

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**



**КОНКУРСНІ
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ
ДЛЯ ВСТУПНИКІВ**

МАТЕМАТИКА

Ужгород – 2006

ББК 22.1в648
К64
УДК 51(07)

К64 **Конкурсні** тестові завдання для вступників: Математика. – Ужгород;
Ужгородський національний університет, 2006. – 228. с.

Збірник містить біля 3000 завдань з бази екзаменаційних тестів, що використовується на вступних іспитах до Ужгородського національного університету. Він охоплює основні розділи елементарної математики, знання яких необхідні для успішного навчання в університеті і дає певну інформацію про рівень вимог з математики, які ставляться перед вступниками до УжНУ. Збірник призначений для вступників на спеціальності економічного, інженерно-технічного, математичного, фізичного, хімічного факультетів та факультету міжнародних відносин. Може бути використаний вчителями та учнями старших класів у навчальному процесі та для самопідготовки.

Завдання підготував: Ф.Е.Гече

Відповідальні за випуск: В.М. Міца, П.П.Гуранич,
Б.К.Галас, І.Й.Росола

Рекомендовано до друку
редакційно-видавничою радою
УжНУ 28 лютого 2006 року,
протокол № 1

© Ужгородський національний університет, 2006

Розділ 1. Арифметика

Рівень 1

1. Знайти число, якщо відомо, що сума часток від ділення цього числа на 8 і на 12 дорівнює 10.
2. Одне число більше від другого у 6 разів. Якщо від більшого числа відняти 37, а до меншого числа додати 73, то результати будуть рівні. Знайти менше число.
3. Одне з двох чисел становить 0,6 другого і менше від другого на 30. Знайти більше число.
4. Сума двох чисел дорівнює 13,6, а різниця 1,6. Знайти менше з невідомих чисел.
5. Сума двох чисел дорівнює 105 і відносяться як 1 : 2. Знайти більше з невідомих чисел.
6. Знайти число, половина якого більша від його третьої частини на 0,5.
7. Поле площею 430 га розділено на дві частини так, що одна із них на 130 га більша від другої. Знайти площу меншої частини.
8. Три трактористи зорали разом 72 га. Перший зорав на 6 га більше від другого, а другий на 9 га більше від третього. Скільки гектарів зорав другий тракторист?
9. Батькові 40 років, а сину 10. Через скільки років батько буде в три рази старший від сина?
10. У трьох класах всього 79 учнів. У другому на три учні більше, ніж у першому, а в третьому на 2 менше, ніж у першому. Скільки учнів у першому класі?
11. Визначити найбільший спільний дільник чисел 130 і 78.
12. Визначити найменше спільне кратне чисел 70 і 42.
13. Знайти найбільший спільний дільник чисел 170 і 102.

14. Знайти найменше спільне кратне чисел 230 і 92.
15. Знайти найбільший спільний дільник чисел 209 і 57.
16. Обчислити $\left\{-2\frac{1}{4}\right\} \cdot [8,2]$, де $\{x\}$, $[x]$ відповідно дробова та ціла частина числа x .
17. Обчислити $\{-3,2\} \cdot [5,4]$, де $\{x\}$, $[x]$ відповідно дробова та ціла частина числа x .
18. Обчислити $\{4,6\} \cdot \left[-7\frac{1}{3}\right]$, де $\{x\}$, $[x]$ відповідно дробова та ціла частина числа x .
19. Обчислити $\{7,2\} \cdot [-9,7]$, де $\{x\}$, $[x]$ відповідно дробова та ціла частина числа x .
20. Обчислити $\{-6,4\} \cdot [-6,2]$, де $\{x\}$, $[x]$ відповідно дробова та ціла частина числа x .
21. На карті, масштаб якої 1:600000, відстань між містом А та містом В дорівнює 18 см. Знайти цю відстань на місцевості у км.
22. Чисельний масштаб топографічної карти 1:50000. Чому дорівнює відстань на місцевості у кілометрах, якщо на карті вона складає 2,5 см?
23. Швидкість літака 900 км/год. Знайти його швидкість у метрах за секунду.
24. Швидкість звуку у повітрі 330 м/сек. Знайти його швидкість у кілометрах за годину.
25. У 800 г розчину міститься 50 г солі. Скільки солі міститься у 240 г розчину?
26. З молока виходить 10 % сиру. Скільки молока треба мати (в кг), щоб вийшло 20 кг сиру?
27. З цукрових буряків виходить 16 % цукру. Скільки буряків треба мати (в тоннах), щоб вийшло 1 т цукру?

28. З 25 учнів класу присутні на уроці 23. Знайти відсоток відвідування.
29. Раніше 3 кг м'яса коштувало стільки, скільки тепер коштують 2 кг. На скільки відсотків подорожчало м'ясо?
30. Яблука під час сушіння втрачають 84 % своєї маси. Скільки свіжих яблук (в кг) треба висушити, щоб мати 40 кг сушених?

Рівень 2

1. В одному мішку борошна на 25 % більше, ніж у другому. На скільки відсотків у другому мішку борошна менше, ніж у першому?
2. Ціна тканини спочатку знизилась на 10 %, а потім ще раз на 10 %. На скільки відсотків знизилась початкова ціна тканини після двох переоцінок?
3. Ціна автомобіля спочатку підвищилась на 20 %, а потім знизилась на 20 %. На скільки відсотків знизилась початкова ціна автомобіля після двох переоцінок?
4. Ціну на товар вперше знизили на 20 %, потім ще на 10 %. На скільки відсотків всього знизили ціну на товар?
5. Початкова собівартість продукції знизилася першого разу на 30 %, другого – на 10 %. На скільки відсотків знизилась початкова собівартість продукції?
6. Випуск продукції за рік роботи підприємства виріс на 10 %, за наступний рік він підвищився на 20 %. На скільки відсотків збільшився випуск продукції за цей період?
7. Від тривалого зберігання ячмінь втрачає за перший рік 5 % своєї маси, за другий рік – 2 %. Скільки залишиться від 1000 ц ячменю через два роки?
8. Ціну на товар збільшили на 30 %, а потім нову ціну зменшили на 20 %. На скільки відсотків збільшили початкову ціну товару після цих двох переоцінок?

9. Скільки відсотків річних має виплачувати банк, щоб через 2 роки отримати 144 грн., якщо початковий вклад – 100 грн.
10. Банк виплачує 40 % річних. Скільки гривень треба покласти до банку, щоб через 2 роки на рахунку було 392 грн.?
11. Найбільший спільний дільник двох натуральних чисел, одне з яких становить $\frac{3}{4}$ другого, дорівнює 27. Їх найменше спільне кратне дорівнює 324. Знайти менше з невідомих чисел.
12. Найменшим спільним кратним двох чисел, одне з яких дорівнює 60, є 420. Знайти друге число, якщо найбільший спільний дільник цих чисел дорівнює 5.
13. Відношення двох чисел дорівнює найбільшому спільному дільнику чисел 175 і 91, а їх сума – найменшому спільному кратному чисел 3 і 16. Знайти більше з невідомих чисел.
14. Найбільший спільний дільник двох натуральних чисел, одне з яких становить $\frac{3}{5}$ другого, дорівнює 6. Їх найменше спільне кратне дорівнює 90. Знайти більше з невідомих чисел.
15. Добуток двох додатних чисел дорівнює найменшому спільному кратному чисел 4 і 14, а їх сума квадратів – найбільшому спільному дільнику чисел 600 і 800. Знайти суму невідомих чисел.
16. Знайти найбільший спільний дільник чисел 54, 90 та 225.
17. Знайти найбільший спільний дільник чисел 216, 336 та 612.
18. Знайти найменше спільне кратне чисел 56, 70 та 126.
19. Знайти найменше спільне кратне чисел 108, 90 та 162.
20. Яке найменше число метрів матеріалу повинне бути у рулоні, щоб його можна було продати без остачі по 2 м, 6 м, 10 м?
21. Яке найменше число кілограмів пшениці повинне бути у мішку, щоб її можна було продати без остачі по 3 кг, 6 кг, 14 кг?

22. Яке найменше число кілограмів картоплі повинне бути у ящику, щоб її можна було продати без остачі по 6 кг, 8 кг, 10 кг?
23. У велосипеді ведуча шестірня має 44 зубця, а ведена – 20 зубців. Знайти найменше число обертів, яке повинна зробити ведена шестірня, щоб шестерні зайняли первісне положення.
24. Усі присутні на святі хлопці одержали однакові подарунки. В усіх подарунках разом було 106 яблук і 159 груш. Скільки хлопців було на святі?
25. На змаганнях з настільного тенісу брали участь рівні по складу команди, всього 123 хлопчиків і 82 дівчинки. В усіх командах була однакова кількість хлопців і дівчат. Скільки команд брало участь у змаганнях?
26. Число збільшено на 60%. На скільки відсотків потрібно зменшити отримане число, щоб знову дістати початкове число?
27. Число зменшено на 80%. На скільки відсотків потрібно збільшити отримане число, щоб знову дістати початкове число?
28. У загоні з 40 дітей 30 вміють плавати, 27 вміють грати в шахи і тільки 5 не вміють ні того ні іншого. Скільки дітей вміють плавати і грати у шахи одночасно?
29. Машиніст провів потяг за 7 год. 30 хв. замість 9 год. за графіком. На скільки відсотків була збільшена швидкість потяга?
30. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо довжину збільшити на 40%, а ширину – на 30%?
31. У класі 35 учнів. З них 20 займаються в математичному гуртку, 11 – у біологічному, 10 учнів не відвідують жодний гурток. Скільки біологів захоплюються математикою?
32. У групі зі 100 туристів 66 володіють англійською мовою, 54 – французькою і 33 туристи володіють обома мовами. Скільки туристів у групі не знають жодної з цих мов?
33. На скільки відсотків збільшиться площа квадрата, якщо периметр його збільшити на 20%?

34. Скільки води треба додати до 7,5 кг 12% розчину солі, щоб одержати 10% розчин?

35. Скільки солі треба додати до 7,5 кг 12% розчину солі, щоб одержати 20% розчин?

Рівень 3

1. На ощадну книжку поклали 120 грн. Через рік з книжки взяли 24 грн. Ще через рік на книжці виявилось 107 грн. 10 коп. Скільки процентів щорічно нараховує ощадна каса?

2. Вкладник за свої заощадження одержав через рік 60 грн процентних грошей. Поклавши до каси ще 240 грн, вкладник мав через рік 2369 грн. Який річний процент нараховувала ощадна каса?

3. Сума цифр двозначного числа в 6 разів менша за це число. Добуток цього числа на число, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює 2430. Знайти це число.

4. Число одиниць двозначного числа на 3 менше від числа його десятків. Добуток цього числа на суму його цифр дорівнює 364. Знайти це число.

5. Двозначне число в два рази більше від добутку його цифр. Число, яке записане тими самими цифрами, тільки у зворотному порядку, відноситься до даного числа, як 7 : 4. Знайти це число.

6. Добуток цифр двозначного числа в три рази менше від цього числа. Якщо до числа додати 18, то дістанемо число, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.

7. Сума цифр двозначного числа дорівнює 9. Якщо переставити цифри цього числа, то дістанемо число, відношення якого до шуканого дорівнює $\frac{3}{8}$. Знайти це число.

8. Сума цифр двозначного числа дорівнює 6. Якщо до числа додати 18, то дістанемо число, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.

9. Якщо деяке двозначне число помножити на суму його цифр, то дістанемо 405. Якщо число, яке записане тими самими цифрами у зворотному порядку, помножити на суму його цифр, то дістанемо 486. Знайти це число.
10. Число одиниць двозначного числа на 2 більше від числа його десятків. Добуток цього числа на суму його цифр дорівнює 144. Знайти це число.
11. Добуток цифр двозначного числа у два рази більший, ніж сума його цифр. Якщо з шуканого числа відняти 27, то дістанемо число, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.
12. Сума квадратів цифр двозначного числа дорівнює 13. Якщо від цього числа відняти 9, то дістанемо число, яке записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайти це число.
13. Ціна товару знизилась першого разу на деяке число процентів, а потім ще раз на подвоєне число процентів порівняно з першим. Замість 60 грн. товар став коштувати 35 грн. 70 коп. На скільки процентів знижувалася ціна товару першого разу ?
14. До просушки вологість зерна становила 23%, а після просушки – 12%. На скільки відсотків зменшилася вага зерна після просушки?
15. До просушки вологість кукурудзи становила 28%, а після просушки – 10%. На скільки відсотків зменшилася вага кукурудзи після просушки?
16. У загоні з 20 людей 2 вивчали тільки англійську мову, 3 – тільки німецьку, 6 – тільки французьку. Ніхто не вивчав трьох мов. Один вивчав англійську і німецьку, троє – англійську і французьку. Скільки людей вивчало німецьку і французьку мови одночасно?
17. Із 100 студентів англійську мову вивчають 42, французьку – 28, німецьку – 30, французьку і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і англійську – 5, усі три мови одночасно – 3. Скільки студентів не вивчають жодної мови?
18. Підлога кімнати площею 12 м^2 покрита трьома килимами: площа одного килима 5 м^2 , другого – 4 м^2 , третього – 3 м^2 . Кожні два килими перекриваються по площі $1,5 \text{ м}^2$, причому $0,5 \text{ м}^2$ приходить на ділянку

підлоги, де перекриваються всі три килими. Яка площа підлоги, не перекритої килимами?

19. У ліцеї при деякому університеті 70 учнів. З них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. У драмгуртку 10 учнів з хору, у хорі 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів. Три спортсмена відвідують і драмгурток і хор. Скільки учнів не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються у драмгуртку?

20. У посудині міститься 50 л спирту міцністю 80° . Скільки літрів чистого спирту буде в цій посудині, якщо з неї відливати два рази по одному літру рідини і кожен раз вливати по одному літру води?

21. У посудині міститься 20 л спирту міцністю 40° . Скільки літрів чистого спирту буде в цій посудині, якщо з неї відливати три рази по одному літру рідини і кожен раз вливати по одному літру води?

22. У посудині було 64 л спирту. Частина спирту відлили і долили воду до попереднього об'єму. Потім відлили таку саму кількість суміші і знову долили водою до попереднього об'єму. Скільки літрів води доливали кожного разу, якщо в посудині зменшилося спирту на 15 л?

23. У посудині було 36 л спирту. Частина спирту відлили і долили воду до попереднього об'єму. Потім відлили таку саму кількість суміші і знову долили водою до попереднього об'єму. Скільки літрів води доливали кожного разу, якщо в посудині залишилося 25 л спирту?

24. Метали А і В містяться в одному сплаві відповідно у відношенні 2 : 3, а в другому – відповідно у відношенні 4 : 3. Скільки кілограмів другого сплаву треба взяти на один кілограм першого, щоб після сплавлення цих сплавів у один вміст металів А і В у новому сплаві був однаковим?

25. Метали А і В містяться в одному сплаві відповідно у відношенні 1 : 2, а в другому – відповідно у відношенні 2 : 3. Скільки кілограмів першого сплаву треба взяти на один кілограм другого, щоб після сплавлення цих сплавів у один, новий сплав містив метали А і В у відношенні 6 : 11?

26. Знайти двозначне число, куб суми цифр якого дорівнює квадрату цього числа.

27. Знайти таке тризначне число xyz , при якому чотиризначні числа $xyz1$ та $2xyz$ задовольняли би рівняння $xyz1 = 3 \cdot 2xyz$.

28. Деяке число є добутком трьох послідовних натуральних чисел. Сума часток, які отримуються при діленні цього числа на кожний із трьох співмножників, дорівнює 74. Знайти це число.

29. Запис шестизначного числа починається цифрою 2. Якщо цю цифру перенести з першого на останнє місце, зберігаючи порядок інших п'яти цифр, то нове число буде у три рази більшим від початкового. Знайти початкове число.

30. Знайти суму всіх таких натуральних чисел, кожне з яких задовольняє умову: якщо число 160 поділити на будь-яке з цих чисел, то остача становить одну третину від частки.

Розділ 2. Перетворення алгебраїчних виразів

Рівень 1

1. Обчислити $\left(\frac{5}{6} - 2\frac{3}{11}\right)^0 + \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2}$.

2. Обчислити $\sqrt[3]{(-5)^3} \cdot (2\pi - 3,14)^0 + 2$.

3. Обчислити $\left(0,027\frac{4}{3}\right)^{0,25} - \left(-\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

4. Обчислити $4^{0,5} + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1,5}\right)^{\frac{4}{3}}$.

5. Обчислити $\frac{3}{2} \cdot (2,25)^{\frac{1}{2}} - (\sqrt[3]{9})^{3,5}$.

6. Обчислити $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{(-3)} \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt[3]{9}$.

7. Обчислити $\sqrt[3]{-25} \cdot \sqrt{25}$.

8. Обчислити $\frac{4^{10} \cdot 11^8}{44^8}$.

9. Обчислити $7^9 \cdot (7^2)^6 : 7^{19}$.

10. Обчислити $\frac{55^6 \cdot 33^7}{11^{13} \cdot 15^6}$.

11. Обчислити $\frac{78^8 \cdot 36^7}{39^8 \cdot 72^6}$.

12. Обчислити $\left(81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

13. Обчислити $25^{0,5} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-2,5}\right)^{\frac{4}{5}}$.

14. Обчислити $\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} : 4^{\frac{1}{4}}\right)^2 + 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27}$.

15. Обчислити $\left(6 - 4\left(\frac{5}{16}\right)^0\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} - \frac{3}{4}$.

16. Обчислити $\frac{2^{-2} \cdot 5^3 \cdot 10^{-4}}{2^{-3} \cdot 5^2 \cdot 10^{-5}}$.

17. Обчислити $\left(6\frac{5}{9} - 3\frac{1}{4}\right) \cdot 2\frac{2}{17}$.

18. Обчислити $\frac{0,64 - \frac{1}{25}}{0,8 : \left(\frac{4}{5} \cdot 1,25\right)}$.

19. Обчислити $\frac{20}{99} + 0,2 + \frac{0,097}{1 - 0,01}$.

20. Обчислити $\left(96\frac{7}{30} - 94\frac{5}{18}\right) \cdot 2,25 : 0,4$.

21. Обчислити $\frac{3,9 \cdot 0,24 : \frac{5}{16}}{(4,06 - 2\frac{1}{2}) \cdot 0,8 \cdot 4\frac{4}{5}}$.

22. Обчислити $2 - \frac{3\frac{1}{3} \cdot 1,9 + 19,5 : 4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75} - 0,16}$.

23. Обчислити $\left(9 \cdot 3^{-2} + 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right) : \left(10^0 + \frac{1}{12}\right)$.

24. Обчислити $2005 \cdot (1 - 0, (9))^{100} + 1, (9)$.

25. Обчислити $\frac{2\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} - 3,25}{\left(\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{2}{9}}}$.

26. Обчислити $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0,2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

27. Обчислити $2 \cdot (0, (9) + 1)^2 - 1, (9)$.

28. Обчислити $\frac{0,23(7) + \frac{43}{450}}{0,5(61) - \frac{113}{495}}$.

29. Обчислити $10^5 \cdot (1 - 0, (9))^5 + 4, (9)$.

30. Обчислити $\frac{5}{3} + \frac{0,1(6) + 0, (3)}{0, (3) + 1,1(6)}$.

Рівень 2

1. Обчислити $\sqrt{(2 - 3\sqrt{3})^2} - 3 \cdot \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$.

2. Обчислити $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}$.

3. Обчислити $\sqrt[6]{(2-\sqrt{7})^6} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{7}+2)^3}$.
4. Обчислити $(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}$.
5. Обчислити $\sqrt[6]{(\sqrt{5}-4)^6} + \frac{1}{2}\sqrt{20}$.
6. Обчислити $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^0 \cdot \sqrt{(4-5\sqrt{2})^2} - \sqrt{50}$.
7. Обчислити $\sqrt{(6-5\sqrt{2})^2} \cdot (5\sqrt{2}+6)$.
8. Обчислити $\frac{3}{6-2\sqrt{6}} + \frac{3}{6+2\sqrt{6}}$.
9. Обчислити $\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}$.
10. Обчислити $\sqrt{(3-\sqrt{11})^2} - \sqrt[3]{(\sqrt{11}-6)^3}$.
11. Обчислити $(3-\sqrt{7}) \cdot \sqrt{(\sqrt{7}+3)^2} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$.
12. Обчислити $5 \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1} \cdot (\sqrt{5}-1)^{\frac{1}{2}} + 1 - 5\sqrt{5}$.
13. Обчислити $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} : (1-\sqrt{3}) \cdot 16^{\frac{1}{4}}$.
14. Обчислити $\sqrt[3]{1-2\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{28}} + 27^{\frac{1}{3}}$.
15. Обчислити $\sqrt[5]{(-25)^5} \cdot \sqrt{(2-\sqrt{11})^2} + 5\sqrt{275}$.
16. Обчислити $(3,14-\pi)^0 \cdot \sqrt{2} \cdot 8^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot \sqrt{(2-\sqrt{6})^2} : (\sqrt{6}-2)$.
17. Обчислити $\sqrt{\sqrt{((2-\sqrt{13}) \cdot (\sqrt{13}+2))^2}}$.
18. Обчислити $2\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$.
19. Обчислити $6\sqrt{3} + 3\sqrt{27} - 3\sqrt{75}$.

20. Обчислити $(3\sqrt{3} + 9) : (9 + 9\sqrt{3}) \cdot \sqrt{12}$.

21. Обчислити $\frac{\sqrt{144} \cdot \sqrt{14,4}}{\sqrt{0,144} \cdot \sqrt{1,44}}$.

22. Обчислити $(5\sqrt{12} - 2\sqrt{48} + 2\sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} - 20$.

23. Обчислити $(5 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{200}$.

24. Обчислити $(\sqrt{5} + 2) \cdot \sqrt[6]{(2 - \sqrt{5})^6}$.

25. Обчислити $(2 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{80}$.

26. Обчислити $\sqrt[3]{(-2)^3} \cdot \sqrt[4]{(3 - \sqrt{13})^4} + \sqrt{52}$.

27. Обчислити $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{(2 + \sqrt{7})^2}$.

28. Обчислити $(5 - \sqrt{29}) : \sqrt{(5 - \sqrt{29})^2} \cdot 16^{0,25}$.

29. Обчислити $\sqrt{(4 - 6\sqrt{7})^2} - 6 \cdot \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2}$.

30. Обчислити $5^{-1} \cdot \sqrt{(3,14 - \pi)^2} : (\pi - 3,14) \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}$.

31. Обчислити значення виразу $\frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) - \frac{2x-y}{xy} + \frac{1}{y}$.

32. Обчислити значення виразу $\left(a - \frac{a^2 + b^2}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b}\right)$.

33. Обчислити значення виразу $\left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1}\right) \cdot \left(a - \frac{2a-1}{a+1}\right)$.

34. Обчислити значення виразу $\frac{5x-2}{4-3x} - \frac{4+7x}{4+3x} + \frac{24-2x+9x^2}{9x^2-16}$.

35. Обчислити значення виразу $\frac{a^2-4}{a^2+2a} \cdot \left(a + \frac{2a}{a-2}\right) - \frac{a^3-8}{a+2} \cdot \left(2 + \frac{a^2}{a+2}\right)^{-1}$.

36. Обчислити значення виразу $\left(\frac{a^3-27b^3}{a-3b} + 3ab\right) \cdot \left(\frac{a-3b}{a^2-9b^2}\right)^2$.

37. Обчислити значення виразу $\left(\frac{a+3b}{a-3b} + \frac{a-3b}{a+3b} - \frac{a^2+9b^2}{a^2-9b^2}\right) \cdot \frac{5a^2-45b^2}{a^2+9b^2}$.

38. Обчислити значення виразу $\left(\frac{3}{a} - \frac{6}{a+3}\right) \cdot \left(3 + \frac{a^2+9}{a-3}\right)$.

39. Обчислити значення виразу $\left(\frac{11y-3y^2}{(y-3)^2} + y\right) : \left(y - \frac{7y-27}{(y-3)^2} - 3\right)$.

40. Обчислити значення виразу $\left(\frac{9a+18}{a^3+8} - \frac{a+4}{a^2-2a+4}\right) \cdot \frac{6a-3a^2-12}{5-a}$.

Рівень 3

1. Обчислити $2 + \sqrt{3} + \sqrt{7-2\sqrt{12}}$.

2. Обчислити $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

3. Обчислити $(\sqrt{5}+1) \cdot \sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

4. Обчислити $(2\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{9+\sqrt{32}}$.

5. Обчислити $(\sqrt{14}+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{19-2\sqrt{70}}$.

6. Обчислити $\frac{4-\sqrt{8}}{2} + \sqrt{27+2\sqrt{50}}$.

7. Обчислити $3 + \sqrt{12} + \sqrt{37-5\sqrt{48}}$.

8. Обчислити $\sqrt{6-2\sqrt{8}} + \sqrt{6+2\sqrt{8}}$.

9. Обчислити $(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{8-\sqrt{60}}$.

10. Обчислити $(\sqrt{30} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}}$.

11. Обчислити $\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}$.

12. Обчислити $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

13. Обчислити $(\sqrt{14} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{7}}$.

14. Обчислити $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - 1) \cdot \sqrt{6 + \sqrt{11}}$.

15. Обчислити $4\sqrt{2} \cdot (\sqrt{8 + \sqrt{15}} - \sqrt{8 - \sqrt{15}})$.

16. Обчислити $\frac{\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - 4b^2}} - \sqrt{a - 2b}}{\sqrt{a + 2b}}$.

17. Обчислити $\sqrt{x^2 + 2 + 2\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 + 2 - 2\sqrt{x^2 + 1}}$.

18. Обчислити $\frac{\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a - b}}{\sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - b}}$, де $b > 0$

19. Обчислити $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} + 4 - \sqrt{3}$.

20. Обчислити $\sqrt{11 + 2\sqrt{18}} + \sqrt{|2\sqrt{18} - 11|}$.

21. Обчислити значення виразу $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$, якщо $1 \leq x \leq 2$.

22. Обчислити значення виразу $\sqrt{8} \cdot (\sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} - \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}})$, якщо $x \geq 4$.

23. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} + 2}{\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} - 2}$, якщо $x \geq 8$.

24. Обчислити значення виразу $\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{x - 3}} - 2 - 1}{2\sqrt{x - 3}}$, якщо $3 < x < 4$.

25. Знайти найбільше значення виразу $\frac{9}{\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}}}$ на проміжку [3;8].

26. Знайти найменше значення виразу $\frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2}-\sqrt{x+\frac{1}{x}-2}}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-2}}$ на проміжку [0,2;1] .

27. Обчислити $\frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{24}+1}} - \frac{1}{\sqrt{7+\sqrt{24}-1}}$.

28. Обчислити $\frac{3}{\sqrt{3+\sqrt{8}-1}} + \frac{3}{\sqrt{3+\sqrt{8}+1}}$.

29. Обчислити $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

30. Обчислити $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

31. Обчислити $\left(\frac{4}{2\sqrt{x}+3x} - \frac{9\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-2}$.

32. Обчислити $32\left(\frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-7} + \frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}+7} - \frac{196}{x-49}\right)^{-3}$.

33. Обчислити $\frac{\sqrt{a}-a^{\frac{1}{2}}b}{1+\sqrt{a^{-1}b}} + \frac{\sqrt[3]{a^2}-a^{\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}-a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}} - 2\sqrt{a}$.

34. Обчислити $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{a-\sqrt{a^2-9}} - \frac{a-\sqrt{a^2-9}}{a+\sqrt{a^2-9}}\right) : \frac{a\sqrt{a^2-9}}{9}$.

35. Обчислити $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Розділ 3. Перетворення показникових та логарифмічних виразів

Рівень 1

1. Обчислити $\log_4 128$.

2. Обчислити $\log_{16} 8$.

3. Обчислити $3\log_{\sqrt{27}} 81$.

4. Обчислити $\log_{25} \sqrt{125}$.

5. Обчислити $9\log_{\frac{1}{8}} 16$.

6. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$.

7. Обчислити $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^2 9$.

8. Обчислити $\log_3^2 \frac{1}{\sqrt{27}}$.

9. Обчислити $2\log_{\sqrt{2}}^2 \sqrt[4]{8}$.

10. Обчислити $24\log_3^2 \sqrt{\sqrt{27}}$.

11. Обчислити $3^{\frac{2}{\log_5 3}}$.

12. Обчислити $(\sqrt{5})^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5}}$.

13. Обчислити $2^{\frac{6}{\log_5 8}}$.

14. Обчислити $(\sqrt{3})^{\frac{6}{\log_2 3}}$.

15. Обчислити $(\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{\log_3 2}}$.

16. Обчислити $\log_{\frac{2}{3}}^2 (\log_3 \sqrt{27})$.

17. Обчислити $\log_{\sqrt{6}}^2(\log_{\sqrt{2}} 8)$.

18. Обчислити $\log_9^2\left(\log_{0,2} \frac{1}{125}\right)$.

19. Обчислити $\log_{\sqrt{2}}^2\left(\log_{0,25} \frac{1}{16}\right)$.

20. Обчислити $\log_{\frac{64}{9}}^2(\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{81})$.

21. Обчислити $6 \cdot 3^{-1+\log_3 5}$.

22. Обчислити $8 \cdot 27^{1-\log_3 2}$.

23. Обчислити $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

24. Обчислити $3 + 5^{\frac{1}{\log_6 25}}$.

25. Обчислити $\sqrt{5 + 7^{\frac{1}{\log_6 49}}}$.

26. Обчислити $\log_2^3(3^{\log_9 16})$.

27. Обчислити $\log_3^3(2^{\log_4 9})$.

28. Обчислити $\log_{\sqrt{2}}^3(5^{-\log_{\sqrt{5}} \sqrt[4]{2}})$.

29. Обчислити $\log_{\frac{1}{3}}^3(2^{\log_{\sqrt{2}} 3})$.

30. Обчислити $4\log_{\frac{1}{5}}^3(3^{\log_9 125})$.

Рівень 2

1. Обчислити $49^{\log_7 2} + 25^{\frac{1}{2}\log_5 10}$.

2. Обчислити $2\log_{\sqrt{5}} 25 + 3\log_{\frac{1}{2}} 64$.

3. Обчислити $2\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} + 3\log_3 27$.
4. Обчислити $\log_2 13 \cdot \log_7 13 + 2\log_4 13 \cdot \log_{\frac{1}{7}} 13$.
5. Обчислити $2\log_2 \frac{1}{4} - 3\log_{\frac{1}{3}} 27$.
6. Обчислити $3\log_{\sqrt{2}} 16 + 8\log_3 \frac{1}{27}$.
7. Обчислити $\log_5(\log_4(\log_3 81))$.
8. Обчислити $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} \log_2(\log_2 16) \right)$.
9. Обчислити $\log_3(3\log_2 8) + \log_6(3\log_2 4)$.
10. Обчислити $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + 2\log_5 3}$.
11. Обчислити $-\log_2 \left(\log_2 \sqrt[4]{\sqrt{2}} \right)$.
12. Обчислити $\log_3 \left(\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^6 \right)$.
13. Обчислити $3^{\log_9 4 + \log_{\sqrt{3}} 2}$.
14. Обчислити $1 - 25^{\log_{25} 8} \cdot 49^{\log_7 2}$.
15. Обчислити $1 + 81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} \cdot 49^{\log_7 2}$.
16. Обчислити $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \lg 2}$.
17. Обчислити $\log_3 15 \cdot \log_5 15 + 4\log_{81} 15 \cdot \log_5 \frac{1}{15}$.
18. Обчислити $3\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9} + 5\log_5 125$.

19. Обчислити $16^{\log_4 2} + 9^{\frac{1}{2} \log_3 5}$.

20. Обчислити $\log_2 \left(8 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16 \right)$.

21. Обчислити $\log_2 13 \cdot \log_{13} 8 + \log_3 11 \cdot \log_{11} 9$.

22. Обчислити $\log_2 25 \cdot \log_{25} 4 - \log_5 15 \cdot \log_{15} 625$.

23. Обчислити $2 \log_{\sqrt{2}} 6 \cdot \log_3 7 + \log_2 36 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 49$.

24. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} 9 - 8 \log_4 \sqrt{\sqrt{2}}$.

25. Обчислити $\log_{25} 125 - \log_3 \sqrt[3]{\sqrt{27}}$.

26. Обчислити $\log_2 \left(4 - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 16 \cdot \log_9 27 \right)$.

27. Обчислити $-\log_3 \left(21 + \log_{\sqrt{3}} 27 \cdot \log_5 \frac{1}{25} \right)$.

28. Обчислити $\log_{\sqrt{3}} 11 \cdot \log_{11} 9 + \log_4 8 \cdot \log_{\frac{1}{7}} (49 \sqrt[3]{49})$.

29. Обчислити $5^{-8 \log_{25} \sqrt{2} + 1} - 3^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2} + 2}$.

30. Обчислити $2^{\frac{1}{\lg \sqrt{2}} - 1} - 10 \cdot 7^{\frac{1}{\log_9 49}}$.

Рівень 3

1. Обчислити $2^{\frac{6 \log_2 \sqrt{2} (5 - \sqrt{10}) + 8 \log_1 (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{4}}$.

2. Обчислити $20^{\frac{1}{2 \log_8 5}} \cdot (0,25)^{\frac{1}{2 \log_8 5}}$.

3. Обчислити $12^{\frac{1}{2 \log_9 4}} \cdot 3^{-\frac{1}{2 \log_9 4}}$.

4. Обчислити $\left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$.

5. Обчислити $\left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5 \log_5 3} + \frac{6}{5} \log_3 5} \cdot 5^{\frac{3}{5}}$.

6. Обчислити $\log_5 4 \cdot \log_6 125 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

7. Обчислити $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 49 \cdot \log_7 9$.

8. Обчислити $72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$.

9. Обчислити $4\sqrt{3} + 5^{\log_{25} \left(\frac{9}{25}\right)} - 15^{\frac{1}{2} + \log_5 \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)}$.

10. Обчислити $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)^{\frac{1}{3 \log_3 2} + \frac{4}{3} \log_2 3} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} 3}$.

11. Обчислити $A = 5^b + 6^c$, якщо $b = \frac{3}{\log_2 5}$, $c = (\log_5 6)^{-1}$.

12. Обчислити $A = 10^b + 6^c$, якщо $b = \left(\frac{1}{2} \log_2 100\right)^{-1}$, $c = (\log_7 6)^{-1}$.

13. Обчислити $A = 3^b$, якщо $b = \log_c 0,25 + 3 \log_u 4$, $c = \frac{1}{9}$, $u = 27$.

14. Обчислити $A = 7 \log_b (a^2 b) - 6 \log_{\frac{a}{b}} a$, якщо $\log_a b = 7$.

15. Обчислити $A = 7^b - 3^c$, якщо $b = \frac{2}{\log_3 7}$, $c = \left(\frac{1}{3} \log_2 3\right)^{-1}$.

16. Обчислити $A = 10^b + 3^c$, якщо $b = \frac{2}{\log_3 10}$, $c = (\log_6 3)^{-1}$.

17. Обчислити $A = 2^b - 10^c$, якщо $b = (\log_6 2)^{-1}$, $c = \left(\frac{1}{2} \log_2 10\right)^{-1}$.

18. Обчислити $A = \log_b(a^3 b^2) + \log_{\frac{a}{b}} a^5$, якщо $\log_a b = 6$.

19. Обчислити $A = 5^b - 3^c$, якщо $b = \log_4 3$, $c = \frac{1}{\log_5 4}$.

20. Обчислити $A = 7^b - 5^c$, якщо $b = \frac{1}{\log_5 6}$, $c = \log_6 7$.

21. Обчислити $\log_4 \left| 7^{\frac{\lg \lg 7}{\lg 7}} - \lg 700 \right|$.

22. Обчислити $\log_{\sqrt{7}} \left(3^{\frac{\lg \lg 3}{\lg 3}} + \frac{1}{\log_3 \frac{1}{10}} + 7 \right)$.

23. Обчислити $\frac{4(3-a)}{3+a} \cdot \log_{16} 36$, якщо $a = \log_{12} 27$.

24. Обчислити $\frac{2-a}{a+b} + \log_{35} \frac{1}{7} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 35}$, якщо $a = \log_{14} 7$, $b = \log_{14} 5$.

25. Обчислити $\log_{0,5} \sin 70^\circ + \log_{0,5} \sin 50^\circ + \log_{0,5} \sin 10^\circ$.

26. Обчислити $4 + \log_{\sqrt{2}} \sin 15^\circ + \log_{\sqrt{2}} \sin 30^\circ + \log_{\sqrt{2}} \sin 75^\circ$.

27. Обчислити $\lg \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 11^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 12^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 60^\circ$.

28. Обчислити $\log_2^2(\sqrt{2} + \log_3 \sin((1^\circ + 2^\circ + 3^\circ + \dots + 99^\circ): 10 - 45^\circ))$.

29. Обчислити $\log_4^2 |\cos^3(2^\circ + 4^\circ + 6^\circ + \dots + 48^\circ)|$.

30. Обчислити $\lg \operatorname{ctg} 5^\circ \cdot \lg \operatorname{ctg}(5^\circ + 7^\circ) \cdot \lg \operatorname{ctg}(5^\circ + 7^\circ + 9^\circ) \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{ctg}(5^\circ + 7^\circ + 9^\circ + \dots + 17^\circ)$.

Розділ 4. Перетворення тригонометричних виразів

Рівень 1

1. Обчислити $\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$.

2. Обчислити $\sin 345^\circ \cdot \cos 345^\circ$.
3. Обчислити $8 \cos 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$.
4. Обчислити $20 \sin 195^\circ \cdot \sin 285^\circ$.
5. Обчислити $16 \sin 255^\circ \cdot \cos 105^\circ$.
6. Обчислити $4 \sin^2 30^\circ + 12 \cos^2 30^\circ$.
7. Обчислити $6 \cos^2 45^\circ + 10 \sin^2 45^\circ$.
8. Обчислити $6 \sin^2 60^\circ - 4 \cos^2 60^\circ$.
9. Обчислити $4 \cos^2 210^\circ - 6 \sin^2 210^\circ$.
10. Обчислити $6 \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ$.
11. Обчислити $5 \operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{ctg} 197^\circ$.
12. Обчислити $8 \operatorname{tg} 157^\circ \cdot \operatorname{tg} 427^\circ$.
13. Обчислити $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{2 \sin 2\alpha}$.
14. Обчислити $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{4 \sin 2\alpha}$.
15. Обчислити $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)}$.
16. Обчислити $\frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(135^\circ - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}(135^\circ - \alpha)}$.
17. Обчислити $7 \cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
18. Обчислити $\sqrt{60} \operatorname{tg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
19. Обчислити $2\sqrt{3} \sin 2\alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

20. Обчислити $9\sqrt{20}\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

21. Обчислити $\sqrt{20}\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

22. Обчислити $\frac{6}{\sqrt{140}}\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{35}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23. Обчислити $\sqrt{1000}\sin \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

24. Обчислити $8\sqrt{15}\cos \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{15}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

25. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26. Обчислити $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

27. Обчислити $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

28. Обчислити $\frac{3}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

29. Обчислити $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$ і $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$.

30. Обчислити $13\cos \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 5$ і $\pi < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}$.

Рівень 2

1. Знайти значення виразу $\cos(2\arccos 1) + \frac{4}{\pi}\arcsin(-1)$.

2. Знайти значення виразу $\sqrt{2}\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{6}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Знайти значення виразу $\frac{12}{\pi} \left(\arcsin \left(\sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right) - \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right)$.

4. Знайти значення виразу $\sin 135^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ$.

5. Знайти значення виразу $\cos 30^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 30^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$.

6. Знайти значення виразу $\sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{14} \cdot \sin \frac{\pi}{2}$.

7. Знайти значення виразу $\cos \frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos 0 - \sin \frac{\pi}{18} \cdot \sin \frac{4\pi}{9}$.

8. Знайти значення виразу $\sin \left(\arccos \left(\sin \frac{4\pi}{3} \right) \right)$.

9. Знайти значення виразу $\cos \left(\arccos \left(\sin \frac{7\pi}{6} \right) \right)$.

10. Знайти значення виразу $\operatorname{tg} \left(\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$.

11. Знайти значення виразу $(\cos 105^\circ + \cos 75^\circ) \cdot \sin 15^\circ$.

12. Знайти значення виразу $(\sin 250^\circ + \sin 110^\circ) \cdot \cos 80^\circ$.

13. Знайти значення виразу $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \cos^2 5^\circ + \sin^2 5^\circ$.

14. Знайти значення виразу $\sin^2 \frac{\pi}{11} + \cos^2 \frac{\pi}{11} - \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right)^2$.

15. Знайти значення виразу $4 \sin 15^\circ \sin 30^\circ \sin 75^\circ - 1$.

16. Знайти значення виразу $\operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ - 2 \cos 15^\circ \cos 75^\circ$.

17. Знайти значення виразу $\sin 80^\circ \cos 350^\circ - \sin 190^\circ \cos 280^\circ$.

18. Знайти значення виразу $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} - 2 \sin \frac{3\pi}{4}$.

19. Знайти значення виразу $\sqrt{\frac{1 + \cos 4}{2}} + \cos 2$.
20. Знайти значення виразу $\sqrt{\frac{1 - \cos 8}{2}} + \sin 4$.
21. Знайти значення виразу $\cos^2 \frac{3}{2} - \sin^2 \frac{3}{2} + \sqrt{\cos^2 3}$.
22. Знайти значення виразу $\frac{1}{2} \sqrt{\sin^2 6} + \sin 3 \cdot \cos 3$.
23. Знайти значення виразу $\frac{1}{\sqrt{6}} (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)$.
24. Знайти значення виразу $\frac{1}{\sqrt{3}} (\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ)$.
25. Знайти значення виразу $\frac{1}{\sqrt{3}} (\cos 75^\circ + \sin 75^\circ)(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ)$.
26. Знайти значення виразу $\frac{3 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 7$.
27. Знайти значення виразу $\frac{5 \cos \alpha + \sin \alpha}{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 5$.
28. Знайти значення виразу $\frac{11 \sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 2$.
29. Обчислити $\frac{\sqrt{(1 - \cos 4)(1 + \cos 4)}}{\cos 2} + 2 \sin 2$.
30. Обчислити $2 \sin 3 \cdot \sqrt{(1 - \sin 3)(1 + \sin 3)} + \sin 6$.

Рівень 3

1. Знайти значення виразу $\sin 570^\circ (1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) : \sin^2 \alpha$.
2. Знайти значення виразу $\cos 1020^\circ \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \right) \operatorname{tg} \frac{2\alpha}{3}$.

