[h'_u, h'_v] = \sum_{u,v=1}^{k} s_{ui}s_{vj}q'_{u,v}.$$

Якщо тепер через φ позначити обмеження ізоморфізму ψ на підгрупу $M^{(n)}$ і трактувати φ як автоморфізм цієї групи, то із попередньої рівності слідує, що

$$\varphi(Q_1) = S^T Q_2 S. \tag{6}$$

Отже, необхідність теореми доведена.

Нехай тепер навпаки існують такий автоморфізм φ групи $M^{(n)}$ і оборотна матриця $S = \|s_{ij}\| \in GL(k, F_p)$, що виконується рівність (6). Можна показати, що відображення $\psi : G_1 \to G_2$ задане за правилом

$$\psi\left(\sum_{u=1}^{k} l_u\bar{h}_u + m\right) = \sum_{u=1}^{k}\left(\sum_{v=1}^{k} s_{uv}l_v\right)\bar{h}'_u + \varphi(m)$$

$$(l_u \in \{0, 1, \ldots, p-1\},\ m \in M^{(n)})$$

є ізоморфізмом групи G_1 на групу G_2. Теорема доведена.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. –384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 26. – С. 742–753.
3. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, №3. – С. 291–304.