3. Знайти значення виразу $\frac{(1 + \sin 2\alpha)\sin 480^\circ}{\sqrt{3} \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$.
4. Знайти значення виразу $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\cos \alpha - \sqrt{2} \cos(405^\circ - \alpha)}{2 \sin(30^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha}$.
5. Знайти значення виразу $\frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}{\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}}$.
6. Знайти значення виразу $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} \cdot \sin 600^\circ$.
7. Знайти значення виразу $7\sqrt{2} \sin 15^\circ (\sqrt{3} + \operatorname{ctg} 15^\circ)$.
8. Знайти значення виразу $\left(\frac{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 795^\circ - \sin 15^\circ} \right)^2$.
9. Знайти значення виразу $\sqrt{3}(\sin 80^\circ \cos 350^\circ - \sin 190^\circ \cos 280^\circ) \operatorname{tg} 570^\circ$.
10. Знайти значення виразу $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ \sin 57^\circ - \sin 393^\circ \sin 797^\circ$.
11. Знайти значення виразу $\frac{(\sin 370^\circ \cos 740^\circ + \cos 70^\circ \sin 80^\circ) \sin 5^\circ}{\sin 5^\circ \cos 10^\circ - \sin 730^\circ \cos 365^\circ}$.
12. Знайти значення виразу $(\cos 1^\circ + \cos 121^\circ + \cos 241^\circ) \operatorname{tg} 1^\circ$.
13. Знайти значення виразу $\operatorname{ctg} 20^\circ (\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 100^\circ)$.
14. Знайти значення виразу $\sin 1^\circ + \sin 91^\circ + 2 \sin 203^\circ (\sin 112^\circ + \sin 158^\circ)$.
15. Знайти значення виразу $\cos 35^\circ + \cos 125^\circ + 2 \sin 185^\circ (\sin 130^\circ + \sin 140^\circ)$.
16. Знайти значення виразу $\operatorname{ctg} 35^\circ (\sin 35^\circ + \sin 25^\circ - \cos 725^\circ)$.
17. Знайти значення виразу $(\sin 760^\circ + \cos 70^\circ - \cos 370^\circ) \cdot \operatorname{tg} 185^\circ$.
18. Знайти значення виразу $8 \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

19. Знайти значення виразу $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$.
20. Знайти значення виразу $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
21. Знайти значення виразу $\frac{8\sqrt{3}}{\cos(\alpha - 60^\circ) - \cos(\alpha + 60^\circ)}$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{11}$.
22. Знайти значення виразу $\frac{128}{5}(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha)\cos \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.
23. Знайти значення виразу $\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha}\right) \cdot (\sin \alpha + \sin 5\alpha) - 2$, якщо $\alpha = 15^\circ$.
24. Знайти значення виразу $\sin \frac{5}{2}\alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \sin 3\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
25. Знайти значення виразу $\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos 3\alpha}\right) \cdot (\cos \alpha + \cos 5\alpha) - 2$, якщо $\alpha = -15^\circ$.
26. Знайти значення виразу $\left(\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}\right) \cdot (1 + \cos 4\alpha)$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{24}$.
27. Знайти значення виразу $\left(\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha}\right) \cdot (1 - \cos 4\alpha)$, якщо $\alpha = -\frac{\pi}{24}$.
28. Обчислити $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{8}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.
29. Обчислити $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -\sqrt{5}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.
30. Обчислити $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5\sqrt{5}$ і $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розділ 5. Алгебраїчні раціональні рівняння

Рівень 1

1. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{x^2(x^2 - 4)}{x} = 0$.

2. Знайти кількість коренів рівняння $x(x - x^2) = 9(1 - x)$.
3. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x+1)(x-3)}{x^2-1} = 0$.
4. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^2-9)(x+1)}{x-3} = 0$.
5. Знайти кількість коренів рівняння $(4-x^2)(x+1) = 4-x^2$.
6. Знайти кількість коренів рівняння $(2x+6)(x+x^2) = 2x+6$.
7. Знайти кількість коренів рівняння $(1-x)(x^2+x) = x-1$.
8. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x-\pi)(x^2+4x)}{x-3,14} = 0$.
9. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^2-\pi^2)(x+2)}{x+3,14} = 0$.
10. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x}{x-1,41} = 0$.
11. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2-2)x = x+\sqrt{2}$.
12. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2-4)x = 2(2-x)$.
13. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^2-(3,14)^2)(3x+4)}{x^2-\pi^2} = 0$.
14. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^2-(1,41)^2)x}{x+\sqrt{2}} = 0$.
15. Знайти кількість коренів рівняння $x^2(x+2)(x-3) = (x+2)(x-3)$.
16. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+6x+5}{x+1} = 0$.
17. Розв'язати рівняння $\frac{x-x}{x+3} + x^2 = 9$.

18. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x} - (1 - x^2) = 4x$.

19. Розв'язати рівняння $(x + 2)^0 + 3 = x^2$.

20. Розв'язати рівняння $4(x - 4)^0 + 12 = x^2$.

21. Розв'язати рівняння $(x + 1)^{-1} \cdot (x^2 - 1) = 0$.

22. Знайти добуток коренів рівняння $x^{-1} \cdot (x^3 - 9x) = 0$.

23. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{x+1} = x - \frac{2}{x+1}$.

24. Розв'язати рівняння $\frac{x+4}{x-4} = \frac{3x-20}{4-x} - x$.

25. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2} + 6 = x^2 + x - 2$.

26. Обчислити суму кубів коренів рівняння $\left(x^2 - 16^{\frac{2}{3}}\right) \cdot x = x^2 \cdot (x + 2\sqrt[3]{2})$.

27. Знайти кількість коренів рівняння $\left(x^2 - 2^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x = x^2 \cdot \left(x - 4^{\frac{1}{8}}\right)$.

28. Розв'язати рівняння $\frac{(x-3)(x+4)}{x-3} - 2 = 17 - x - x^2$.

29. Розв'язати рівняння $(x+5)^0 \cdot (2x+4) = -x^2 - 4x - 1$.

30. Розв'язати рівняння $(x+1)^{-1} \cdot (x^2 + 4x + 3) = 10 + 7x - x^2$.

Рівень 2

1. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{2(x+2)}{x-3} = \frac{x^2 + 2x}{x+3}$.

2. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{4(x+1)(x-5)}{x-2} = 5(x-5) - \frac{x^2 - 7x + 10}{x+1}$.

3. Розв'язати рівняння $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$.

4. Знайти цілий корінь рівняння $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}}=\frac{2x-7}{4x^2-9}+\frac{1}{2x-3}$.

5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}}=\frac{x^2-5x+6}{4x^2-1}+\frac{1}{2x+1}$.

6. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

7. Розв'язати рівняння $\frac{2x^2-2}{x^2-36}-\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-6x}=\frac{x^2-1}{x^2+6x}$.

8. Знайти найменший корінь рівняння $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$.

9. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2x-x^2}=\frac{8}{x^3-4x}$.

10. Розв'язати рівняння $\frac{x^3+64}{16+4x}=11-\frac{x}{4}$.

11. Розв'язати рівняння $\frac{x^3-8}{4-2x}=\frac{x}{2}-7$.

12. Розв'язати рівняння $\frac{x^3+27}{9+3x}=7-\frac{2x}{3}$.

13. Розв'язати рівняння $\frac{x^3-125}{25-5x}+\frac{13x}{5}+2=0$.

14. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2,9$.

15. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5$.

16. Розв'язати рівняння $\frac{x+1}{2x-2} = \frac{9}{2x+8} + \frac{4}{4x-4}$.

17. Обчислити $6x+2$, якщо $\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{x+1}{2(x-2)} = \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2}$.

18. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{2x}{x^2+x-6} + \frac{1}{x-2} = 2$.

19. Знайти найбільший корінь рівняння $\frac{1}{x-4} + \frac{3x}{x^2-6x+8} = 6$.

20. Знайти додатний корінь рівняння $\frac{7x}{x^2+2x-15} - 2 = \frac{4}{x-3}$.

21. Розв'язати рівняння $\frac{3}{x+5} + 1 = \frac{2x}{x^2+7x+10}$.

22. Обчислити добуток коренів рівняння $(x^2-5x+7)^2 - (x-2)(x-3) = 1$.

23. Обчислити суму коренів рівняння $(2x^2+3x-1)^2 - 5(2x^2+3x+3) + 24 = 0$.

24. Обчислити суму коренів рівняння $(x^2+x-11)^2 - (x-3)(x+4) = 1$.

25. Обчислити суму коренів рівняння $(x^2+5x+4)^2 + (x^2+5x+6) = 8$.

26. Знайти найбільший корінь рівняння $\frac{1}{x^3+2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{x^3+3}$.

27. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{1}{x^4-1} - \frac{1}{x^4+2} = \frac{1}{90}$.

28. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{3}{1+x+x^2} = 3-x-x^2$.

29. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{17x}{x(1+x^2-x^4)} = 17-x^2+x^4$.

30. Обчислити суму коренів рівняння $6 - \frac{21}{x^2-4x+10} = 4x-x^2$.

Рівень 3

1. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$.

2. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{1}{x(x+4)} - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{4}{5}$.
3. Обчислити суму цілих коренів рівняння $\frac{1}{x(x-2)} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{7}{12}$.
4. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1$.
5. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{x^2+x-4}{x^2+x-1} + \frac{x^2+x+7}{x^2+x+1} = 1$.
6. Обчислити добуток цілих коренів рівняння $\frac{6x}{x^2+2x+3} + \frac{11x}{x^2+7x+3} = 2$.
7. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{x^2-6x-9}{x} = \frac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.
8. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$.
9. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+3x+4}{x} = \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x+4}$.
10. Знайти найбільший корінь рівняння $\frac{x}{x^2-x+2} + \frac{x}{x^2+x+2} = \frac{3}{4}$.
11. Обчислити добуток коренів рівняння $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$.
12. Обчислити суму цілих коренів рівняння $(x+2)(x+5)(x+15)(x+18) = -360$.
13. Знайти найменший корінь рівняння $x(x-2)(x^2-1) = 24$.
14. Знайти добуток цілих коренів рівняння $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = 2$.
15. Знайти найменший корінь рівняння $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} = -\frac{1}{5}$.
16. Обчислити суму коренів рівняння $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

17. Знайти кількість раціональних коренів рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.
18. Обчислити добуток коренів рівняння $2x^2 - 7x - 7x^{-1} + 2x^{-2} + 9 = 0$.
19. Знайти модуль різниці коренів рівняння $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 5\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)$.
20. Обчислити суму коренів рівняння $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.
21. Знайти суму додатних коренів рівняння $x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{35}{x^2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = 14\left(x - \frac{1}{x}\right)$.
22. Розв'язати рівняння $x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 6$.
23. Обчислити суму коренів рівняння $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$.
24. Обчислити добуток коренів рівняння $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.
25. Обчислити суму цілих коренів рівняння $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$.
26. Обчислити суму коренів рівняння $x^4 + 5x^2(x+1) = 6(x+1)^2$.
27. Знайти добуток коренів рівняння $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
28. Знайти суму розв'язків рівняння $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$.
29. Знайти добуток коренів рівняння $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$.
30. Знайти кількість коренів рівняння $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 90$.

Розділ 6. Ірраціональні рівняння

Рівень 1

1. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$.
2. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x+1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = 0$.
3. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^2-16)\sqrt{1+x}}{x-4} = 0$.
4. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{x^3 \cdot \sqrt{-x}}{x} = -9x\sqrt{-x}$.
5. Знайти кількість коренів рівняння $x\sqrt{x^2}\sqrt{-x} = -16\sqrt{-x}$.
6. Знайти кількість коренів рівняння $\sqrt{-x} + x^2 + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\sqrt{-x} = 25$.
7. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x} = -x^2$.
8. Розв'язати рівняння $\sqrt{(x+4)(x-4)} + \sqrt{4-x} = 0$.
9. Розв'язати рівняння $\sqrt{(7-x)(x+1)} - \sqrt{x-7} = 0$.
10. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{-x^3}}{\sqrt{-x}} + \sqrt{x^2} = 2$.
11. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt{(x-5)^3}}{\sqrt{x-5}} + \sqrt{(5-x)^2} = 4$.
12. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt[3]{-x^4}}{\sqrt[3]{x}} + 2(\sqrt[4]{x})^2 = 0$.
13. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt[5]{-(4-x)^6}}{\sqrt[5]{4-x}} + 3(\sqrt[4]{4-x})^5 = 0$.
14. Розв'язати рівняння $(2x+10)\sqrt{x} = (x-2)\sqrt{x}$.
15. Розв'язати рівняння $(2x+8)\sqrt{x+6} = (x-3)\sqrt{x+6}$.

16. Знайти суму коренів рівняння $(3x+7)\sqrt{x+7} = (x-1)\sqrt{x+7}$.

17. Знайти добуток коренів рівняння $(3x+3)\sqrt{x+3} = (x-1)\sqrt{x+3}$.

18. Розв'язати рівняння $2x + \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-x^2} + x^2 - 8$.

19. Розв'язати рівняння $x^2 + \sqrt{x^2-16} = \sqrt{x^2-16} + 6x - 5$.

20. Розв'язати рівняння $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} + \sqrt{2-x} = 0$.

21. Розв'язати рівняння $\sqrt{\frac{5-x}{x+1}} + \sqrt{x-5} = 0$.

22. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x-3} = ((3-x)^2)^{\frac{1}{3}}$.

23. Знайти добуток коренів рівняння $\sqrt[3]{(2-x)^5} = ((x-2)^4)^{\frac{1}{3}}$.

24. Знайти добуток коренів рівняння $((x-4)^2)^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{(4-x)^3}$.

25. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{\frac{9-x^2}{x+5}} + \sqrt{x-3} = 0$.

26. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt[6]{\frac{x^2-16}{x+5}} = 0$.

27. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{(2-x)(x+3)} - \sqrt[4]{x-2} = 0$.

28. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{(x+3)(x-4)} + \sqrt[6]{x^2-9} = 0$.

29. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-8} = \sqrt{-2x}$.

30. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-32} = \sqrt{-4x}$.

Рівень 2

1. Розв'язати рівняння $\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{(10+x)^2}$.

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(5+x)^2}$.
3. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{(3x+1)^2} + x = 9$.
4. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{(5-x)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 10$.
5. Знайти добуток коренів рівняння $2 \cdot \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{(3-x)^2} = 5$.
6. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{(4x-8)^2} + \sqrt{(2-x)^2} = 4$.
7. Знайти добуток коренів рівняння $3 \cdot \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2-x)^2} = 4$.
8. Знайти суму коренів рівняння $5 \cdot \sqrt{(x-4)^2} - 2\sqrt{(4-x)^2} = 4$.
9. Розв'язати рівняння $\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{(x+2)^2} = 1$.
10. Розв'язати рівняння $\sqrt{(x-3)^2} - \sqrt{(1-x)^2} = 1$.
11. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-1} = x-2$.
12. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1} + x - 3 = 0$.
13. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4} + x - 2 = 0$.
14. Розв'язати рівняння $x - \sqrt{x+2} = 4$.
15. Розв'язати рівняння $\sqrt{7-x} = x-1$.
16. Розв'язати рівняння $x - \sqrt{x+1} = 5$.
17. Розв'язати рівняння $21 + \sqrt{2x-7} = x$.
18. Розв'язати рівняння $1 - \sqrt{1+5x} = x$.
19. Розв'язати рівняння $2\sqrt{x+5} - 2 = x$.
20. Розв'язати рівняння $4\sqrt{x+6} = x+1$.

21. Знайти цілий корінь рівняння $x \cdot \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x^3} = 2$.
22. Розв'язати рівняння $x \cdot \sqrt[4]{x} + 2\sqrt[8]{x^5} = 3$.
23. Розв'язати рівняння $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$.
24. Розв'язати рівняння $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$.
25. Знайти суму коренів рівняння $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$.
26. Знайти добуток коренів рівняння $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.
27. Знайти добуток коренів рівняння $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$.
28. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{4 + x\sqrt{x^2 + 8}} = x + 2$.
29. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - 3x} + 5 = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
30. Знайти цілий корінь рівняння $\sqrt{5 - x} - 2 = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

Рівень 3

1. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{(-x^2 - 4)^2} = 5x$.
2. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{9}{4}\right)^2} = 5x$.
3. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{5}{4}\right)^2} = -3x$.
4. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{15}{4}\right)^2} = -8x$.
5. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{3}{4}\right)^2} = -2x$.

6. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{3}{4}\right)^2} = 2x$.

7. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt{\left(-x^2 - \frac{7}{4}\right)^2} = -4x$.

8. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt{(-x^2 - 6)^2} = -7x$.

9. Знайти найменший цілий корінь рівняння $\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-2)^2 - 1}} = 1$.

10. Знайти найменший цілий корінь рівняння $\frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 - 1}} = 1$.

11. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

12. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.

13. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$.

14. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$.

15. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

16. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$.

17. Знайти добуток коренів рівняння $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

18. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$.

19. Знайти добуток коренів рівняння $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

20. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$.

21. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16} - 12$.

22. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-6} = 2x - 2\sqrt{x^2 - 36} - 6$.

23. Знайти найменше значення виразу $x + \sqrt{8}$, якщо $x^2 + x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0$.

24. Знайти цілий корінь рівняння $4x^2 + 12x\sqrt{1+x} = 27(1+x)$.
25. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$.
26. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x+3} - 1$.
27. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.
28. Знайти кількість коренів рівняння $\sqrt[3]{-x} = 1 - \sqrt{x+1}$.
29. Знайти суму цілих коренів рівняння $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
30. Знайти кількість цілих коренів рівняння $\sqrt{5+x-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10+x-6\sqrt{x+1}} = 1$.

Розділ 7 Показникові рівняння

Рівень 1

1. Розв'язати рівняння $9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$.
2. Розв'язати рівняння $(0,125)^{4-x} = \sqrt{4^{2x}}$.
3. Розв'язати рівняння $(0,25)^{\frac{x}{2}-1} = 4\sqrt{8}$.
4. Розв'язати рівняння $(0,2)^{x-3} = 5\sqrt[4]{25}$.
5. Розв'язати рівняння $(0,7)^{x+4} = \left(\frac{10}{7}\right)^{-3}$.
6. Розв'язати рівняння $(0,4)^{3-x} = 6,25$.
7. Розв'язати рівняння $(0,8)^{x-1} = 1\frac{61}{64}$.
8. Розв'язати рівняння $(5\sqrt[3]{5})^x = \frac{1}{25}$.

9. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-\frac{x}{3}} = 9\sqrt{27}$.
10. Розв'язати рівняння $(1,44)^{x+7} = \left(1\frac{1}{5}\right)^2$.
11. Розв'язати рівняння $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 57$.
12. Розв'язати рівняння $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x-1} = 44$.
13. Розв'язати рівняння $2^{3x+1} + 2^{3x+2} = 384$.
14. Розв'язати рівняння $3^{x+1} + 3^{x-1} = 90$.
15. Розв'язати рівняння $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x+2} = 45$.
16. Розв'язати рівняння $2^{2x-1} \cdot 4^{x+1} = 8^{x+1}$.
17. Розв'язати рівняння $\sqrt{5} \cdot (0,2)^{x+0,5} = \frac{1}{5} \cdot (0,04)^x$.
18. Розв'язати рівняння $(0,5)^{1-x} \cdot 2^{x+8} = (\sqrt[4]{2})^x$.
19. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt[4]{3^{2x+4}}}{9} = 27^{x+1}$.
20. Розв'язати рівняння $\frac{49}{\sqrt{7^{x-2}}} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$.
21. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt[3]{8^{x-2}}}{4} = 4^{2-\frac{x}{2}}$.
22. Розв'язати рівняння $4^{x+1} \cdot 9^x : 6^{3x+1} = 24$.
23. Розв'язати рівняння $3^{x+2} \cdot 5^{x+1} : 15^{1-x} = 45$.
24. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{16^{x+2}} \cdot \sqrt[3]{8^{2x-1}} : 4^{x+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
25. Розв'язати рівняння $(0,25)^{x+1} \cdot 8^{1-x} : 16^{-x} = 4\sqrt{2}$.

26. Знайти добуток коренів рівняння $x^2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{x+1} = 0$.

27. Розв'язати рівняння $4 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} - x^3 \cdot 2^{2x} = 0$.

28. Розв'язати рівняння $\sqrt{27} \cdot 5^{x-2} = 5\sqrt{5} \cdot 3^{x-2}$.

29. Знайти кількість коренів рівняння $x^3 \cdot 12^x - x \cdot 3^x \cdot 2^{2x} = 0$.

30. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{-x} \cdot 6^{x+1} + 2x \cdot 3^{x+1} \cdot 2^x = 0$.

Рівень 2

1. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x+3} + 49^{x-1} + 7^{2x-1} = 399$.

2. Знайти добуток коренів рівняння $2^{x^2-1} - 3^x = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$.

3. Розв'язати рівняння $3^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 3^{3x}$.

4. Розв'язати рівняння $3^{3x} + 9 \cdot 2^{2x} = 4^x + 3^{2+3x}$.

5. Розв'язати рівняння $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \cdot 3^x = \frac{7}{36}$.

6. Розв'язати рівняння $2^{2x+3} \cdot 3^x + 2 \cdot 4^x \cdot 3^{x+2} = \frac{13}{72}$.

7. Розв'язати рівняння $3^{3x+1} - 4 \cdot 27^{x-1} + 9^{\frac{3}{2}x-1} = 80$.

8. Розв'язати рівняння $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$.

9. Розв'язати рівняння $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

10. Розв'язати рівняння $3^x + \frac{240}{3^x} = \frac{9^{x+2}}{3^x}$.

11. Обчислити добуток коренів рівняння $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 = 0$.

12. Розв'язати рівняння $2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} - 8 = 0$.

13. Знайти найбільший корінь рівняння $4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$.
14. Знайти суму квадратів коренів рівняння $\frac{4}{2^x + 2} - \frac{1}{2^x - 3} = 2$.
15. Розв'язати рівняння $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$.
16. Обчислити добуток коренів рівняння $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$.
17. Знайти кількість коренів рівняння $27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$.
18. Обчислити квадрат суми коренів рівняння $5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} = 26$.
19. Розв'язати рівняння $3 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}} - 7 \cdot 4^{\frac{x-1}{8}} = 20$.
20. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{9^{x+1}} + 6 \cdot 3^{1-x} = 29$.
21. Розв'язати рівняння $(\sqrt{5})^{\sqrt{x+1}} - (\sqrt[4]{5})^{\sqrt{x+1}} = 20$.
22. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt[3]{64} - 8^{\frac{x+1}{x}} + 12 = 0$.
23. Обчислити добуток коренів рівняння $15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135$.
24. Розв'язати рівняння $25^{x+\frac{1}{2}} - 5^{2-2x} = 20$.
25. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt{10^x} - 55 \cdot \sqrt[4]{16 \cdot 5^x} \cdot 2^{\frac{x}{4}} = -1000$.
26. Розв'язати рівняння $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 = 0$.
27. Розв'язати рівняння $7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} = 4$.
28. Розв'язати рівняння $10^{2x} + 60 \cdot 10^{-2x} = 2(10^{2x} - 20 \cdot 10^{-2x})$.
29. Розв'язати рівняння $2^x + 10 = 36 \cdot 2^{2-x}$.
30. Розв'язати рівняння $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[9]{3^{x-10}}) = 84$.

Рівень 3

1. Знайти найменший корінь рівняння $3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}$.
2. Знайти найбільший корінь рівняння $2^{x-2} = 3^{x^2+x-6}$.
3. Знайти найменший корінь рівняння $7^{x+1} = 5^{x^2-3x-4}$.
4. Знайти найменший корінь рівняння $4^{x+4} = 7^{x^2-x-20}$.
5. Знайти найбільший корінь рівняння $5^{x-5} = 3^{x^2-6x+5}$.
6. Розв'язати рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.
7. Знайти суму коренів рівняння $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.
8. Розв'язати рівняння $2 \cdot 81^x = 36^x + 3 \cdot 16^x$.
9. Розв'язати рівняння $6 \cdot 25^x - 5 \cdot 10^x - 4^x = 0$.
10. Розв'язати рівняння $36^x = 2 \cdot 12^x + 3 \cdot 4^x$.
11. Знайти найменше значення виразу $3x - \log_2 3$, якщо $6^{x-4} = 8^{x^2-2x-8}$.
12. Знайти найбільше значення виразу $2x - \log_3 4$, якщо $6^{x+3} = 3^{x^2-x-12}$.
13. Знайти найменше значення виразу $4x - \log_2 9$, якщо $12^{x-7} = 4^{x^2-4x-21}$.
14. Знайти найбільше значення виразу $3x - \log_5 27$, якщо $15^{x+6} = 5^{x^2+4x-12}$.
15. Знайти найменше значення виразу $2x - 4 \log_{49} 2$, якщо $7^{x^2-3x-18} = 14^{x-6}$.
16. Знайти суму коренів рівняння $3 \cdot 16^{\frac{x^2-16x-15}{4}} = 48 + 24 + 12 + \dots$.
17. Розв'язати рівняння $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x + \dots = 3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + \dots$.
18. Знайти суму квадратів коренів рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$.
19. Знайти добуток коренів рівняння $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = 10$.

20. Розв'язати рівняння $2 \cdot 7^x - 3 \cdot 2^x = 6 \frac{1}{7} \cdot 14^{\frac{x}{2}}$.

21. Розв'язати рівняння $2 \cdot 3^{\frac{x}{3}} - 3 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 6^{\frac{x}{6}}$.

22. Розв'язати рівняння $2^{x+7} + 2^{x+6} + 2^{x+5} + \dots = \frac{1}{15}(2+4+6+8+\dots+30)$.

23. Розв'язати рівняння $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 36^{\frac{x}{4}}$.

24. Розв'язати рівняння $3^{\frac{x}{2}+2} + 3^{\frac{x}{2}+1} + 3^{\frac{x}{2}} + \dots = \frac{1}{4}((-20)+(-18)+(-16)+\dots+32)$.

25. Розв'язати рівняння $(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^{x+8} + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^{x+8} = 196^{2+\frac{x}{4}}$.

26. Обчислити добуток коренів рівняння $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.

27. Розв'язати рівняння $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

28. Розв'язати рівняння $\sqrt{2^{2x+2} + 7 \cdot 2^x + 7} = 4 - 2^{x+2}$.

29. Розв'язати рівняння $\sqrt{3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x + 3} = 3 - 3^{x+1}$.

30. Обчислити суму коренів рівняння $2^{x^2}(x-\sqrt{x}) - 2^{x^2+1} = 16(x-x^{\frac{1}{2}}-2)$.

Розділ 8. Логарифмічні рівняння

Рівень 1

1. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 9)\log_2(x+1) = 0$.

2. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 2x)\log_3 x = 0$.

3. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 2x)\log_3(-x-1) = 0$.

4. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x^3 + 4x^2)\log_2(2+x)}{x} = 0$.

5. Знайти кількість коренів рівняння $(4x - x^2) \log_x 2 = 0$.
6. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\sqrt{x^2}}{x} \log_2(-x) + x^2 + \log_2(-x) = 1$.
7. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\sqrt{x^2}}{x} \cdot \log_3(-x) \cdot \log_3(-x) = -1$.
8. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 6x) \log_2(x - 2) = 0$.
9. Розв'язати рівняння $\log_3(1 - 2x) = \log_{\sqrt{2}} 4$.
10. Розв'язати рівняння $\log_3(x - 12) = \log_{25} 625$.
11. Розв'язати рівняння $3^{\log_3(x-7)} = \log_4 64$.
12. Розв'язати рівняння $10^{\lg(4-x)} = \log_{\sqrt{2}} 8$.
13. Розв'язати рівняння $\log_3 \log_2 x = 1$.
14. Розв'язати рівняння $\log_2 \log_3(-x) = 1$.
15. Розв'язати рівняння $(x - 2)(x - 4) \log_{(x-1)} 2 = 0$.
16. Розв'язати рівняння $(x - 1)(x + 5) \log_{(2-x)} 3 = 0$.
17. Розв'язати рівняння $(x + 2) \log_{(x+3)}(x^2 - 15) = 0$.
18. Розв'язати рівняння $(x - 3) \log_{(4-x)}(x^2 - 35) = 0$.
19. Розв'язати рівняння $\lg(x + 1,5) = -\lg x$.
20. Розв'язати рівняння $\log_2(2x - 1) = \log_{\frac{1}{2}} x$.
21. Обчислити $x + \sqrt{2}$, якщо $\log_3(-2 - x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$.
22. Обчислити $x + \sqrt{5}$, якщо $\log_5(4 - x) = -\log_5(-x)$.
23. Розв'язати рівняння $\log_3(5 + 4 \log_3(x - 1)) = 2$.

24. Розв'язати рівняння $\log_2(2+2\log_2(x+6))=2$.
25. Обчислити суму від'ємних коренів рівняння $\log_2^2(x^2)=4$.
26. Обчислити добуток від'ємних коренів рівняння $\log_2^2(x^2)=3$.
27. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{-x}} \cdot \log_2 x^2 = 3 \cdot 2^{1+\sqrt{-x}}$.
28. Розв'язати рівняння $3^{\sqrt{1-x}} \cdot \log_3 x^2 = \frac{4}{3} \cdot 3^{1+\sqrt{1-x}}$.
29. Знайти кількість коренів рівняння $\log_2(x+3)=2^x$.
30. Знайти кількість коренів рівняння $\log_2(x-10)=2^{-x}$.

Рівень 2

1. Розв'язати рівняння $\log_3 x - \log_3(x+8) = -\log_3(x+3)$.
2. Розв'язати рівняння $\lg(x-4) + \lg(x-6) = \lg 8$.
3. Знайти суму коренів рівняння $\lg(x-1) + \lg(x+1) = 3\lg 2 + \lg(x-2)$.
4. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1) = 1 + 2\log_2 x$.
5. Розв'язати рівняння $\lg(0,5+x) = \lg 0,5 - \lg x$.
6. Знайти добуток коренів рівняння $\log_3(x^2+1) = \log_3 2 + \log_3(x+8)$.
7. Розв'язати рівняння $\lg(3-x) - \lg(x+2) = 2\lg 2$.
8. Розв'язати рівняння $2\lg(-x) = \lg(x+6)$.
9. Розв'язати рівняння $2\log_2(-x) = \log_2(x+2)$.
10. Розв'язати рівняння $2\lg(x-1) = \lg(1,5x+1)$.
11. Обчислити суму коренів рівняння $\lg(5-x) - \frac{1}{3}\lg(35-x^3) = 0$.

12. Розв'язати рівняння $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$.
13. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$.
14. Розв'язати рівняння $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$.
15. Розв'язати рівняння $\lg(x(x+9)) + \lg \frac{x+9}{x} = 0$.
16. Розв'язати рівняння $\log_2 \frac{x-5}{x+5} + \log_2(x^2 - 25) = 0$.
17. Обчислити добуток коренів рівняння $2 \lg x - \lg 4 = -\lg(5 - x^2)$.
18. Розв'язати рівняння $2 \log_2 x - \log_2 6 = -\log_2 \left(6x^2 - \frac{90}{x^2}\right)$.
19. Обчислити добуток коренів рівняння $\log_3 x^2 - \log_3 7 = -\log_3 \left(7x^2 - \frac{560}{x^2}\right)$.
20. Знайти кількість коренів рівняння $\log_5 x^2 - \log_5 16 = -\log_5(20 - 4x^2)$.
21. Розв'язати рівняння $\frac{\lg \sqrt{x+7} - \lg 2}{\lg 8 - \lg(x-5)} = -1$.
22. Розв'язати рівняння $\frac{\lg x^2}{\lg(6x-5)} = 1$.
23. Розв'язати рівняння $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$.
24. Знайти кількість коренів рівняння $\log_3(4 - 3^x) = 5^{\log_5(1-x)}$.
25. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 + x - 2)(2 \log_x 27 - \log_{27} x - 1) = 0$.
26. Знайти суму коренів рівняння $(x^2 - 6x + 8)(\log_5(x-1) + \log_{(x-1)} 25 - 3) = 0$.
27. Знайти найбільший корінь рівняння $\log_{(x-4)}(9 \cdot (x-4)^2) \cdot \log_3^2(x-4) = 4$.
28. Знайти найбільший корінь рівняння $\lg(10^x - 9 \cdot 10^2) \cdot \lg(10^{x+1} - 9 \cdot 10^3) = 6$.

29. Обчислити суму коренів рівняння $x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}$.

30. Обчислити добуток коренів рівняння $x^{\log_4 x} = 2^{3(\log_4 x + 3)}$.

Рівень 3

1. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{\log_3 x^9} - 4\log_3 \sqrt{3x} = -1$.

2. Знайти найменший корінь рівняння $\lg(10x) \cdot \lg(0,1x) = \lg x^3 - 3$.

3. Розв'язати рівняння $\log_2^2(2x) = \log_2 x^4$.

4. Знайти найбільший корінь рівняння $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0$.

5. Розв'язати рівняння $2\lg(x^2) - (\lg(-x))^2 = 4$.

6. Розв'язати рівняння $3\lg(x^2) - \lg^2(-x) = 9$.

7. Розв'язати рівняння $4\log_4^2(-x) + 2\log_4(x^2) = -1$.

8. Знайти найменший корінь рівняння $\sqrt{4\log_2(-x)} - \log_2(\sqrt[4]{x^4}) = 0$.

9. Розв'язати рівняння $2\log_3 \sqrt{x^2} - \sqrt{\log_3(-x)} = 1$.

10. Розв'язати рівняння $\log_2 \sqrt[6]{x^6} - \sqrt{\log_2(-x)} = 2$.

11. Знайти найбільший корінь рівняння $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

12. Обчислити суму квадратів коренів рівняння

$$5\log_{\left(\frac{x}{9}\right)} x + \log_{\left(\frac{9}{x}\right)} x^3 + 8\log_{(9x^2)} x^2 = 2.$$

13. Знайти цілий корінь рівняння $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

14. Знайти цілий корінь рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

15. Розв'язати рівняння $7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}$.

16. Розв'язати рівняння $x^{\lg 3} + 3^{\lg x} = 54$.

17. Розв'язати рівняння $2^{\lg(-x)} + |x|^{\lg 2} = 8$.
18. Розв'язати рівняння $5^{\lg(300-x)} + |x-300|^{\lg 5} = 50$.
19. Знайти добуток коренів рівняння $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.
20. Знайти цілий корінь рівняння $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.
21. Знайти найменший корінь рівняння $2^{\log_2^2(1-x)} + |x-1|^{\log_2(1-x)} = 32$.
22. Обчислити суму коренів рівняння $5^{\log_5^2(x-3)} + |3-x|^{\log_5(x-3)} = 10$.
23. Знайти цілий корінь рівняння $4(x+1)\log_9^2 x + 12x\log_{27} x - 16 = 0$.
24. Знайти цілий корінь рівняння $4\log_4^2 x - (x-1)\log_{\frac{1}{2}} x - 3x - 6 = 0$.
25. Розв'язати рівняння $\log_2(4x^2 + 1) - \log_2 x = 2 - \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
26. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + 2\right) - \log_{\frac{1}{2}}(-x) = |x+2| - 1$.
27. Розв'язати рівняння $\lg(3 - \lg(x-3)^2) = 2\lg(\lg(3-x))$.
28. Розв'язати рівняння $\log_2(-\log_{16}(x-2)) + \log_2(3 - \log_{16}(2-x)^4) = 0$.
29. Розв'язати рівняння $2^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}}(5-x)^2 + \log_2 3} \cdot 5^{3\log_{27}(x-5)} = 1200$.
30. Знайти суму коренів рівняння $(\log_2 5 + \log_4(2-x)^2)^{\log_3(x-2)} = (x-2)^{\log_9 16}$.

Розділ 9. Тригонометричні рівняння

Рівень 1

1. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)(2x+7)}{\cos^2 x} = 0$.

2. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x-7\pi)\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right)(x^2+x)}{\sin x}=0$.

3. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x+5\pi)(x^2-25)}{\operatorname{tg} x}=0$.

4. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(x+1)(x+2)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=0$.

5. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)(\sqrt{3}-x^2)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=0$.

6. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x+\pi)(2x-x^2)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=0$.

7. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(6x+x^2)}{1-\sin x}=0$.

8. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x+3\pi)(2x^2+x)}{1+\cos x}=0$.

9. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x+1}=0$.

10. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{(x-1)\cdot x\cdot(x+2)}{\operatorname{ctg} x}=0$.

11. Обчислити суму коренів рівняння $\left(x+\frac{1}{6}\right)^0(2\sin \pi x+1)=0$, що належать проміжку $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

12. Обчислити суму коренів рівняння $\left(x - \frac{5}{6}\right)^0 (2\cos \pi x + \sqrt{3}) = 0$, що належать проміжку $[0; 3]$.

13. Обчислити суму коренів рівняння $\left(x + \frac{1}{4}\right)^{-1} (\sin^2 2\pi x - 1) = 0$, на проміжку $\left[-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

14. Обчислити суму коренів рівняння $(x-1)^{-1} (\cos^2 \pi x - 1) = 0$, що належать проміжку $[-1; 2]$.

15. Знайти кількість коренів рівняння $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)(\operatorname{tg} \pi x + 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

16. Знайти кількість коренів рівняння $\left(x + \frac{3}{4}\right)^{-2} x(\operatorname{ctg} \pi x - 1) = 0$ на проміжку $\left[-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

17. Обчислити квадрат суми коренів рівняння $(x-5)(x-2)^0 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0$, що належать проміжку $[-3; 5]$.

18. Обчислити добуток коренів рівняння $(x+1)(x-4) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} = 0$, що належать проміжку $[-2; 6]$.

19. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 16)(x^2 - 5) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{8}\right) = 0$ на проміжку $[-8; 10]$.

20. Обчислити суму коренів рівняння $(x-4) \left(x - \frac{5}{2}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} + 1\right) = 0$, що належать проміжку $\left[-\frac{1}{2}; 4\right]$.

21. Скільки додатних розв'язків рівняння $2\sin\frac{\pi x}{2} = -1$ не перевищують числа 2π .
22. Знайти кількість від'ємних розв'язків рівняння $\cos 2\pi x = -1$, які більші за число $(-\pi)$.
23. Скільки додатних розв'язків рівняння $(\sin x - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) \cdot \sin 3x = 0$ не перевищують числа 6.
24. Знайти кількість від'ємних розв'язків рівняння $(\cos x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) \cdot \cos 4x = 0$, які більші за число $\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.
25. Скільки додатних розв'язків рівняння $(\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3}) \cdot \operatorname{ctg} x = 0$ не перевищують числа 5.
26. Знайти кількість розв'язків рівняння $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \log_2(x+2)$, що належать інтервалу $(0; \pi)$.
27. Знайти кількість розв'язків рівняння $|\operatorname{ctg} x| = \log_2 x$, що належать інтервалу $(\pi; 2\pi)$.
28. Знайти кількість розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = 2^{1+\log_2 x}$, що належать проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
29. Знайти кількість розв'язків рівняння $|\cos x| = (0,5)^x$, що належать проміжку $[0; \pi]$.
30. Знайти кількість розв'язків рівняння $\lg x = 2^{\log_2 \sin x}$.
31. Знайти кількість розв'язків рівняння $\sin x = x - \pi$.
32. Знайти кількість розв'язків рівняння $\cos x = x - \frac{\pi}{2}$.
33. Визначити кількість розв'язків рівняння $\operatorname{tg} x = -x$, що належать інтервалу $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

34. Визначити кількість розв'язків рівняння $\sin 4x = -\frac{x}{2}$, що належать проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

35. Визначити кількість розв'язків рівняння $\cos 2x = 1 - x$, що належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Рівень 2

1. Знайти x (у градусах), якщо $3\sin x = 2\cos^2 x$ і $90^\circ < x < 180^\circ$.

2. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (у градусах)
 $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$.

3. Знайти найменший додатний корінь рівняння (у градусах) $\sin x + \cos \frac{x}{2} = 0$.

4. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (у градусах) $\sin x = \cos 2x$.

5. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (у градусах) $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

6. Знайти найменший додатний корінь рівняння (у градусах) $\sin 2x = \cos x$.

7. Знайти x (у градусах), якщо $\cos(x + 60^\circ) = \sin(x - 30^\circ)$ і $180^\circ < x < 270^\circ$.

8. Знайти x (у градусах), якщо $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$ і $160^\circ < x < 200^\circ$.

9. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння (у градусах)
 $\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0$.

10. Знайти x (у градусах), якщо $\sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = 0$ і $120^\circ < x < 170^\circ$.

11. Знайти суму коренів рівняння $\sin x = \frac{2}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

12. Знайти кількість коренів рівняння $\sin(-2x) = 1 - \frac{4}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

13. Знайти кількість коренів рівняння $\cos x = \frac{2}{\pi}(x + \pi) - 1$.
14. Обчислити суму коренів рівняння $\cos \pi x = 2(x - 1) - 1$.
15. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\operatorname{ctg} \pi x = 4\left(x + \frac{1}{4}\right) - 1$.
16. Знайти найменший додатний корінь рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$.
17. Розв'язати рівняння $2\sin(5\pi x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$.
18. Розв'язати рівняння $3\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -(x + 2)^2 - 3$.
19. Розв'язати рівняння $1 - \sin\left|\frac{\pi x}{2}\right| = -|x + 1|$.
20. Розв'язати рівняння $2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2 + |x - 4|$.
21. Знайти кількість коренів рівняння $\log_{3\pi}(-x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
22. Знайти кількість коренів рівняння $\log_{2\pi} x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
23. Розв'язати рівняння $2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -1 - 2^{|x-3|}$.
24. Знайти кількість коренів рівняння $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2\pi|}$, що належать проміжку $[-3\pi; 2\pi]$.
25. Знайти кількість коренів рівняння $\log_{\pi} x^2 = 2|\cos x|$, що належать проміжку $[-\pi; \pi]$.

26. Обчислити суму квадратів коренів рівняння $\frac{\operatorname{tg} \pi x}{\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)} = 0$, що належать

проміжку $[-3; 2]$.

27. Визначити кількість коренів рівняння $\frac{\operatorname{ctg} \pi x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$, що належать

проміжку $[-3; 3]$.

28. Знайти цілий корінь рівняння $\cos\left(\frac{\pi x}{7(x-6)}\right) = -1$.

29. Знайти суму цілих коренів рівняння $\sin\left(\frac{\pi x}{2(x+4)}\right) = -1$.

30. Знайти кількість коренів рівняння $\sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot \cos 2x = 0$.

31. Знайти кількість коренів рівняння $(\log_{\pi}(\pi^2 - x^2)) \cdot \sin 2x = 0$.

32. Знайти кількість коренів рівняння $(\log_{(x+\pi)}(\pi - x)) \cdot \operatorname{tg}(x + \pi - 1) = 0$.

33. Обчислити суму коренів рівняння $(\cos \pi x) \cdot \arcsin(x - 1) = 0$.

34. Обчислити добуток коренів рівняння $(\sin \pi x) \cdot \arcsin(2x + 3) = 0$.

35. Обчислити суму коренів рівняння $\left(\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \arccos(x - 2) = 0$.

Рівень 3

1. Знайти кількість коренів рівняння $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$, що належать проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right]$.

2. Знайти кількість коренів рівняння $8\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 3$, що належать проміжку $[0; \pi]$.

3. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння $\cos 5x = \sin 7x$, що належать проміжку $[-30^\circ; 90^\circ]$.

4. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння $\cos 3x = \sin x$, що належать проміжку $[-70^\circ; 140^\circ]$.

5. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння $\sin 3x + \sin x = 4\sin^3 x$, що належать проміжку $[-50^\circ; 230^\circ]$.

6. Знайти x (у градусах), якщо x – корінь рівняння $\sin 3x = \cos x - \sin x$ і $80^\circ < x < 120^\circ$.

7. Знайти $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}$, якщо x – корінь рівняння $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ і $\operatorname{tg} x > 1$.

8. Знайти $|\operatorname{tg} x| - \sqrt{2}$, якщо x – корінь рівняння $\operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1$ і $\operatorname{tg} x < -2$.

9. Знайти x (у градусах), якщо x – корінь рівняння $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$ і $90^\circ < x < 180^\circ$.

10. Знайти найменше значення виразу $\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{5}{3}$, якщо x – корінь рівняння $\sin x + 2\cos x = 1$.

11. Знайти найбільше значення виразу $|\operatorname{tg} x| + 1$, якщо x – корінь рівняння $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

12. Знайти найбільше значення виразу $2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, якщо x – корінь рівняння $2\sin x + \cos x = 1$.

13. Знайти $\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| - \sqrt{57}$, якщо x – корінь рівняння $8\sin x - 3\cos x = 4$ і $\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| > 1$.

14. Знайти $\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{3}{2}$, якщо x – корінь рівняння $2\sin x + \cos x = -1$.

15. Знайти найбільше значення виразу $6 - \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$, якщо x – корінь рівняння $\sin x + 2\cos x = -1$.

16. Обчислити суму коренів рівняння $\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 = \frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$,

що належать проміжку $[2; 3]$.

17. Обчислити суму коренів рівняння $\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{2}{\operatorname{tg} \pi x + \operatorname{ctg} \pi x}$, що

належать проміжку $\left[-\frac{1}{2}; 3,5\right]$.

18. Знайти кількість коренів рівняння $\left(\cos x - \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) \cdot \sin x = 0$, що належать

проміжку $[-\pi; \pi]$.

19. Знайти кількість коренів рівняння $\left(\sin x - \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}\right) \cdot \cos x = 0$, що належать

проміжку $[-2\pi; 2\pi]$.

20. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння

$$\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x, \text{ що належать проміжку } [400^\circ; 460^\circ].$$

21. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння

$$\cos 2x \cos 6x = \sin 7x \sin 3x + \cos 10x, \text{ що належать проміжку } [90^\circ; 170^\circ].$$

22. Знайти x у градусах, якщо $90^\circ < x < 110^\circ$ і

$$\sin(360^\circ - 3x) = \cos(270^\circ + 5x) - \sqrt{3} \sin(90^\circ - x).$$

23. Знайти x у градусах, якщо $300^\circ < x < 360^\circ$ і

$$\sin(270^\circ - 4x) - \cos(90^\circ + 3x) = \cos(180^\circ + 2x).$$

24. Знайти x у градусах, якщо $315^\circ < x < 400^\circ$ і

$$\sin^7 x \cdot \cos^3 x - \cos^7 x \cdot \sin^3 x = \frac{1}{64} \cos 2x.$$

25. Знайти x у градусах, якщо $500^\circ < x < 600^\circ$ і

$$\frac{9}{8} (\sin^5 x \cdot \cos^3 x + \cos^5 x \cdot \sin^3 x) = \sin^6 x \cdot \cos^6 x + \frac{1}{8}.$$

26. Обчислити суму коренів рівняння $\sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \cos^2(2\pi x) + \frac{1}{4}$, що

належать проміжку $[0; 1,5]$.

27. Обчислити суму коренів рівняння $5(1 + \cos(\pi x)) = 2 + \sin^4(\pi x) - \cos^4(\pi x)$, що належать проміжку $\left[-\frac{2}{3}; 5\right]$.

28. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\sin^4(\pi x) + \cos^4(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x)$.

29. Знайти добуток коренів рівняння $\sin^3(\pi x) + \cos^3(\pi x) = 1 - \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$, що задовольняють умову $0 < x < 2,5$.

30. Знайти суму коренів рівняння $1 + \cos \pi x = \sin \pi x + 2\sin \pi x \cdot \cos \pi x$, що належать проміжку $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

31. Знайти суму коренів рівняння $\cos 2\pi x - 3\cos \pi x = 4\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, що належать проміжку $\left[-\frac{2}{3}; 3\right]$.

32. Знайти у градусній мірі суму коренів рівняння $1 - \cos 3x \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 3x$, що належать проміжку $[-400^\circ; -90^\circ]$.

33. Обчислити добуток коренів рівняння $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)} + \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{3}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi x}{3}\right)} + 2 = 0$, що належать проміжку $[-1; 4]$.

34. Знайти кількість коренів рівняння $\operatorname{tg}(7\pi x) + \operatorname{tg}(3\pi x) = 0$, що належать інтервалу $(0, 1)$.

35. Знайти кількість коренів рівняння $\sin x + \sin 1 = \sin(x + 1)$, що належать інтервалу $\left[-\frac{5\pi}{2}; 2\pi\right]$.

36. Обчислити у градусній мірі суму коренів рівняння $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1 + \cos 2x$, що належать проміжку $[30^\circ; 200^\circ]$.

37. Обчислити у градусній мірі суму коренів рівняння $\operatorname{tg}x \operatorname{ctg}2x - \operatorname{tg}2x \operatorname{ctg}x = 0$, що належать проміжку $[-60^\circ; 180^\circ]$.

38. Знайти кількість коренів рівняння $\sin \pi x + 2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2 + 2 \cos \pi x$, що належать проміжку $[-1; 3]$.

39. Обчислити у градусній мірі суму коренів рівняння $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \operatorname{tg}x$, що належать проміжку $[-60^\circ; 420^\circ]$.

40. Знайти кількість коренів рівняння $\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}x = 4 \sin x$, що належать проміжку $[0; \pi]$.

Розділ 10. Рівняння з модулями

Рівень 1

1. Обчислити $3x + 2$, якщо $|x + 2| = 2(3 - x)$.

2. Обчислити $2x + 3$, якщо $|1 - x| = 3(x + 1)$.

3. Знайти найбільше значення виразу $5x + 1$, якщо $|x - 4| = 4 - x$.

4. Знайти найменше значення виразу $3x + 1$, якщо $|3 - x| = x - 3$.

5. Знайти найбільше значення виразу $1 - 2x$, якщо $2|x + 1| = 2 - x$.

6. Знайти найменше значення виразу $2 - 6x$, якщо $2|x + 2| = 6 - x$.

7. Розв'язати рівняння $\frac{|x|}{x} + x = -5$.

8. Розв'язати рівняння $\frac{x + 2}{|x + 2|} + 4x = -13$.

9. Розв'язати рівняння $\frac{|x - 1|}{1 - x} + 6x = 17$.

10. Розв'язати рівняння $\frac{|3-x|}{x-3} + 2x = 9$.
11. Розв'язати рівняння $\frac{x-5}{|5-x|} + 5x = 19$.
12. Розв'язати рівняння $\frac{x-4}{|4-x|} + 3x = -22$.
13. Розв'язати рівняння $9 + x|x| = 0$.
14. Розв'язати рівняння $16 - (x-2)|2-x| = 0$.
15. Розв'язати рівняння $25 + (x+3)|x+3| = 0$.
16. Розв'язати рівняння $1 - (3-x)|x-3| = 0$.
17. Розв'язати рівняння $(x-5)|5-x| = 4$.
18. Розв'язати рівняння $(x+1)|x+1| = -4$.
19. Знайти суму квадратів коренів рівняння $||x|-2| = 2$.
20. Знайти добуток коренів рівняння $||x-3|+3| = 5$.
21. Розв'язати рівняння $||x+7|+10| = 10$.
22. Знайти суму коренів рівняння $||x-1|-2| = 4$.
23. Розв'язати рівняння $|x-2| + (x^2-4)^2 = 0$.
24. Розв'язати рівняння $|x+3| + (x^2-9)^2 = 0$.
25. Знайти добуток розв'язків рівняння $x^2 - 5x \cdot \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$.
26. Розв'язати рівняння $x^2 + 2x + 3 \cdot \frac{|x-1|}{x-1} = 0$.

27. Знайти суму коренів рівняння $x^2 - \left|x - \frac{1}{4}\right| = 0$.
28. Знайти найменше значення виразу $2x + \sqrt{20}$, якщо $x^2 - 2|x - 1| = 2$.
29. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|} = 2$.
30. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 - x - 12}{|x + 3|} = 3$.

Рівень 2

1. Знайти суму коренів рівняння $|x - 2| + |x - 4| = 3$.
2. Знайти кількість цілих коренів рівняння $|x| + |x - 6| = 6$.
3. Знайти найменший корінь рівняння $|x + 2| - |x - 3| = 5$.
4. Знайти найбільший корінь рівняння $|x - 2| - 3|3 - x| + x = 0$.
5. Розв'язати рівняння $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0$.
6. Знайти найменший корінь рівняння $|x + 1| + |x - 5| = 20$.
7. Знайти суму цілих коренів рівняння $|x + 5| + |x - 8| = 13$.
8. Знайти найменший корінь рівняння $|x| - |x - 2| = 2$.
9. Розв'язати рівняння $|4 - x| + |2x - 2| = 5 - 2x$.
10. Знайти добуток коренів рівняння $|x - 1| + |x - 2| = |x - 3| + 4$.
11. Знайти добуток коренів рівняння $|-x^2 - 16| = 8|x|$.
12. Знайти суму модулів коренів рівняння $|-x^2 - 10| = 6|x| + 2$.
13. Знайти кількість коренів рівняння $|-x^2 - 20| = 8|x| + 5$.

14. Розв'язати рівняння $|-x^2 - 24| = 8|x+1|$.
15. Знайти найбільший корінь рівняння $|-x^2 - 8| = 11|x-2|$.
16. Знайти суму квадратів коренів рівняння $\frac{2x^2 - 18}{|x| - 1} = |x| + 3$.
17. Знайти добуток коренів рівняння $\frac{2x^2 - 32}{|x| + 2} = |x| + 4$.
18. Обчислити найбільше значення виразу $3x + 2$, якщо $\frac{8 - 2x^2}{|x| - 4} = |x| + 2$.
19. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{2 - 2x^2}{|x| + 2} = |x| - 1$.
20. Знайти добуток коренів рівняння $\frac{2x^2 - 50}{|x| - 2} = |x| - 5$.
21. Знайти найменший цілий корінь рівняння $\frac{|x-7|}{|x-6|-1} = 1$.
22. Знайти найменший цілий корінь рівняння $\frac{|9-x|}{|x-8|-1} = 1$.
23. Знайти найбільший цілий корінь рівняння $\frac{|x+5|}{|x+4|-1} = 1$.
24. Знайти найбільший цілий корінь рівняння $\frac{|x+8|}{|x+5|-3} = 1$.
25. Розв'язати рівняння $\frac{|x-5|}{|x+2|+3} = 1$.
26. Розв'язати рівняння $\frac{|x+4|}{|x-8|+6} = 1$.
27. Знайти суму коренів рівняння $|x-3|^{x^2-3x} = 1$.
28. Знайти модуль суми коренів рівняння $|x+2|^{x^2-4} = 1$.

29. Знайти кількість коренів рівняння $|x-5|^{x^2-3x-10} = 1$.

30. Знайти добуток коренів рівняння $|x+4|^{x^2+x-12} = 1$.

Рівень 3

1. Знайти найбільше значення виразу $12x+3$, якщо $\left| \frac{3|x|+2}{|x|-1} \right| = 3$.

2. Обчислити суму від'ємних коренів рівняння $\left| \frac{2-3|x|}{1+|x|} \right| = 1$.

3. Знайти кількість коренів рівняння $\left| \frac{3|x|-2}{|x|-1} \right| = 2$.

4. Знайти найменше значення виразу $6x+1$, якщо $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} = 1$.

5. Знайти найбільше значення виразу $6x-\sqrt{73}$, якщо $\frac{|1+x|(2+x)}{x^2-|x|-2} = 3x$.

5. Знайти найменше значення виразу $2x+1$, якщо $|x^2-4x+3|+|x^2-5x+6|=1$.

7. Знайти найменше значення виразу $2-3x$, якщо $|x^2-3x+2|+|x^2-5x+6|=2$.

8. Знайти найбільше значення виразу $4-2x$, якщо $(|x-1|-3)(|x+2|-5)=6$.

9. Знайти найбільше значення виразу $1-2x$, якщо $(|x-3|-1)(|x+4|-2)=9$.

10. Знайти найбільше значення виразу $4x+3$, якщо $x|x|+2|x-2|=3$.

11. Знайти найменше значення виразу $1-3x$, якщо $x|x-2|+3|x+1|=15$.

12. Знайти найбільше значення виразу $2-3x$, якщо $||x+1|-|x-3||=|x|$.

13. Знайти найбільше значення виразу $3x+1$, якщо $||x+2|-|x-6||=|x|$.

14. Знайти найменше ціле значення виразу $2x+2$, якщо $||x-7|-|x^2-9||=|x|$.

15. Знайти найбільше значення виразу $3x+1$, якщо $||x^2 - 4| - |x+1|| = |x+3|$.
16. Знайти суму квадратів коренів рівняння $|x^3 - 1| = 1 - x$.
17. Знайти найменше значення виразу $2x+5$, якщо $|x^3 - 64| = 16(4 - x)$.
18. Знайти суму розв'язків рівняння $\left| \frac{3x+12}{\sqrt{-x+2}} \right| = x+4$.
19. Розв'язати рівняння $\left| \frac{x^2 - 4}{|x| + 2} \right| = x - 1$.
20. Знайти суму коренів рівняння $\left| \frac{6(x-6)}{\sqrt{8-x+2}} \right| = 2x - 12$.
21. Знайти добуток коренів рівняння $(|x|-3) \cdot 11^{\sqrt{2-x}} \cdot 12^{|x-2|} = (|x|-3) \cdot 11^{\sqrt{2-x}} \cdot 12^{\sqrt{2-x}}$.
22. Знайти добуток коренів рівняння $(5-|x|) \cdot 3^{\sqrt{x-1}} \cdot 4^{|1-x|} = (5-|x|) \cdot 3^{\sqrt{x-1}} \cdot 4^{\sqrt{x-1}}$.
23. Знайти найбільше значення виразу $2x+1$, якщо $\sqrt{4x-x^2} = 4-x$.
24. Знайти найменше значення виразу $9^x + 2$, якщо $9^{-|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+1|+|x-1|}$.
25. Знайти найбільше значення виразу $27^x + 2$, якщо $9^{|x|} = 2^{|x+1|+|x-1|}$.
26. Визначити найбільший відмінний від нуля цілий корінь рівняння $(x^2 + 3x + 1) \cdot \cos x = |\cos x|$.
27. Знайти кількість цілих коренів рівняння $(x^2 - 12x + 31) \cdot \sin x = |\sin x|$.
28. Знайти добуток коренів рівняння $(x^2 - 2x + 1) \cdot |\log_2 x| = \log_2 x$.
29. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 - 4x + 1) \cdot \log_2 \left(\frac{x}{2} - 2\right) = \left| \log_2 \left(\frac{x}{2} - 2\right) \right|$.

30. Знайти кількість коренів рівняння $(x^2 + 5x + 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{3} + 2\right) = \left| \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{3} + 2\right) \right|$.

Розділ 11. Системи рівнянь

Рівень 1

1. Обчислити $x^2 - y^2$, якщо $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$

2. Обчислити $y^2 - x^2$, якщо $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = -2. \end{cases}$

3. Обчислити $y - x$, якщо $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2x - 2y = 6. \end{cases}$

4. Обчислити $y + x$, якщо $\begin{cases} 3x + 3y = 12, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

5. Обчислити $(y - x)^2$, якщо $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 2x - 2y = 8. \end{cases}$

6. Обчислити $(y + x)^2$, якщо $\begin{cases} 4x + 4y = -8, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

7. Обчислити $x^2 - 4y^2$, якщо $\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ 3x - 6y = 6. \end{cases}$

8. Обчислити $4x^2 - y^2$, якщо $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x - 2y = 10. \end{cases}$

9. Обчислити $3x - 3y$, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1,5. \end{cases}$

10. Обчислити $4y - 4x$, якщо $\begin{cases} 4x + 4y = 16, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 4. \end{cases}$

11. Обчислити $(x + 2y)^2$, якщо $\begin{cases} 3x + 6y = 12, \\ 2x - y = 6. \end{cases}$

12. Обчислити $(y-2x)^2$, якщо $\begin{cases} 2x+3y=8, \\ 8x-4y=12. \end{cases}$

13. Обчислити $\frac{1}{x^2-y^2}$, якщо $\begin{cases} 2x+2y=1, \\ 3x-3y=1. \end{cases}$

14. Обчислити $\frac{1}{y^2-x^2}$, якщо $\begin{cases} 2x+2y=\frac{1}{2}, \\ 4x-4y=2. \end{cases}$

15. Обчислити $\frac{y-x}{x+y}$, якщо $\begin{cases} 6x+4y=12-2y, \\ 2x+4y=8+6y. \end{cases}$

16. Обчислити $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 3x-4y=10, \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

17. Обчислити x^2+y^2 , якщо $\begin{cases} 8x-3y=11, \\ 9x+5y=4. \end{cases}$

18. Обчислити $x+y$, якщо $\begin{cases} 3x-11y=-2, \\ 2x+7y=13. \end{cases}$

19. Обчислити $2x+y$, якщо $\begin{cases} 9x-7y=2, \\ 3x+5y=8. \end{cases}$

20. Обчислити $\frac{x}{y}$, якщо $\begin{cases} 5x+3y=11, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$

21. Обчислити $\frac{y}{x}$, якщо $\begin{cases} 9x-5y=-1, \\ 2x+7y=16. \end{cases}$

22. Обчислити $x-y$, якщо $\begin{cases} 7x-8y=-2, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$

23. Обчислити $y-x$, якщо $\begin{cases} 5x-8y=2, \\ 3x+4y=10. \end{cases}$

24. Обчислити $2x-5y$, якщо $\begin{cases} 8x-3y=5, \\ 2x+7y=9. \end{cases}$

25. Обчислити $|x| + y$, якщо $\begin{cases} 5x + 6y = -22, \\ 3x - 2y = -2. \end{cases}$

26. Обчислити $(x + y)^2$, якщо $\begin{cases} 3x - 7y = -4, \\ 2x - 3y = -1. \end{cases}$

27. Обчислити $x - y$, якщо $\begin{cases} 5x + 4y = -2, \\ 3x - 5y = -16. \end{cases}$

28. Обчислити $y - 2x$, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = -3, \\ 3x - 2y = -11. \end{cases}$

29. Обчислити $x - y$, якщо $\begin{cases} 3x + 2y = -2, \\ 2x + 3y = -8. \end{cases}$

30. Обчислити $x + |y|$, якщо $\begin{cases} 3x + 4y = -21, \\ 4x - 3y = -3. \end{cases}$

Рівень 2

1. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

2. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2x - 3y = -4. \end{cases}$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

3. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 2, \\ -x - y = 1. \end{cases}$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

4. Визначити $\frac{x}{y}$, якщо $\begin{cases} \sqrt{-x} + y = 3, \\ x^2 = 16. \end{cases}$

5. Визначити xy , якщо $\begin{cases} x + \sqrt{-y} = 6, \\ y^4 = 256. \end{cases}$

6. Визначити $(-x-y)$, якщо
$$\begin{cases} \sqrt{-x} + \sqrt{-y} = 4, \\ x^2 = 81. \end{cases}$$

7. Визначити xy , якщо
$$\begin{cases} \log_{(x-1)} 9 + \log_2 y = 1, \\ x^2 - 6x + 8 = 0. \end{cases}$$

8. Визначити $x+y$, якщо
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_2 y = 3, \\ y^2 - 3y - 4 = 0. \end{cases}$$

9. Визначити $(-x-y)$, якщо
$$\begin{cases} \log_2(-x) + \log_5(-y) = 2, \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

10. Визначити $\frac{x}{y}$, якщо
$$\begin{cases} \log_{(x+2)} 16 + \log_4 y = 1, \\ x^2 - x - 2 = 0. \end{cases}$$

11. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 2, \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

12. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - 4y = 5, \\ 4x - 8y = 10. \end{cases}$$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

13. Дослідити на існування розв'язків систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 7y = 8, \\ -2x + 9y = -3. \end{cases}$$

1) система має єдиний розв'язок; 2) система не має розв'язку; 3) система має безліч розв'язків.

14. Визначити $\frac{y}{x}$, якщо
$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + y = 12 + \sqrt{7}, \\ x^2 = 36. \end{cases}$$

15. Визначити $x+y$, якщо
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}$$

16. Визначити xy , якщо
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 1152, \\ \log_{\sqrt{5}}(y-x) = 2. \end{cases}$$

17. Визначити $x + y$, якщо $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 32000, \\ \log_{\sqrt{5}}(x - y) = 2. \end{cases}$

18. Знайти найменше значення виразу $x + 2y$, якщо $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

19. Знайти найбільше значення виразу $2x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$

20. Обчислити xy , якщо $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$

21. Обчислити $|x + y|$, якщо $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$

22. Обчислити xyz , якщо $\begin{cases} x + y = 3, \\ y + z = 7, \\ z + x = 2. \end{cases}$

23. Знайти найменше значення виразу $x + y + z$, якщо $\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$

24. Обчислити xy , якщо $\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136. \end{cases}$

25. Обчислити $x + y$, якщо $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 4. \end{cases}$

26. Обчислити $x^2 + y^2$, якщо $\begin{cases} x + y = 9, \\ x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 3. \end{cases}$

27. Обчислити $|x| + |y|$, якщо $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27. \end{cases}$

28. Знайти найменше значення виразу xy , якщо $\begin{cases} x + 3|y| - 1 = 0, \\ x + y + 3 = 0. \end{cases}$

29. Обчислити $x^2 + y^2$, якщо $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ y - |x| - 1 = 0. \end{cases}$

30. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ |x - 3| - y = 0. \end{cases}$

Рівень 3

1. Знайти найбільше від'ємне значення x (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2. Знайти найменше додатне значення x (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ y - x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3. Знайти найбільше від'ємне значення y (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Знайти найменше додатне значення y (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5. Знайти найбільше від'ємне значення x (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \sin y, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6. Знайти найменше додатне значення x (у градусах), якщо (x, y) – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos x = \cos y, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

7. Знайти найменше додатне значення y (у градусах), якщо (x, y) – розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x = -\sin y, \\ x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8. Знайти найбільше від’ємне значення y (у градусах), якщо (x, y) – розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos x = 1 - \cos y, \\ x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Знайти найменше додатне значення y (у градусах), якщо (x, y) – розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \sqrt{3} \cos y, \\ x - y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

10. Знайти найбільше від’ємне значення x (у градусах), якщо (x, y) – розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{3} \sin x = 1 - \sin y, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

11. Знайти найменше значення виразу $x + y + z$, якщо

$$\begin{cases} x \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) = \frac{13}{6}, \\ y \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) = \frac{20}{3}, \\ z \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) = \frac{15}{2}. \end{cases}$$

12. Знайти найбільше значення виразу $|x| + |y| + |z|$, якщо

$$\begin{cases} xy + y + x = 5, \\ yz + y + z = 11, \\ xz + z + x = 7. \end{cases}$$

13. Знайти найменше значення виразу $x + y + z$, якщо

$$\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + xz = 9, \\ xz + xy = 5. \end{cases}$$

14. Обчислити xyz , якщо

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{y+z} = 3, \\ \sqrt[3]{y+z} + \sqrt[3]{x+z} = 1, \\ \sqrt[3]{x+z} + \sqrt[3]{x+y} = 0. \end{cases}$$

15. Обчислити xyz , якщо

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 3, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} = 5, \\ \sqrt{x+z} + \sqrt{x+y} = 4. \end{cases}$$

16. Обчислити $x^2 + y^2$, якщо

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

17. Обчислити $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, якщо

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2y + xy^2 = 20. \end{cases}$$

18. Обчислити $|x| + |y|$, якщо

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$$

19. Знайти найменше значення виразу $x + y + z$, якщо

$$\begin{cases} x + yz = 2, \\ y + zx = 2, \\ z + xy = 2. \end{cases}$$

20. Знайти найбільше значення виразу xyz , якщо

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x(y + z) = 5, \\ y(x + z) = 8. \end{cases}$$

21. Знайти найменше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$$

22. Обчислити $x^2 + y^2$, якщо

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 24, \\ 2^y \cdot 3^x = 54. \end{cases}$$

23. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2. \end{cases}$$

24. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$$

25. Обчислити $x - y$, якщо

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

26. Знайти xy , якщо

$$\begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1, \\ \log_2(y-x) = 1. \end{cases}$$

27. Обчислити $x^2 + y$, якщо

$$\begin{cases} (x^2 + y) \cdot 2^{y-x^2} = 1, \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y}. \end{cases}$$

28. Знайти найбільше значення виразу xy , якщо

$$\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1. \end{cases}$$

29. Обчислити $x^{-1} + y^{-1}$, якщо

$$\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$$

30. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо

$$\begin{cases} y - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

Розділ 12. Прогресії

Рівень 1

1. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 10, а її різниця 3. Знайти п'ятий член прогресії.
2. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 6, а третій 14. Знайти різницю прогресії.
3. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 12, а третій 28. Знайти другий член прогресії.
4. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 30, а п'ятий 50. Знайти четвертий член прогресії.
5. Другий член арифметичної прогресії дорівнює 8, а четвертий 20. Знайти різницю прогресії.
6. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 13, а п'ятий 27. Знайти перший член прогресії.
7. Перший член геометричної прогресії дорівнює 2, а її знаменник 3. Знайти третій член прогресії.
8. Перший член геометричної прогресії дорівнює 4, а третій 16. Знайти квадрат знаменника прогресії.
9. Другий член геометричної прогресії дорівнює (-8) , а її знаменник (-2) . Знайти суму перших двох членів прогресії.
10. Четвертий член геометричної прогресії дорівнює 32, а третій 16. Знайти п'ятий член прогресії.
11. При якому значенні x три послідовні числа $2 - x$, $x + 3$, $x + 4$ утворюють арифметичну прогресію?

12. При якому значенні x три послідовні числа $x + 1, x - 2, 2x - 10$ утворюють арифметичну прогресію?
13. При якому значенні x три послідовні числа $3 - x, 8 - x, x + 1$ утворюють арифметичну прогресію?
14. При якому значенні x три послідовні числа $2x, 10, 18$ утворюють арифметичну прогресію?
15. При якому значенні x три послідовні числа $3, 15, 2x - 3$ утворюють арифметичну прогресію?
16. Числа $\log_2 9, \log_2 36, \log_2 144$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
17. Числа $\log_3 2, \log_3 \frac{2}{9}, \log_3 \frac{2}{81}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
18. Числа $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{2}, \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
19. Числа $\log_{\frac{1}{2}} 3, \log_{\frac{1}{2}} 6, \log_{\frac{1}{2}} 12$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
20. Числа $\log_2 \frac{3}{2}, \log_2 6, \log_2 24$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
21. Числа $\log_2 3, \log_2 9, \log_2 81$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
22. Числа $\log_2 \frac{1}{3}, \log_2 9, \log_2 \frac{1}{81}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
23. Числа $\log_3 4, \log_3 2, \log_3 \sqrt{2}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.

24. Числа $\log_2 3, \log_4 3, \log_{16} 3$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
25. Числа $\log_4 3, \log_2 3, \log_{\sqrt{2}} 3$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
26. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 12, а її різниця 4. Знайти четвертий член прогресії.
27. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 10, а третій 20. Знайти різницю прогресії.
28. Третій член арифметичної прогресії дорівнює 40, а п'ятий 20. Знайти четвертий член прогресії.
29. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює 100, а шостий 40. Знайти п'ятий член прогресії.
30. Другий член арифметичної прогресії дорівнює 20, а четвертий 50. Знайти різницю прогресії.
31. Числа $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
32. Числа $\frac{1}{\log_2 3}, \frac{1}{\log_{18} 3}, \frac{1}{\log_{162} 3}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
33. Числа $\frac{1}{\log_5 2}, \frac{1}{\log_{10} 2}, \frac{1}{\log_{20} 2}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
34. Числа $\frac{1}{\log_4 3}, \frac{1}{\log_{36} 3}, \frac{1}{\log_{324} 3}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.
35. Числа $\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}, \frac{1}{\log_6 \frac{1}{2}}, \frac{1}{\log_{12} \frac{1}{2}}$ відповідно є послідовними членами арифметичної прогресії. Знайти різницю прогресії.

36. Числа $\frac{1}{\log_{16} 3}, \frac{1}{\log_4 3}, \frac{1}{\log_2 3}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
37. Числа $\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 3}, \frac{1}{\log_4 3}, \frac{1}{\log_{\frac{1}{16}} 3}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
38. Числа $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_9 2}, \frac{1}{\log_{81} 2}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
39. Числа $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 2}, \frac{1}{\log_9 2}, \frac{1}{\log_{\frac{1}{81}} 2}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
40. Числа $\frac{1}{\log_{\sqrt{5}} 3}, \frac{1}{\log_5 3}, \frac{1}{\log_{25} 3}$ відповідно є послідовними членами геометричної прогресії. Знайти знаменник прогресії.
41. Четвертий член арифметичної прогресії дорівнює 12. Обчислити суму другого та шостого членів прогресії.
42. Сума другого та шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 40. Знайти четвертий член прогресії.
43. Двадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 21. Обчислити суму 18-го та 22-го членів прогресії.
44. Сума дев'ятого та тринадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 36. Знайти одинадцятий член прогресії.
45. П'ятий член арифметичної прогресії дорівнює 13. Обчислити суму 3-го та 7-го членів прогресії.
46. При якому значенні x три послідовні числа $3, 7, 2^x + 3$ утворюють арифметичну прогресію?
47. При якому значенні x три послідовні числа $2^x, 8, 16 - 4^x$ утворюють арифметичну прогресію?

48. При якому значенні x три послідовні числа 3^x , 12 , $24 - 9^{x-1}$ утворюють арифметичну прогресію?

49. При якому значенні x три послідовні числа $5^x + 2$, 16 , 25 утворюють арифметичну прогресію?

50. При якому значенні x три послідовні числа $2^x - 6$, -4 , -10 утворюють арифметичну прогресію?

Рівень 2

1. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума її n перших членів дорівнює $S_n = 2n^2 - n$.

2. Знайти п'ятий член арифметичної прогресії, якщо сума її n перших членів дорівнює $S_n = 3n^2 - 2n$.

3. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума її n перших членів дорівнює $S_n = n - 3n^2$.

4. Знайти четвертий член арифметичної прогресії, якщо сума її n перших членів дорівнює $S_n = n^2 + 2n$.

5. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума її n перших членів дорівнює $S_n = 5n^2 - n$.

6. Сума n перших членів арифметичної прогресії виражається формулою $S_n = 4n^2 + 2n$. Знайти четвертий член прогресії.

7. Сума n перших членів арифметичної прогресії виражається формулою $S_n = 6n^2 - 7n$. Знайти різницю прогресії.

8. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 4(3^n - 1)$. Знайти її знаменник.

9. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 6(2^n - 1)$. Знайти її третій член.

10. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 3(4^n - 1)$. Знайти її знаменник.

11. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 5(2^n - 1)$. Знайти четвертий член прогресії.

12. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 3(5^n - 1)$. Знайти її знаменник.

13. Сума 2-го та 7-го членів арифметичної прогресії дорівнює 12, а сума 3-го та 5-го членів дорівнює 8. Знайти різницю прогресії.

14. Сума 3-го та 7-го членів арифметичної прогресії дорівнює 38, а сума 4-го та 10-го членів дорівнює 50. Знайти перший член прогресії.

15. Сума 2-го та 3-го членів арифметичної прогресії дорівнює 11, а сума 4-го та 6-го членів дорівнює 36. Знайти різницю прогресії.

16. Сума 2-го та 6-го членів арифметичної прогресії дорівнює 28, а сума 3-го та 4-го членів дорівнює 22. Знайти перший член прогресії.

17. Сума 1-го та 4-го членів арифметичної прогресії дорівнює 4, а сума 2-го та 6-го членів дорівнює 28. Знайти суму перших трьох членів прогресії.

18. Сума 1-го та 4-го членів арифметичної прогресії дорівнює 14, а сума 3-го та 5-го членів дорівнює 32. Знайти суму перших двох членів прогресії.

19. Сума 2-го та 5-го членів арифметичної прогресії дорівнює 34, а сума 3-го та 7-го членів дорівнює 64. Знайти суму перших трьох членів прогресії.

20. Сума 2-го та 4-го членів арифметичної прогресії дорівнює 26, а сума 3-го та 6-го членів дорівнює 53. Знайти суму перших двох членів прогресії.

21. Обчислити $\frac{1}{10}(2 - 2 - 6 - 10 - \dots - 34)$.

22. Обчислити $-\frac{1}{32}(6 + 2 - 2 - 6 - 10 - \dots - 38)$.

23. Обчислити $\frac{1}{24}(-3 + 3 + 9 + 15 + \dots + 51)$.

24. Обчислити $\frac{1}{96}(-9 - 3 + 3 + 9 + 15 + \dots + 57)$.

25. Обчислити $\frac{1}{10}(-12 - 4 + 4 + 12 + 20 + \dots + 60)$.
26. При якому значенні x три послідовні числа $3, 6, 2^{2\log_2 x}$ утворюють арифметичну прогресію?
27. При якому значенні x три послідовні числа $1, 2^{2\log_2 x}, 7$ утворюють арифметичну прогресію?
28. При якому значенні x три послідовні числа $3^{2\log_3 x}, 6, 8$ утворюють арифметичну прогресію?
29. При якому значенні x три послідовні числа $6, 5^{2\log_5 x}, 12$ утворюють арифметичну прогресію?
30. При якому значенні x три послідовні числа $4, 10, 3^{2\log_3 x}$ утворюють арифметичну прогресію?
31. Знайти суму всіх двоцифрових натуральних чисел, кожне з яких при діленні на 5 дає остачу 2.
32. Знайти суму всіх двоцифрових натуральних чисел, кожне з яких при діленні на 3 дає остачу 1.
33. Знайти суму всіх парних додатних двоцифрових цілих чисел, що діляться на 3.
34. Знайти суму всіх двоцифрових натуральних чисел, кожне з яких при діленні на 4 дає остачу 3.
35. Знайти суму всіх додатних двоцифрових цілих чисел, що діляться на 5.
36. Знайти суму перших дев'яти членів арифметичної прогресії, якщо її п'ятий член дорівнює 12.
37. Сума 3-го та 9-го членів арифметичної прогресії дорівнює 8. Знайти суму перших 11 членів цієї прогресії.
38. Знайти суму перших 13 членів арифметичної прогресії, якщо її 7-й член дорівнює 4.

39. Сума 6-го та 18-го членів арифметичної прогресії дорівнює 10. Знайти суму перших 23 членів цієї прогресії.
40. Знайти суму перших 19 членів арифметичної прогресії, якщо її 10-й член дорівнює 2.
41. Між числами 3 і 35 є 7 чисел, які разом із заданими утворюють арифметичну прогресію. Знайти найбільше з невідомих чисел.
42. Між числами 2 і 17 є 4 числа, які разом із заданими утворюють арифметичну прогресію. Знайти суму невідомих чисел.
43. Між числами 4 і 39 є 6 чисел, які разом із заданими утворюють арифметичну прогресію. Знайти найменше з невідомих чисел.
44. Між числами 3 і 15 є 5 чисел, які разом із заданими утворюють арифметичну прогресію. Знайти суму невідомих чисел.
45. Між числами 4 і 46 є 6 чисел, які разом із заданими утворюють арифметичну прогресію. Знайти найменше з невідомих чисел.
46. При якому найбільшому від'ємному значенні x три послідовні числа 2 , $2 + 2\sin \pi x$, 6 утворюють арифметичну прогресію?
47. При якому найбільшому від'ємному значенні x три послідовні числа 4 , $5 - 2\cos \pi x$, 10 утворюють арифметичну прогресію?
48. При якому найменшому додатному значенні x три послідовні числа 3 , 7 , $9 - 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ утворюють арифметичну прогресію?
49. При якому найменшому додатному значенні x три послідовні числа $5 + 2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, 7 , 11 утворюють арифметичну прогресію?
50. При якому найменшому додатному значенні x три послідовні числа 7 , 10 , $9 + 4\cos(2\pi x)$ утворюють арифметичну прогресію?
51. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{x} + \frac{2x-2}{x} + \frac{2x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 9$.

52. Розв'язати рівняння $\frac{5}{x} + \frac{13}{x} + \frac{21}{x} + \dots + \frac{8x-3}{x} = 29$.

53. Розв'язати рівняння $3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-5} = 3,7 + 3,33 + 2,997 + \dots$

54. Розв'язати рівняння $2^{x+8} + 2^{x+7} + 2^{x+5} = 2,6 + 2,08 + 1,664 + \dots$

55. Розв'язати рівняння $\log_{13} x + \log_{\sqrt{13}} x + \log_{\sqrt[3]{13}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{13}} x = 110$.

56. Розв'язати рівняння $\log_x 64 + \log_{\sqrt{x}} 64 + \log_{\sqrt[3]{x}} 64 + \dots + \log_{\sqrt{x}} 64 = 84$.

57. При якому від'ємному значенні x числа $2x-1$, $x+3$, $x+15$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

58. При якому додатному значенні x числа $2x-3$, $x-4$, $x+2$ будуть послідовними членами геометричної прогресії?

59. Між числами 3 і 96 є чотири числа, які разом із заданими утворюють геометричну прогресію. Знайти суму невідомих чисел.

60. Між числами 7 і 448 є 5 чисел, які разом із заданими утворюють геометричну прогресію. Знайти найбільше з невідомих чисел.

Рівень 3

1. Знайти знаменник геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж перший, на 21, а сума перших трьох її членів дорівнює 21.

2. Знайти знаменник геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж другий, на 48, а третій більший першого на 16.

3. Знайти п'ятий член геометричної прогресії, в якій перший член більший, ніж четвертий, на 42, а сума перших трьох її членів дорівнює 84.

4. Знайти п'ятий член геометричної прогресії, в якій другий член більший, ніж четвертий, на 48, а перший більший третього на 144.

5. Знайти суму 2-го та 3-го членів геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж другий, на 120, а третій більший першого на 30.

6. Знайти знаменник геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж перший, на 248, а сума перших трьох її членів дорівнює 62.

7. Знайти знаменник геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж другий, на 336, а третій більший першого на 48.
8. Знайти суму 2-го та 3-го членів геометричної прогресії, в якій перший член менший, ніж четвертий, на 248, а сума перших трьох її членів дорівнює 62.
9. Знайти суму перших трьох членів геометричної прогресії, в якій четвертий член більший, ніж другий, на 96, а третій більший першого на 32.
10. Знайти суму 3-го та 4-го членів геометричної прогресії, в якій четвертий член менший, ніж другий, на 96, а третій менший першого на 288.
11. Знайти перший член зростаючої геометричної прогресії, що складається з шести членів, якщо сума перших трьох членів дорівнює 26, а сума останніх трьох членів дорівнює 702.
12. Знайти знаменник геометричної прогресії, що складається з шести членів, якщо сума перших трьох членів дорівнює 21, а сума останніх трьох членів дорівнює 168.
13. Знайти суму перших двох членів геометричної прогресії, що складається з шести членів, якщо сума перших трьох членів дорівнює 13, а сума останніх трьох членів дорівнює 351.
14. Знайти добуток перших двох членів геометричної прогресії, що складається з шести членів, якщо сума перших трьох членів дорівнює 42, а сума останніх трьох членів дорівнює 2688.
15. Знайти найменший знаменник геометричної прогресії, що складається з чотирьох членів, якщо сума перших двох членів дорівнює 8, а сума останніх двох членів дорівнює 72.
16. Сума 1-го та 2-го членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 12, а сума 2-го та 3-го членів дорівнює 6. Знайти суму цієї прогресії.

17. Різниця 1-го та 3-го членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює $\frac{225}{16}$, а сума 2-го та 3-го членів дорівнює $\frac{75}{16}$. Знайти суму цієї прогресії.
18. Сума 1-го та 2-го членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 60, а сума 2-го та 3-го членів дорівнює 20. Знайти суму цієї прогресії.
19. Різниця 1-го та 3-го членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 56, а сума 2-го та 3-го членів дорівнює 28. Знайти суму цієї прогресії.
20. Другий член нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 24, а сума 2-го та 3-го членів дорівнює 30. Знайти суму цієї прогресії.
21. Сума перших трьох членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 13, добуток їх дорівнює 27. Знайти п'ятий член прогресії.
22. Сума перших трьох членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 7, добуток їх дорівнює 8. Знайти суму перших п'яти членів прогресії.
23. Сума перших трьох членів спадної геометричної прогресії дорівнює 56, добуток їх дорівнює 4096. Знайти третій член прогресії.
24. Сума перших трьох членів спадної геометричної прогресії дорівнює 39, добуток їх дорівнює 729. Знайти суму перших чотирьох членів прогресії.
25. Сума перших трьох членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 21, добуток їх дорівнює 64. Знайти четвертий член прогресії.
26. Знайти третій член геометричної прогресії, якщо її знаменник додатний, сума перших двох членів дорівнює 10 і перший член менший знаменника прогресії на 2.
27. Знайти четвертий член геометричної прогресії, якщо її знаменник додатний, сума перших двох членів дорівнює 15 і перший член більший знаменника прогресії на 3.

28. Знайти третій член геометричної прогресії, якщо її знаменник від'ємний, сума перших двох членів дорівнює 8 і перший член менший знаменника прогресії на 1.
29. Знайти четвертий член геометричної прогресії, якщо її знаменник від'ємний, сума перших двох членів дорівнює 4 і перший член більший знаменника прогресії на 1.
30. Знайти суму перших трьох членів геометричної прогресії, якщо її знаменник додатний, сума перших двох членів дорівнює 6 і перший член менший знаменника прогресії на 4.
31. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 12, сума квадратів її членів дорівнює 48. Знайти суму перших трьох членів цієї прогресії.
32. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 13,5, сума квадратів її членів дорівнює $\frac{729}{8}$. Знайти перший член прогресії.
33. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 54, сума квадратів її членів дорівнює $\frac{2916}{5}$. Знайти суму другого та третього членів цієї прогресії.
34. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 40, сума квадратів її членів дорівнює $\frac{1600}{3}$. Знайти третій член прогресії.
35. Сума нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 27, сума квадратів її членів дорівнює $\frac{729}{5}$. Знайти суму перших двох членів цієї прогресії.
36. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 91. Скільки може бути таких прогресій?
37. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 133. Скільки може бути таких прогресій?

38. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 273. Скільки може бути таких прогресій?
39. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 147. Скільки може бути таких прогресій?
40. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 63. Скільки може бути таких прогресій?
41. Три натуральних числа утворюють зростаючу геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 39. Знайти найбільше число, яке може бути членом цієї прогресії.
42. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 62. Знайти найменше число, яке може бути членом цієї прогресії.
43. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 43. Знайти найбільше число, яке може бути членом цієї прогресії.
44. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 28. Знайти найменше число, яке може бути членом цієї прогресії.
45. Три натуральних числа утворюють геометричну прогресію з цілим знаменником, сума якої дорівнює 52. Знайти найбільше число, яке може бути членом цієї прогресії.
46. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 28, сума останніх трьох членів дорівнює 3,5. Знайти другий член прогресії, якщо кількість членів $n = 6$.
47. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 351, сума останніх трьох членів дорівнює 13. Знайти суму 2-го та 4-го членів цієї прогресії, якщо кількість членів $n = 6$.

48. Сума п'яти перших членів геометричної прогресії дорівнює $\frac{31}{8}$, сума останніх п'яти членів дорівнює 124. Знайти дев'ятий член прогресії, якщо кількість членів $n = 10$.

49. Сума п'яти перших членів геометричної прогресії дорівнює $\frac{121}{81}$, сума останніх п'яти членів дорівнює 363. Знайти суму 6-го та 8-го членів цієї прогресії, якщо кількість членів $n = 10$.

50. Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 14, сума останніх трьох членів дорівнює 112. Знайти суму 3-го та 4-го членів цієї прогресії, якщо кількість членів $n = 6$.

51. Знайти число членів арифметичної прогресії, в якій сума всіх членів дорівнює 112, добуток другого члена на різницю прогресії дорівнює 30, сума третього й п'ятого дорівнює 32.

52. Знайти сьомий член арифметичної прогресії, останній член якої дорівнює 29, число членів дорівнює добутку двох перших членів, а сума другого та передостаннього членів дорівнює 31.

53. Добуток третього і шостого членів зростаючої арифметичної прогресії дорівнює 406. При діленні дев'ятого члена цієї прогресії на її четвертий член у частці дістанемо 2, а в остачі 6. Знайти перший член прогресії.

54. Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 24, а сума їх квадратів дорівнює 210. Знайти добуток цих чисел.

55. Знайти найменший додатний корінь рівняння

$$1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \sin^3\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \dots = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right).$$

56. Знайти найменший додатний корінь рівняння

$$2 \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi x}{9}\right) - \cos^3\left(\frac{\pi x}{9}\right) + \cos^4\left(\frac{\pi x}{9}\right) - \cos^5\left(\frac{\pi x}{9}\right) + \dots = \frac{7}{6}.$$

57. Сума трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 93. Якщо від першого числа відняти 48, а решту залишити без зміни, то утвориться зростаюча арифметична прогресія. Знайти різницю арифметичної прогресії.

58. Сума трьох чисел, що утворюють зростаючу геометричну прогресію, дорівнює 65. Якщо від найменшого числа відняти 1, а від найбільшого 19 і третє число залишити без зміни, то отримані числа утворюють арифметичну прогресію. Знайти різницю арифметичної прогресії.

59. Крайні члени арифметичної прогресії, яка складається з 7 членів, відповідно дорівнюють 11 і 35. Скільки членів в іншій арифметичній прогресії, крайні члени якої відповідно дорівнюють 38 і 13, якщо четверті члени цих двох прогресій однакові?

60. У зростаючій геометричній прогресії сума першого та останнього членів дорівнює 66, добуток другого та передостаннього членів дорівнює 128, а сума всіх членів дорівнює 126. Скільки членів в прогресії?

Розділ 13. Алгебраїчні раціональні нерівності

Рівень 1

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $8x - 3 > 5x + 6$.
2. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $7y - 13 < 5y - 9$.
3. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2x - 3 < 3x - 8$.
4. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $y - 15 > 4y + 3$.
5. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $5 - 2x < x + 8$.
6. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $17 \leq 4 - 3y$.
7. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $18 + 2(x - 1) > 2x + 6$.
8. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $6(x + 2) + 3 > 2(3x + 1) + 1$.
9. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $2(4x - 4) + 1 < 8x + 3$.

10. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$3(1-x) - 6 < 6\left(2 - \frac{x}{2}\right) + 1.$$

11. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $5y < 12 - 4(y+5)$.

12. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $0,5x - 4(x-3) > 3x$.

13. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $6x < 0,2x - 2(x+3)$.

14. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $0 < y - 0,3(2-y)$.

15. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $0 < 4,5 + 0,7(2y-3)$.

16. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$5,1x - 3 < 3(1,7x - 2) + 7.$$

17. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$4(1,25x + 3) > 5x - 2.$$

18. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$4\left(2\frac{3}{4}x - 1\right) < 2\left(5\frac{1}{2}x + 1\right).$$

19. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$8\left(1\frac{1}{4}x + 1\right) > 4\left(2\frac{1}{2}x + 1\right).$$

20. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$4\left(2\frac{1}{4}x - 1\right) < 2\left(4\frac{1}{2}x + 1\right).$$

21. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2,7(x+3) < 7,2(x-3)$.

22. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $3,4(2x-1) < -0,1(x+2)$.

23. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

24. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$.

25. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $x - \frac{2}{5}(x-3) > 0,4$.

26. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $2y - \frac{1}{2} < 0,2(y+3)$.

27. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$3\left(2\frac{1}{3}x - 1\right) < 2\left(3\frac{1}{2}x + 1\right).$$

28. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$5\left(1\frac{1}{5}x + 1\right) > 2(3x - 1).$$

29. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$6\left(1\frac{1}{6}x + 1\right) > 2\left(3\frac{1}{2}x + 2\right).$$

30. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$7\left(1\frac{1}{7}x - 1\right) < 4(2x + 3).$$

31. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{2+x}{3} - \frac{3-x}{2} > 0$.

32. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{3-y}{4} - \frac{y+2}{5} \geq 2$.

33. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $x - \frac{3+2x}{2} \geq \frac{1-x}{4}$.

34. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{8} > 2+x$.

35. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{x-0,5}{2} + \frac{x+0,5}{4} > \frac{x-1}{8}$.

36. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x-0,3}{3} - \frac{x-0,6}{6} \leq \frac{x+1}{12}$.

37. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x+2}{0,3} + \frac{2-x}{0,4} > \frac{x+4}{1,2}.$$

38. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x+1}{3} + \frac{1-x}{4} > \frac{x+2}{12}.$$

39. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\frac{x+3}{2} + \frac{2-x}{3} > \frac{x+5}{6}.$$

40. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\frac{2x+1}{2} + \frac{5-x}{4} > \frac{6x+2}{8}.$$

41. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(x-4)^2 < (x-2)(x+2)$.

42. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(2x-3)^2 < 4x^2$.

43. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(3x-2)^2 > (3x+2)^2$.

44. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $x - \frac{1-x}{6} \leq \frac{2x+1}{2} - \frac{3}{4}$.

45. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x-2)^2 + 3 > (x+5)^2$.

46. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(2-x)^2 + 4 > (x+1)^2$.

47. Знайти найменше натуральне значення x , що задовольняє нерівність $(x+3)^2 - 7 < (x+1)^2 + 4x + 5$.

48. Знайти найменше натуральне значення x , що задовольняє нерівність $(x-2)^2 - 2x + 6 < (x-3)^2 + 3$.

49. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $(2x+1)^2 + 2 > (1-2x)^2 + 8x$.

50. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $(x-1)^2 + 4x > (x+1)^2 - 3$.

Рівень 2

1. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{3}{x-2} < 1$, що задовольняють умову $1 \leq x \leq 7$.

2. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{x-1} \leq 2$, що задовольняють умову $0 \leq x \leq 3$.

3. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{x} > \frac{1}{5}$, що задовольняють умову $3 \leq x \leq 7$.

4. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{x-1} \geq -2$, що задовольняють умову $(-1) < x < 20$.

5. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{5}{x+2} \leq 1$, що задовольняють умову $(-3) < x < 4$.

6. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{x-2} \geq -3$, що задовольняють умову $(-2) < x < 25$.

7. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{2}{x+1} \leq 3$, що задовольняють умову $(-3) \leq x \leq 3$.

8. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{2}{x} \geq \frac{1}{7}$, що задовольняють умову $12 < x < 20$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{3}{x+2} > 1$, що задовольняють умову $x > -1$.

10. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{5}{x-1} > 2$, що задовольняють умову $x < 4$.

11. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $x^2 + \frac{1}{x(x+3)} < 10 + \frac{1}{x(x+3)}$.

12. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $x^2 + \frac{1}{(x-1)(x+2)} < 1000 + \frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

13. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x^2 + \frac{x}{x(x-2)} < 7 + \frac{x}{x(x-2)}$.

14. Знайти найменший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{x+6}{(x+6)(x+7)} < 50 + \frac{1}{x+7}.$$

15. Знайти найбільший додатний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{1}{x-8} < 70 + \frac{x-7}{(x-7)(x-8)}.$$

16. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{1}{x-4} > 10 + \frac{x-5}{(x-4)(x-5)}.$$

17. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{x+3}{(x+3)(x+4)} > 5 + \frac{1}{x+4}.$$

18. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{x-3}{x^2-9} \geq 9 + \frac{1}{x+3}.$$

19. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{1}{x+4} \geq 16 + \frac{x+5}{(x+5)(x+4)}.$$

20. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$x^2 + \frac{1}{x-6} \geq 27 + \frac{x-5}{(x-5)(x-6)}.$$

21. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{2x+3}{3-x} > 1$.

22. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{5-x}{2x+1} > 1$.

23. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{4x-1}{3x+1} \geq 1$.

24. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{6-3x}{1-2x} < 2$.

25. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{22+2x}{2-2x} > 2$.

26. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{3x-12}{x+1} < 4$.

27. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{2x+4}{x+6} > 3$.

28. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x+2}{x-8} > 2$.

29. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{x^2+6x-7}{x^2+1} < 2$?

30. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{x^2+14x-47}{x^2+1} < 2$?

31. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{2x^2+12x-30}{x^2+2} < 3$?

32. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{3x^2-8x-8}{x^2+2} < 4$?

33. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-6x-7}{x^2+1} \geq 2$.

34. Розв'язати нерівність $\frac{2x^2-12x-30}{x^2+2} \geq 3$.

35. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+16x-63}{2x^2+1} \geq 1$.

36. Розв'язати нерівність $(x^2+1)(x-2)^2(2x^2+3) \leq 0$.

37. Розв'язати нерівність $(x^2+4)(x^4+2)(x+3)^2 \leq 0$.

38. Розв'язати нерівність $\frac{(x^6+1)(x-5)^2}{x^{12}+1} \leq 0$.

39. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{x^2+4x-3}{2x^2+1} < 1$?

40. При якому значенні x не справджується нерівність $\frac{3x^2+12x-34}{2x^2+1} < 2$?

41. Знайти добуток розв'язків нерівності $(x^2 + 2)(x^2 - 5)^2(x^4 + 1) \leq 0$.
42. Знайти суму розв'язків нерівності $(x^2 + 4)(x^3 - 8)^2(x^2 - 3)^2 \leq 0$.
43. Знайти суму розв'язків нерівності $(x^4 - 16)^2(x^2 + \sqrt{3})(x^4 + 9) \leq 0$.
44. Знайти добуток розв'язків нерівності $(x^4 - 81)^2(x^2 + \sqrt{5})(x + 2)^2 \leq 0$.
45. Знайти добуток розв'язків нерівності $(x^2 - 7)^2(x^4 + \sqrt{2})(x + 1)^2 \leq 0$.
46. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x^2 + 5x + 2 < \frac{(x + 2)^2}{x + 2}$.
47. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x^2 + 4x - 3 < -\frac{(x + 3)^2}{x + 3}$.
48. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x^2 - x - 4 < \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$.
49. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $x^2 + 2x - 10 < \frac{5(x^2 - 4)}{x^2 - 4}$.
50. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $x^2 - x - 16 < \frac{4(x^2 - 9)}{x^2 - 9}$.

Рівень 3

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{x - 1}{x + 1} < x$.
2. Знайти найменший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{x + 2} < \frac{3}{x - 3}$.
3. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{14x}{x + 1} - \frac{9x - 30}{x - 4} < 0$.
4. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{4}{1 + x} + \frac{2}{1 - x} < 1$.
5. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $1 + \frac{2}{x - 1} > \frac{6}{x}$.

6. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $2 + \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x}$.

7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0$.

8. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 \leq 0$.

9. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $x - 17 \geq \frac{60}{x}$.

10. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{x+5}{x+1}$.

11. Знайти суму додатних цілих розв'язків нерівності $5 - x \geq \frac{6}{x}$.

12. Знайти найменший розв'язок нерівності $x \geq \frac{25}{1-x} - 9$.

13. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $x - 1 > \frac{4x}{3-x}$.

14. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{121}{x+2} \leq 20 - x$.

15. Знайти суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{x-3}$.

16. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{13-6x}{x+2} \leq 2 - x$.

17. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{4x+13}{x-3} \geq -x-3$.

18. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{41-8x}{x+5} \leq 5 - x$.

19. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{10x+29}{x-2} \geq -x-2$.

20. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{18-6x}{x+3} \leq 3 - x$.

21. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{8x+32}{x-4} \geq -x-4$.

22. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{50-2x}{x+7} \leq 7-x$.

23. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{6x+10}{x-1} \geq -x-1$.

24. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{4x+29}{x+5} \leq 5-x$.

25. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{8x+52}{x-6} \geq -x-6$.

26. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{40-4x}{x+6} \leq 6-x$.

27. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{6x+73}{x-8} \geq -x-8$.

28. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{125-10x}{x+10} \leq 10-x$.

29. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{90-6x}{x+9} \leq 9-x$.

30. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{6x+58}{x-7} \geq -x-7$.

31. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $(x^2+1)(4-x^2)(x+5)^2(x^2-9)^2 < 0$.

32. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $(x+4)^2(9-x^2)(x+5)^2(x^4+x^2+1) < 0$.

33. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x^2+x+1)(x^2-16)(x-6)^2(x^4+4x^2+4) \leq 0$.

34. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $(x^4+6x^2+9)(x^2-16)(x-5)^2(x-6)^2 > 0$.

35. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(x^4 + 2x^2 + 1)(4 - x^2)(x + 5)^2(x^2 - 9)^2 \geq 0.$$

36. Знайти найбільший розв'язок нерівності

$$(x^4 + 4x^2 + 4)(9 - x^2)(x^2 + 3)(x - 7)^2 \geq 0.$$

37. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(x^4 + 8x^2 + 16)(x + 7)^2(1 - x^2)(x + 5)^2 \geq 0.$$

38. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(x^6 + 6)(x^2 - 16)(x + 7)^2(x - 10)^2 \leq 0$.

39. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$(x^4 + 6x^2 + 9)(x + 5)^2(x^2 - 16)(x + 6)^2 > 0.$$

40. Знайти найменший розв'язок нерівності

$$(x^4 + 8x^2 + 16)(9 - x^2)(x - 5)^2(x + 6)^2 \geq 0.$$

41. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x}$.

42. Знайти суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $\frac{3x^2 + x - 9}{x} \geq -5$.

43. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} - \frac{8}{x^2 - 1} < 0$.

44. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{2x^2 - 9x + 7}{x^2 - 1} \leq 1$.

45. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{5x + 4}{5x^2 - 6x + 1} < \frac{1}{x - 2}$.

46. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{2 - x} + \frac{5}{2 + x} < 1$.

47. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{4 - x}{x - 5} > \frac{1}{1 - x}$.

48. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq 1$.

49. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{4}{x^2 - x + 3} + \frac{2}{x - 3} \leq \frac{2x^2 - 2x - 13}{(x^2 - x + 3)(x - 3)}$.

50. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності

$$\frac{1}{x+10} - \frac{x}{x^2 - 2x + 4} \leq \frac{8 - 17x}{(x+10)(x^2 - 2x + 4)}.$$

51. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{x-8}{x^2-5x+4} > \frac{2}{x+1}$.

52. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-2)^4 - 13(x-2)^2 + 36 \leq 0$.

53. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 > 0.$$

54. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x^2 - 7x + 12)^2 - 6(x^2 - 7x + 13) + 6 \leq 0$.

55. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$(x^2 - 5x + 1)^2 - 8(x^2 - 5x - 2) - 17 > 0.$$

Розділ 14. Ірраціональні нерівності

Рівень 1

1. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x+3} > -2$.

2. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{5-x} < 3$.

3. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{4-x} > -1$.

4. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{2-x} > 2$.

5. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x+4} > -3$.

6. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x-5} > -2$.

7. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{3-x} < 1$.

8. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{4-x} > 3$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+3} < 2$.

10. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+10} < 5$.

11. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{3-x} < 3$.
12. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x-6} > -1$.
13. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{9-x} > -2$.
14. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x-4} < 2$.
15. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+4} \leq 3$.
16. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+7} \leq 4$.
17. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+3} < 5$.
18. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x-5} < 2$.
19. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{7-x} > -1$.
20. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+5} < 5$.
21. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{\sqrt{x+5}} > -1$.
22. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{\sqrt{x-7}} < 1$.
23. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{2}{\sqrt{x+3}} > 1$.
24. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{3}{\sqrt{x-1}} < 1$.
25. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{3}{\sqrt{x+1}} > 1$.
26. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{2}{\sqrt{x-4}} > -3$.
27. Знайти суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $\frac{-4}{\sqrt{x+5}} < 2$.

28. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{-8}{\sqrt{x+6}} < -4$.
29. Знайти суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $\frac{-6}{\sqrt{x+4}} < -2$.
30. Знайти суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $\frac{-3}{\sqrt{x+7}} < 1$.
31. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2} > 0$.
32. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+3} > 0$.
33. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{-x-4} \cdot \sqrt{4-x} > 0$.
34. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{x+1} \leq 0$.
35. Знайти добуток розв'язків нерівності $\sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x+3} \leq 0$.
36. Знайти кількість розв'язків нерівності $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2} \leq 0$.
37. Знайти кількість розв'язків нерівності $\sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{4-x^2} \leq 0$.
38. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} > 0$.
39. Знайти добуток розв'язків нерівності $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{2-x} \leq 0$.
40. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{-x-6} \cdot \sqrt{6-x} > 0$.
41. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} + 1 > \sqrt{x^2-16}$.
42. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} > \sqrt{x^2-9}$.
43. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{-x-2} \cdot \sqrt{2-x} - 1 < \sqrt{x^2-4}$.
44. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $-2\sqrt{-x-3} \cdot \sqrt{3-x} < \sqrt{x^2-9}$.
45. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+5} > \sqrt{x^2-25} - 2$.
46. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{x-7} \cdot \sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2-49}} > \frac{1}{5}$.

47. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{-x-4} \cdot \sqrt{4-x}}{\sqrt{x^2-16}} > -1$.

48. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{-x-5} \cdot \sqrt{5-x}}{\sqrt{x^2-25}} > \frac{1}{2}$.

49. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3}}{\sqrt{x^2-9}} > \frac{1}{3}$.

50. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{x-6} \cdot \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2-36}} > -\frac{1}{6}$.

Рівень 2

1/Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x-2} > x-4$.

2. Знайти цілий розв'язок нерівності $\sqrt{7+3x} < 1-x$.

3. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{9x-20} < x$.

4. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{2x+3} \leq x$.

5. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $x - \sqrt{3-2x} < 0$.

6. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $2\sqrt{11-2x} + x > 3$.

7. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{7+x} \geq 7-2x$.

8. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2x+3} \geq x$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{24-10x} > 3-4x$.

10. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+18} < 2-x$.

11. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x-2)\sqrt{x+1} > x-2$.

12. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x-2)\sqrt{x+1} \leq x-2$.

13. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(x+2)\sqrt{x-1} > x+2$.

14. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $(x+2)\sqrt{x-1} \leq x+2$.
15. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x-3)\sqrt{x+2} > x-3$.
16. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x-3)\sqrt{x+2} \leq x-3$.
17. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(x+5)\sqrt{x-2} > x+5$.
18. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $(x+5)\sqrt{x-2} \leq x+5$.
19. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x-5)\sqrt{x+3} < x-5$.
20. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $(x+3)\sqrt{x-3} \leq x+3$.
21. Знайти цілий розв'язок нерівності $x > \sqrt{24-5x}$.
22. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+7} < x$.
23. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{2x-1} < x-2$.
24. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+78} < x+6$.
25. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{5-2x} < 6x-1$.
26. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+61} < x+5$.
27. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $x < \sqrt{2-x}$.
28. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $x+3 < \sqrt{x+33}$.
29. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2x+14} > x+3$.
30. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x+2 < \sqrt{x+14}$.
31. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x+4) \cdot \sqrt{x+5}}{x+4} \geq 1$.
32. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x-4) \cdot \sqrt{x-3}}{x-4} \geq 1$.

33. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x-3)\cdot\sqrt{4-x}}{x-3} \geq 1$.
34. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x+6)\cdot\sqrt{-5-x}}{x+6} \geq 1$.
35. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x-7)\cdot\sqrt{x+2}}{x-7} \geq 3$.
36. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{(x-7)\cdot\sqrt{x+2}}{x-7} < 3$.
37. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x-6)\cdot\sqrt{x-2}}{x-6} \geq 2$.
38. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{(x-6)\cdot\sqrt{x-2}}{x-6} < 2$.
39. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x+6)\cdot\sqrt{-x-2}}{x+6} \geq 2$.
40. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{(x+6)\cdot\sqrt{-x-2}}{x+6} < 2$.
41. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{2(x+7)}{(x+7)\sqrt{-x-3}} \geq 1$.
42. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{3(x+10)}{(x+10)\sqrt{-x-1}} \leq 1$.
43. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{3(x-7)}{(x-7)\sqrt{x+2}} \geq 1$.
44. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{2(x-3)}{(x-3)\sqrt{x+1}} \leq 1$.
45. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{3\left(x-\frac{13}{4}\right)}{\left(x-\frac{13}{4}\right)\sqrt{x-1}} \geq 2$.

46. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{4(x-2)}{(x-2)\sqrt{x+2}} \geq 2$.

47. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{5\left(x - \frac{13}{4}\right)}{\left(x - \frac{13}{4}\right)\sqrt{x+3}} \geq 2$.

48. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{3(x-13)}{(x-13)\sqrt{x-4}} \geq 1$.

49. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{x+3}} \geq 1$.

50. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{2(x-1)}{(x-1)\sqrt{x+3}} \leq 1$.

Рівень 3

1. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 + 3x - 18} > 2x + 3$.

2. Знайти найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 + 7x} > x + 1$.

3. Знайти найменший розв'язок нерівності $x > \sqrt{x^2 - x - 12}$.

4. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{5 - x^2} \geq x + 1$.

5. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 + 4x - 5} > 6 - x$.

6. Знайти суму додатних цілих розв'язків нерівності $\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4$.

7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $x + 5 < \sqrt{15 + x^2 + 8x}$.

8. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} > x - \frac{1}{2}$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2x - x^2} < 5 - x$.

10. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{(x-6)(1-x)} < 3 + 2x$.

11. Знайти найбільший додатний цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.
12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x + 4 > 2\sqrt{4 - x^2}$.
13. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$.
14. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $3 - x > 3\sqrt{1 - x^2}$.
15. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $1 - \sqrt{13 + 3x^2} > 2x$.
16. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{(x+4)(x+3)} > 6 - x$.
17. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$.
18. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{8 + 2x - x^2} > 6 - 3x$.
19. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.
20. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4$.
21. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $(x-3)\sqrt{x^2 + 4} < x^2 - 9$.
22. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x-3)\sqrt{x^2 + 4} \geq x^2 - 9$.
23. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(x+1)\sqrt{x^2 + 1} > x^2 - 1$.
24. Знайти найменший додатний цілий розв'язок нерівності $(x-2)\sqrt{x^2 + 2} < x^2 - 4$.
25. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-2)\sqrt{x^2 + 2} \geq x^2 - 4$.
26. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7} \leq 0$.
27. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x+5)\sqrt{(x+4)(x+7)} < 0$.
28. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

29. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(x+5)\sqrt{(x+4)(x+7)} \leq 0$.
30. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{7-x^2} \leq 0$.
31. Знайти кількість розв'язків нерівності $(x+5)^2(x^2-1)^2\sqrt{9-x^2} \leq 0$.
32. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x-5)^2(x^2-1)^2\sqrt{16-x^2} > 0$.
33. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(\sqrt{x}-1)^2(x+4)^2\sqrt{9-x^2} > 0$.
34. Знайти суму розв'язків нерівності $(\sqrt{2-x}-1)^2(x+4)^2\sqrt{25-x^2} \leq 0$.
35. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(\sqrt{x+2}-1)^2(x-1)^2\sqrt{16-x^2} > 0$.
36. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{\sqrt{5-x^2-4x}}{x} < 1$.
37. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\sqrt{x^2-4x+7}}{x-3} > 1$.
38. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 6$.
39. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} \leq 4$.
40. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{9-x} \cdot \sqrt[3]{x^3-2x^2-5} \leq (x-1)\sqrt{9-x}$.
41. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt[4]{x+7} \cdot \sqrt[3]{x^3+x^2-5x\sin 2+4\sin^2 2} \leq x\sqrt{x+7}$.
42. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{21-x} \cdot \sqrt[3]{x^3+x^2+5x\cos 3-4\cos^2 3} \leq x\sqrt{21-x}$.
43. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\frac{1}{\sqrt{6-3x+x}} \geq \frac{1}{2}$.
44. Знайти суму цілих додатних розв'язків нерівності $\frac{1}{\sqrt{6-2x+x}} \leq \frac{1}{3}$.

45. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{2x + \sqrt{x+2}}{2x - \sqrt{x+2}} \geq 1$.

46. Знайти найменший розв'язок нерівності $\frac{3x - \sqrt{x+1}}{3x + \sqrt{x+1}} \leq 1$.

47. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності

$$x\sqrt{4-3x-x^2} \geq \left(\frac{4}{x} - 3\right)\sqrt{(4+x)(1-x)}.$$

48. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$(x+3)^2 \geq (x+3)\left(1 + \sqrt{2x^2 - 4x - 5}\right).$$

49. Знайти суму квадратів цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{12+x-x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5+x^2-x\cos 6-6\cos^2 6} \leq x\sqrt{12+x-x^2}.$$

50. Знайти суму цілих розв'язків нерівності

$$\sqrt{30+x-x^2} \cdot \sqrt[5]{x^5+x^2+x\sin 5-6\sin^2 5} \leq x\sqrt{30+x-x^2}.$$

Розділ 15. Показникові нерівності

Рівень 1

1. Визначити найбільший розв'язок нерівності $2^{4-x} \geq \frac{1}{8}$.

2. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $2^{x+3} > \frac{1}{4}$.

3. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} < 16$.

4. Визначити найбільший розв'язок нерівності $3^{3-x} \geq \frac{1}{9}$.

5. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $3^{x+2} > \frac{1}{27}$.

6. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} < 9$.

7. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(\sqrt{5})^{4-2x} \geq \frac{1}{25}$.
8. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(0,3)^{x+1} < \frac{9}{100}$.
9. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(0,5)^{x+2} > \frac{25}{100}$.
10. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $(\sqrt[3]{2})^{9-6x} > 32$.
11. Визначити найменший розв'язок нерівності $(0,2)^{x+5} \leq 5^{-2}$.
12. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $(\sqrt{5})^{6+4x} > \frac{1}{125}$.
13. Визначити найбільший розв'язок нерівності $(0,4)^{2x+4} \geq 0,16$.
14. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x+8} < \frac{25}{4}$.
15. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{7}{2}\right)^{6+x} < \frac{4}{49}$.
16. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2^{3-x} \cdot \log_2\left(\frac{1}{3}\right) > 4 \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$.
17. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 3 < \frac{25}{4} \cdot \log_{\frac{1}{2}} 3$.
18. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $3^{x+3} \cdot \log_3\left(\frac{1}{2}\right) < 9 \log_3\left(\frac{1}{2}\right)$.
19. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} 5 < 4 \log_{\frac{1}{3}} 5$.
20. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \cdot \log_5\left(\frac{1}{7}\right) > 9 \log_5\left(\frac{1}{7}\right)$.

21. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x+12} \cdot \cos 2 \leq 12\frac{1}{4} \cdot \cos 2$.
22. Знайти найменший розв'язок нерівності $(0,4)^{10-2x} \cdot \sin 2 \geq 6\frac{1}{4} \cdot \sin 2$.
23. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(1,75)^{16-2x} \cdot \operatorname{tg} 2 \leq 3\frac{1}{16} \cdot \operatorname{tg} 2$.
24. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(0,3)^{2x+20} \cdot \operatorname{ctg} 2 > \frac{100}{9} \cdot \operatorname{ctg} 2$.
25. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(1,44)^{8-x} \cdot \sin 5 > 1\frac{1}{5} \cdot \sin 5$.
26. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(\sqrt{2}-2) \cdot (0,04)^{\frac{x}{2}-2} \leq (\sqrt{2}-2) \cdot 25\sqrt{5}$.
27. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(3,14-\pi) \cdot (2,(6))^{x-1} \geq 7\frac{1}{9} \cdot (3,14-\pi)$.
28. Знайти найменший розв'язок нерівності $(1,41-\sqrt{2}) \cdot (1+0,(9))^{x+4} \leq 4\sqrt{2} \cdot (1,41-\sqrt{2})$.
29. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(\sin 3-2) \cdot \left(\frac{3}{2}-0,(9)\right)^{5-x} \geq 8\sqrt{2} \cdot (\sin 3-2)$.
30. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(1-0,(5))^{\frac{x}{2}-1} \cdot \lg\left(\frac{1}{\pi}\right) \leq 5\frac{1}{16} \cdot \lg\left(\frac{1}{\pi}\right)$.

Рівень 2

1. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $2^{x-1} > \frac{3}{2} \cdot 3^x$.
2. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
3. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $3^{x-1} > \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1}$.

4. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $3^{x-2} > \frac{2}{9} \cdot 5^x$.
5. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $2^{x+2} > 28 \cdot 7^x$.
6. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $9 \cdot 7^{x+1} < 49 \cdot 3^{x+3}$.
7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $6 \cdot 5^x < 10 \cdot 3^{x+1}$.
8. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $5^{x-3} > \frac{1}{3} \cdot 2^{x-1}$.
9. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $5^{x-2} > \frac{1}{5} \cdot 2^{x+1}$.
10. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $7^{x-1} > \frac{52}{7} \cdot 2^{x-2}$.
11. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $6^x + 6^{x+1} < 9 \cdot 2^{x+1} + 7 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot 2^{x+3}$.
12. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} > 2 \cdot 5^{x+1} + 7 \cdot 5^{x+2}$.
13. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $3 \cdot 4^x + 4^{x+2} > 3 \cdot 7^x + 4 \cdot 7^{x+1} + 2 \cdot 7^{x+2}$.
14. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $5 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x+1} < 2 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2}$.
15. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $2 \cdot 5^x + 5^{x+1} < 7 \cdot 2^{x+1} + 9 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^{x+3}$.
16. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $5^x + 2 \cdot 5^{x+1} > 7 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2}$.
17. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} < 3 \cdot 6^x + 7 \cdot 6^{x+1}$.
18. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $2 \cdot 7^x + 7^{x+1} > 8 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{x+1} + 7 \cdot 3^{x+2}$.

19. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 3(5^{x+1} - 5^{x+3})$.
20. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $7^x - 2^{x+2} < 5 \cdot 7^{x-1} - 2^{x-2} - 49 \cdot 7^x$.
21. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $3^x - 2^{x+4} > 3^{x-1} - 55 \cdot 2^{x-2}$.
22. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $3^{x+2} + 7^x < 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1} - 7^{x+2}$.
23. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $3^{x+2} - 3^{x+3} - 3^{x+4} > 5 \cdot (7^{x+2} - 7^{x+3})$.
24. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $5^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} - 5^{x-1} > 3 \cdot 7^{x+1} - 7^x$.
25. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$.
26. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $3^{x+1} - 3^x \cdot \log_2 \frac{1}{3} > 5 \cdot (2^{x+1} + 2^x \cdot \log_2 144)$.
27. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $2^{x+2} - 2^x \cdot \log_3 \frac{1}{4} < 16 \cdot (3^x + 3^x \cdot \log_3 6)$.
28. Знайти суму натуральних розв'язків нерівності $(0,3)^{2+4+6+\dots+2x} > (0,3)^{72}$.
29. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $4x^2 - 3^{\sqrt{x+1}} - x \cdot 3^{\sqrt{x}} > 2x + 6 - 2x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.
30. Знайти найбільший розв'язок нерівності $(x \cdot 2^x)^2 + 2x^2 - 8 \leq 4^{x+1} + 3x(4^x + 2)$.

Рівень 3

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $7 \cdot 4^{\frac{x}{2}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{2}} > 92$.
2. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29$.
3. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $3^{x-1} > \frac{2-3^x}{3^x-4}$.

4. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8$.

5. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $25^{\frac{x}{5}} - 6 \cdot 5^{\frac{x}{5}} < -5$.

6. Знайти найбільший розв'язок нерівності $16^{\frac{x+1}{2}} \leq 15 \cdot 4^{\frac{x}{10}} + 4$.

7. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $9^{x+1} + 3^{x+2} - 54 > 0$.

8. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $25^{-x} - 5^{1-x} \geq 50$.

9. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $2^{\frac{x}{5}} + 2^{1-\frac{x}{5}} - 3 < 0$.

10. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+5}{2x+1}} < 3^{\frac{x+15}{x-3}}$.

11. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності

$$\left(\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}\right)^x \leq 10.$$

12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності

$$\left(\sqrt[7]{9-\sqrt{80}}\right)^x + \left(\sqrt[7]{9+\sqrt{80}}\right)^x \leq 18.$$

13. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $8 \cdot 16^{\frac{x}{3}} + 6 \cdot 12^{\frac{x}{3}} - 9 \cdot 9^{\frac{x}{3}} < 0$.

14. Знайти найбільший розв'язок нерівності $2 \cdot 49^{\frac{x}{5}} - 5 \cdot 14^{\frac{x}{5}} - 7 \cdot 4^{\frac{x}{5}} \leq 0$.

15. Знайти найбільший розв'язок нерівності $2 \cdot 81^{-x} - 36^{-x} - 3 \cdot 16^{-x} \geq 0$.

16. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{2^{3x+3}} + 12 \leq 0$.

17. Знайти найменший додатний розв'язок нерівності

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x \geq 0.$$

18. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \leq 0$.

19. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $(0, (1))^{\frac{x+1}{x-2}} > (0, (3))^{\frac{x-1}{x-4}}$.

20. Знайти найменший розв'язок нерівності $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} \leq 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$.
21. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{9^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{x}{2}+2}} > 3^{\frac{x}{2}} - 9$.
22. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{4^{\frac{x}{3}} - 5 \cdot 2^{\frac{x}{3}} - 24} \leq 2^{\frac{x}{3}} - 2$.
23. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4} < \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$.
24. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $3 \cdot \sqrt{6 + 2^x - 4^x} > 4 \cdot 2^x - 2$.
25. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{9^x - 3^{x+1}} > 4 - 3^x$.
26. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\left(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\right)^{\frac{x}{4}} + \left(\sqrt{4 - \sqrt{15}}\right)^{\frac{x}{4}} > 8$.
27. Знайти найменший розв'язок нерівності $5^{\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}} - 25^{\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}} \leq 0$.
28. Знайти найменший розв'язок нерівності $2^x - 3 \cdot 2^{0,5(x-3)} \geq 3^{2+\log_3 5} - 19$.
29. Знайти цілий розв'язок нерівності $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} < 12^{\log_{14} 4 + \log_{12} 2} \cdot 7^{\log_7 3 + \log_4 4}$.
30. Знайти найменший додатний розв'язок нерівності $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x^2-6x-4} - \left(\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1\right)^x \geq 0$.

Розділ 16. Логарифмічні нерівності

Рівень 1

1. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\log_2(x-2) \leq 1$.
2. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{3}}(x-3) \leq -1$.
3. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > -3$.

4. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_3(3-x) < 2$.
5. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\log_4(x+4) \leq 1$.
6. Визначити найменший розв'язок нерівності $\log_4(6-x) \leq 1$.
7. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_2(2-x) \leq 2$.
8. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_2(x-4) \leq 3$.
9. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{4}}(3-x) \geq -1$.
10. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{3}}(6-x) \geq -1$.
11. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_5(x+1) \leq 1$.
12. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{5}}(4-x) < -1$.
13. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{7}}(x+4) > -1$.
14. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_9(x+2) < \frac{1}{2}$.
15. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_4(x-2) < \frac{1}{2}$.
16. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $2^{\log_2(6-x)-1} < x$.
17. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2(7-x)} < 2x$.
18. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $3^{\frac{-\log_1(x+4)}{3}} > 2x$.
19. Знайти цілий розв'язок нерівності $5^{\log_5(4-x)-1} < 0,2x$.
20. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $4^{2^{\frac{1}{2}\log_2(x+3)}} > 4x$.

21. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $8^{\frac{1}{3}\log_2(x+5)} > 3x$.

22. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $9^{\frac{1}{2}\log_3(2x-6)} < x$.

23. Визначити цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}\log_2(3x-9)} < x+1$.

24. Визначити добуток цілих розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{36}\right)^{-\frac{1}{2}\log_6(x+6)} > 3x$.

25. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $5^{-\frac{\log_1(2x+10)}{5}} > x$.

26. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\sin 4 \cdot \log_2(6-x) > 2 \sin 4$.

27. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\cos 2 \cdot \log_3(x+3) < 2 \cos 2$.

28. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\operatorname{tg} 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < -2 \operatorname{tg} 2$.

29. Визначити цілий розв'язок нерівності $\operatorname{ctg} 6 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(4-x) < -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 6$.

30. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\cos 4 \cdot \log_3(7-x) > 2 \cos 4$.

Рівень 2

1. Знайти цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)} 2} > \log_2(7-x)$.

2. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{3}-1\right)} 3} < \log_3(10-x)$.

3. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(1-\frac{x}{2}\right)} 3} > \log_3(x+6)$.

4. Визначити добуток цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(1-\frac{x}{3}\right)} 2} < \log_2(x+3)$.
5. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)} 2} < \log_2(6-x)$.
6. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{3}+1\right)} 2} < -\log_{\frac{1}{2}}(5-x)$.
7. Визначити добуток цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{2}+2\right)} 5} > -\log_{\frac{1}{5}}(4-x)$.
8. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(2-\frac{x}{2}\right)} 4} < -\log_{\frac{1}{4}}(x+3)$.
9. Визначити цілий розв'язок нерівності $\frac{1}{\log_{\left(3-\frac{x}{3}\right)} 7} > -\log_{\frac{1}{7}}(x-1)$.
10. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{2}+3\right)} 3} < -\log_{\frac{1}{3}}(2-x)$.
11. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(2^x - 8) > -4$.
12. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_2\left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{256}\right) > 2$.
13. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{6}}(243 - 3^x) \geq -3$.
14. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $\log_3\left(\frac{1}{81} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x\right) < 3$.
15. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_3(4^x - 32) < 4$.
16. Визначити цілий розв'язок нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left(4-\frac{x}{2}\right)} > 1$.

17. Визначити цілий розв'язок нерівності $3^{\log_2\left(5-\frac{x}{2}\right)} < 1$.

18. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\left(3-\frac{x}{4}\right)} > 1$.

19. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $3^{\log_2\left(2-\frac{x}{5}\right)} < 1$.

20. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_5\left(2-\frac{x}{4}\right)} > 1$.

21. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_2^2(2x) < \log_2^2 x + 5$.

22. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x}{2}\right) > \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3$.

23. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_3^2(6-3x) < \log_3^2(2-x) + 3$.

24. Визначити добуток цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{3}}^2\left(\frac{3-x}{3}\right) > \log_{\frac{1}{3}}^2(3-x) - 3$.

25. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $\log_4^2(12-4x) < \log_4^2(3-x) + 5$.

26. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{x+4}{4}\right) > \log_{\frac{1}{4}}^2(x+4) - 1$.

27. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $\log_2^2(28-6x) < \log_2^2(14-3x) + 7$.

28. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{5}}^2\left(\frac{x+3}{5}\right) > \log_{\frac{1}{5}}^2(x+3) - 1$.

29. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_3^2(3-3x) < \log_3^2(1-x) + 3$.

30. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{3}}^2\left(\frac{x+3}{3}\right) > \log_{\frac{1}{3}}^2(x+3) - 3$.

Рівень 3

1. Визначити найменший розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \log_{\frac{1}{9}} (x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}} 6$.

2. Визначити найбільший розв'язок нерівності $\log_{0,2}(x^2 - x - 20) + \log_5(x+4) \geq 0$.

3. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\lg(x+2) + \log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x+2) > -1$.

4. Визначити найбільший розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \log_2(x-1) \geq 1$.

5. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_2(x+14) + 2 \log_4(x+2) < 2 \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$.

6. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(x+10) + 2 \log_{\frac{1}{4}}(5-x) > 3 \log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{26}$.

7. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{0,25}(8x - x^2 - 7) + \log_4(x-2) < 0$.

8. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $2 \log_{\frac{1}{\sqrt{10}}}(x-3) + \lg(x-3) > -3$.

9. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) - \log_3(x-5) \geq 3 \log_{\frac{1}{3}} 2$.

10. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_3(x+7) + 2 \log_9(x+4) < 3$.

11. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $(x^2 - 4x) \cdot \log_2(x-2) > 0$.

12. Визначити цілий розв'язок нерівності $(5x + x^2) \cdot \log_3(x+3) < 0$.

13. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $(x^2 - 6x) \cdot \log_2(x+2) \leq 0$.

14. Визначити суму від'ємних цілих розв'язків нерівності $(3x + x^2) \cdot \log_5(x + 5) \geq 0$.

15. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $(x^2 - 8x) \cdot \log_6(x - 4) > 0$.

16. Визначити найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{36 - x^2}{\log_3\left(\frac{x}{2} - 1\right)} > 0$.

17. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності $\frac{49 - x^2}{\log_2\left(\frac{x}{3} + 1\right)} < 0$.

18. Знайти розв'язок нерівності $\frac{x^2(x - 2)^2}{\log_{0.5}(x^2 + 1)} \geq 0$.

19. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{\log_{0.1}(x + 2)}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} \leq 0$.

20. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\frac{\log_{0.3}(x + 2)}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} \leq 0$.

21. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_{0.5}(x + 3) < \log_{0.25}(7 - x)$.

22. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_{\frac{1}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{3}}(x + 1) + \log_{\sqrt{3}}(5 - x) < 1$.

23. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_3(x + 2) < \log_5(8 - x)$.

24. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 2) - \log_{\sqrt{2}}(6 - x) < 0$.

25. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_4(x - 1) + \log_4(x + 1) > \log_2 \sqrt{36 - x^2}$.

26. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $(x^2 - 9) \cdot \log_3(x + 1) > 0$.

27. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\left(\frac{x^2}{2} - 8\right) \cdot \log_5(x + 2) \leq 0$.

28. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $(16 - x^2) \cdot \log_2(x + 3) > 0$.

29. Розв'язати нерівність $\frac{x^2 \cdot (x + 3)^2}{\log_2(x^2 + 1)} \leq 0$.

30. Визначити суму розв'язків нерівності $\frac{(x - 1)^2 \cdot (x + 6)^2}{\log_{0,5}(x^2 + 3)} \geq 0$.

31. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_5(36 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{2} - 1\right)} 5 > 1$.

32. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_3(49 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{3} + 1\right)} 3 > 1$.

33. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_2(25 - x^2) \cdot \log_{(x+2)} 2 > 1$.

34. Визначити найменший цілий розв'язок нерівності $\log_4(16 - x^2) \cdot \log_{(x+3)} 4 > 1$.

35. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\log_3(19 - x^2) \cdot \log_{(x+4)} 3 > 1$.

36. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\log_2(25 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{4} + 1\right)} 2 < 1$.

37. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_7(81 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{5} + 1\right)} 7 < 1$.

38. Визначити цілий розв'язок нерівності $\log_6(27 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{2} - 1\right)} 6 < 1$.

39. Визначити добуток цілих розв'язків нерівності $\log_6(36 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{3} - 1\right)} 6 < 1$.

40. Визначити суму цілих розв'язків нерівності $\log_3(32 - x^2) \cdot \log_{\left(\frac{x}{3} + 1\right)} 3 < 1$.

Розділ 17. Нерівності з модулями та комбіновані нерівності

Рівень 1

1. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $|2x+13| < 3$.
2. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $|x-3| < 5$.
3. Знайти добуток цілих додатних розв'язків нерівності $|2x-1| < 7$.
4. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\left|\frac{x}{2}+2\right| < 2$.
5. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\left|\frac{x}{3}+1\right| < \frac{2}{3}$.
6. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $\left|\frac{x}{2}+3\right| > 5$.
7. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\left|\frac{x}{3}-1\right| > 1,5$.
8. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $|2-x| \geq 5$.
9. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності $\left|1-\frac{x}{5}\right| \geq 2$.
10. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $\left|2-\frac{x}{3}\right| > 3$.
11. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{5-x} \cdot \log_2(x+1) > 0$.
12. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{11-x} \cdot \log_3(x+3) \leq 0$.
13. Знайти найменший розв'язок нерівності $\sqrt{x+7} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right) \geq 0$.
14. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\sqrt{2x+9} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{3}\right) \leq 0$.

15. Знайти суму цілих від'ємних розв'язків нерівності $\sqrt{13-2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x+7) < 0$.
16. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $|x| \cdot \arcsin\left(\frac{x}{3} + 2\right) < 0$.
17. Знайти суму розв'язків нерівності $|2x-1| \cdot \arccos(x-1) \leq 0$.
18. Знайти цілий розв'язок нерівності $(x-6)^0 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2} - 2\right) > 0$.
19. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $(x-9)^0 \cdot \arccos\left(\frac{x}{5} - 1\right) > 0$.
20. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{9-x^2} \cdot \operatorname{arctg}|x| > 0$.
21. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) \cdot \log_2(4-x) > 0$.
22. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\left|x + \frac{1}{2}\right| \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2} + 1\right) \leq 0$.
23. Знайти кількість розв'язків нерівності $|x-3| \cdot \arccos\left(\frac{x}{2} + 3\right) \leq 0$.
24. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 1\right| < 3$.
25. Знайти найменший розв'язок нерівності $|2^{2-x} - 7| \leq 1$.
26. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\sqrt{4-x^2} \cdot \left|\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)} 5\right| \geq 0$.
27. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\sqrt{16-x^2} \cdot \left|\log_{\left(\frac{1-x}{3}\right)} 7\right| \geq 0$.
28. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $2^{\log_2(4-x^2)} + x^0 > 4 - x^2$.

29. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності

$$3^{\log_3(4x-x^2)} - (x-2)^0 \cdot x > 3x - x^2 - 1.$$

30. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{3x-x^2} + 2^{\log_2 \sin x} \geq \sin x$.

Рівень 2

1. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$|x| - 2|x+1| + 3|x+2| > 4.$$

2. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $x^2 - 4|x| < 12$.

3. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності $x^2 - 3|x| > 10$.

4. Розв'язати нерівність $x^2 + 2|x-1| + 7 \leq 4|x-2|$.

5. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\frac{|4-x|-x}{|x-6|-2} > 2$.

6. Знайти цілий розв'язок нерівності $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \geq 2$.

7. Знайти найменший розв'язок нерівності $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| \geq 2$.

8. Знайти найбільший розв'язок нерівності $\left| \frac{x+4}{x+2} \right| \leq 1$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(|x|-3)(|x|+7) < 0$.

10. Знайти суму цілих від'ємних розв'язків нерівності $(|x|-5)(|x|-7) \leq 0$.

11. Розв'язати нерівність $(x^2 + 4)^{\sqrt{\frac{|x+4|}{2}}} \geq -\frac{x}{4}$.

12. Знайти добуток розв'язків нерівності $3 \cdot (x^2 + 3)^{\sqrt{|9-x^2|}} \geq \frac{x}{3} + 1$.

13. Знайти кількість розв'язків нерівності $|x^2 - 4|^{\sqrt{-2|x^2-1|}} < 9 - x^2$.

14. Знайти кількість розв'язків нерівності $(4 - x^2)^{\sqrt{-|x(x-2)|}} < 4 - x$.

15. Розв'язати нерівність $|x + 1|^{\sqrt{-\sqrt{(x+2)(x-6)}}} < x + 3$.

16. Розв'язати нерівність $(x + 2)^{\sqrt{-\sqrt{(x+1)(x-3)}}} > -x$.

17. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(\log_{2005} x^{2005})^0 \frac{|x^3| + 8}{x^2 - 2x + 4} \geq x^2 - x - 6$.

18. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності

$$(\log_{1951}(x-2))^{1951} \frac{8 - |x^3|}{x^2 + 2x + 4} \leq 2 + 4x - x^2.$$

19. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(2^{x-1} - 2)^0 \frac{x^3 - 1}{x - 1} < 1 + 6x$.

20. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(3^{x+3} - 3)^0 \frac{x^3 + 1}{x + 1} > 2x^2 + 5x + 1$.

21. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-1)^0 \cdot 2^{\log_2(4-x)} \leq 2|x|^0 \sqrt{4-x}$.

22. Знайти суму цілих додатних розв'язків нерівності

$$(x^2 - 10x + 16)^0 \cdot 3^{\log_3\left(\frac{3-x}{3}\right)} \geq -2 \frac{|x|}{x} \sqrt{9-x}.$$

23. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{4 \sin^2 45^\circ - \sqrt{x^2}}{2 \operatorname{tg} 19^\circ \operatorname{tg} 71^\circ - x^0} \geq -(x^2 - 9)^0$.

24. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності

$$\sin 2004^\circ \sin 540^\circ + \frac{3}{2} \operatorname{tg} 60^\circ \frac{(x-3)^0 x^2}{|x|} > x^2 \cdot \cos^3 30^\circ.$$

25. Розв'язати нерівність $\sqrt{-|x^3 - 4x|} + \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) > 2 \arccos \frac{x}{2}$.

26. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt{-|x^3 - 9x|} + \arcsin\left(\frac{x}{3} + 1\right) > 4 \arcsin \frac{x}{3}$.

27. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^3 - x^2 - 12x} + \log_2(1-x) > \sqrt{x^2 + 12x - x^3} + 2^{-\sqrt{-x}}$.

28. Розв'язати нерівність $\sqrt[4]{4x^2 + 5x - x^3} + \log_6(x+1) > \frac{\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 - 5x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

29. Знайти кількість розв'язків нерівності $(\cos x)^0 \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x} \leq \frac{2|x - \frac{\pi}{2}|}{\pi}$ на проміжку $[0, \pi]$.

30. Знайти кількість розв'язків нерівності $(\cos x)^0 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} \leq \frac{2|x|}{\pi}$ на проміжку $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Рівень 3

1. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\cos(2x) \cdot \sqrt{16 - x^2} \geq 0$.

2. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $\cos(2x) \cdot \sqrt{16 - x^2} < 0$.

3. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{25 - x^2} \geq 0$.

4. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sin(x) \cdot \sqrt{16 - x^2} \geq 0$.

5. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sin(x) \cdot \sqrt{16 - x^2} \leq 0$.

6. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2 \cos x - 1) \cdot \sqrt{36 - x^2} \geq 0$.

7. Знайти суму додатних цілих розв'язків нерівності $(2 \cos x - 1) \cdot \sqrt{36 - x^2} < 0$.

8. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \cdot \sqrt{64 - x^2} \geq 0$.

9. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \cdot \sqrt{64 - x^2} < 0$.

10. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{49-x^2}\geq 0$.

11. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{49-x^2}< 0$.

12. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $(2\sin 2x+\sqrt{3})\cdot\sqrt{25-x^2}\geq 0$.

13. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $(2\sin 2x+\sqrt{3})\cdot\sqrt{25-x^2}< 0$.

14. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2\cos 3x-1)\cdot\sqrt{9-x^2}> 0$.

15. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $(2\cos 3x-1)\cdot\sqrt{9-x^2}\leq 0$.

16. Визначити найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) > \log_2 \sqrt{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

17. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2\left(-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right) > \log_2 \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 4.$$

18. Визначити найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{3}.$$

19. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{12}\right)\right) > \frac{1}{2}\log_2 3.$$

20. Визначити найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(-\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right) < \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 3 + 1.$$

21. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)\right) < \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} 9 + 1.$$

22. Визначити найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2 \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{12} \right) \right) < \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{9}.$$

23. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2 \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi x}{24} \right) \right) < 2 \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{3}.$$

24. Визначити найменший додатний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2 \left(\cos \left(\frac{\pi x}{12} \right) \right) < 2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - 1.$$

25. Визначити найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності

$$\log_2 \left(-\sin \left(\frac{\pi x}{12} \right) \right) > -1.$$

26. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок нерівності

$$\sqrt{9x^2 - 6x + (x+1)^0} > \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot (x+2)^0.$$

27. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності

$$\lg \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \lg \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right) \leq \lg \frac{2x - |x|}{3}.$$

28. Знайти найбільший розв'язок нерівності $5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} \leq \frac{\cos^4 x}{16} + \frac{\sin^2 x}{8} - \frac{\sin^4 x}{16}.$

29. Знайти найменший цілий додатний розв'язок нерівності

$$(x-2)^0 \cdot \sin^2 2004^\circ + (x-3)^0 \cdot \cos^2 204^\circ \geq 2 \sin \frac{\pi x}{2}.$$

30. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{x^{0,4} \cdot x^{\frac{1}{5}} + 4 \operatorname{ctg} 4^\circ \operatorname{ctg} 94^\circ}{|x| - 2} \geq x^2.$

Розділ 18. Системи нерівностей

Рівень 1

1. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} -2 \sin^2(x^2) < 2 \cos^2(x^2) + 5, \\ 2 - |x| \geq 0. \end{cases}$$

2. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2\sin^2 \sqrt{x} > -2\cos^2 \sqrt{x} - 0,5, \\ |x| - 2 \leq 0. \end{cases}$$

3. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{2} \geq \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}, \\ |x-1| \leq 4. \end{cases}$$

4. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} -5 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} < \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{4}}, \\ |x-2| < 6. \end{cases}$$

5. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2\sin \frac{\pi x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} > 2\cos \frac{\pi x}{2} - 1, \\ \log_2(x+2) < 3. \end{cases}$$

6. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3\sin \frac{\pi x}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} - 2 < 3\cos \frac{\pi x}{4}, \\ \log_2(x-11) \leq 4. \end{cases}$$

7. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} > 4\sin \frac{\pi x}{2} - 2, \\ \log_{\frac{1}{2}}(5-x) \geq -2. \end{cases}$$

8. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2\cos \frac{\pi x}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - 3 < 2\sin \frac{\pi x}{4}, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq -3. \end{cases}$$

9. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 + 2\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{2} > \frac{2}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}, \\ \sqrt{x-3} \leq 3. \end{cases}$$

10. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 3\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi x}{3} - 1 < \frac{3}{\sin^2 \frac{\pi x}{3}}, \\ \sqrt{x+3} \leq 3. \end{cases}$$

11. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \sqrt{x} + 1 \geq \frac{x}{\sqrt{x}}, \\ 2x \sin 4 \geq 8 \sin 4. \end{cases}$

12. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \sqrt{-x} - 1 < \frac{-x}{\sqrt{-x}}, \\ x \cos 2 \leq -3 \cos 2. \end{cases}$

13. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 2 \log_2(-x) < \log_2 x^2 + 1, \\ \frac{x}{2} \sin 3 > -2 \sin 3. \end{cases}$

14. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_3 x^6 + 2 > 6 \log_3(-x), \\ \frac{x}{3} \operatorname{tg} 2 < -2 \operatorname{tg} 2. \end{cases}$

15. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 \log_3(2-x) < 2 \log_3(x-2)^2 + 5, \\ 2x \operatorname{ctg} 4 > -6 \operatorname{ctg} 4. \end{cases}$$

16. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x \cos 4 - 6 \sin 4 \geq 6 \cos 4 - 2x \sin 4, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}. \end{cases}$$

17. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x \cos 3 - 5 \sin 3 \geq 5 \cos 3 - x \sin 3, \\ \left(\frac{1}{8}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}. \end{cases}$$

18. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x \log_3 \frac{1}{2} - 3 \log_{\frac{1}{2}} 3 \geq 3 \log_3 \frac{1}{2} - x \log_{\frac{1}{2}} 3, \\ \left(\frac{1}{9}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}. \end{cases}$$

19. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x \log_{\frac{1}{3}} 5 - 4 \log_5 \frac{1}{3} \geq 4 \log_{\frac{1}{3}} 5 - x \log_5 \frac{1}{3}, \\ 4^{x+1} \geq 2^{x+3}. \end{cases}$$

20. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x \sin 4 - 6 \log_{\frac{1}{4}} 3 \geq 6 \sin 4 - x \log_{\frac{1}{4}} 3, \\ 9^{2x+2} \geq 27^{x+1}. \end{cases}$$

21. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x \cos 3 - \log_4 \frac{1}{3} \leq \cos 3 - x \log_4 \frac{1}{3}, \\ 25^{2x+1} \leq 125^{x+2}. \end{cases}$$

22. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 3 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} > 1, \\ \sqrt{x+4} \leq 3. \end{cases}$

23. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 2 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{6} < 3, \\ \sqrt{9-x} \leq 3. \end{cases}$

24. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 5 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{8} > 4, \\ \sqrt{8-x} \leq 4. \end{cases}$

25. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 4 \sin^2 \sqrt{-x} + 2 \cos^2 \sqrt{-x} < 6 - 2 \cos^2 \sqrt{-x}, \\ 2 - |x+2| > 0. \end{cases}$$

26. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^0 x \cos 3 > x \cos 3 - 2, \\ \log_2(x+3) \leq 3. \end{cases}$$

27. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (x^2 - 9)^0 x \sin 10 > x \sin 10 - 3, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 4) \geq -3. \end{cases}$$

28. Знайти найменший цілий додатний розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2(\log_2(x - 5))^0 > 1, \\ |x - 2| > 2. \end{cases}$$

29. Знайти найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 3\left(\log_{\frac{1}{2}}(9 + x)\right)^0 < 4, \\ |x + 5| > 1. \end{cases}$$

30. Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 5(\log_3(13 - x))^0 > 3, \\ |x - 6| > 4. \end{cases}$$

Рівень 2

1. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 16 > x^2, \\ 3(x - 1) < 2\left(x - \frac{1}{2}\right). \end{cases}$

2. Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ 3(x + 2) > 4(x + 3). \end{cases}$$

3. Знайти найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 > 6x - 8, \\ 5(x + 2) > 4(x + 1) + 2. \end{cases}$$

4. Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 14x + 48 > -x^2, \\ 6(x + 1) < 5(x + 2) - 7. \end{cases}$$

5. Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 3x + 5 > -2x^2, \\ 2(5 - 2x) > 3(1 + x). \end{cases}$$

6. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x^2 < 25, \\ 7x+13 < 4(x+1). \end{cases}$
7. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 36 > x^2, \\ 2(x+5) > 3x+9. \end{cases}$
8. Знайти розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x^2 - 8x + 16 \leq 0, \\ 2(x+2) \geq x+7. \end{cases}$
9. Знайти розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x^2 \leq -10x - 25, \\ 3x+7 \geq 4(x+2). \end{cases}$
10. Знайти розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + 7x + 25 \leq -7x - 24, \\ 2x+3 \leq 3(x+5). \end{cases}$
11. Знайти розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x^2 + 36 \leq 12x, \\ 5(x+2) \leq 3x+26. \end{cases}$
12. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > -3, \\ x^2 - 4x > 0. \end{cases}$
13. Знайти розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \frac{1}{2-x} \geq 1, \\ 2 \cdot 16^x \geq 32^x. \end{cases}$
14. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \log_2(2x-4) < 3, \\ x^2 - 7x + 12 > 0. \end{cases}$
15. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+3) > -2, \\ x^2 - 3x - 4 > 0. \end{cases}$
16. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \log_4(2x-4) < 1, \\ 3x - 2x^2 - 4 < 0. \end{cases}$
17. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \log_{\left(\frac{3-x}{2}\right)} 2 < 0, \\ -(x-5)^2 \geq 0. \end{cases}$

18. Розв'язати систему нерівностей
$$\begin{cases} \sin x < \cos 2x, \\ -(x+3)^2 \geq 0. \end{cases}$$

19. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей
$$\begin{cases} \frac{-2}{4-x} \geq 1, \\ 27 \cdot 9^x \leq 27^x. \end{cases}$$

20. Знайти найменший розв'язок системи нерівностей
$$\begin{cases} \frac{-18}{6-x} \geq 2, \\ 64^{\frac{x}{3}} \geq 16^{\frac{x}{3}} \cdot 256. \end{cases}$$

21. Знайти найбільший цілий від'ємний розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{-6}{x+5} \geq -1, \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot 8 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x. \end{cases}$$

22. Розв'язати систему нерівностей
$$\begin{cases} \sin 3 \cdot \sin x > \cos 5 \cdot \cos x, \\ 4 + \sqrt{x^2 - 64} \geq 2\sqrt{64 - x^2} + \frac{1}{x+8}. \end{cases}$$

23. Розв'язати систему нерівностей
$$\begin{cases} \sin 8 \cdot \sin x > \cos 5 \cdot \cos x, \\ \sqrt{16 - x^2} \leq 3^{\sqrt{x^2 - 16}} + \log_2(2 - x). \end{cases}$$

24. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 \operatorname{ctg} 1 + 7x \operatorname{tg} 1 \geq x^2 \operatorname{tg} 1 + 7x \operatorname{ctg} 1, \\ \log_{(x-3)} 7 \geq 0. \end{cases}$$

25. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 \operatorname{tg} \frac{7}{2} + 5x \operatorname{ctg} \frac{7}{2} \leq x^2 \operatorname{ctg} \frac{7}{2} + 5x \operatorname{tg} \frac{7}{2}, \\ \log_5(7 - x) < 1. \end{cases}$$

26. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 \arccos(0,9) + 6x \arcsin(0,9) \geq x^2 \arcsin(0,9) + 6x \arccos(0,9), \\ \log_{\frac{1}{2}}(x-3) > -2. \end{cases}$$

27. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 \arcsin(-0,7) + 4x \arccos(-0,7) \leq x^2 \arccos(-0,7) + 4x \arcsin(-0,7), \\ \log_{\left(\frac{x-1}{3}\right)} \frac{1}{5} > 0. \end{cases}$$

28. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{12} \cdot \cos \frac{\pi x}{12} > -\frac{1}{4}, \\ \sqrt{13-x} < 3. \end{cases}$

29. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \sin^2 \frac{\pi x}{6} - \cos^2 \frac{\pi x}{6} > -\frac{1}{2}, \\ \sqrt{x+3} \leq \sqrt{5}. \end{cases}$$

30. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}, \\ \sqrt{x+1} \leq \sqrt{\frac{11}{2}}. \end{cases}$

Рівень 3

1. Знайти кількість розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 36 \geq x^2 \sin^2 23, \\ |x^2 - 5|x|| \leq 0. \end{cases}$

2. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 \cos^2 22 \leq 40, \\ 4|x| - x^2 > 0. \end{cases}$

3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} x^2 \leq 9 \sin^2 4, \\ x^2 + 6|x| \leq 0. \end{cases}$

4. Знайти суму квадратів розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 \leq 16 \cos^2 \frac{7\pi}{6}, \\ |x^2 - \sqrt{10}|x|| \leq 0. \end{cases}$

5. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} x^2 \geq 36 \sin^2 \frac{11\pi}{6}, \\ (x+5)^2 + 6|x+5| \leq 0. \end{cases}$

6. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{(6-|x|)} 2 < \log_{(6-|x|)} 3, \\ \sqrt{|x|+5} \geq -1. \end{cases}$$

7. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_{|2-\frac{x}{2}|} 2 > \log_{|2-\frac{x}{2}|} 3, \\ \sqrt{|x|+1} > -2. \end{cases}$

8. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_{|3-x|} 3 < \log_{|3-x|} 4, \\ \sqrt{3-|x|} > -2. \end{cases}$

9. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\left(2-\frac{|x|}{3}\right)} 3 > \log_{\left(2-\frac{|x|}{3}\right)} 4, \\ \sqrt{|x|-5} > -3. \end{cases}$$

10. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{(4-|x|)} 5 < \log_{(4-|x|)} 7, \\ \sqrt{|x|-1} > -2. \end{cases}$$

11. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_{|1-\frac{x}{4}|} 5 > \log_{|1-\frac{x}{4}|} 7, \\ \sqrt{|x|-2} \geq -1. \end{cases}$

12. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{(|x|-2)} 7 < \log_{(|x|-2)} 9, \\ \sqrt{6-|x|} \geq -2. \end{cases}$$

13. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{|x|}{2}-3\right)} 7 > \log_{\left(\frac{|x|}{2}-3\right)} 9, \\ \sqrt{8-|x|} > -1. \end{cases}$$

14. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \log_{|x-3|} 10 < \log_{|x-3|} 20, \\ \sqrt{5-|x|} > -1. \end{cases}$

15. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{|x|}{3}-1\right)} 10 > \log_{\left(\frac{|x|}{3}-1\right)} 20, \\ \sqrt{6-|x|} > -2. \end{cases}$$

16. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} < 144^{-1}, \\ \log_2(5-|x|) > 1. \end{cases}$$

17. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2^{\frac{x^2}{6}} \cdot 3^{\frac{x^2}{3}} < 324, \\ \log_{\frac{1}{2}}(|x|-1) < 1. \end{cases}$$

18. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x^2}{7}} \cdot 3^{\frac{x^2}{7}} > \frac{27}{64}, \\ 2^{\frac{1}{\log_{|x-1}| 2}} > 1. \end{cases}$

19. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 2^{\frac{x^2}{8}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2}{4}} \geq \frac{4}{81}, \\ 3^{\log_3|x-2|} > x. \end{cases}$

20. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^2}{5}} \cdot 5^{\frac{x^2}{10}} > \left(\frac{25}{81}\right)^{2.5}, \\ 5^{\log_5(|x|-6)} > x. \end{cases}$

21. Знайти цілий розв'язок системи нерівностей $\begin{cases} x\sqrt{6-x} > x^2, \\ \cos \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} > \frac{1}{8}. \end{cases}$

22. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (x+1)\sqrt{11-x} \geq (x+1)^2, \\ \sin^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{4} - \cos \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{4} < -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

23. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi x}{4} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 1 \right)^0 x^2 < 9x, \\ (x^2 + x - 2) \sqrt{3x^2 + x - 2} \geq 0. \end{cases}$$

24. Знайти модуль суми цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (x^2 + 3x - 10) \sqrt{2x^2 + 5x + 2} \geq 0, \\ \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} - 1 \right)^0 \cdot \log_2(x + 10) \leq 4. \end{cases}$$

25. Знайти суму цілих від'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} (x^2 - 16) \sqrt{x^2 - 9} \geq 0, \\ \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8} - 1 \right)^0 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 9) \geq -4. \end{cases}$$

26. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - 1 \right)^0 \cdot \log_{x^2 + x - 1} 4 > 0, \\ \frac{2x - 2}{x - 6} \leq 1. \end{cases}$$

27. Знайти кількість цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \left(\cos \frac{\pi x}{2} - 1 \right)^0 \log_{36 - x^2 - 2x} 7 > 0, \\ \frac{2x}{x + 6} < 1. \end{cases}$$

28. Знайти добуток цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9 \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{\sqrt{x^2 + 3x}} + 4 \leq 13 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\sqrt{x^2 + 3x}}, \\ \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{6} - \sqrt{3} \right)^0 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x + 5) \geq -3. \end{cases}$$

29. Знайти суму квадратів цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 16 \cdot \left(\frac{9}{16} \right)^{\sqrt{4x - x^2}} + 9 \geq 25 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^{\sqrt{4x - x^2}}, \\ \log_{2x^2 + x} 4 > \log_{2x^2 + x} 2. \end{cases}$$

30. Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{2 + \log_x 9}{\log_x 3 - 0,5} \geq -2, \\ \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} - 1 \right)^0 \cdot \arccos \left(\frac{x}{3} - 3 \right) \geq 0. \end{cases}$$

Розділ 19. Текстові задачі на складання рівнянь нерівностей та їх систем

Рівень 1

1. В одній бочці 99 л бензину, а в другій – 57 л. З першої щодня беруть по 12 л, а з другої по 10 л. Через скільки днів у першій бочці бензину стане у три рази більше, ніж у другій?
2. Поле площею 830 га розділено на 2 частини так, що одна з них на 230 га більша від другої. Знайти площу більшої ділянки.
3. Є труби завдовжки 7 м і 8 м. Скільки треба взяти труб більшої довжини, щоб прокласти трубопровід завдовжки 67 м?
4. Купили 9 м тканини двох сортів, ціни яких відповідно рівні 40 грн. і 30 грн. за метр. За всю покупку заплатили 330 грн. Скільки купили метрів дорожчої тканини?
5. На будівництві працювало 50 мулярів і теслярів. Згодом кількість мулярів збільшилася у два рази, а теслярів у 3 рази і всіх їх стало 130. Скільки було спочатку мулярів на будівництві?
6. У господарстві було всього 305 корів і телиць. Після того як кількість корів збільшилася на 15, а телиць – на 90, телиць стало в 4 рази більше, ніж корів. Скільки в господарстві стало корів?
7. Скільки кілограм важить риба, якщо хвіст важить 150 гр, голова – стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб – стільки, скільки голова і хвіст разом?

8. Консервна банка з кришкою коштує 71 коп. Скільки коштує кришка, якщо банка на 60 коп дорожче кришки?
9. Три роки тому батько був старший від сина у п'ятеро, а зараз – учетверо. Скільки років сину?
10. Скільки років учневі, якщо відомо, що через 10 років він стане у 5 разів старший, ніж був 10 років тому?
11. У Марії грошей удвічі більше, ніж у Наталки. Якщо б Марії дали ще 1 грн., а Наталці – ще 10 коп., то у Марії їх стало б у три рази більше, ніж у Наталки. Скільки копійок має Наталка?
12. Площа спортивного майданчика прямокутної форми дорівнює 845 м^2 . Якщо довжину майданчика зменшити на 5 м, а ширину збільшити на 4 м, то площа його не зміниться. Яка початкова довжина майданчика у метрах?
13. Сад і город мають форму прямокутника. Площа кожного з них дорівнює 18 арів. Ширина саду на 5 м менша від ширини городу, а довжина саду на 10 м більша від довжина городу. Знайти ширину саду у метрах.
14. Для перевезення 60 т вантажу, були замовлені автомашини певної вантажності. Оскільки машин такої вантажності не виявилось, то було відправлено на 4 автомашини більше, вантажність кожної з яких на півтонни менша. Яку кількість автомашин було замовлено?
15. Час, який витрачає автобус на проходження відстані у 325 км, у новому графіку руху зменшено на 40 хв. Знайти середню швидкість руху автобуса за новим графіком, якщо вона на 10 км/год більша від середньої швидкості, передбаченої старим графіком.
16. Відстань між двома пунктами дорівнює 50 км. Два велосипедисти виїхали назустріч один одному з цих пунктів з швидкостями відповідно 11 км/год і 14 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться?
17. Два туристи вийшли одночасно з деякого пункту у протилежних напрямках з швидкостями відповідно 5 км/год і 6 км/год. Скільки кілометрів буде складати відстань між ними через 2,5 год?

18. Кількість корів на молочній фермі А на 10% менша, ніж на фермі В, але середній надої кожної корови на фермі А на 10% вищий, ніж на фермі В. На скільки відсотків менше отримують молока на фермі А?
19. У будівельній фірмі А кількість робітників на 20% менша, ніж на фірмі В, а продуктивність праці кожного робітника на фірмі А на 20% вища. На скільки відсотків обсяг будівельних робіт на фірмі А менший, ніж на фірмі В?
20. Катер мав пройти відстань між містами зі швидкістю 20 км/год. Насправді він рухався зі швидкістю 16 км/год і тому запізнився на 2 год. Знайдіть відстань між містами.
21. Через першу трубу басейн наповнюється за 4 години, через другу – за 8 годин. Через скільки годин спільної роботи обох труб басейн наповниться на 75%?
22. Дві труби працюючи разом можуть наповнити 25% об'єму басейна за 1 годину. За скільки годин може повністю наповнити басейн, окремо друга труба, якщо відомо, що одна перша труба повністю наповнює басейн за 6 годин.
23. За 8 рейсів автобус перевіз більше, ніж 180 пасажирів, а за 15 рейсів – менше, ніж 360 пасажирів. Скільки місць в автобусі, якщо кожного разу автобус перевозив стільки пасажирів, скільки місць в автобусі?
24. Бригада робітників за 5 днів виготовила менше, ніж 300 деталей, а за 10 днів – більше, ніж 500 деталей. Скільки деталей щодня виготовляв кожний робітник, якщо у бригаді 6 чоловік і продуктивність їх праці за весь час роботи однакова?
25. Змішали 12 кг ірису 10 кг карамелі. Кілограм ірису коштує 4 грн., а 1 кг суміші коштує більше, ніж 4,2 грн., але менше, ніж 4,5 грн., Яка можлива вартість 1 кг карамелі в цілих числах?
26. Змішали 15 кг борошна першого сорту і 20 кг борошна другого сорту. Кілограм борошна другого сорту коштує 2,5 грн., а 1 кг суміші коштує більше, ніж 2,8 грн., але менше, ніж 3,8 грн. Яка максимальна можлива ціна 1 кг борошна першого сорту в цілих числах?

27. Яку мінімальну кількість літрів 70% розчину кислоти потрібно долити до 5 л 30% розчину кислоти, щоб отримати суміш, яка містила б не менше, ніж 60% кислоти?
28. Яку максимальну кількість літрів 20° спирту можна долити до 10 л спирту міцністю 90°, щоб отримати суміш, з міцністю не меншою, ніж 40°?
29. Яку максимальну кількість літрів 40% розчину кислоти можна долити до 8 л 80% розчину кислоти, щоб отримати суміш, яка містила б не менше, ніж 50% кислоти?
30. Яку мінімальну кількість літрів 80° спирту потрібно долити до 20 л спирту міцністю 30°, щоб отримати суміш, з міцністю не меншою, ніж 40°?

Рівень 2

1. Відстань від пункту А до пункту В по залізниці дорівнює 84 км, а по річці – 120 км. Поїзд виходить з пункту А на 2 години пізніше від пароплава і прибуває до пункту В на 0,25 год. раніше. Знайти швидкість поїзда, якщо вона на 24 км/год більша за швидкість пароплава.
2. Відстань від пункту А до пункту В по шосе дорівнює 144 км, а по залізниці – 168 км. Автомобіль виїхав з пункту А на 30 хв пізніше, ніж поїзд, і прибув до пункту В на 45 хв. раніше. Знайти швидкість автомобіля, якщо вона на 16 км/год більша за швидкість поїзда.
3. Відстань між двома містами дорівнює 487,5 км. З одного міста до іншого виїхали одночасно дві машини. Швидкість однієї з них на 10 км/год більша за швидкість другої, через що вона приїхала у пункт призначення на 1 год. раніше від другої машини. Знайти швидкість машини, що раніше приїхала у пункт призначення.
4. З міста А до міста В, відстань між якими дорівнює 412,5 км, виїхали одночасно вантажна і легкова машини. Швидкість вантажівки на 20 км/год менша, ніж швидкість легкової машини, через що вона прибула до міста В на 2 год. пізніше за легкову. Знайти швидкість вантажівки.
5. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 276,25 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус, рухаючись зі швидкістю на 20

км/год меншою, ніж автомобіль, прибув до пункту призначення на 1 год. пізніше. Знайти швидкість автомобіля.

6. Перші 300 км дороги від А до В автомобіль проїхав із певною швидкістю, а останні 225 км – із швидкістю на 20 км/год меншою. Знайти швидкість автомобіля, з якою він проїхав останні 225 км, якщо на весь шлях від А до В він втратив 7 год. 30 хв.

7. Перші 168 км дороги від А до В автобус проїхав із певною швидкістю, а останні 288 км – із швидкістю на 10 км/год більшою. Знайти початкову швидкість автобуса, якщо на весь шлях від А до В він втратив 6 год.

8. З міста А до міста В, відстань між якими дорівнює 400 км, виїхала легкова машина. Через 1 год 12 хв після цього назустріч їй з В в А виїхала вантажна машина, яка зустрілася з легковою через 4 год після виїзду легкової з міста А. Знайти швидкість легкової машини, якщо легкова машина за 3 год проїжджає на 120 км більше, ніж вантажна за 2 год.

9. Із села А в село В, відстань між якими дорівнює 70 км, виїхав мотоцикліст. За 10 хв. до цього назустріч йому з В в А виїхав велосипедист, який зустрівся з мотоциклістом через 1 год. після свого виїзду. Знайти швидкість велосипедиста, якщо мотоцикліст за 2 год. проїжджає на 42 км більше, ніж велосипедист за 6 год.

10. На перегоні, довжина якого дорівнює 360 км, поїзд рухався зі швидкістю на 10 км/год меншою, ніж мав рухатися за розкладом, і запізнився на 1 год. 12 хв. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

11. Автобус запізнювався на 9 хв. Для того, щоб прибути у пункт призначення вчасно, він за 108 км до цього пункту збільшив свою швидкість на 8 км/год. Знайти початкову швидкість автобуса?

12. Поїзд запізнювався на 15 хв. Для того, щоб прибути на станцію призначення вчасно, він за 120 км від цієї станції збільшив свою швидкість на 16 км/год. Знайти початкову швидкість поїзда?

13. Моторний човен пройшов 52,2 км по озеру, а потім 51 км по річці, що впадає в це озеро, за три години. Знайти власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

14. Катер пройшов 16 км по озеру, а потім 35,2 км по річці, що бере початок з цього озера, за 2,4 години. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.
15. Човен, власна швидкість якого становить 8 км/год, проплив 18 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на весь шлях 4,8 годин. Знайти швидкість течії річки.
16. Катер проплив 32 км за течією річки і таку саму відстань проти течії, витративши на весь шлях 2,4 години. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.
17. Один робітник виготовляє 144 деталі на 3 години швидше, ніж другий 168 деталей. Скільки деталей виготовляє за одну годину перший робітник, якщо він робить за одну годину на 2 деталі більше, ніж другий?
18. Перший насос перекачує 225 м^3 води на 2,5 години швидше, ніж другий 250 м^3 . Скільки води за одну годину перекачує другий насос, якщо перший перекачує за одну годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?
19. Двоє робітників мали виготовити по 200 деталей. Один з них виготовляв щодня на 5 деталей більше за другого і виконав замовлення на 2 дні раніше за нього. Скільки деталей виготовляли щодня робітники, працюючи разом?
20. Тракторист мав за певний час зорати поле площею 270 га. Проте щодня він орав на 2 га більше, ніж планувалося, і закінчив роботу на 1,5 днів раніше терміну. За скільки днів тракторист зорав поле?
21. Один оператор може зробити комп'ютерний набір книжки на 6 днів швидше, ніж другий. Якщо перший пропрацює 3 дні, а потім його змінить другий і пропрацює 9 днів, то буде набрано $\frac{3}{4}$ частина книжки. За скільки днів, працюючи разом, вони можуть набрати $\frac{5}{6}$ частину книжки?
22. Двоє робітників, працюючи разом, виконали виробниче завдання за 12 год. За скільки годин зможе виконати це завдання перший робітник, працюючи самостійно, якщо він може це зробити на 7 годин швидше за другого?

23. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле перша бригада, працюючи самостійно, якщо на виконання цієї роботи їй потрібно на 12 год більше, ніж другій?

24. Один з робітників може виконати виробниче завдання на 3 години швидше, ніж другий. Якщо перший робітник буде працювати 4 год., а потім його змінить другий, то останньому треба буде працювати 3 год., щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання перший робітник?

25. Замість машини певної вантажопідйомності для перевезення 30 т вантажу взяли іншу машину, вантажопідйомність якої на 2 т менша від першої. Через це для перевезення вантажу знадобилося на 4 рейси більше, ніж планувалося. Знайти вантажопідйомність машини, яка перевезла вантаж.

26. Для перевезення 60 т вантажу машині треба було зробити кілька рейсів, але вантаж довелося перевозити на машині, що мала вантажопідйомність на 2 т більшу, ніж планувалося. Через це для перевезення вантажу знадобилося на 8 рейсів менше, ніж планувалося. Знайти вантажопідйомність машини, яка перевезла вантаж.

27. Дві бригади, працюючи одночасно, обробили ділянку землі за 12 год. За який час обробить цю ділянку перша бригада, якщо продуктивність праці першої бригади у 1,5 рази вища від продуктивності другої?

28. Два трактори, працюючи разом, зорали поле за 6 год., перший трактор, працюючи один, може зорати це поле на 5 год. швидше, ніж другий. За скільки годин може зорати все поле другий трактор?

29. Басейн наповнюється двома трубами за 6 год. Перша труба може наповнити весь басейн на 5 год. швидше, ніж друга. За який час може наповнити весь басейн перша труба?

30. Два комбайни різної потужності, працюючи разом, можуть зібрати пшеницю з поля за 4 дні, а перший, працюючи окремо – за 6 днів. За скільки днів може зібрати всю пшеницю з поля другий комбайн, працюючи окремо?

Рівень 3

1. Пішохід і велосипедист вирушають одночасно на зустріч один одному з пунктів А і В, відстань між якими 49 км, і зустрічаються через 2 год. Після зустрічі вони продовжують подорож, причому велосипедист прибуває у пункт А на 7 год. 30 хв. раніше, ніж пішохід у пункт В. Знайти швидкість пішохода, якщо швидкості пішохода та велосипедиста за весь час залишалися сталими.

2. Відстань між станціями А і В дорівнює 103 км. Із А до В вийшов поїзд і, пройшовши деяку відстань, був затриманий, а тому решту шляху до В проходив зі швидкістю на 4 км/год більшою за початкову. Знайти початкову швидкість поїзда, якщо відомо, що відстань до В від місця затримки на 23 км більша за шлях, пройдений до затримки, а рух після затримки тривав на 15 хв довше, ніж рух до затримки.

3. Двоє мотоциклістів вирушають одночасно назустріч один одному з пунктів А і В, відстань між якими дорівнює 600 км. За той час, що перший проїжджає 250 км, другий долає 200 км. Знайти швидкість руху першого мотоцикліста, якщо їх рух є рівномірним і він прибуває в пункт В на 3 год раніше, ніж другий в А.

4. Два поїзди вирушають з пунктів А і В назустріч один одному. Якщо із пункту А поїзд би виїхав на 2 год. раніше, ніж поїзд з пункту В, то вони б зустрілися на половині шляху. Якщо б поїзди вирушили одночасно, то через 2 год. відстань між ними становила б $\frac{1}{4}$ відстані між А і В. За скільки годин долає весь шлях поїзд, що вирушає з пункту А?

5. Пароплав через 2 год. після виходу з пристані А зупиняється на 1 год. і рухається далі зі швидкістю, яка дорівнює 0,8 початкової, через що прибуває на пристань В із запізненням на 3,5 год. Якщо б пароплав зупинився на 180 км далі, то за тих самих умов він запізнився б на 1,5 год. Знайти відстань між пристанями А і В.

6. Мотоцикліст відбув з пункту А до пункту В, віддаленого від А на 120 км. Назад він виїхав з тією самою швидкістю, але через годину після виїзду мусив зупинитися на 10 хв. Після цієї зупинки, він рухався далі до А, збільшивши швидкість на 6 км/год. Яка була початкова швидкість мотоцикліста, якщо відомо, що шлях від А до В він подолав за такий самий час, що й шлях від В до А.

7. Пішохід і велосипедист вирушають одночасно назустріч один одному з міст А і В, відстань між якими 40 км і зустрічаються через 2 год після відправлення. Після цього вони продовжують рух і велосипедист

прибуває до А на 7 год. 30 хв. раніше, ніж пішохід до В. Знайти швидкість пішохода.

8. З пункту А о 12 год. вийшов поїзд. О 14 год. у тому самому напрямку вирушив другий поїзд, який наздогнав перший поїзд о 20 год. Знайти швидкість першого поїзда, якщо сума швидкостей цих поїздів дорівнює 70 км/год.

9. Після зустрічі двох пароплавів один з них почав рухатися на південь, а другий на захід. Через 2 год. після зустрічі відстань між ними становила 60 км. Знайти суму швидкостей пароплавів, якщо відомо, що швидкість одного була на 6 км/год більша за швидкість другого.

10. З причалу до міста відплив човен зі швидкістю 12 км/год, а через півгодини в тому самому напрямку відійшов пароплав зі швидкістю 20 км/год. Яка відстань від причалу до міста, якщо пароплав прибув у місто на 1 год. 30 хв. раніше за човен?

11. Велосипедист проїхав 96 км на дві години швидше, ніж було заплановано. При цьому він щогодинно проїжджав на 1 км більше, ніж раніше передбачав проїжджати за 1 год. 15 хв. З якою швидкістю він їхав?

12. На ділянці завдовжки s км потяг протягом x год. рухався зі швидкістю 58 км/год і протягом y год. зі швидкістю 61 км/год. Якби потяг рухався x год. зі швидкістю 61 км/год і протягом y год. зі швидкістю 58 км/год, то він подолав би 400 км. Знайти найбільше можливе ціле значення s .

13. Автомобіль на ділянці завдовжки s км рухався протягом x год. зі швидкістю 60 км/год і протягом y год. зі швидкістю 67 км/год. Якби автомобіль протягом x год. їхав зі швидкістю 67 км/год і протягом y год. зі швидкістю 60 км/год, то він подолав би 341 км. Знайти найбільше можливе ціле значення s .

14. Із А до В виїхав велосипедист. Одночасно з ним із В до А виїхав моторолер, який зустрів велосипедиста через 45 хв. після виїзду із В. Який час знадобився велосипедисту, щоб подолати відстань від А до В, якщо відомо, що моторолер зробив це на 2 год. швидше за велосипедиста?

15. Із А до В виїхав мотоцикліст. Через 2 год. із А до В виїхав автомобіль, який прибув до В одночасно з мотоциклістом. Якщо б автомобіль і мотоцикліст одночасно виїхали з А до В назустріч один одному, то вони

зустрілися б через 1 год. 20 хв. після виїзду. За який час мотоцикліст проїжджає відстань від А до В.

16. Бригада вибійників протягом кількох днів повинна була за планом видобути 800 т вугілля. Після трьох днів роботи бригада почала щодня перевиконувати норму на 12 т. Тому за день до строку було видобуто 792 т вугілля. Скільки тонн вугілля мала щодня видобувати бригада за планом?

17. Один робітник повинен був виготовити 420 деталей, а другий за той самий час – 500 деталей. Перший закінчив роботу на 4, а другий на 7 днів раніше строку, виготовляючи при цьому щодня на 5 деталей більше, ніж перший. Скільки деталей щодня виготовляли робітники разом?

18. Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 3 год. 36 хв. Якби перша бригада працювала третину того часу, який потрібний другій бригаді для виконання всієї роботи, а потім друга бригада працювала третину того часу, за який перша могла виконати всю роботу, то було би виконано $\frac{13}{18}$ всієї роботи. За який час може виконати всю роботу бригада з меншою продуктивністю праці?

19. Два робітники виконують деяку роботу. Якщо перший почне працювати на 2,5 год. пізніше, ніж другий, то кожний з них виконає половину роботи. Якщо вони почнуть працювати одночасно, то через 5 год. залишиться виконати 45% усієї роботи. За який час робітник з більшою продуктивністю праці може виконати всю роботу?

20. Дві бригади робітників, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 8 год. Якщо з першої бригади працюватиме 80% робітників, а з другої 66,(6)%, то всю роботу вони виконають за 11,25 год. За скільки годин може виконати всю роботу перша бригада?

21. П'ять робітників виконують певну роботу. Перший, другий і третій, працюючи разом, виконали б усю роботу за 7,5 год; перший, третій і п'ятий – за 5 год; перший, третій і четвертий – за 6 год; четвертий, другий і п'ятий – за 4 год. За скільки годин виконають всю роботу робітники, працюючи разом?

22. Дві бригади працювали разом 15 днів, після цього до них приєдналася третя бригада і через 5 днів роботу було виконано. Відомо, що друга бригада виконує за 1 день на 20% більше роботи, ніж перша. Друга і третя

бригади, працюючи разом, можуть виконати свою роботу за 0,9 того часу, який потрібний для цього першій і третій бригадам. За скільки часу можуть виконати всю роботу три бригади, працюючи разом?

23. Троє робітників мають виготовити 80 однотипних деталей. Відомо, що всі троє працюючи разом за одну годину можуть виготовити 20 деталей. До роботи спочатку приступив перший робітник, який виготовив 20 деталей, витративши при цьому понад 3 години. Решту роботи виконали другий і третій робітники. На всю роботу при цьому було витрачено 8 год. За скільки годин всю роботу виконає перший робітник?

24. Бригада механіків зі стажем виконує роботу з виготовлення однотипних виробів на 15 год. швидше, ніж бригада учнів. Якби бригада учнів пропрацювала 18 год., а потім 6 год. пропрацювала бригада зі стажем, то було б виконано $\frac{3}{5}$ частина всієї роботи. Скільки часу потрібно бригаді учнів для виконання всієї роботи?

25. Двоє робітників виконали роботу за 10 днів, при цьому останні два дні перший робітник не працював. За скільки днів перший робітник виконає всю роботу, якщо відомо, що за час спільної роботи вони виконали 80% всього завдання?

26. Щоб перевезти певний вантаж, дві автомашини працювали разом 5 год., а після цього одна перша працювала ще 50 хв. За який час перша машина окремо може перевезти весь вантаж, якщо вона може це зробити на 2 год. швидше, ніж друга?

27. Машинобудівний завод повинен був виготовити 105 двигунів. Щоб виконати це завдання на два дні раніше строку, завод виготовляв щоденно на 6 двигунів більше, ніж передбачалося. Скільки двигунів виготовляв завод щоденно?

28. Два токарі повинні були виготовити певне число деталей. Після 3 год. спільної роботи продовжував працювати тільки другий токар, який пропрацював ще 4 год. Далі виявилось, що завдання було перевиконане на 12,5 %. За який час зміг би виконати завдання другий токар, якщо відомо, що, працюючи окремо, йому потрібно було б на 4 год. менше, ніж першому?

29. Робочий день скоротився з 8 годин до 7. На скільки має зростати продуктивність праці, щоб за тими ж розцінками заробітна плата збільшилася на 5 %?

30. На обробку 1 деталі перший працівник витрачає на 6 хв. менше, ніж другий. Скільки деталей обробить другий працівник за 7 годин, якщо перший обробляє за цей час на 8 деталей більше?

Розділ 20. Вектори

Рівень 1

1. При якому найменшому значенні k довжина (абсолютна величина) вектора $\vec{a}(k;5)$ дорівнює 13?

2. При якому найбільшому значенні k довжина (абсолютна величина) вектора $\vec{a}(24;-k)$ дорівнює 25?

3. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;-4), \vec{b}(-4;8)$.

4. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;7), \vec{b}(4;-1)$.

5. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;-4), \vec{b}(-4;8)$.

6. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(2;5), \vec{b}(4;3)$.

7. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$, якщо $\vec{a}(3;2), \vec{b}(0;-1)$.

8. При якому найменшому значенні k довжина (абсолютна величина) вектора $\vec{a}(k;2k)$ дорівнює $\sqrt{80}$?

9. При якому найбільшому значенні k довжина (абсолютна величина) вектора $\vec{a}(-3k;k)$ дорівнює $\sqrt{1000}$?

10. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{c} = 8\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\vec{a}(2;-1), \vec{b}\left(-2;\frac{3}{2}\right)$.
11. Дано вектори $\vec{a}(2;k), \vec{b}(k;0)$ та $\vec{c}(5;3)$. При якому значенні k виконується рівність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$?
12. Дано вектори $\vec{a}(4;-2k), \vec{b}(k;2)$ та $\vec{c}(6;2)$. При якому значенні k виконується рівність $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$?
13. Дано три точки: $A(3;1), B(6;10), C(5;4)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{a} = 3\vec{AC} + 2\vec{BC}$.
14. Дано три точки: $A(-2;4), B(5;-2), C(6;-16)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{a} = \vec{AC} - 2\vec{BC}$.
15. Дано три точки: $A(3;4), B(-6;2), C(4;5)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{a} = 2\vec{AC} + \vec{BC}$.
16. Дано вектори $\vec{a}(2k-1;k+2), \vec{b}\left(\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}; k-3\right)$ та $\vec{c}(2;6)$. При якому значенні k виконується рівність $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$?
17. Дано вектори $\vec{a}(7;-2), \vec{b}(2k+2;k-2)$ та $\vec{c}(0;-8)$. При якому значенні k виконується рівність $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$?
18. Дано вектори $\vec{a}(2-k;k-3), \vec{b}(-5;6)$ та $\vec{c}(-3;4)$. При якому значенні k виконується рівність $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$?
19. Дано три точки: $A(5;7), B(-2;3), C(-40;-12)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BC}$.
20. Дано три точки: $A(-4;-7), B(-7;14), C(-4;3)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\vec{a} = 3\vec{AC} + 2\vec{BC}$.
21. Знайти суму значень x і y , при яких $\vec{a} - 2\vec{b} = 0$, де $\vec{a}(2x;4), \vec{b}(1;y)$.
22. Знайти суму значень x і y , при яких $2\vec{a} + 3\vec{b} = 0$, де $\vec{a}(1-x;3), \vec{b}(6;2y+4)$.
23. Знайти суму значень x і y , при яких $\vec{a} + 2\vec{b} = 0$, де $\vec{a}(3x-2;7-y), \vec{b}(x+1;2+y)$.

24. Знайти суму значень x і y , при яких $6\bar{a} - 4\bar{b} = 0$, де $\bar{a}(x+1; 1-y)$, $\bar{b}(2x; 3-y)$.
25. Знайти суму значень x і y , при яких $3\bar{a} + 2\bar{b} = 0$, де $\bar{a}(1-x; y+6)$, $\bar{b}(2+x; 3y)$.
26. При якому найменшому значенні k довжина (абсолютна величина) вектора $\bar{a}(2k; -k)$ дорівнює $5\sqrt{5}$?
27. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора $\bar{c} = \bar{a} + 2\bar{b}$, якщо $\bar{a}(12; 5)$, $\bar{b}(6; 1)$.
28. Дано вектори $\bar{a}(2-k; 6)$, $\bar{b}(8; 2k-1)$ та $\bar{c}(-10; 7)$. При якому значенні k виконується рівність $\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$?
29. Дано три точки: $A(3; 4)$, $B(-3; -3)$, $C(-6; -6)$. Знайти довжину (абсолютну величину) вектора $\bar{a} = 2\overline{BC} - \overline{AC}$.
30. Знайти суму значень x і y , при яких $2\bar{a} - \bar{b} = 0$, де $\bar{a}(x+3; 1-y)$, $\bar{b}(x-2; y-1)$.
31. Відомо, що скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{c} дорівнює 3, а кут між ними дорівнює 45° . Знайти довжину (абсолютну величину) вектора \bar{c} , якщо $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$.
32. Відомо, що скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{c} дорівнює 15, а кут між ними дорівнює 60° . Знайти довжину (абсолютну величину) вектора \bar{c} , якщо $|\bar{a}| = 2$.
33. Відомо, що $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{c}| = 10$ і $\bar{a} \cdot \bar{c} = 10$. Обчислити кут (у градусах) між векторами \bar{a} і \bar{c} .
34. Відомо, що $|\bar{a}| = \sqrt{27}$, $|\bar{c}| = 2$ і $\bar{a} \cdot \bar{c} = 9$. Обчислити кут (у градусах) між векторами \bar{a} і \bar{c} .
35. Обчислити кут (у градусах) між векторами $\bar{a}(4; 6)$ і $\bar{c}(9; -6)$.
36. Обчислити кут (у градусах) між векторами $\bar{a}(-2; -2)$ і $\bar{c}(5; 5)$.
37. Визначити значення x , при якому вектори $\bar{a}(2x; 2)$ і $\bar{c}(-1; -2)$ є перпендикулярними.
38. Визначити значення x , при якому вектори $\bar{a}(-3x; -18)$ і $\bar{c}(2; 8)$ є перпендикулярними.

39. Визначити значення x , при якому вектори $\vec{a}(10x; 20)$ і $\vec{c}(10; 5)$ є колінеарними.

40. Визначити значення x , при якому вектори $\vec{a}(-4; -2x)$ і $\vec{c}(2; 8)$ є колінеарними.

Рівень 2

1. Відрізок з кінцями $A(2; 3)$ і $B(10; 11)$ ділиться точкою C у відношенні 3:5 (від A до B). Знайти суму координат точки C .

2. Відрізок з кінцями $A(-3; -2)$ і $B(9; 6)$ ділиться точкою C у відношенні 3:1 (від A до B). Знайти суму координат точки C .

3. Відрізок, кінцями якого є точки $A(3; -2)$ і $B(10; -9)$, поділений точкою C у відношенні 2:5 (від A до B). Знайти суму координат точки C .

4. Відрізок, кінцями якого є точки $A(7; -4)$ і $B(-8; 1)$, поділений точкою C у відношенні 1:4 (від A до B). Знайти добуток координат точки C .

5. Відрізок з кінцями $A(8; -8)$ і $B(16; -8)$ ділиться точкою C у відношенні 5:3 (від A до B). Знайти суму координат точки C .

6. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(-6; -8)$ і однаково з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .

7. Дано вектор $\vec{a}(12; 5)$ і одиничний вектор \vec{e} . При якому найменшому значенні k виконується рівність $\vec{a} = k\vec{e}$?

8. Дано вектор $\vec{a}(3; -4)$ і одиничний вектор \vec{e} . При якому найбільшому значенні k виконується рівність $\vec{a} = k\vec{e}$?

9. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(-4; 3)$ і однаково з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .

10. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(6; -8)$ і протилежно з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .

11. Відрізок АВ задано точками А $(-9; -3)$ і В $(1; 2)$. Знайти суму координат точки С, до якої треба продовжити відрізок АВ (у напрямі від А до В), щоб $AB:BC = 5:3$.
12. Відрізок АВ задано точками А $(-4; 7)$ і В $(-3; 5)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 1:7$.
13. Відрізок АВ задано точками А $(-5; -2)$ і В $(-1; 0)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 2:5$.
14. Відрізок АВ задано точками А $(-7; 3)$ і В $(9; 7)$. Знайти суму координат точки С, до якої треба продовжити відрізок АВ (у напрямі від А до В), щоб $AB:BC = 2:3$.
15. Відрізок АВ задано точками А $(6; -4)$ і В $(-8; 6)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 4:5$.
16. Відрізок з кінцями А $(3; 7)$ і В $(11; 15)$ ділиться точкою С у відношенні 3:5 (від А до В). Знайти суму координат точки С.
17. Відрізок з кінцями А $(-5; 2)$ і В $(7; 10)$ ділиться точкою С у відношенні 3:1 (від А до В). Знайти суму координат точки С.
18. Відрізок, кінцями якого є точки А $(4; -4)$ і В $(11; -11)$, поділений точкою С у відношенні 2:5 (від А до В). Знайти суму координат точки С.
19. Відрізок, кінцями якого є точки А $(-6; 4)$ і В $(-21; 9)$, поділений точкою С у відношенні 1:4 (від А до В). Знайти суму координат точки С.
20. Відрізок з кінцями А $(3; -3)$ і В $(11; 5)$ ділиться точкою С у відношенні 5:3 (від А до В). Знайти суму координат точки С.
21. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(-3;4)$ і протилежно з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .
22. Дано вектор $\vec{a}(-24;7)$ і одиничний вектор \vec{e} . При якому найменшому значенні k виконується рівність $\vec{a} = k\vec{e}$?

23. Дано вектор $\vec{a}(-12; -5)$ і одиничний вектор \vec{e} . При якому найбільшому значенні k справджується рівність $\vec{a} = k\vec{e}$?
24. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(-6; 8)$ і однаково з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .
25. Дано, що одиничний вектор \vec{e} , колінеарний вектору $\vec{a}(30; -40)$ і протилежно з ним напрямлений. Визначити суму координат вектора \vec{e} .
26. Відрізок АВ задано точками $A(-7; 2)$ і $B(1; 6)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 2:5$.
27. Відрізок АВ задано точками $A(10; -8)$ і $B(4; -2)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 6:5$.
28. Відрізок АВ задано точками $A(8; 10)$ і $B(2; 16)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 4:3$.
29. Відрізок АВ задано точками $A(4; 12)$ і $B(-2; 15)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 3:4$.
30. Відрізок АВ задано точками $A(-6; 4)$ і $B(-12; 7)$. Визначити суму координат точки С, що знаходиться на продовженні відрізка АВ (у напрямі від А до В) і задовольняє умову $AB:BC = 5:6$.
31. Визначити першу координату вектора \vec{c} , колінеарного до вектора $\vec{a}(0,5; 1; 1)$, якщо $|\vec{c}| = 9$ і утворює з віссю Ox тупий кут.
32. Визначити другу координату вектора \vec{c} , колінеарного до вектора $\vec{a}(0,1; 0,2; 0,2)$, якщо $|\vec{c}| = 3\sqrt{3}$ і утворює з віссю Oy тупий кут.
33. Визначити третю координату вектора \vec{c} , колінеарного до вектора $\vec{a}(1; 2; 3)$, якщо $|\vec{c}| = 2\sqrt{14}$ і утворює з віссю Oz гострий кут.
34. Трикутник має вершини в точках $A(0; 7)$, $B(6; -1)$, $C(2; 1)$. Знайти величину внутрішнього кута трикутника (у градусах) при вершині С.

35. Трикутник має вершини в точках $A(3; 2)$, $B(5; 1)$, $C(1; -2)$. Знайти величину зовнішнього кута трикутника (у градусах) при вершині A
36. Якого виду трикутник, що має вершини в точках $A(3; 2)$, $B(5; 2)$ і $C(3; 4)$?
1) рівносторонній; 2) різносторонній; 3) рівнобедрений тупокутний;
4) рівнобедрений прямокутний; 5) рівнобедрений гострокутний.
37. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(1; 0)$ і $\vec{c}(\sqrt{3}; 1)$, що виходять з однієї точки.
38. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(0; \sqrt{3})$ і $\vec{c}(\sqrt{3}; 1)$, що виходять з однієї точки.
39. Обчислити площу квадрата, стороною якого є більша діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(1; 2)$ і $\vec{c}(-6; 3)$, що виходять з однієї точки.
40. Обчислити площу квадрата, стороною якого є більша діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(1; -1)$ і $\vec{c}(-1; 2)$, що виходять з однієї точки.

Рівень 3

- Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-1; 2)$, $M_2(2; -3)$, $M_3(-3; -1)$. Знайти $x - y$, якщо $(x; y)$ – координати точки перетину медіан.
- Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(4; -2)$, $M_2(-2; 2)$, $M_3(2; 2)$. Знайти суму координат точки перетину медіан.
- Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-6; 2)$, $M_2(4; 4)$, $M_3(8; -2)$. Визначити абсцису точки перетину медіан.
- Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-2; 6)$, $M_2(4; 2)$, $M_3(2; -2)$. Визначити ординату точки перетину медіан.
- Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-4; -4)$, $M_2(2; 6)$, $M_3(6; -2)$. Визначити ординату точки перетину медіан.

6. Відрізок, кінцями якого є точки $A(-11; 1)$ і $B(9; 11)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $2:3:5$ (від A до B). Знайти абсцису точки симетричної до C відносно початку системи координат.
7. Відрізок, кінцями якого є точки $A(-8; 4)$ і $B(4; 10)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $1:2:5$ (від A до B). Знайти ординату точки симетричної до D відносно початку системи координат.
8. Відрізок, кінцями якого є точки $A(6; -4)$ і $B(15; -2)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $3:2:4$ (від A до B). Знайти абсцису точки симетричної до C відносно осі ординат.
9. Відрізок, кінцями якого є точки $A(5; 7)$ і $B(8; -2)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $5:3:4$ (від A до B). Визначити суму координат точки симетричної до D відносно прямої $x = 5$.
10. Відрізок, кінцями якого є точки $A(7; 5)$ і $B(-2; 8)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $4:5:3$ (від A до B). Визначити суму координат точки симетричної до C відносно прямої $y = 4$.
11. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(-4; 0)$ та $B(0; -4)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = x$. Площа трикутника дорівнює 12. Визначити суму координат точки C , якщо $x > 0$.
12. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(0; -2)$ та $B(2; 0)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = -x$. Площа трикутника дорівнює 8. Визначити $y - x$, якщо $(x; y)$ – координати точки C і $x < 0$.
13. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(3; 0)$ та $B(0; 3)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = x$. Площа трикутника дорівнює 9. Визначити суму координат точки C , якщо $x < 0$.
14. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(-5; 0)$ та $B(0; 5)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = -x$. Площа трикутника дорівнює 15. Визначити $x - y$, якщо $(x; y)$ – координати точки C і $x > 0$.
15. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(2; 2)$ та $B(8; 2)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $x = 5$. Площа трикутника дорівнює 24. Визначити суму координат точки C , якщо $y < 0$.
16. Точка M рівновіддалена від осі ординат та від точки $A(8; 6)$ і ця відстань дорівнює 5. Визначити суму координат вектора \overline{KM} , якщо точка

К симетрична до точки М відносно прямої $y = 8$ і ордината точки М не менша 3.

17. Точка М рівновіддалена від осі абсцис та від точки $A(4; 8)$ і ця відстань дорівнює 5. Визначити суму координат вектора \overline{KM} , якщо точка К симетрична до точки М відносно прямої $x = 7$ і абсциса точки М не менша 2.

18. Точка М рівновіддалена від осі ординат та від точки $A(-8; 6)$ і ця відстань дорівнює 5. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора \overline{KM} , якщо точка К симетрична до точки М відносно прямої $y = 1$ і ордината точки М не більша 4.

19. Точка М рівновіддалена від осі абсцис та від точки $A(-4; -8)$ і ця відстань дорівнює 5. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора \overline{KM} , якщо точка К симетрична до точки М відносно прямої $x = -5$ і абсциса точки М не більша (-3) .

20. Точка М рівновіддалена від осі абсцис та від точки $A(-5; -16)$ і ця відстань дорівнює 10. Визначити довжину (абсолютну величину) вектора \overline{KM} , якщо точка К симетрична до точки М відносно прямої $x = 1$ і абсциса точки М не менша 1.

21. Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-4; 2)$, $M_2(2; 4)$, $M_3(-2; -2)$. Знайти суму координат точки перетину медіан.

22. Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-6; 6)$, $M_2(2; 2)$, $M_3(-2; 0)$. Обчислити $x + 3y$, якщо (x, y) – координати точки перетину медіан.

23. Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(2; -6)$, $M_2(8; 4)$, $M_3(6; 2)$. Визначити ординату точки перетину медіан.

24. Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(-4; -6)$, $M_2(2; 4)$, $M_3(0; 2)$. Обчислити $3x + y$, якщо (x, y) – координати точки перетину медіан.

25. Відомі координати середин сторін трикутника: $M_1(1; -3)$, $M_2(5; 3)$, $M_3(4; 1)$. Обчислити $x - y$, якщо (x, y) – координати точки перетину медіан.

26. Відрізок, кінцями якого є точки $A(-10; 8)$ і $B(14; -6)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $2:5:3$ (від A до B). Визначити суму координат точки симетричної до C відносно початку системи координат.
27. Відрізок, кінцями якого є точки $A(2; -4)$ і $B(10; 6)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $1:3:2$ (від A до B). Визначити суму координат точки симетричної до D відносно початку системи координат.
28. Відрізок, кінцями якого є точки $A\left(-4; -\frac{5}{2}\right)$ і $B(8; -10)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $3:2:4$ (від A до B). Визначити ординату точки симетричної до C відносно прямої $y = -1$.
29. Відрізок, кінцями якого є точки $A(-5; -3)$ і $B(13; 7)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $4:2:3$ (від A до B). Визначити абсцису точки симетричної до D відносно прямої $x = 4$.
30. Відрізок, кінцями якого є точки $A(-3; 6)$ і $B(11; 9)$, поділений точками C і D відповідно у відношенні $5:3:4$ (від A до B). Визначити ординату точки симетричної до D відносно прямої $y = 6$.
31. Вектори \vec{a} , \vec{c} утворюють кут 120° і $|\vec{a}| = 3, |\vec{c}| = 5$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{c}|$.
32. Вектори \vec{a} , \vec{c} утворюють кут 60° і $|\vec{a}| = 6, |\vec{c}| = 4$. Обчислити $\frac{1}{\sqrt{7}}|\vec{a} - \vec{c}|$.
33. Вектори \vec{a} , \vec{c} утворюють кут 120° і $|\vec{a}| = 6, |\vec{c}| = 3$. Обчислити $\frac{1}{\sqrt{3}}|\vec{a} + \vec{c}|$.
34. Одиничні вектори \vec{a} і \vec{c} утворюють кут 90° . Обчислити (у градусах) кут між векторами $2\vec{a} + \vec{c}$ і $\vec{a} + 3\vec{c}$.
35. Який кут (у градусах) утворюють одиничні вектори \vec{a} і \vec{c} , якщо вектори $\vec{a} + 2\vec{c}$ і $5\vec{a} - 4\vec{c}$ є перпендикулярними.
36. Знайти добуток координат вектора $\vec{a}(x; y; z)$, якщо вектор \vec{a} колінеарний до вектора $\vec{c}(2; 1; -1)$ і задовольняє умову $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$.

37. Знайти добуток координат вектора $\vec{c}(x; y; z)$, якщо вектор \vec{c} перпендикулярний до векторів $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -2; 3)$ і скалярний добуток векторів \vec{c} і $\vec{d} = (2; -1; 1)$ дорівнює (-6) .

38. Знайти довжину меншої діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ і кут між векторами \vec{p} і \vec{q} дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

39. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, і $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

40. Знайти кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 4|\vec{b}|$ і вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{a} + 5\vec{b}$.

Розділ 21. Планіметрія

Рівень 1

1. Чому дорівнює градусна міра кута, якщо два суміжні з ним кути становлять в сумі 80° ?

2. Сума двох кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, дорівнює 70° . Визначити градусну міру одного з цих кутів.

3. Один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, у чотири рази більший від другого. Визначити градусну міру меншого кута.

4. Один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, на 50° менший від другого. Визначити градусну міру більшого кута.

5. Визначити градусну міру кута між бісектрисами суміжних кутів.

6. Визначити градусну міру кута між бісектрисою і продовженням однієї із сторін даного кута, який дорівнює 50° .

7. Міри суміжних кутів відносяться як $5 : 7$. Знайти градусну міру більшого кута.

8. Прямий кут поділено на дві частини так, що міра однієї з них на 8° більша другої. Знайти градусну міру меншого з одержаних кутів.

9. Один з кутів у три рази більший суміжного з ним. Знайти градусну міру більшого кута.
10. Знайти градусну міру більшого суміжного кута, якщо бісектриса одного з них утворює зі стороною другого кут, який дорівнює 115° .
11. Один з кутів трикутника дорівнює 41° , а другий у два рази більший. Знайти третій кут (у градусах) трикутника.
12. Один з кутів трикутника дорівнює 70° , а зовнішній кут іншого – 100° . Знайти менший з невідомих кутів (у градусах).
13. Один з кутів трикутника дорівнює 75° , а два інші відносяться як $4 : 11$. Знайти градусну міру більшого з невідомих кутів.
14. Два кути трикутника відносяться як $3 : 4$, а зовнішній кут третього дорівнює 140° . Знайти найбільший кут (у градусах) трикутника.
15. Кути трикутника відносяться як $2 : 3 : 4$. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника.
16. Один з кутів трикутника дорівнює 20° , а один із двох інших у чотири рази більший від другого. Знайти градусну міру більшого з невідомих кутів.
17. Два кути трикутника дорівнюють 52° і 73° . Знайти зовнішній кут (у градусах) третього.
18. Один кут трикутника 62° , а другий у два рази менший. Знайти третій кут (у градусах) трикутника.
19. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 135° . Знайти внутрішній кут (у градусах) при вершині трикутника.
20. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайти кут (у градусах) між бічною стороною і бісектрисою кута при основі.
21. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 72° . Знайти менший кут (у градусах) між висотами, проведеними до основи і бічної сторони.

22. Знайти менший кут (у градусах) між бісектрисами гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.
23. Кут трикутника дорівнює 75° . Знайти менший кут (у градусах) між висотами, проведеними до сторін, що утворюють даний кут.
24. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 130° . Знайти внутрішній кут (у градусах) при основі трикутника.
25. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 75° . Знайти менший кут ромба (у градусах).
26. AD і BC – основи трапеції ABCD. Знайти градусну міру кута A, якщо градусна міра кута B дорівнює 120° .
27. Гострий кут ромба дорівнює 70° . Знайти кут (у градусах) між стороною та діагоналлю тупого кута.
28. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD. Знайти кут CBD, якщо кут A дорівнює 20° .
29. У трикутнику один з внутрішніх кутів дорівнює 30° , а один із зовнішніх 40° . Знайти найменший внутрішній кут (у градусах) трикутника.
30. У трикутнику ABC проведено бісектриси з вершин A і B. Точку їх перетину позначено D. Знайти кут ADB, якщо кут A дорівнює 50° , а кут B дорівнює 100° .
31. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 27 см, а бічна сторона більша від основи на 3 см. Знайти основу трикутника.
32. Периметр паралелограма ABCD дорівнює 26 см і довжина сторони AB дорівнює 5 см. Знайти довжину сторони BC.
33. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайти бічну сторону трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 15 см.
34. Висота рівнобічної трапеції ділить більшу основу на відрізки 6 см і 30 см. Знайти середню лінію трапеції.

35. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить сторону на відрізки 6 см і 7 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.
36. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою тупого кута. Знайти бічну сторону трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 12 см.
37. Висота рівнобічної трапеції ділить більшу основу на відрізки 8 см і 28 см. Знайти середню лінію трапеції.
38. Периметр паралелограма дорівнює 24 см, а одна із сторін у два рази більша, ніж друга. Знайти меншу сторону паралелограма.
39. Бісектриса гострого кута паралелограма ділить сторону на відрізки 8 см і 5 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.
40. Послідовно сполучили відрізками середини сторін рівнобедреного трикутника з основою 10 см і бічною стороною 12 см. Знайти периметр утвореного трикутника.
41. У коло з центром O вписано гострокутний трикутник MNK . Знайти градусну міру найбільшого кута цього трикутника, якщо градусні міри кутів MON і NOK відповідно дорівнюють 98° і 130° .
42. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорду AC , що дорівнює радіусу. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника ABC .
43. Знайти градусну міру вписаного кута, який спирається на четверту частину кола.
44. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло з центром у точці O . Знайти градусну міру найбільшого кута цього трикутника, якщо градусні міри кутів AOB і AOC відповідно дорівнюють 110° і 112° .
45. У колі з центром O проведено діаметр MN і хорду MK . Знайти градусну міру найменшого кута трикутника MNK , якщо градусна міра кута NOK дорівнює 50° .
46. У коло вписано кут MNK . Знайти градусну міру кута MNK , якщо кутова міра дуги MNK дорівнює 140° .

47. У прямокутному трикутнику кут між катетом і медіаною, проведеною до гіпотенузи, дорівнює 25° . Знайти градусну міру найменшого кута цього трикутника.
48. У коло вписано кут ABC . Знайти градусну міру кута ABC , якщо кутова міра дуги ABC дорівнює 200° .
49. Кут AMB , вписаний у коло, має міру 110° . Знайти градусну міру кута ANB , якщо точка N належить цьому колу і точки M і N лежать по різні боки від прямої AB .
50. У прямокутному трикутнику кут між гіпотенузою і медіаною, проведеною до гіпотенузи, дорівнює 80° . Знайти градусну міру найменшого кута цього трикутника.
51. У колі проведені хорди AB і AD так, що кутова міра дуги ABD дорівнює 160° , а кутова міра дуги ADB дорівнює 250° . Знайти градусну міру найменшого кута трикутника ABD .
52. AB і CD – діаметри кола з центром у точці O . Кутова міра дуги BC дорівнює 100° . Знайти градусну міру найменшого кута трикутника ABD .
53. У рівнобічній трапеції з діагоналлю 10 см послідовно сполучили відрізками середини її сторін. Знайти периметр утвореного чотирикутника.
54. У ромба з діагоналями 5 см і 6 см послідовно сполучили відрізками середини його сторін. Знайти периметр утвореного чотирикутника.
55. Більша основа прямокутної трапеції дорівнює 10 см, а менша – 6 см. Знайти більшу бічну сторону трапеції, якщо менша дорівнює 3 см.
56. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 14 см і 24 см, а бічна сторона – 13 см. Знайти висоту трапеції.
57. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 5 см, висота – 4 см, а більша основа – 15 см. Знайти меншу основу трапеції.
58. У рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює 10 см, а висота – 8 см. Знайти більшу основу трапеції, якщо менша дорівнює 9 см.

59. У прямокутній трапеції більша бічна сторона дорівнює 13 см, а менша – 5 см. Знати меншу основу трапеції, якщо більша дорівнює 20 см.

60. Периметр ромба дорівнює 40 см і одна з його діагоналей – 12 см. Знайти суму діагоналей ромба.

Рівень 2

1. Дві сторони паралелограма відносяться, як 3 : 4, а периметр його дорівнює 2,8 м. Знайти суму квадратів його діагоналей.

2. Сторони даного паралелограма відповідно дорівнюють 6 см і 10 см, а діагоналі відносяться як $7:\sqrt{19}$. Знайти довжину більшої діагоналі.

3. Дано квадрат, сторона якого 1 м, діагональ його дорівнює стороні другого квадрата. Знайти діагональ другого квадрата.

4. Діагоналі паралелограма відповідно дорівнюють 12 см і $2\sqrt{46}$ см, а сторони відносяться як 4 : 5. Знайти довжину меншої сторони.

5. Сторони даного паралелограма відповідно дорівнюють 5 см і 7 см, а діагоналі відносяться як $5:2\sqrt{3}$. Знайти довжину більшої діагоналі.

6. Дві сторони паралелограма відносяться як 2 : 3, а периметр його дорівнює 20 м. Знайти суму квадратів його діагоналей.

7. Дано квадрат, сторона якого 3 м, діагональ його дорівнює половині сторони другого квадрата. Знайти діагональ другого квадрата.

8. У рівнобічній трапеції ABCD AD і BC – основи. Кут BAD дорівнює 60° , AD = 13 см, BC = 5 см. Знайти бічну сторону трапеції.

9. У рівнобічній трапеції ABCD AD і BC – основи, AD = 17 см, BC = 9 см, AB = 8 см. Знайти величину кута BAD (у градусах).

10. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 11 см і 21 см, а висота – 12 см. Знайти діагональ трапеції.

11. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 25 см і 7 см, а бічна сторона – 15 см. Знайти діагональ трапеції.

12. Дано прямокутну трапецію, у якій бічні сторони дорівнюють 5 см і 13 см, а менша основа – 7 см. Знайти середню лінію трапеції.

13. Дано прямокутну трапецію, у якій бічні сторони дорівнюють 10 см і 8 см, а більша основа – 17 см. Знайти периметр трапеції.

14. Один з катетів прямокутного трикутника на 2 см менше гіпотенузи, а другий катет дорівнює 8 см. Знайти периметр трикутника.

15. Гіпотенуза прямокутного трикутника на 1 м більша за один з катетів, а другий катет дорівнює 5 м. Знайти периметр трикутника.

16. У прямокутному трикутнику ABC (кут $C = 90^\circ$) $AC = 4$ см, $\cos A = \frac{4}{5}$.

Знайти площу трикутника.

17. У прямокутному трикутнику ABC (кут $C = 90^\circ$) $BC = 6$ см, $\operatorname{tg} A = 0,75$. Знайти периметр трикутника.

18. У трикутнику ABC (кут $B = 60^\circ$, кут $C = 75^\circ$) $AC = 9\sqrt{6}$ см. Знайти довжину сторони BC трикутника.

19. У прямокутному трикутнику ABC (кут $C = 90^\circ$) $AC = 4$ см, $\operatorname{ctg} A = 0,25$. Знайти площу трикутника.

20. У прямокутному трикутнику ABC (кут $C = 90^\circ$) $AB = 13$ см, $\sin B = \frac{5}{13}$.

Знайти площу трикутника.

21. Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними – 60° . Знайти довжину більшої діагоналі паралелограма.

22. Довжини діагоналей паралелограма дорівнюють 5 см і 8 см, а кут між ними – 60° . Знайти довжину меншої сторони паралелограма.

23. Довжина більшої діагоналі паралелограма дорівнює 14 см, менша сторона має довжину 6 см і кут між його сторонами – 60° . Знайти довжину більшої сторони.

24. Довжина меншої діагоналі паралелограма дорівнює 10 см, а кут між його діагоналями – 60° . Знайти довжину більшої діагоналі паралелограма, якщо довжина меншої сторони дорівнює 7 см.

25. Одна із сторін паралелограма дорівнює 9 см і утворює з іншою стороною кут 60° . Знайти периметр паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює 21 см.
26. Знайти радіус кола, якщо центральному куту 72° відповідає дуга довжиною 8π см.
27. Знайти радіус кола, якщо центральному куту 54° відповідає дуга довжиною 9π см.
28. Визначити центральний кут (у градусах), якщо радіус кола дорівнює 24 см і дуга, що відповідає центральному куту, має довжину 12π см.
29. Радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює 6 см, а периметр трикутника – 64 см. Знайти площу трикутника.
30. Радіус круга, вписаного в трикутник, дорівнює 4 см, а його площа – 84 см^2 . Знайти периметр трикутника.
31. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, що має сторони 13 см, 14 см і 15 см.
32. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, що має сторони 4 см, 13 см, 15 см.
33. Знайти довжину кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо кут $A = 30^\circ$ і довжина сторони $BC = \frac{6}{\pi}$ см.
34. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює $10\sqrt{3}$ см. Знайти довжину сторони BC, якщо кут $A = 60^\circ$.
35. Довжина кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 32π . Знайти довжину найбільшої сторони трикутника ABC, якщо кут $A = 150^\circ$.
36. Сторони чотирикутника дорівнюють 5 см, 6 см, 7 см і 2 см. Знайти найбільшу сторону подібного йому чотирикутника, периметр якого 80 см.
37. Сторони чотирикутника дорівнюють 7 см, 11 см, 6 см і 16 см. Знайти найменшу сторону подібного йому чотирикутника, периметр якого 120 см.

38. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см^2 , а довжина його основи – 10 см . Знайти висоту (опущену на основу) подібного йому трикутника, площа якого 80 см^2 .
39. Площа ромба дорівнює 16 см^2 , а довжина меншої діагоналі – 4 см . Знайти довжину більшої діагоналі подібного йому ромба, площа якого 256 см^2 .
40. Площа ромба дорівнює 400 см^2 , а довжина більшої діагоналі – 40 см . Знайти довжину меншої діагоналі подібного йому ромба, площа якого 25 см^2 .
41. Сторони трикутника дорівнюють 4 см , 13 см і 15 см . Знайти більшу висоту трикутника.
42. Сторони трикутника дорівнюють 13 см , 14 см і 15 см . Знайти меншу висоту трикутника.
43. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см^2 , а довжина його основи – 8 см . Знайти більшу висоту трикутника.
44. Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 168 см^2 , а довжина його основи – 14 см . Знайти меншу висоту трикутника.
45. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см , а довжина бічної сторони – 50 см . Знайти меншу висоту трикутника.
46. З вершини прямого кута прямокутного трикутника на гіпотенузу опущено перпендикуляр, який ділить гіпотенузу на відрізки з довжинами 8 см та 18 см . Знайти площу трикутника.
47. З вершини прямого кута прямокутного трикутника на гіпотенузу опущено перпендикуляр, який ділить гіпотенузу на відрізки, довжини яких відповідно дорівнюють 9 см та 16 см . Знайти довжину меншого катета.
48. Довжина одного з катетів прямокутного трикутника дорівнює 20 см , а проекція другого катета на гіпотенузу – 9 см . Обчислити довжину гіпотенузи.

49. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу – 16 см. Знайти периметр трикутника.

50. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 1,8 см і 3,2 см. Обчислити площу трикутника.

Рівень 3

1. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 12 см і ділить її на відрізки, сума довжин яких 25 см. Знайти периметр трикутника.

2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює $2\sqrt{6}$ см і ділить її на відрізки, різниця довжин яких 5 см. Знайти довжину гіпотенузи трикутника.

3. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6 см і ділить її на відрізки, сума довжин яких 12,5 см. Знайти довжину більшого катета трикутника.

4. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює $\sqrt{30}$ см і ділить її на відрізки, різниця довжин яких 7 см. Знайти довжину гіпотенузи трикутника.

5. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 36 см і ділить її на відрізки, сума довжин яких 75 см. Знайти довжину меншого катета трикутника.

6. Довжини сторін трикутника дорівнюють 11 см, 13 см і 12 см. Знайти довжину медіани, проведеної до більшої сторони.

7. Довжини сторін трикутника дорівнюють $5\sqrt{2}$ см, 12 см і 13 см. Знайти довжину медіани, проведеної до меншої сторони.

8. Довжини сторін трикутника дорівнюють 15 см, $2\sqrt{101}$ см і 25 см. Знайти довжину медіани, проведеної до середньої за довжиною сторони.

9. Довжини сторін трикутника дорівнюють 7 см, 9 см і $4\sqrt{10}$ см. Знайти довжину медіани, проведеної до більшої сторони.

10. Довжини сторін трикутника дорівнюють $7\sqrt{2}$ см, 9 см і 16 см. Знайти довжину медіани, проведеної до середньої за довжиною сторони.
11. Довжини бічних сторін трапеції дорівнюють 3 см і 5 см. Відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. Середня лінія трапеції ділить її на дві частини, відношення площ яких дорівнює $\frac{5}{11}$. Знайти довжину більшої основи трапеції.
12. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) радіус вписаного кола становить 0,4 висоти BD, периметр трикутника дорівнює 40 см. Знайти довжину основи AC.
13. Довжини основ рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 2 і 8 см. Відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. Знайти висоту трапеції.
14. Бічні сторони трапеції дорівнюють відповідно 2 і 3 см, більша основа дорівнює 8 см. Кути при більшій основі відносяться як 2 : 1. Знайти меншу основу.
15. Площа рівнобедреної трапеції дорівнює $4\sqrt{3}$ см², менша основа – 3 см, а кут, утворений бічною стороною і більшою основою, дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайти більшу основу трапеції.
16. Обчислити радіус кола, описаного навколо трикутника, кути якого пропорційні числам 2, 3 і 4, а довжина середньої сторони $4\sqrt{3}$ см.
17. У скільки разів площа вписаного в коло правильного трикутника менша від площі описаного навколо нього правильного трикутника?
18. У ромб вписано коло, а в коло – квадрат. Чому дорівнює гострий кут ромба, якщо площа квадрата у 4 рази менша від площі ромба?
19. Довжини основ рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ та $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$ см. Знайти площу круга, вписаного в цю трапецію.
20. Довжина кола, вписаного в рівнобічну трапецію дорівнює 4π . Знайти довжину меншої основи трапеції, якщо довжина бічної сторони дорівнює 5 см.

21. Довжина більшої основи рівнобічної трапеції відноситься до довжини бічної сторони як $8 : 3$ і утворює з нею кут 60° . Знайти периметр трапеції, якщо її діагональ дорівнює 7 см.
22. Менша основа рівнобічної трапеції відноситься до бічної сторони як $5 : 3$ і утворює з нею кут 120° . Знайти довжину більшої основи трапеції, якщо довжина меншої основи дорівнює 1 .
23. Сторона ромба дорівнює 13 м, а різниця його діагоналей – 14 м. Знайти площу ромба.
24. Сторона ромба дорівнює 25 м, а сума його діагоналей – 70 м. Знайти площу ромба.
25. Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні $3 : 13$. Її більша основа дорівнює бічній стороні. Знайти площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.
26. Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні $11 : 5$. Її менша основа дорівнює бічній стороні. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.
27. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 20 см. Знайти відстань від точки до прямої, якщо відомо, що одна з проєкцій на 7 см більша за другу.
28. У коло, радіус якого $3\sqrt{6}$ см, вписано правильний трикутник, на стороні якого побудовано квадрат. Знайти радіус кола, описаного навколо квадрата.
29. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 44 см, бічна сторона 17 см, а діагональ 39 см. Знайти площу трапеції.
30. Сторона ромба дорівнює 15 см, а різниця його діагоналей 10 см. Знайти площу ромба.
31. У тупокутному трикутнику більша сторона дорівнює 16 см, а висоти, проведені з обох її кінців, віддалені від вершини тупого кута на 2 см і 3 см. Знайти довжину меншої з невідомих сторін.

32. У тупокутному трикутнику більша сторона дорівнює 16 см, висоти, проведені з обох її кінців, віддалені від вершини тупого кута на 2 см і 3 см. Знайти периметр трикутника.
33. У прямокутний трикутник вписане коло. Точка дотику з колом ділить один з катетів трикутника на відрізки довжиною 6 см і 10 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайти площу трикутника.
34. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, на відрізки довжиною 5 см і 3 см, рахуючи від вершини трикутника. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
35. У гострий кут вписане коло радіуса 5 см, довжина хорди, що з'єднує точки дотику, дорівнює 8 см. Паралельно цій хорді проведено дві дотичні до кола. Визначити площу трапеції, утвореної сторонами кута і дотичними.
36. Пряма, паралельна основам трапеції, проходить через точку перетину її діагоналей. Знайти довжину відрізка цієї прямої, що міститься між бічними сторонами трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 4 см і 12 см.
37. У трикутнику, один із кутів якого дорівнює 120° , довжини сторін утворюють арифметичну прогресію. Знайти периметр трикутника, якщо довжина найбільшої сторони дорівнює 7 см.
38. Бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких 8 і 10 см. Знайти периметр трикутника, якщо центр вписаного кола ділить цю бісектрису у відношенні 3:2, рахуючи від вершини кута.
39. Знайти площу рівнобедреного трикутника, якщо висота, опущена на основу дорівнює 10 см, а висота, опущена на бічну сторону, дорівнює 12 см.
40. У трикутнику ABC, площа якого 1 см^2 , на медіані BK вибрано точку M так, що $BK = 4 MK$. Пряма AM перетинає BC в точці E. Знайти площу трикутника AEC.
41. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює $6\sqrt{21}$, а кут при основі 30° . Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони.

42. У трикутнику ABC довжини висот CD і AE відповідно дорівнюють 7 см і 6 см. Точка E ділить сторону BC так, що $BE : EC = 3 : 4$. Знайти квадрат довжини сторони AB.
43. У рівнобічній трапеції відношення її основ дорівнює 0,75, середня лінія дорівнює її висоті, довжина якої дорівнює 7 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.
44. Основи трапеції відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Через точку перетину її діагоналей проведена пряма, паралельна до основи. Знайти довжину відрізка цієї прямої, який знаходиться між бічними сторонами трапеції.
45. Два кола з радіусами 12 см і 8 см дотикаються зовні. Знайти відстань від точки дотику до спільної зовнішньої дотичної.
46. Основа трикутника дорівнює 10 см, а медіани двох інших сторін дорівнюють 9 см і 12 см. Знайти площу трикутника.
47. Медіани трикутника дорівнюють 9 см, 12 см і 15 см. Знайти площу трикутника.
48. Вершини трикутника сполучено з центром вписаного в нього кола. Площі утворених трикутників відповідно дорівнюють 28 см^2 , 60 см^2 і 80 см^2 . Знайти довжину найбільшої сторони цього трикутника.
49. Площі двох трикутників, які прилягають до основ трапеції і утворені в результаті перетину її діагоналей, дорівнюють 9 см^2 і 16 см^2 . Знайти площу трапеції.
50. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайти довжину відрізка, який паралельний основам і поділяє площу трапеції на рівновеликі частини.
51. Обчислити $\sin 2\alpha$, якщо α – найменший кут прямокутного трикутника ABC у якого сторони утворюють арифметичну прогресію.
52. У колі з центром O проведено хорду AB, яка перетинає діаметр у точці M і утворює з діаметром кут, що дорівнює 60° . Знайти OM, якщо $AM = 10 \text{ см}$ і $BM = 4 \text{ см}$.

53. ABCD – трапеція ($AD \parallel BC$). Коло проходить через вершини B, C, D і дотикається AB в точці V. Визначити радіус кола, якщо $BC = 3$ см, $AD = 12$ см.
54. Висота рівнобічної трапеції дорівнює 14 см, а основи 16 і 12 см. Обчислити $\frac{S}{\pi}$, де S – площа круга, обмеженого описаним навколо трапеції колом.
55. Більша основа рівнобічної трапеції втричі більша за її меншу основу, а площа трапеції дорівнює $64\sqrt{2}$. Знайти периметр трапеції, якщо її діагональ ділить тупий кут навпіл.
56. Коло радіусів 4 см і 1 см дотикаються один до одного зовні. Бічні сторони рівнобедреного трикутника є їх спільними дотичними, а основа дотикається до більшого з кіл. Знайти основу трикутника.
57. Точки O_1, O_2 – відповідно центри кіл K_1, K_2 , які дотикаються зовні. Радіуси цих кіл дорівнюють відповідно 3 см і 12 см. На відрізку O_1O_2 як на діаметрі побудовано третє коло K_3 . Обчислити радіус кола, яке дотикається зовні до кіл K_1 і K_2 і зсередини – до кола K_3 .
58. Точки O_1, O_2 – відповідно центри кіл K_1, K_2 , які дотикаються зовні. Радіуси кола K_1 дорівнює 3 см. На відрізку O_1O_2 як на діаметрі побудовано третє коло K_3 . Радіус кола, яке дотикається зовні до кіл K_1 і K_2 і зсередини – до кола K_3 дорівнює 1 см. Знайти радіус кола K_2 .
59. Дві сторони трикутника дорівнюють відповідно 10 см і $4\sqrt{5}$ см. Медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайти довжину третьої сторони.
60. На меншій основі рівнобічної трапеції побудовано правильний трикутник, висота якого дорівнює висоті трапеції, а площа у 5 разів менша за площу трапеції. Знайти кут при більшій основі трапеції.
61. Точка перетину висот рівнобедреного трикутника лежить на вписаному в цей трикутник колі. Знайти $b \cos \alpha$, якщо α – кут при вершині цього трикутника.
62. У коло радіуса $\sqrt{2}$ см вписано трикутник, вершини якого поділяють коло на три частини у відношенні 2 : 5 : 17. Знайти площу трикутника.

63. У трапеції менша основа дорівнює 2, прилеглі до неї кути становлять по 135° . Кут між діагоналями, які спираються на більшу основу, дорівнює 150° . Знайти площу трапеції.

64. Площа трикутника дорівнює $\sqrt{3}$ см², одна із сторін – 2 см і протилежний до неї кут – 60° . Знайти суму довжин двох інших сторін трикутника.

65. Площа рівнобічної трапеції дорівнює $9\sqrt{3}$ см², кут між її діагоналями, протилежний до бічної сторони, дорівнює 60° . Знайти висоту трапеції.

Розділ 22. Стереометрія

Рівень 1

1. Через три точки проведені дві різні площини. Як розміщені ці точки?
1) лежать на одній прямій; 2) не лежать на одній прямій.

2. Дано дві прямі a і b , що перетинаються. Через точку A , яка лежить на прямій a , проведена пряма c паралельно прямій b . Скільки різних площин можна провести через ці прямі?

1) одну; 2) дві; 3) три; 4) жодної; 5) інша відповідь.

3. Скільки всього різних площин можна провести через три точки, якщо вони лежать на одній прямій?

1) одну; 2) дві; 3) нескінченну кількість.

4. Точка M не лежить у площині трикутника ABC . Яке взаємне розміщення прямих MA і BC ?

1) паралельні; 2) мимобіжні; 3) перетинаються.

5. Точка M не належить площині чотирикутника $ABCD$. Яке взаємне розміщення прямих MD і BC ?

1) мимобіжні; 2) перетинаються; 3) паралельні.

6. Дано площину α і точку M поза нею. Скільки всього існує різних прямих, які проходять через M і паралельні площині α ?

1) жодної; 2) одна; 3) безліч; 4) інша відповідь.

7. Точки A і B розміщені в одній із паралельних площин, C і D – в іншій. Відрізки AC і BD перетинаються в точці M . Як розміщені прямі AB і CD ?

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) мимобіжні.

8. Через точку O , розміщену між паралельними площинами α і β проведено дві прямі, які перетинають площини в точках A і A_1 , B і B_1 . Як розміщені прямі AB і A_1B_1 ?

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні.

9. Точка S знаходиться поза площиною трикутника ABC . Точки A_1 , B_1 , C_1 відповідно є серединами відрізків SA , SB , SC . Визначити взаємне розміщення площин ABC і $A_1B_1C_1$.

1) паралельні; 2) співпадають; 3) перетинаються.

10. Пряма a не лежить у площині α . Скільки всього різних прямих, які мимобіжні з прямою a , проходять через точку, взяту в площині α ?

1) жодної; 2) одна; 3) безліч; 4) жодної або безліч.

11. Діагональ і сторона трапеції паралельні площині α . Як розміщені площина α і площина, в якій лежить трапеція?

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) співпадають.

12. Дано дві мимобіжні прямі a і b . Точки A і B лежать на прямій a , точки C і D – на прямій b . Яке взаємне розміщення прямих AC і BD ?

1) паралельні; 2) мимобіжні; 3) перетинаються.

13. Дано дві мимобіжні прямі a і b . Скільки всього існує різних площин, які проходять через a і паралельні прямій b ?

1) дві; 2) одна; 3) жодної; 4) безліч.

14. Дано дві площини α і β , які перетинаються. Точка M не належить жодній із них. Скільки існує прямих, які проходять через M і паралельні α і β ?

1) жодної; 2) одна; 3) безліч; 4) жодної або безліч.

15. Площина α паралельна прямій b , а пряма b паралельна площині γ , відмінної від α . Яке взаємне розміщення площин α і γ ?

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) інша відповідь.

16. Трикутники ABC і ABD лежать у різних площинах. Точки M і N – середини сторін AC і BC трикутника ABC . Яке взаємне розміщення прямої MN і площини трикутника ABD ?

1) пряма MN паралельна площині ABD ; 2) пряма MN перетинає площину ABD .

17. Скільки всього існує різних площин, які проходять через пряму і точку в просторі?

1) одна; 2) безліч; 3) дві; 4) одна або безліч.

18. Дано площину α і пряму a , яка їй не належить. Скільки всього існує різних площин, які проходять через a і паралельні площині α ?

1) безліч; 2) дві; 3) одна або жодної.

19. Дано дві паралельні площини α і β . Точка M не лежить ні на одній із них. Скільки всього існує прямих, які проходять через M і паралельні площині α і β ?

1) одна; 2) дві; 3) безліч.

20. Дано пряму a і точку M . Скільки існує різних прямих, які проходять через M , перетинають пряму a і перпендикулярні до неї?

1) жодної; 2) одна; 3) безліч; 4) одна або безліч.

21. Дано площину α і точку M . Скільки існує різних площин, які проходять через M і перпендикулярні до α ?

1) жодної; 2) одна; 3) безліч; 4) одна або жодної.

22. Пряма MB перпендикулярна до сторін AB і BC трикутника ABC . Яким є трикутник MBD , де D – довільна точка сторони AC ?

1) прямокутний; 2) гострокутний; 3) тупокутний.

23. Пряма KO перпендикулярна до діагоналей AC і BD квадрата $ABCD$, які перетинаються в точці O . Яким є трикутник KOM , де M – довільна точка AB ?

1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний.

24. Площина α перпендикулярна до прямої b , а пряма b паралельна прямій c . Яке взаємне розміщення площини α і прямої c ?

1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) інша відповідь.

25. Площина α паралельна прямій b , а пряма b перпендикулярна до площини β . Яке взаємне розміщення площин α і β ?

1) перпендикулярні; 2) паралельні; 3) інша відповідь.

26. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр SB . Точка S сполучена з вершиною A квадрата. Визначте, яким є трикутник SAD .

1) гострокутний; 2) тупокутний; 3) прямокутний.

27. Дано прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C . BM – перпендикуляр до площини трикутника ABC . Визначте, яким є трикутник MAC .

1) тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний

28. До площини прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр SB . Точка S сполучена з вершиною A прямокутника. Визначте, яким є трикутник SAD .

1) прямокутний; 2) гострокутний; 3) тупокутний.

29. Кут ABC – лінійний кут двогранного кута з ребром m . Яке взаємне розміщення прямої m і площини ABC ?

1) пряма і площина паралельні; 2) пряма і площина перпендикулярні; 3) пряма m лежить у площині.

30. Дві різні прямі a і b перпендикулярні до площини α . Яке взаємне розміщення прямих?

1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) мимобіжні.

31. Точка S не належить площині трикутника ABC . Точки M і N – середини відрізків SA і SC , а K і L – середини відрізків AB і BC відповідно. Яке взаємне розміщення прямих MN і KL ?

1) перетинаються; 2) мимобіжні; 3) паралельні.

32. Трикутник PBC і трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) розміщені в різних площинах. Точки M і N – середини відрізків PB і PC відповідно. Яке взаємне розміщення прямих MN і AD ?

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні.

33. Трикутник PBC і трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) розміщені в різних площинах. Точки M і N – середини відрізків PB і PC відповідно. Яке взаємне розміщення прямих AN і CD ?

1) паралельні; 2) мимобіжні; 3) перетинаються.

34. До площини прямокутної трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$) проведено перпендикуляр SA . Точка S сполучена з вершинами B і C трапеції. Визначте, яким є трикутник SBC .

1) гострокутний; 2) тупокутний; 3) прямокутний.

35. Точка F не належить площині трикутника ABC . Точки M, N, K – середини відрізків BA, BF, BC відповідно. Яке взаємне розміщення площин MNK і AFC ?

1) перпендикулярні; 2) паралельні; 3) інша відповідь.

36. Дві різні прямі не паралельні і не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?

1) одну; 2) безліч; 3) жодної.

37. Точка D не лежить у площині трикутника ABC . Точки M, K, P – середини відрізків AB, AC, AD відповідно. Яке взаємне розміщення площин BKD і MKP ?

1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) інша відповідь.

38. Трикутник PBC і трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$) розміщені в різних площинах. Точки M і N – середини відрізків PB і PC відповідно. Яке взаємне розміщення прямої MN та площини ABD ?

1) перетинаються; 2) паралельні; 3) інша відповідь.

39. Площина α , яка паралельна стороні BC трикутника ABC , перетинає продовження сторін AB і AC відповідно в точках K і M . Яке взаємне розміщення прямих KM і BC ?

1) паралельні; 2) перпендикулярні; 3) інша відповідь.

40. Площина α , яка паралельна діагоналі BD паралелограма $ABCD$, перетинає його суміжні сторони BC і CD відповідно у точках M і N . Яке взаємне розміщення прямих MN і BD ?

1) перпендикулярні; 2) паралельні; 3) інша відповідь.

41. Площина α , яка паралельна стороні AB трикутника ABC , перетинає сторони AC і BC відповідно у точках M і K , де M – середина AC . Знайти MK , якщо $AB = 20$ см.

42. Площина α , яка паралельна основі AD трапеції $ABCD$, перетинає сторони AB і CD відповідно у точках M і K , де M – середина AB . Знайти MK , якщо $AD = 10$ см і $BC = 4$ см.

43. Площина α , яка паралельна діагоналі BD паралелограма $ABCD$, перетинає його суміжні сторони BC і CD відповідно у точках M і N . Обчислити довжину сторони DC паралелограма, якщо $BM : MC = 1 : 3$, $MC = 8$ см і $DN = 6$ см.

44. Площина α , яка паралельна діагоналі BD паралелограма $ABCD$, перетинає його суміжні сторони BC і CD відповідно у точках M і N , де M – середина BC . Знайти BD , якщо $MN = 13$ см.
45. Площина α , яка паралельна гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC , перетинає катети AC і BC відповідно у точках M і K , де M – середина AC . Знайти довжину гіпотенузи AB , якщо $MK = 6$ см.
46. Із точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими 60° . Знайти довжину похилої, якщо довжина перпендикуляра 20 см.
47. Із точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу. Кут між похилою і площиною дорівнює 30° . Знайти довжину похилої, якщо довжина перпендикуляра 15 см.
48. Із точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими 30° . Знайти довжину проекції похилої на площину, якщо довжина похилої 18 см.
49. Із точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими 60° . Знайти довжину перпендикуляра, якщо довжина похилої 10 см.
50. Із точки M до площини проведено перпендикуляр і похилу. Знайти довжину перпендикуляра, якщо довжина похилої 25 см і довжина її проекції на площину дорівнює 24 см.
51. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведено пряму MC , яка перпендикулярна площині квадрата. Знайти відстань від точки M до прямої BD , якщо $MC = 1$ см, $CD = 4$ см.
52. Через вершину A рівностороннього трикутника ABC проведено пряму DA , яка перпендикулярна площині трикутника, M – середина сторони BC . Знайти відстань від точки D до прямої BC , якщо $AD = 3$ см, $AB = 6$ см.
53. Через вершину B рівнобедреного трикутника ABC проведено пряму KB , яка перпендикулярна площині трикутника, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, F – середина AC . Знайти відстань від точки K до прямої AC , якщо $KB = 6$ см.
54. Через вершину B ромба $ABCD$ проведено пряму BF , яка перпендикулярна до площини ромба. Знайти відстань від точки F до прямої AC , якщо $FB = 2\sqrt{61}$ см, $DC = 16$ см, $AC = 20$ см.

55. Дано трикутник ABC . Площина α , паралельна прямій AB , перетинає сторону AC в точці K , а сторону BC – у точці M . Знайти AB , якщо $KC = 12$ см, $AC = 18$ см, $KM = 36$ см.
56. Дві паралельні площини α і β перетинають сторону BA кута ABC в точках D і D_1 , а сторону BC відповідно у точках E і E_1 . Знайти довжину DE , якщо $BD = 12$ см, $BD_1 = 18$ см, $D_1E_1 = 54$ см.
57. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр DM . Сторона квадрата дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайти довжину проекції похилої MB .
58. До площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр DM довжиною 12 см. Сторона квадрата дорівнює 5 см. Знайти довжину похилої MC .
59. Промені OA , OB , OC , що не лежать в одній площині перетинають дві паралельні площини в точках M , N , K і M_1 , N_1 , K_1 відповідно. Знайти довжину сторони M_1K_1 трикутника $M_1N_1K_1$, якщо $MK = 10$ см, $OK < OK_1$ і $OK : KK_1 = 5 : 1$.
60. Через точку M , що лежить між паралельними площинами α і β , проведено дві різні прямі c і k . Пряма c перетинає площини α і β в точках C і D відповідно, пряма k – в точках C_1 і D_1 . Знайти довжину відрізка CC_1 , якщо $CD : CM = 7 : 2$, $DD_1 = 10$ см.

Рівень 2

1. Кінці ребер куба, які виходять із одної вершини, сполучено відрізками. Площа трикутника, який утворився при цьому, дорівнює $\sqrt{12}$ см². Знайти довжину ребра куба.
2. Із точки поза даною площиною проведено до неї перпендикуляр довжиною 6 см і похилу довжиною 9 см. Знайти довжину проекції перпендикуляра на похилу.
3. Двогранний кут дорівнює 45° . На одній із граней дано точку, яка знаходиться на відстані $\sqrt{128}$ см від другої грані. Знайти відстань від цієї точки до ребра кута.
4. Точка взята на одній із граней двогранного кута, знаходиться від ребра на відстані $\sqrt{48}$ см, а від другої грані на $2\sqrt{3}$ см. Знайти величину двогранного кута (у градусах).

5. Відстань від точки M до сторін квадрата дорівнює 13 см. Знайти відстань від точки M до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 10 см.
6. Точка O – центр квадрата $ABCD$. OM – перпендикуляр до площини $ABCD$, $AB = 4\sqrt{2}$ см. Пряма MA нахилена до площини квадрата під кутом 60° . Знайти відстань між точками M і B .
7. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Із вершини більшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD , який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.
8. $ABCD$ – прямокутник, MA – перпендикуляр до площини прямокутника, кут MCA дорівнює 60° , $DC = 3$ см, $CB = 4$ см. Обчислити $\frac{1}{\sqrt{21}}S$, якщо S – площа трикутника MBC .
9. Сторони трикутника ABC дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Із вершини меншого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD , який дорівнює $4\sqrt{3}$. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.
10. $ABCD$ – прямокутник, MA – перпендикуляр до площини прямокутника, кут MCA дорівнює 45° , $DC = 1$ см, $CB = \sqrt{3}$ см. Обчислити $S\sqrt{60}$, якщо S – площа трикутника MBC .
11. Із точки до площини проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6. Знайти відстань від точки до площини, якщо відповідні проекції похилих дорівнюють 4 см і $3\sqrt{3}$ см.
12. Із даної точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 6 см. Їх проекції на цю площину дорівнюють 27 см і 15 см. Знайти відстань від даної точки до площини.
13. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Поза площиною трикутника дано точку, яка знаходиться на відстані 10 см від кожної його вершини. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

14. Основа і висота рівнобедреного трикутника дорівнюють 4 см. Дана точка знаходиться на відстані 6 см від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайти цю відстань.
15. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка М знаходиться поза площиною ромба і віддалена від усіх сторін ромба на 8 см. Знайти відстань від точки М до площини ромба.
16. Точка М рівновіддалена від сторін ромба і знаходиться на відстані 2 см від площини ромба. Знайти відстань від точки М до сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 12 см і 16 см.
17. Із деякої точки простору проведені до даної площини перпендикуляр, що дорівнює 9 см і похила, що дорівнює 12 см. Знайти довжину проекції перпендикуляра на похилу.
18. Із деякої точки простору проведені до даної площини перпендикуляр, що дорівнює 12 см і похила, проекція якої на дану площину дорівнює 9 см. Знайти довжину проекції перпендикуляра на похилу.
19. Із точки М, взятої поза площиною β , проведено дві похилі, що дорівнюють 37 см і 13 см. Довжини проекцій цих похилих відносяться як 7 : 1. Знайти відстань від точки М до площини.
20. Рівнобічна трапеція, периметр якої дорівнює 48 см, а гострий кут – 60° , лежить у площині α . Точка, рівновіддалена від усіх сторін трапеції, знаходиться на відстані 3 см від площини α . Знайти відстань від цієї точки до сторін трапеції.
21. Трапеція вписана в коло, причому менша її основа, що дорівнює 16 см, стягує дугу в 60° . На відстані 12 см від площини трапеції знаходиться точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції. Знайти відстань від цієї точки до вершин трапеції.
22. Із точки А, взятої поза площиною α , проведено до неї рівні похилі АВ і АС. Відстань ВС між основами похилих дорівнює 10 см. Кут між ВС і АВ дорівнює 60° , а довжина проекції похилої АВ на площину α дорівнює 6 см. Знайти відстань від точки А до площини α .
23. Із точки до площини проведено дві похилі. Довжина першої похилої дорівнює 13 см, а довжина її проекції – 5 см. Кут між проекціями похилих

дорівнює 120° , а довжина відрізка, що сполучає основи похилих – 19 см. Знайти довжину другої похилої.

24. Через вершину прямого кута C рівнобедреного прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр CD , що дорівнює $\frac{\sqrt{527}}{2}$ см. Знайти площу трикутника ADB , якщо $AC = \frac{7}{\sqrt{2}}$ см.

25. У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30° , більший катет 6 см. Із вершини гострого кута B проведено перпендикуляр $BK = 2\sqrt{6}$ см до площини трикутника. Знайти відстань від точки K до катета AC .

26. Із вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено перпендикуляр до площини трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює 12 см, а один із гострих кутів – 60° . Знайти відстань від верхнього кінця перпендикуляра до вершини гострого кута трикутника, що має градусну міру 60° , якщо довжина перпендикуляра дорівнює 8 см.

27. Точка M знаходиться на однаковій відстані від всіх сторін правильного трикутника зі стороною 12 см і віддалена від площини трикутника на $2\sqrt{22}$ см. Знайти відстань від точки M до сторін трикутника.

28. Дано трикутник зі сторонами 26 см, 28 см і 30 см. Точка M віддалена від усіх сторін трикутника на 17 см. Знайти відстань від точки M до площини трикутника.

29. Периметр правильного трикутника дорівнює $36\sqrt{3}$ см, а відстані від деякої точки до кожної із сторін трикутника – 10 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.

30. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см². Знайти відстань між площиною трикутника і точкою, яка віддалена від кожної із його вершин на 10 см.

31. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 см². Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо сторони основи – 3 см і 4 см.

32. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см та 6 см, діагональ меншої бічної грані утворює кут 45° з бічним ребром. Знайти об'єм призми.

33. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 см і $\sqrt{18}$ см і утворюють кут 45° , а менша діагональ – кут 45° з площиною основи. Знайти об'єм паралелепіпеда.
34. Довжина бічного ребра прямокутного паралелепіпеда – 6 см, довжина діагоналі паралелепіпеда в 2 рази менша від периметра основи. Знайти об'єм паралелепіпеда.
35. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів дорівнюють 6 см^2 і 8 см^2 . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.
36. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайти бічну поверхню піраміди.
37. Радіус кола, описаного навколо основи правильної чотирикутної піраміди, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а апофема – 10 см. Обчислити бічну поверхню піраміди.
38. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом 6 см і гіпотенузою 12 см. Знайти об'єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30° .
39. У циліндрі на відстані 8 см від його осі і паралельно до неї проведено переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Визначити радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 5 см.
40. У циліндрі паралельно до його осі проведено переріз, діагональ якого дорівнює 17 см. Висота циліндра – 15 см, радіус основи – 5 см. На якій відстані від осі проведено цей переріз?
41. Точка лежить поза площиною прямого кута і знаходиться на відстані 8 см від кожної із сторін цього кута. Її ортогональна проекція на цю площину лежить між сторонами кута. Знайти відстань від точки до вершини кута, якщо віддалена від площини на відстані $2\sqrt{7}$ см.
42. Кінці відрізка довжиною 10 см лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах. Цей відрізок утворює з площиною кути 30° і 45° . Знайти відстань між основами перпендикулярів, опущених із кінців даного відрізка на лінію перетину площин.

43. Відрізок сполучає точки A і B , що лежать на двох взаємно перпендикулярних площинах, і утворює з площиною, що містить точку A , кут 45° . Точка B знаходиться на відстані $2\sqrt{2}$ см від другої площини. Частини лінії перетину площин, що знаходиться між перпендикулярами, опущеними на неї із кінців даного відрізка, дорівнює 2 см. Знайти кут (у градусах) між відрізком і площиною, що містить точку B .
44. Дано двогранний кут величиною 30° і дві прямі в його гранях, кожна із яких паралельна до ребра двогранного кута. Ці прямі знаходяться на відстані $\sqrt{3}$ і 3 см від ребра. Знайти відстань від ребра двогранного кута до площини, що проходить через ці дві прямі.
45. На площині дано трапецію і точку поза нею, яка віддалена від кожної із сторін трапеції на відстань 13 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трапеції, якщо бічні сторони трапеції дорівнюють 25 см, 26 см, а більша основа – 34 см.
46. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120° , а бічні сторони – 10 см. Поза трикутником дано точку, яка віддалена від усіх його вершин на 26 см. Знайти відстань від цієї точки до площини трикутника.
47. Точка M знаходиться на відстані 3 см від кожної із вершин паралелограма, сторони якого відносяться як 2 : 1. Знайти площу цього паралелограма, якщо відстань від точки M до площини паралелограма дорівнює 2 см.
48. Точка M знаходиться на відстані 15 см від кожної сторони паралелограма і на відстані 9 см від його площини. Знайти площу цього паралелограма, якщо його діагоналі відносяться як 3 : 4.
49. Із деякої точки простору до площини ромба, сторона якого 5 см, а менша діагональ – 6 см, проведено перпендикуляр. Основа перпендикуляра – вершина гострого кута ромба. Відстань від цієї точки до вершини другого гострого кута дорівнює $4\sqrt{19}$ см. Знайти відстань від даної точки до прямої, що містить меншу діагональ ромба.
50. Із деякої точки простору до площини ромба, сторона якого дорівнює 13 см, а більша діагональ – 24 см, проведено перпендикуляр, довжина якого $10\sqrt{6}$ см. Основою перпендикуляра є вершина тупого кута ромба. Знайти відстань від даної точки до прямої, що містить більшу діагональ ромба.

51. Всередині тригранного кута з прямими плоскими кутами взято точку. Знайти відстань від цієї точки до вершини тригранного кута, якщо вона віддалена від ребер даного кута відповідно на 20 см, 31 см і 33 см.
52. Сторони трикутника 9 см, 10 см і 11 см. Із вершини кута, що лежить напроти сторони довжиною 10 см, проведено перпендикуляр до площини трикутника, довжина якого дорівнює 7 см. Знайти відстань від кінця перпендикуляра, що поза площиною трикутника, до протилежної сторони цього трикутника.
53. Всередині тригранного кута з прямими плоскими кутами взято точку. Знайти відстань від цієї точки до вершини тригранного кута, якщо вона віддалена від ребер даного кута відповідно на $8\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$ і $10\sqrt{3}$.
54. Квадрат $ABCD$ і прямокутник ABC_1D_1 , площі яких відповідно дорівнюють 64 см^2 і 120 см^2 , мають спільну сторону AB . Кут між їх площинами 60° . Знайти відстань між стороною квадрата CD і стороною прямокутника C_1D_1 ($CD \parallel C_1D_1$).
55. Квадрат $ABCD$ і прямокутник ABC_1D_1 , площі яких відповідно дорівнюють 64 см^2 і 24 см^2 , мають спільну сторону AB . Відстань між стороною квадрата CD і стороною прямокутника C_1D_1 , що паралельні між собою, дорівнює 7 см. Знайти кут між площинами квадрата і прямокутника.
56. Ортогональною проекцією чотирикутника, площа якого дорівнює 144 см^2 є прямокутник, діагональ якого дорівнює $\sqrt{145}$ см, а одна із сторін – 8 см. Знайти кут між площинами прямокутника та даного чотирикутника.
57. Ортогональною проекцією даного трикутника, площа якого дорівнює $36\sqrt{3}\text{ см}^2$, є прямокутний трикутник, катет якого 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 7,5 см. Знайти кут між площинами цих трикутників.
58. Відстань від точки до площини дорівнює 4 см. Із цієї точки проведено дві похилі, довжини яких 5 см і $4\sqrt{5}$ см. Кут між проекціями цих похилих дорівнює 60° . Знайти відстань між основами цих похилих.
59. У грані двогранного кута проведена пряма, яка утворює з другою його гранню кут 30° , а з ребром двогранного кута – 45° . Знайти градусну міру двогранного кута.

60. В одній із граней двогранного кута, що дорівнює 45° , проведена пряма, яка утворює з другою гранню кут 30° . Знайти градусну міру кута, який утворює пряма з ребром двогранного кута.

Рівень 3

1. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. Площа перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи, дорівнює 72 см^2 . Знайти площу бічної поверхні призми.

2. У прямій трикутній призмі сторони основи відносяться як $17 : 10 : 9$, а бічне ребро дорівнює 16 см. Повна поверхня цієї призми дорівнює 1440 см^2 . Знайти бічну поверхню призми.

3. Площа найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми дорівнює 1 м^2 . Знайти площу бічної поверхні призми.

4. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом 60° і бічною стороною 4 см. Діагоналі трапеції є бісектрисами гострих кутів. Діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм призми.

5. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з тупим кутом 120° і меншою основою 6 см. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайти об'єм призми.

6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом 60° і площею $2\sqrt{3} \text{ см}^2$. Діагональ грані, що містить катет, прилеглий до цього кута, нахилена до площини основи призми під кутом 60° . Знайти об'єм призми.

7. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною $2\sqrt{3} \text{ см}$ і гострим кутом 60° . Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайти об'єм призми.

8. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною $2\sqrt{3} \text{ см}$. Дві рівні бічні грані утворюють між собою кут 60° . Через діагоналі цих граней проведено площину, що утворює з площиною основи кут 30° . Знайти об'єм цієї призми.

9. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину, дорівнюють 4 см і утворюють між собою кут 60° . Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом 15° . Знайти об'єм призми.
10. Основа прямої призми – трикутник, дві сторони якого дорівнюють $4\sqrt{3}$ см, а кут між ними 30° . Через одну з даних сторін основи і протилежну вершину другої основи проведено переріз, який утворює з основою кут 60° . Знайти об'єм призми.
11. Основою призми є трикутник, у якого одна сторона дорівнює 2 см, а дві інші по 3 см, бічне ребро дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 45° . Знайти ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму призми.
12. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні і мають площі 24 см^2 і 30 см^2 . Знайти об'єм призми.
13. Основою призми є квадрат зі стороною $\sqrt{4-\sqrt{3}}$ см. Одна з бічних граней – також квадрат, а інша – ромб з кутом 60° . Знайти площу повної поверхні призми.
14. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм ABCD, у якого $AB = 3$ см, $AD = 7$ см і $BD = 6$ см. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 100 см^2 . Знайти об'єм паралелепіпеда.
15. Основою похилого паралелепіпеда є ромб, сторона якого дорівнює 60 см. Площина діагонального перерізу, що проходить через більшу діагональ основи, перпендикулярна до площини основи. Площа цього перерізу дорівнює 7200 см^2 . Знайти меншу діагональ основи, якщо бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 80 см і утворює з площиною основи кут 60° .
16. Відстань від основи висоти правильної чотирикутної піраміди до її бічного ребра дорівнює 4 см, а її бічне ребро утворює з площиною основи кут 15° . Знайти бічне ребро піраміди.
17. Знайти бічне ребро правильної трикутної піраміди, висота якої дорівнює $\sqrt{13}$, а двогранний кут при стороні основи дорівнює 30° .

18. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{3}$, а плоский кут при вершині – 30° . Знайти площу повної поверхні піраміди.
19. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 30° . Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кола описаного навколо бічної грані, дорівнює $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
20. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 4 см і утворює з висотою піраміди кут 30° . Знайти об'єм піраміди.
21. У правильній трикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут 30° . Знайти об'єм піраміди, якщо радіус кола, описаного навколо її основи, дорівнює 4 см.
22. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут 30° . Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює $2 \cdot \sqrt{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}$. Знайти площу бічної поверхні піраміди.
23. У правильній чотирикутній піраміді бічна грань утворює з площиною основи кут 60° . Відрізок, що сполучає середину висоти піраміди з серединою апофеми, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм піраміди.
24. У правильній чотирикутній піраміді висота утворює з бічною гранню кут 30° . Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою апофеми, дорівнює $2\sqrt{3}$. Знайти площу повної поверхні піраміди.
25. Основою піраміди є трикутник із сторонами 13 см, 15 см і 14 см. Бічні грані, що містять сторони 13 см і 15 см, перпендикулярні до основи. Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 9 см.
26. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом $\sqrt{3 \cdot (7\sqrt{3} - 3)}$ см і прилеглим до нього гострим кутом 30° . Дві бічні грані, що містять катети цього трикутника, перпендикулярні до основи, а третя нахилена до неї під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні піраміди.
27. Основа піраміди – прямокутний трикутник з гострим кутом 60° і прилеглим до нього катетом $2\sqrt{3+\sqrt{3}}$ см. Бічна грань, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом 30° . Знайти об'єм піраміди.

28. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює $2\sqrt{41}$ см. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Знайти об'єм піраміди.

29. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди – 4 см і 1 см, а бічне ребро – 2 см. Знайти висоту піраміди.

30. Площі основ правильної трикутної зрізаної піраміди – 75 см^2 і 12 см^2 , а висота повної піраміди – 9 см. Знайти об'єм зрізаної піраміди.

31. Діагональ осьового перерізу циліндра нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайти об'єм циліндра, якщо периметр осьового перерізу дорівнює $\frac{4(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\pi\sqrt{3}}}$ см.

32. В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу в 120° . Відрізок, який сполучає центр іншої основи з серединою цієї хорди, дорівнює $\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайти об'єм циліндра.

33. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу по хорді, що стягує дугу в 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо діагональ перерізу дорівнює $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ см і утворює з площиною основи кут 75° .

34. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді з довжиною $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ см, яку видно із центра верхньої основи під кутом 60° , а із точки перетину діагоналей перерізу – під кутом 120° . Знайти об'єм циліндра.

35. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом 90° , а із вершини конуса – під кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його радіус дорівнює $\sqrt[4]{\frac{2}{\pi^2}}$ см.

36. Із центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр, який утворює з висотою кут 30° . Твірна конуса дорівнює $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ см. Знайти об'єм конуса.

37. Через дві твірні конуса, кут між якими 30° , проведено площину. Площа бічної поверхні конуса дорівнює $12\sqrt{3}\text{ см}^2$. Знайти площу перерізу, якщо твірна конуса утворює з висотою кут 60° .

38. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає основу по хорді, яка стягує дугу в 90° . Знайти площу повної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює $2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\pi}}$ см, а кут у перерізі при вершині конуса дорівнює 60° .

39. Площі основ зрізаного конуса – 4 м^2 і 16 м^2 . Через середину висоти проведено площину паралельну основі. Знайти площу перерізу.

40. Радіуси основ зрізаного конуса – 11 см і 16 см , твірна – 13 см . Знайти відстань від центра меншої основи до точки кола більшої.

41. Навколо правильної чотирикутної призми описано сферу. Радіус сфери, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 30° . Знайти площу поверхні сфери, якщо бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ см.

42. Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут 60° . Знайти об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює $\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}$ см.

43. Навколо правильної чотирикутної призми описано кулю радіуса $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{6}}$ см. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з площиною основи кут 30° . Знайти площу бічної поверхні призми.

44. Навколо правильної трикутної призми описано кулю радіуса $\frac{4}{\sqrt[3]{9\sqrt{3}}}$ см. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з площиною її основи кут 30° . Знайти об'єм призми.

45. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом 30° при основі. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, дорівнює $\frac{6}{\sqrt{\pi(2-\sqrt{3})}}$ см і нахилена до площини основи під

кутом 60° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

46. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом 60° . Діагональ бічної грані дорівнює $\frac{8}{\sqrt{3\pi}}$ см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайти площу бічної поверхні циліндра, вписаного в дану призму.

47. Основою прямої призми є рівнобедрена трапеція з гострим кутом 30° . Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції, дорівнює $\sqrt[3]{\frac{8(2-\sqrt{3})}{3\pi}}$ см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайти об'єм циліндра, описаного навколо даної призми.

48. У пряму призму, основою якої є рівнобедрена трапеція з тупим кутом 120° , вписано циліндр. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції, дорівнює $\frac{8}{\sqrt[3]{3\pi}}$ см і нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайти об'єм циліндра.

49. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\pi(2-\sqrt{3})}}$ см. Знайти площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до основи під кутом $37,5^\circ$.

50. У кулю вписано правильну трикутну піраміду, висота якої дорівнює $\sqrt[3]{\frac{3(26+15\sqrt{3})}{\pi}}$ см. Знайти об'єм кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до основи під кутом 75° .

51. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює 30° . Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$ см.

52. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до основи під кутом 30° . Знайти площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в піраміду, дорівнює $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ см.

53. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\pi(2+\sqrt{3})}}$ см і нахилене до основи під кутом 15° . Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо даної піраміди.
54. У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\pi(7-4\sqrt{3})}}$ см, а бічне ребро нахилене до основи під кутом 75° . Знайти площу поверхні сфери, описаної навколо даної піраміди.
55. З точки Р поверхні кулі проведено три рівні хорди РА, РВ і РС під кутом 60° одна до одної. Знайти радіус кулі, якщо відстань від точки Р до площини АВС дорівнює $\frac{8}{3}$ см.
56. У конус вписано піраміду, основа якої – прямокутний трикутник. Один з гострих кутів прямокутного трикутника, що в основі піраміди, дорівнює 30° . Знайти об'єм піраміди, якщо твірна конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 60° .
57. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом 30° . Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює $4 \cdot \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}}}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.
58. Кут між твірною конуса і його висотою дорівнює 30° . Відстань від центра описаної навколо конуса кулі до основи його висоти дорівнює $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.
59. З точки Р поверхні кулі проведено три рівні хорди під кутом 90° одна до одної. Знайти довжину одної з хорд, якщо радіус кулі дорівнює $2\sqrt{3}$ см.
60. У правильній трикутній піраміді відстань від центра вписаної в неї кулі до сторони основи дорівнює $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ см. Знайти площу повної поверхні піраміди, якщо її бічна грань нахилена до основи під кутом 60° .

61. Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ см, а кут при вершині 30° , обертається навколо бічної сторони. Знайти об'єм тіла обертання.

62. Ромб, сторона якого дорівнює 8 см, а гострий кут $\frac{\pi}{3}$, обертається навколо прямої, проведеної через вершину тупого кута, перпендикулярно до меншої діагоналі. Обчислити $\frac{V\sqrt{3}}{4\pi}$, де V – об'єм тіла обертання.

63. Ромб, більша діагональ якого дорівнює $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ см, а гострий кут $\frac{\pi}{3}$, обертається навколо осі, що проходить через вершину ромба, перпендикулярно до більшої його діагоналі. Знайти об'єм тіла обертання.

64. У рівнобічній трапеції менша основа дорівнює $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ см, бічна сторона становить $\frac{3}{4}$ меншої основи і утворює з більшою основою кут 60° . Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції навколо меншої основи.

65. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Бічна сторона дорівнює $\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\pi}}$ см і утворює з більшою основою кут $\frac{\pi}{3}$. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням трапеції навколо більшої основи.

66. Осьовий переріз конуса є рівнобедрений трикутник, кут при вершині якого дорівнює 60° . радіус круга, описаного навколо цього трикутника дорівнює $\sqrt[3]{\frac{24}{\pi}}$ см. Знайти об'єм конуса.

67. Осьовим перерізом конуса є трикутник, площа якого дорівнює $25\sqrt[3]{\frac{27\sqrt{3}}{\pi^2}}$ см², а твірна конуса утворює з площиною основи кут 30° . Знайти об'єм конуса.

68. Кут при вершині розгортки конуса дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Знайти відношення площі поверхні кулі, вписаної в конус, до площі основи конуса.

69. Кут при вершині осьового перерізу прямого кругового конуса дорівнює $\frac{\pi}{3}$. Знайти центральний кут в розгортці бічної поверхні конуса у градусах.
70. Знайти об'єм прямого кругового конуса, якщо розгортка його бічної поверхні має форму кругового сектора, радіус якого дорівнює $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt[6]{35\pi^2}}$ см, а центральний кут дорівнює $\frac{\pi}{3}$.
71. Висота прямого кругового конуса дорівнює $2\sqrt[3]{\frac{858}{\pi}}$ см. Розгорненням бічної поверхні цього конуса є круговий сектор з центральним кутом $\frac{\pi}{6}$. Обчислити об'єм конуса.
72. Знайти об'єм прямого кругового конуса, якщо розгортка його бічної поверхні має форму кругового сектора з хордою $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[6]{35\pi^4}}$ см і центральним кутом $\frac{\pi}{3}$.
73. У конус, твірна якого дорівнює $3\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ см, вписано кулю. Радіус кулі у чотири рази менший від висоти конуса. Обчислити площу бічної поверхні конуса.
74. У кулю з радіусом $2\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ вписано конус. Площа бічної поверхні конуса у два рази більша від площі його основи. Обчислити об'єм конуса.
75. У кулю з радіусом $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{2}}$ см вписано пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з гострим кутом $\frac{\pi}{12}$, а найбільша по площі бічна грань – квадрат. Знайти об'єм призми.

Розділ 23. Функції та їх властивості

Рівень 1

1. Визначити кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{x+1} + \lg(1-x)$.

2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x-3} + \sqrt[4]{3-x}$.

3. Визначити суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{5-x} - \log_2(x-2)$.

4. Знайти область визначення функції $y = \sqrt[9]{x+5} - \sqrt{-x-5}$.

5. Знайти найменше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \log_{x+2} 3$.

6. Знайти суму значень x , що не входять в область визначення функції $y = \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-8}$.

7. Знайти добуток значень x , що не входять в область визначення функції $y = \frac{x}{x} + \frac{2}{x+2}$.

8. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \log_3(5-x)$.

9. Знайти найбільше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \log_{8-x} 5$.

10. Знайти найбільше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{-x}}$.

11. При якому значенні x функція $y = |2-x| + 3$ приймає найменше значення?

12. При якому значенні x функція $y = 4 - |x+3|$ приймає найбільше значення?

13. Знайти найбільше значення функції $y = -|x-5| - 2$.

14. Знайти найменше значення функції $y = |x+1| + 6$.
15. Обчислити найменше значення функції $y = |x+3| - 5$ на проміжку $[-4; 1]$.
16. Обчислити найбільше значення функції $y = 4 - |x-6|$ на проміжку $[1; 5]$.
17. Визначити кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = (x-2)^0 \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$.
18. Визначити суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = (x-5)^{-1} \cdot \sqrt{x-4} + \lg(7-x)$.
19. Знайти найменше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = (x+3)^2 + (x+4)^0 \lg(x+5)$.
20. Знайти найбільше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \frac{(x-8)^0}{\sqrt{x-2}} + \lg(9-x)$.
21. Знайти найменший додатний період функції $y = \sin^2 2\pi x$.
22. Знайти найменший додатний період функції $y = \cos^2 \frac{\pi x}{4}$.
23. Знайти найменший додатний період функції $y = \sin \pi x + \cos \frac{2\pi x}{3}$.
24. Знайти найбільше значення функції $y = 3 - 2\sin\left(\frac{\pi}{12} - 6x\right)$.
25. Знайти найменше значення функції $y = 7\cos\left(3x + \frac{\pi}{10}\right) - 3$.
26. Знайти найменше значення функції $y = 3\sin^2 2x - \cos^2 2x + 1$.
27. Знайти найбільше значення функції $y = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5} - x\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{5} - x\right) + 5$.
28. Обчислити $f(-2) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$, якщо $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin \pi x, & 0 < x \leq 1, \\ \log_{\sqrt{2}} x, & x > 1. \end{cases}$

29. Обчислити $f(-4)+f(0)+f(4)$, якщо $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}-1, & x \leq -1, \\ \cos \pi x, & -1 < x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1. \end{cases}$

30. Знайти найменше значення функції $f(x)=\begin{cases} 2, & x < -1, \\ 2-5 \cos \pi x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{4}{x+1}, & x > 1. \end{cases}$

31. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $D = \{-3; 2; 3; 4\}$ і $f(-3) = 6, f(2) = -9, f(3) = -5, f(4) = -1$. Чому дорівнює добуток найменшого і найбільшого значення оберненої до даної функції?

32. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $D = \{-10; -6; -1; 2\}$ і $f(-10) = 12, f(-6) = -4, f(-1) = -8, f(2) = 7$. Чому дорівнює добуток найменшого і найбільшого значення оберненої до даної функції?

33. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $D = \{-9; -4; -3; -2\}$ і $f(-9) = 18, f(-4) = 3, f(-3) = 7, f(-2) = 11$. Чому дорівнює найменше число в області визначення оберненої до даної функції?

34. Функція $y = f(x)$ визначена на множині $D = \{-2; 2; 7; 10\}$ і $f(-2) = 8, f(2) = -6, f(7) = 9, f(10) = 3$. Чому дорівнює найбільше число в області визначення оберненої до даної функції?

35. Функції $f(x), g(x)$ – парні і $f(-7) = 9, g(2) = -4$. Обчислити $-3f(7) - 6g(-2)$.

36. Функції $f(x), g(x)$ – непарні і $f(-3) = 10, g(5) = -7$. Обчислити $3g(-5) - 2f(3)$.

37. Функція $f(x)$ – непарна, $g(x)$ – парна і $f(-5) = 8, g(3) = 5$. Обчислити $2f(20 - 3g(-3))$.

38. Функція $f(x)$ – парна, $g(x)$ – непарна і $f(-3) = 12, g(5) = -7$. Обчислити $3g(2f(3) - 29)$.

39. Функція $f(x)$ – непарна, $g(x)$ – парна і $f(10) = 2, g(3) = 7$. Обчислити $5g(4f^2(-10) - 19)$.

40. Функція $f(x)$ – парна, $g(x)$ – непарна і $f(-2)=6$, $g(-7)=8$. Обчислити $4g(2f^2(2)-65)$.

Рівень 2

1. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції

$$y = \sqrt{4x - x^2} - \log_3(x - 2).$$

2. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення

функції $y = \frac{\log_2(x+2)}{\sqrt{9-x^2}}$.

3. Знайти найменше ціле значення x , що входить в область визначення

функції $y = \frac{1}{\log_2(x+3)-1} + \frac{1}{x+2}$.

4. Знайти добуток цілих значень x , що входять в область визначення

функції $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+5)+1}$.

5. Знайти суму значень x , що не входять в область визначення функції

$$y = \frac{2 \cos x + \sin 2x}{x^4 - 13x^2 + 36}.$$

6. Знайти суму цілих значень x , що не входять в область визначення

функції $y = \log_2\left(2 - \frac{x}{x+2}\right)$.

7. Знайти найбільше значення функції $y = \sqrt{6} \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

8. Знайти найменше значення функції $y = 2\sqrt{2} \sin 2x - \sqrt{17} \cos 2x$.

9. Знайти найбільше значення функції $y = 12 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 5 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

10. Знайти найменше значення функції $y = 6 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) - 8 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$.

11. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення

функції $y = \frac{1}{\sqrt{3-|x|}}$.

12. Знайти найменше ціле додатне значення x , що входить в область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{|x-8|-7}}$.

13. Знайти суму цілих значень x , що не входять в область визначення функції $y = \frac{1}{\sqrt{|x+3|-1}}$.

14. Знайти найменше значення x , що входить в область визначення функції $y = \sqrt{x - \sqrt{x-3}} - 3$.

15. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{(x+2)^2(x+5)^4(x-7)} + \sqrt{9-x}$.

16. Знайти добуток цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x \cdot \arctg(x^2-4)}$.

17. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{x - \sqrt{x+2}} + 2 + \log_2(5-x)$.

18. Знайти добуток цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \lg(5-x^2) + (\sqrt{x^2-1})^0$.

19. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{-(x^2+2x)^2(4-x)^2} + (x+2)^0 \lg|x|$.

20. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \lg\left(-\arcsin\left(\frac{x}{2}+3\right)\right)$.

21. Знайти найменше значення x , що входить в область визначення функції $y = \arccos\left(\log_2\left(7-\frac{x}{2}\right)\right)$.

22. Знайти добуток цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \log_{|x|}(16-x^2) + \frac{(x+3)^0}{x-2}$.

23. Знайти найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x \cdot \cos x - 2}$.

24. Знайти найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\sin x + 4\cos x + 3}$.

25. Знайти найменше значення функції $y = 7 - \left(\frac{1}{2}\right)^{|x+2|}$.

26. Знайти найменше ціле додатне число, що належить множині значень функції $y = \frac{x+3}{x-2}$.

27. Знайти найбільше ціле від'ємне число, що належить множині значень функції $y = \frac{-x-3}{x+4}$.

28. Знайти найменше ціле число, що належить множині значень функції $y = \frac{7x^2}{x^2+1}$.

29. Знайти найбільше ціле число, що належить множині значень функції $y = \frac{5x^2}{x^2+3}$.

30. Знайти найменше ціле число, що належить множині значень функції $y = \frac{-10x^2}{x^2+2}$.

Рівень 3

1. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції

$$y = \lg(25 - x^2) + \arcsin \frac{2x-1}{7}.$$

2. Знайти кількість цілих додатних значень x , що входять в область визначення функції

$$y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \arccos \frac{x-1}{7}.$$

3. Знайти ціле значення x , що входить в область визначення функції

$$y = \log_2((x-3)(x+10)) - \arcsin \frac{2x+1}{9}.$$

4. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції

$$y = \sqrt{(x+3)(x-7)} + \arccos \frac{x-2}{5}.$$

5. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{(x+8)(x-3)} - \arcsin \frac{x+3}{5}$.

6. Знайти суму цілих значень x , що не входять в область визначення функції

$$y = 9 \arcsin \frac{2}{x-3}.$$

7. Знайти кількість цілих значень x , що не входять в область визначення функції

$$y = 5 \arccos \frac{3}{x+2}.$$

8. Знайти кількість цілих значень x , що не входять в область визначення функції

$$y = 8 \arcsin \frac{5}{x+3}.$$

9. Знайти суму цілих значень x , що не входять в область визначення функції

$$y = 4 \arccos \frac{4}{x-2}.$$

10. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{(x+7)(x-10)} + 2 \arccos \frac{x-3}{7}$.

11. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції

$$y = \sqrt{32 \sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) - x^2} \cdot \lg \left(x^2 - 3x - 16 \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right).$$

12. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення

функції $y = \frac{2^{-x} \operatorname{ctg} 69^\circ \cdot \operatorname{ctg} 21^\circ + \sqrt{-x}}{\lg(\operatorname{ctg}^2 150^\circ - \sqrt{x^2})}$.

13. Знайти найменше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \sqrt{\log_{0,2}\left(\frac{x-6}{x+5}\right)}$.

14. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 3}{\lg(x^2 - 4)}}$.

15. Знайти найбільше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \sqrt{\lg \lg x - \lg(4 - \lg x) - \lg 3}$.

16. Знайти добуток цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{\frac{-\log_{0,2}(x-1)}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}}$.

17. Знайти кількість цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}$.

18. Знайти найбільше ціле значення x , що входить в область визначення функції $y = \frac{\sqrt{2 \sin x + 1}}{\sqrt{9x - x^2 - 8}}$.

19. Знайти суму цілих значень x , що входять в область визначення функції $y = \sqrt{-\arccos(x^4 - 13x^2 + 37)} + (x-2)^0 \lg^2|3-x|$.

20. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{-\left|\arcsin(x^2 + 2x - 24)\right|} + \arccos\left(\frac{2}{2 + \sin x}\right).$$

21. Знайти найменший додатний період функції $f(x)$, якщо вона визначена на множині всіх дійсних чисел R , для всіх $x \in R$ справджується рівність

$$f(x+1) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}.$$

22. Знайти найменший додатний період функції $f(x)$, якщо вона визначена на множині всіх дійсних чисел R , для всіх $x \in R$ справджується рівність

$$f(x+2,5) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}.$$

23. Відомо, що функція $f(x)$ визначена на множині всіх дійсних чисел R і для всіх $x \in R$ справджується рівність $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Знайти найменший додатний період функції $f(x)$.

24. Чому дорівнює найменший додатний період функції $f(x)$, якщо вона визначена на множині всіх дійсних чисел R і для всіх $x \in R$ задовольняє умову $f(x+1,5) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$?

25. Знайти найменше ціле значення функції, що є оберненою до $y = \log_3 \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\frac{x}{3} - 2 \right) \right)$.

26. Знайти найменше ціле значення функції, що є оберненою до $y = \log_2 \left(\pi - \arccos \left(\frac{2x}{9} + 1 \right) \right)$.

27. Скільки різних цілих значень набуває функція

$$y = 4 \left(\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2} - |\sin x| ?$$

28. Скільки різних цілих значень набуває функція

$$y = -12 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \sqrt{\pi x - x^2} + \pi |\cos x| ?$$

29. Скільки різних цілих значень набуває функція $y = \frac{5 \left| \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} \right|}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2$?

30. Скільки різних цілих значень набуває функція $y = \frac{14 \left| \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right|}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} - 3$?

Розділ 24. Початки аналізу

Рівень 1

1. Обчислити значення похідної функції $y = 3 \sin 2x$ у точці $x = \frac{\pi}{6}$.

2. Обчислити значення похідної функції $y = 4\cos 2x$ у точці $x = \frac{\pi}{12}$.
3. Обчислити значення похідної функції $y = 10\sin x \cos x$ у точці $x = \frac{\pi}{3}$.
4. Обчислити значення похідної функції $y = 2x - \frac{1}{x}$ у точці $x = \frac{1}{2}$.
5. Обчислити значення похідної функції $y = \frac{2}{x} + x^2$ у точці $x = 1$.
6. Обчислити значення похідної функції $y = \sqrt{2x - \frac{9}{4}}$ у точці $x = \frac{5}{4}$.
7. Обчислити найменше значення функції $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2$ на проміжку $[-1; 2]$.
8. Обчислити найменше значення функції $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ на проміжку $[-2; 0]$.
9. Обчислити найбільше значення функції $y = -\sqrt{2x^2 + 4}$ на проміжку $[-1; 2]$.
10. Обчислити найбільше значення функції $y = 12x - x^3$ на проміжку $[0; 3]$.
11. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = 0$; $x = -2$; $y = 135$; $y = 140$.
12. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = -150$; $x = -135$; $y = 0$; $y = -1$.
13. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = 0$; $x = -3$; $y = -165$; $y = -175$.
14. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = 170$; $x = 188$; $y = 0$; $y = -\frac{1}{2}$.
15. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = 1$; $x = 3$; $y = x - 2$; $y = 2$.
16. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = -3$; $x = -1$; $y = -x - 3$; $y = 1$.

17. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функції $x = -1$; $x = 2$; $y = -1$; $y = x + 2$.

18. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, якщо $f(x) = 2x \sin x$.

19. Обчислити $f'(\pi)$, якщо $f(x) = \frac{2}{\pi^2} x^2 \sin x$.

20. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $f(x) = \frac{6}{\pi} x \cos 2x$.

21. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{18}\right)$, якщо $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$.

22. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, якщо $f(x) = \frac{3}{\operatorname{ctg} 2x}$.

23. Обчислити $f'(-1)$, якщо $f(x) = \sqrt{2-2x}$.

24. Обчислити $f'(4)$, якщо $f(x) = \frac{54}{\sqrt{2x+1}}$.

25. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = (1-3x+x^2)^{10}$.

26. Обчислити $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

27. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

28. Обчислити $f'(-2)$, якщо $f(x) = (2x^2 + 4x + 1)^5$.

29. Обчислити $f'(-1)$, якщо $f(x) = (4 + 2x + x^3)^6$.

30. Обчислити $f'(1)$, якщо $f(x) = x + \ln(2x-1)$.

Рівень 2

1. Знайти суму цілих значень x , що входять у проміжок спадання функції $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

2. Знайти найменше додатне ціле значення x , що входить у проміжок зростання функції

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + \sqrt{5}.$$

3. Знайти кількість від'ємних цілих значень x , що входять у проміжки зростання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + \sqrt{3}$.

4. Знайти кількість цілих значень x , що входять у проміжки спадання функції $y = x + \frac{4}{x}$.

5. Знайти найбільше ціле значення x , що входить у проміжки зростання функції $y = \sqrt{3} + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^4$.

6. Визначити ординату точки на параболі $y = 5x - x^2$, в якій кутовий коефіцієнт дотичної до параболи дорівнює (-1) .

7. Дотична до кривої $y = 4 - x^2$ утворює з віссю Ox кут 60° . Знайти ординату точки дотику.

8. Знайти кут між дотичними (у градусах) до графіка функції $y = 6 - \frac{1}{2}x^2$ в точках з абсцисами $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$.

9. Визначити ординату точки на параболі $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, в якій кутовий коефіцієнт дотичної до параболи дорівнює 1 .

10. Дотична до кривої $y = x^2 + x + 1$ утворює з віссю Ox кут 45° . Знайти ординату точки дотику.

11. Знайти кут між дотичними до графіка функції $y = \frac{x^3}{3} - x$ в точках з абсцисами $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$.

12. Знайти кут між дотичними до графіка функції $y = \frac{1}{2} \sin 2x$ в точках з абсцисами $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ і $x_2 = \frac{\pi}{4}$.
13. Знайти суму координат точки перетину дотичних до графіка функції $y = 2x - x^2$ в точках його перетину з віссю Ox .
14. Знайти ординату точки перетину дотичних до графіка функції $y = 2x + x^2$ в точках його перетину з віссю Ox .
15. Знайти добуток координат точки перетину дотичних до графіка функції $y = -x^2 - 4x$ в точках його перетину з віссю Ox .
16. Знайти ординату точки перетину дотичних до графіка функції $y = x^2 + 4x$ в точках його перетину з віссю Ox .
17. Обчислити суму координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = -y^2 + 6y$ в точках його перетину з віссю Oy .
18. Обчислити модуль суми координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = y^2 - 3y$ в точках його перетину з віссю Oy .
19. Обчислити квадрат суми координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = -\frac{1}{2}y^2 - 2y$ в точках його перетину з віссю Oy .
20. Обчислити суму модулів координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = \frac{1}{3}y^2 + 2y$ в точках його перетину з віссю Oy .
21. Знайти суму квадратів координат точки перетину дотичних до графіка функції $y = \sqrt{2 - (x - 2)^2}$ в точках його перетину з прямою $y = 1$.
22. Обчислити добуток координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = -\sqrt{2 - (y - 2)^2}$ в точках його перетину з прямою $x = -1$.
23. Знайти модуль суми координат точки перетину дотичних до графіка функції $y = -\sqrt{2 - (x + 4)^2}$ в точках його перетину з прямою $y = -1$.

24. Обчислити суму квадратів координат точки перетину дотичних до графіка функції $x = \sqrt{2 - (y + 4)^2}$ в точках його перетину з прямою $x = 1$.
25. Знайти кут (у градусах) між дотичними до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ в точках його перетину з прямою $y = \frac{x}{4}$.
26. Знайти кут (у градусах) між дотичними до графіка функції $y = x^2 - 5x$ в точках його перетину з прямою $y = -6$.
27. Знайти суму координат точки на графіку функції $y = 4\sqrt{x} - x - 3$, в якій кутовий коефіцієнт дотичної до графіка дорівнює $\frac{1}{3}$.
28. Знайти ординату точки на графіку функції $y = x - 3\sqrt{x} + 2$, дотична в якій має кутовий коефіцієнт $\left(-\frac{1}{2}\right)$.
29. При якому найбільшому значенні k пряма $y = kx + 1$ є дотичною до параболи $y = x^2 + 3x + 2$?
30. При якому найменшому значенні k пряма $y = kx + 3$ є дотичною до графіка функції $y = \frac{1}{x^2}$?
31. При якому значенні k пряма $y = kx - 2$ є дотичною до графіка функції $y = \frac{1}{x}$?
32. При якому значенні k пряма $y = kx + 7$ є дотичною до графіка функції $y = \frac{x + 6}{x}$?
33. Знайти кількість коренів рівняння $\frac{1}{x\sqrt{2}} f'(x) = \cos \frac{x}{2}$ на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = \sin x - x \cos x + \frac{\pi}{2}$.
34. Знайти найменший додатний корінь (у градусах) рівняння $\frac{\sqrt{3}}{x} f'(x) = \sin 2x$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = x \sin x + \cos x + \pi$.

35. Знайти суму коренів рівняння $f'(x)\cos \pi x + 3\pi = 0$ на проміжку $[-1,5; 2,5]$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = 6\cos \pi x + \frac{3\pi}{2}$.

36. Розв'язати рівняння $\lg(x^2 - 3,5x) = \log_{0,1} f'(x)$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

37. Розв'язати рівняння $\log_{\sqrt{2}} f'(x) = \log_2(2x^2 + 2x)$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = \frac{1}{2}x(x+2)$.

38. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $f'(x) < 0$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$.

39. Знайти добуток цілих розв'язків нерівності $f'(x) > 0$, де $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = (9-x)\sqrt{x}$.

40. При якому від'ємному значенні x числа $f'(2), 2f(3), f'(x)$, розташовані у вказаному порядку, утворюють арифметичну прогресію, якщо $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x$?

41. При якому додатному значенні x числа $f'(x), f'(4), f(-3)+5$, розташовані у вказаному порядку, утворюють арифметичну прогресію, якщо $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 - 21x)$?

42. При якому від'ємному значенні x числа $12f'(0), f'(1), 3f(x) \cdot \ln 2$, розташовані у вказаному порядку, утворюють геометричну прогресію, якщо $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = 2^{x^2+x}$?

43. При якому значенні x числа $f'(0), f'(1), 2f(x) \cdot \ln 3$, розташовані у вказаному порядку, утворюють геометричну прогресію, якщо $f'(x)$ – похідна функції $f(x) = 3^{2x+1}$?

44. Знайти найбільше не додатне значення параметра k , при якому значення функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x + k$, в точці $x = 2$ і в точках екстремуму, взяті в деякому порядку, будуть членами арифметичної прогресії.

45. Знайти кількість цілих значень параметра k на проміжку $[-4;5]$, при яких значення функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x - k$, в точці $x = 1$ і в точках екстремуму, взяті в деякому порядку, будуть членами арифметичної прогресії.

Рівень 3

1. Число 9 записати у вигляді добутку двох додатних чисел так, щоб сума їх квадратів була б найменшою. Знайти суму цих чисел.

2. Число 36 записати у вигляді суми двох чисел так, щоб їх добуток був б найбільшим. Знайти різницю цих чисел.

3. Число 18 записати у вигляді суми двох чисел так, щоб сума їх квадратів була б найменшою. Знайти добуток цих чисел.

4. Число 180 записати у вигляді суми трьох додатних доданків так, щоб два з них відносились, як 1:2, а добуток трьох доданків був б найбільшим. Знайти найменший з невідомих доданків.

5. Знайти число, яке перевищувало б свій квадрат на максимальне значення.

6. Число 54 записати у вигляді суми трьох додатних доданків. Відомо, що перший доданок у два рази більший від другого. Знайти найбільший з невідомих доданків, знаючи, що їх добуток є найбільшим.

7. Число 8 записати у вигляді суми двох додатних чисел так, щоб сума куба одного числа і потроєного другого числа була б мінімальною. Знайти цю мінімальну суму.

8. Сіткою довжиною 120 м потрібно огородити прямокутну ділянку максимальної площі, що прилягає до будинку. Знайти довжину більшої сторони прямокутної ділянки.

9. У прямокутну трапецію з основами 24 і 8 см та висотою 12 см вписано прямокутник максимальної площі, який має спільний прямий кут з трапецією. Знайти довжину меншої сторони цього прямокутника.

10. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 24 см і кутом 60° вписано прямокутник максимальної площі, основа якого лежить на гіпотенузі. Знайти довжину більшої сторони цього прямокутника.

11. У прямокутний трикутник зі сторонами 18 см, 24 см і 30 см вписано прямокутник максимальної площі, який має спільний прямиий кут з трикутником. Знайти площу цього прямокутника.

12. Обчислити найбільше значення функції $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

13. Обчислити найбільше значення функції $y = \cos^2 x + \sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

14. Обчислити найменше значення функції $y = \sin 2x + \cos 2x + \sqrt{2}$ на відрізку $[0; \pi]$.

15. Обчислити найменше значення функції $y = \cos x + \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ на відрізку $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$.

16. Обчислити найбільше значення функції $y = \sin x + \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ на відрізку $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$.

17. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y \leq 7. \end{cases}$

18. Знайти найменше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - y \leq 14, \\ 4x - 8 \geq 0. \end{cases}$

19. Знайти найменше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 2x + 2y \leq 9. \end{cases}$

20. Знайти найменше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + y \geq -13. \end{cases}$

21. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} x+2y+6=0, \\ 2x-y \geq -12. \end{cases}$
22. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} x+y+12=0, \\ x-3y \leq 6. \end{cases}$
23. Знайти найменше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 2x+y=8, \\ x+2y \geq 7, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$
24. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} x-y=4, \\ x+y \geq -7, \\ 2x-12 \leq 0. \end{cases}$
25. Знайти найменше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 2x-4y=16, \\ x+y \geq 5. \end{cases}$
26. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 3x+y=6, \\ 4x+2y \leq 9. \end{cases}$
27. Знайти найбільше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-3x-y+2=0, \\ -2x^2+5x+y+1 \geq 0. \end{cases}$
28. Знайти найменше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-2x-2y+3=0, \\ x^2-2x-y \leq 0. \end{cases}$
29. Знайти найбільше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-x+y-3=0, \\ x^2+2x+2y+6 \geq 0. \end{cases}$
30. Знайти найменше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-x-2y-14=0, \\ x^2-4x+y \leq 8. \end{cases}$
31. Знайти найбільше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-2x+y-3=0, \\ x^2+4x+4y+3 \geq 0. \end{cases}$
32. Знайти найменше значення виразу $x+y$, якщо $\begin{cases} x^2-3x-y-3=0, \\ x^2-3x+2y-6 \leq 0. \end{cases}$

33. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + x + y - 4 = 0, \\ x^2 - x + 3y + 4 \geq 0. \end{cases}$

34. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + x + y - 1 = 0, \\ x^2 + x + 2y + 4 \geq 0. \end{cases}$

35. Знайти найменше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + x - y - 1 = 0, \\ x^2 + x + y - 3 \leq 0. \end{cases}$

36. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + 2y + 2 = 0, \\ x^2 - x + 3y + 3 \geq 0. \end{cases}$

37. Знайти найменше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} 2x^2 - 7x + y = 4, \\ x^2 + 5x - y \leq 1. \end{cases}$

38. Знайти найменше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} x^2 + 9x + y = 6, \\ x^2 + 16x + 2y \geq -3. \end{cases}$

39. Знайти найбільше значення виразу $x \cdot y$, якщо $\begin{cases} 4x + y = 6, \\ x^2 - y \leq -9. \end{cases}$

40. Знайти найбільше значення виразу $x + y$, якщо $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ x^2 - 6x + y \leq -10. \end{cases}$

41. З пунктів А і В прямолінійним шляхом ($AB = 7$ км) одночасно виїжджають в одному напрямку автомобіль зі швидкістю $v = 40$ км/год і мотоцикліст з прискоренням $a = 50$ км/год². Знайти найбільшу відстань між ними протягом $t = 1,5$ год їх руху.

42. З пунктів А і В на прямолінійному шляху ($AB = 25$ км) одночасно виїжджають в одному напрямку автомобіль зі швидкістю $v = 50$ км/год і мотоцикліст з прискоренням $a = 25$ км/год². Знайти найбільшу відстань між ними протягом $t = 2,5$ год їх руху.

43. Знайти висоту прямого кругового циліндра найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса $3\sqrt{3}$ см.

44. Знайти висоту прямого кругового конуса найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса 9 см.

45. Знайти радіус основи конуса найменшого об'єму, описаного навколо циліндра з радіусом основи 8 см, якщо площа основи конуса лежить у площині циліндра.
46. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ , вписано квадрат (одна сторона квадрата лежить на основі трикутника, а кінці протилежної сторони – на рівних сторонах трикутника). Довжина діагоналі квадрата дорівнює $a\sqrt{2}$ см. Обчислити $\operatorname{tg}\varphi_{\min}$, де φ_{\min} – значення кута φ , при якому площа трикутника є найменшою.
47. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ , вписано прямокутник (одна сторона прямокутника лежить на основі трикутника і її довжина дорівнює l см, а кінці протилежної сторони – на рівних сторонах трикутника). Довжина діагоналі прямокутника дорівнює $l\sqrt{5}$ см. Обчислити $\operatorname{tg}\varphi_{\min}$, де φ_{\min} – значення кута φ , при якому площа трикутника є найменшою.
48. У рівнобедрений трикутник, кут при основі якого дорівнює φ , вписано коло радіуса r см. Знайти значення кута φ у градусах, при якому площа трикутника буде найменшою.
49. У прямокутний трикутник з гострим кутом φ вписано трапецію (менша основа трапеції лежить на одному з катетів, а кінці другої основи – на другому катеті та гіпотенузі і більша основа трапеції лежить проти кута φ). Довжина більшої основи трапеції дорівнює $2l$ см, а менша основа і бічні сторони дорівнюють l см. Обчислити $\frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\varphi_{\min}$, де φ_{\min} – значення кута φ , при якому площа трикутника є найменшою.
50. У коло радіуса R см вписано рівнобедрений трикутник з кутом φ при вершині. Знайти значення кута φ у градусах, при якому площа трикутника буде найбільшою.

Розділ 25. Задачі з параметрами

Рівень 1

1. При якому значенні параметра m рівняння $m^2x + 1 = mx + m$ має безліч розв'язків?

2. При якому значенні параметра t рівняння $t^2x = t - 3tx$ не має розв'язку?
3. Знайти найменше додатне ціле значення параметра t , при якому рівняння $t^2x - 1 = t + x$ має розв'язок?
4. При якому значенні параметра t рівняння $t^2x - 5 = t - 5tx$ має безліч розв'язків?
5. При якому значенні параметра t рівняння $t^2x - 2tx = t + 2tx$ не має розв'язку?
6. Знайти найбільше від'ємне ціле значення параметра t , при якому рівняння $t^2x = t - tx$ має розв'язок?
7. При якому значенні параметра t рівняння $t^2x + 5 = t + 5tx$ має безліч розв'язків?
8. При якому значенні параметра t рівняння $t^2x + 3tx = t - 4tx$ не має розв'язку?
9. При якому значенні параметра t рівняння $t^3x + 2t^2x = t$ має безліч розв'язків?
10. Знайти найбільше значення параметра t , при якому рівняння $t^2x = 3 + 6tx$ не має розв'язку?
11. Знайти найменше ціле додатне значення параметра t , при якому рівняння $\cos 6x = \frac{t-3}{3}$ не має коренів.
12. Знайти найбільше ціле від'ємне значення параметра t , при якому рівняння $2\sin 10x = t + 3$ не має коренів.
13. Знайти суму цілих значень параметра t , при яких рівняння $|\cos 10x| = \frac{t-2}{4}$ має корені.
14. Знайти найбільше значення параметра t , при якому рівняння $3\sin|7x| = 2t + 8$ має корені.

15. Знайти найбільше ціле від'ємне значення параметра m , при якому рівняння $|\sin 7x| = \frac{m+4}{10}$ не має коренів.
16. Обчислити значення виразу $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, якщо $a+b+c=1$, корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ співпадають і дорівнюють (-1) .
17. Знайти таке значення параметра m , при якому один з коренів рівняння $2x^2 + mx + 3m = 0$ дорівнює 3.
18. Знайти таке значення параметра m , при якому один з коренів рівняння $mx^2 + 12x - 3 = 0$ дорівнює $\frac{1}{5}$.
19. При якому найбільшому значенні параметра m число 3 є коренем квадратного рівняння $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$?
20. При якому найменшому значенні параметра m число 1 є коренем квадратного рівняння $x^2 - (m+1)x - \frac{m^2}{4} = 0$?
21. При якому значенні параметра m рівняння $\frac{x+5}{x-m} = 0$ не має розв'язку?
22. При якому значенні параметра m рівняння $\frac{x-7}{x+m} = 1$ має безліч розв'язків?
23. Знайти суму значень параметра m , при яких рівняння $\frac{(x+m)(x-7)}{x+10} = 0$ має один розв'язок.
24. Знайти добуток значень параметра m , при яких рівняння $\frac{x^2 - x - 6}{x - m} = 0$ має один розв'язок.
25. Знайти суму значень параметра m , при яких рівняння $\frac{x+m}{x^2 + 6x - 7} = 0$ не має розв'язку.
26. Знайти добуток значень параметра m , при яких число $x = 2$ є коренем рівняння $(x-m)(6x+2m) = m-2$.

27. Знайти суму значень параметра m , при яких число $x = -3$ є коренем рівняння $(x+m)(5x-2m) = m-3$.

28. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких рівняння $\operatorname{tg} x = \frac{2m+5}{2}$ має розв'язки на проміжку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

29. Знайти кількість цілих значень параметра m , при яких рівняння $\operatorname{ctg} x = \frac{3-m}{4\sqrt{3}}$ має розв'язки на проміжку $\left[-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

30. Обчислити значення виразу $\frac{(c+2)^3}{\sin a + \cos b}$, якщо $a+b+c = \frac{\pi}{2}$, корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ співпадають і дорівнюють 0.

Рівень 2

1. При якому найменшому значенні параметра m рівняння $x^2 - 4x + \frac{m^4}{4} = 0$ має рівні корені?

2. Знайти найбільше від'ємне ціле значення параметра m , при якому рівняння $x^2 + x + \frac{m^2}{64} = 0$ не має дійсних коренів.

3. Знайти найменше додатне ціле значення параметра k , при якому рівняння $x^2 + kx - 2k = 0$ має різні дійсні корені.

4. Знайти таке значення параметра k , при якому один з коренів рівняння $x^2 + 2kx + k^2 = x - 2$ у два рази більший за другий.

5. Знайти найбільше значення параметра k , при якому відношення коренів рівняння $x^2 + k(x-1) + 2 = 0$ дорівнює 2.

6. Знайти найбільше значення параметра k , при якому один з коренів рівняння $x^2 - 12x + k = 0$ є квадратом другого.

7. При якому значенні параметра m сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 3x + m = 0$ дорівнює 9?

8. Знайти найбільше значення параметра m , при якому сума коренів рівняння $x^2 + 2m = 2mx + 1$ дорівнює сумі квадратів його коренів.

9. При якому значенні параметра m система рівнянь $\begin{cases} mx + my = 1, \\ mx + y = m, \end{cases}$ не має розв'язку?

10. Знайти кількість значень параметра m , при яких система рівнянь $\begin{cases} x + my = 1, \\ mx + my = m^2, \end{cases}$ має безліч розв'язків.

11. Знайти кількість цілих значень параметра k , при яких рівняння $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не має коренів.

12. Знайти найменше ціле додатне значення параметра k , при якому корені рівняння $(k+1)x^2 - 4kx + k - 5 = 0$ додатні.

13. Знайти найменше значення параметра k , при якому корені x_1 та x_2 рівняння $x^2 + kx + 6 = 0$ задовольняють умову $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

14. При якому значенні параметра k сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 2kx + 2k^2 + 4k + 3 = 0$ є найбільшою?

15. При якому значенні параметра k сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2kx + 2k^2 - 6k + 8 = 0$ є найменшою?

16. При якому значенні параметра k різниця коренів рівняння $2x^2 - (k+1)x + k - 1 = 0$ дорівнює їх добутку?

17. Знайти суму всіх значень параметра k , при яких сума коренів рівняння $x^2 - 2k(x-1) - 1 = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів.

18. При якому значенні параметра k сума квадратів дійсних коренів рівняння $4x^2 - 28x + k = 0$ дорівнює 22,5? Вкажіть номер правильного варіанта відповіді: 1) $k = -7.25$; 2) $k = 24$; 3) $k = -15$; 4) $k = 53$; 5) не існує; 6) $k = 6.75$;

19. При якому значенні параметра k сума квадратів дійсних коренів рівняння $6x^2 + 30x + k = 0$ дорівнює 10? Вкажіть номер правильного варіанта відповіді: 1) $k = 13.5$; 2) $k = -10$; 3) не існує; 4) $k = 9$; 5) $k = 45$; 6) $k = 24$;

20. Знайти найбільше значення виразу $b - c$, якщо відомо, що коефіцієнти b та c квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$ також є і його коренями.

21. Знайти найбільше значення суми $m + k$ параметрів m і k , при яких рівняння $\frac{1}{x} = \frac{k}{m^2 - 4m - 5 - 2x}$ має безліч розв'язків.

22. Знайти найменше значення добутку $m \cdot k$ параметрів m і k , при яких рівняння $\frac{k^2}{\frac{m^2}{2} + 2,5m - 7 + 2x} = \frac{2}{x}$ має безліч розв'язків.

23. Знайти суму $m + k$ параметрів m і k , при яких рівняння $\frac{k^2}{mx + k + 1} = \frac{1}{9x}$ має безліч розв'язків.

24. При якому значенні параметра m система рівнянь $\begin{cases} 6x + 2my = 6, \\ mx + 3y = 3, \end{cases}$ не має розв'язку?

25. При якому значенні параметра m система рівнянь $\begin{cases} 2(m - 2)x + 54y = 9, \\ 2x + (m + 1)y = -1, \end{cases}$ має безліч розв'язків?

26. При якому значенні параметра m система рівнянь $\begin{cases} (2m + 6)x + 8y = 10 - 6m, \\ x + \frac{5 + m}{2}y = 4, \end{cases}$ має безліч розв'язків?

27. Знайти найменше ціле додатне значення параметра m , при якому система рівнянь $\begin{cases} (2m^2 + 5)x + (m - 2)y = 3m, \\ 3mx + 2y = m - 2, \end{cases}$ має єдиний розв'язок розв'язків і при цьому справджується нерівність $\cos \frac{\pi m}{12} < 0$.

28. Знайти суму всіх цілих значень параметра m , при яких рівняння $\log_3 \left(9^x + \frac{m}{16} \right) = x$ має два різні корені.

29. Знайти добуток всіх цілих значень параметра m , при яких рівняння $\log_2 \left(4^x - \frac{m}{20} \right) = x$ має два різні корені.

30. Знайти найменше ціле значення параметра m , при якому рівняння $\log_{\sqrt{5}}\left(5^x + \frac{m}{8}\right) = x$ не має коренів.

Рівень 3

1. При якому найменшому цілому значенні параметра m рівняння $(m-2)x^2 + (4-2m)x + 3 = 0$ не має розв'язку?

2. При якому найменшому значенні параметра m рівняння $m(m+3)x^2 + (2m+6)x - 3m - 9 = 0$ має більш, ніж один корінь?

3. При якому найменшому цілому значенні параметра m рівняння $(2m+8)x^2 - (m+4)x + 3 = 0$ не має розв'язку?

4. При якому найменшому значенні параметра m рівняння $m(2m+4)x^2 - (m+2)x - 5m - 10 = 0$ має більш, ніж один корінь?

5. Знайти кількість цілих значень параметра m , при яких нерівність $(4-m)x^2 - 3x + m + 4 > 0$ справджується для всіх дійсних значень x .

6. Знайти найбільше ціле значення параметра m , при якому нерівність $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 < 0$ справджується для всіх дійсних значень x .

7. Знайти найбільше ціле значення параметра m , при якому нерівність $(m+4)x^2 - 2mx + 2m - 6 < 0$ справджується для всіх дійсних значень x .

8. Знайти найменше ціле значення параметра m , при якому нерівність $(m-3)x^2 - 2mx + 3m - 6 > 0$ справджується для всіх дійсних значень x .

9. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких рівняння $\sin^2 x + 4\sin x + m = 0$ має розв'язки.

10. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких рівняння $\cos^2 x - 6\cos x + m = 0$ має розв'язки.

11. Знайти кількість цілих значень параметра m , при яких рівняння $m\sin x + \cos x = \sqrt{m^4 - 1}$ має розв'язки.

12. Знайти кількість цілих значень параметра m , при яких рівняння $3\sqrt{2} \sin 2x + 3m \cos 2x = \sqrt{m^4 - 4}$ має розв'язки.
13. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких рівняння $\sqrt{m^2 - 9} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{25 - m^2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = m - 3$ має розв'язки.
14. При якому найменшому цілому додатному значенні параметра m рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = m$ не має коренів?
15. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{m}{4} - 3$ має корені.
16. Знайти найбільше ціле від'ємне значення параметра m , при якому рівняння $\cos mx = 1 + 3 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ має корені.
17. Знайти найменше ціле додатне значення параметра m , при якому рівняння $\sin\left(\frac{x}{m}\right) = 1 + 4 \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$ має корені.
18. Знайти найменше ціле значення параметра m , при якому рівняння $|\operatorname{tg} x + m \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}}$ не має коренів.
19. Знайти найбільше значення параметра m , при якому корені квадратного рівняння $x^2 + (2m + 6)x + 4m + 12 = 0$ більші за (-1) .
20. Знайти найбільше значення параметра m , при якому корені квадратного рівняння $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ менші за 1.
21. Знайти суму цілих значень параметра m , при яких один з коренів квадратного рівняння $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 4m = 0$ більший за 3, а другий менший за 2.
22. Знайти найменше ціле значення параметра m , при якому корені рівняння $4x^2 - 2x + m = 0$ містяться між числами (-1) та 1.
23. Знайти найбільше ціле значення параметра m , при якому корені рівняння $(m - 1)x^2 - x + 1 = 0$ менші за 2.

24. Знайти добуток значень параметра m , при яких рівняння $(2m-5)x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$ має один розв'язок.
25. Знайти суму значень параметра m , при яких рівняння $(m+5)x^2 + x\sqrt{m^2 + 24} + 1 = 0$ має один розв'язок.
26. При якому значенні параметра m рівняння $x^2 + mx + 1 = 0$ та $x^2 + x + m = 0$ мають принаймні один спільний корінь?
27. Знайти кількість різних значень параметра m , при яких рівняння $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ та $x^2 + mx - m - 1 = 0$ мають принаймні один спільний корінь.
28. Знайти суму квадратів всіх цілих значень параметра m , при яких рівняння $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{m + 2x}$ має рівно один корінь.
29. Знайти суму всіх цілих значень параметра m , при яких рівняння $\sqrt{x+m} = 3 - \sqrt{x-1}$ має розв'язок.
30. Знайти кількість всіх цілих значень параметра m , при яких система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = 3, \\ x + y = m, \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
31. Знайти таке значення параметра m , при якому система рівнянь $\begin{cases} |y| - |x| = 2, \\ x^2 + y^2 = m, \end{cases}$ має рівно два розв'язки.
32. Знайти суму квадратів всіх цілих значень параметра m , при яких система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = m, \\ x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$ має рівно чотири розв'язки.
33. Знайти суму всіх цілих значень параметра m , при яких система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ y - 5x^2 = m, \end{cases}$ має хоча б один розв'язок.
34. Знайти найбільше значення добутку $m \cdot k$ параметрів m і k , при якому система рівнянь $\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ y - mx^2 = k, \end{cases}$ має рівно три розв'язки.

35. Знайти найменше ціле значення параметра m , при якому система рівнянь $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+1)^2 = m, \\ x^2 - y^2 = 0, \end{cases}$ має рівно чотири розв'язки.

Зміст

- Розділ 1. Арифметика
- Розділ 2. Перетворення алгебраїчних виразів
- Розділ 3. Перетворення показникових та логарифмічних виразів
- Розділ 4. Перетворення тригонометричних виразів
- Розділ 5. Алгебраїчні раціональні рівняння.
- Розділ 6. Ірраціональні рівняння
- Розділ 7. Показникові рівняння
- Розділ 8. Логарифмічні рівняння
- Розділ 9. Тригонометричні рівняння
- Розділ 10. Рівняння з модулями
- Розділ 11. Системи рівнянь
- Розділ 12. Прогресії
- Розділ 13. Алгебраїчні раціональні нерівності
- Розділ 14. Ірраціональні нерівності
- Розділ 15. Показникові нерівності
- Розділ 16. Логарифмічні нерівності
- Розділ 17. Нерівності з модулями та комбіновані нерівності
- Розділ 18. Системи нерівностей
- Розділ 19. Текстові задачі на складання рівнянь,
нерівностей та їх систем
- Розділ 20. Вектори
- Розділ 21. Планіметрія
- Розділ 22. Стереометрія
- Розділ 23. Функції та їх властивості
- Розділ 24. Початки аналізу
- Розділ 25. Задачі з параметрами

Навчально-методичне видання

**КОНКУРСНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ
ДЛЯ ВСТУПНИКІВ**

МАТЕМАТИКА

Завдання підготував: Федір Елемирович Гече

Відповідальні за випуск: В.М. Міца, П.П.Гуранич,
Б.К.Галас, І.Й.Росола

К64 **Конкурсні** тестові завдання для вступників: Математика. – Ужгород;
Ужгородський національний університет, 2006. – 228 с.

Збірник містить біля 3000 завдань з бази екзаменаційних тестів, що використовується на вступних іспитах до Ужгородського національного університету. Він охоплює основні розділи елементарної математики, знання яких необхідні для успішного навчання в університеті і дає певну інформацію про рівень вимог з математики, які ставляться перед вступниками до УжНУ. Збірник призначений для вступників на спеціальності економічного, інженерно-технічного, математичного, фізичного, хімічного факультетів та факультету міжнародних відносин. Може бути використаний вчителями та учнями старших класів у навчальному процесі та для самопідготовки.

ББК 22.1в648