УДК 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).105-111

М. І. Глебена[1], В. Ф. Глебена[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1100-515X

[2] Закарпатський науково-дослідний експертно-криміналістичний центр МВС України,
Ужгород,
судовий експерт
v.hlebena@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3234-3222

МОДИФІКОВАНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

При розв'язуванні прикладних задач визначення оптимальних режимів складних систем необхідно розв'язувати задачі на знаходження екстремумів негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. В [3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для розробки чисельного методу обчислення подвійних інтегралів, точного на певному класі функцій; деяких чисельних методів відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних.

Зокрема, цей апарат використано для побудови чисельного методу нульового порядку відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. Збіжність чисельних методів мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму негладких логарифмічно вгнутих функцій однієї та двох дійсних змінних не залежить від вибору початкового наближення, та випливає із опуклості вниз діаграми Ньютона.

В роботі пропонується модифікація вищезазначеного методу, направлена на підвищення його ефективності. У результаті застосування алгоритму одержимо розв'язок з точністю до величини кроку. Зазначимо, що побудований у роботі чисельний метод можна успішно використовувати для відшукання локальних екстремумів довільних негладких функцій від двох дійсних змінних, а також для відшукання абсолютного екстремуму довільних функцій двох дійсних змінних, які в заданій області задовольняють умову Ліпшиця з сталою L.

Ключові слова: методи оптимізації, чисельні методи, екстремум, функція, негладка функція, мажоранта та діаграма Ньютона.

1. Вступ. В [1] розроблено апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який пізніше одержав широке застосування для побудови нових чисельних методів розв'язування окремих класів задач алгебри, математичного аналізу та диференціальних рівнянь [2].

В [3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, який використано для розробки чисельного методу обчислення подвійних інтегралів, точного на певному класі функцій; деяких чисельних методів відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних [4]. Зауважимо, що у випадку негладких функцій задача їх оптимізації в [5] розв'язується з використанням поняття субградієнта. Зокрема, цей апарат використано для побудови чисельного методу відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних [6].

В роботі пропонується модифікація методу [6], направлена на підвищення його ефективності.

2. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично [3].

Нехай в області $D = \{\, a \le x \le b,\ \ c \le y \le d \,\}$ визначена логарифмічно вгнута функція $f\left(x, y\right)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Побудуємо в області D сітку:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \ \ h = \left(b - a\right)/n,$$

$$y_j = c + js, \quad j = 0, 1, \ldots, m, \ \ s = \left(d - c\right)/m.$$

Позначимо $f\left(x_i, y_j\right) = a_{ij} \quad \left(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m\right)$. У просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}\left(x_i, y_j, -\ln a_{ij}\right)$ (точки зображень) з координатами $x = x_i,\ y = y_i,\ z = -\ln a_{ij}\ \left(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m\right)$. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C\left(S\right)$. Для кожної точки $\left(x, y\right) \in D$ визначимо точку $B\left(x, y, \kappa\left(x, y\right)\right)$, де

$$\kappa\left(x, y\right) = \inf_{\left(x, y, z\right) \in C\left(S\right)} z.$$

Множина точок $B\left(x, y, \kappa\left(x, y\right)\right), \left(x, y\right) \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C\left(S\right)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд

$$z = \kappa\left(x, y\right), \quad \left(x, y\right) \in D.$$

Позначимо $M_f\left(x, y\right) = \exp\left(-\kappa\left(x, y\right)\right), \quad \left(x, y\right) \in D.$

Позаяк функція $f\left(x, y\right)$ є логарифмічно вгнутою, тоді всі точки зображення P_{ij} знаходяться у вершинах діаграми Ньютона δ_f, а всі пари індексів $\left(i, j\right)$ будуть вершинними і для кожної точки $\left(x_i, y_j\right)\ \left(i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m\right)$ виконується рівність $M_f\left(x_i, y_j\right) = a_{ij}$. Отже, апроксимуюча функція $M_f\left(x, y\right)$, $\left(x, y\right) \in D$, є некласичною мажорантою Ньютона для значень a_{ij} $\left(i = 0, 1, \ldots, n;\right.$ $\left.j = 0, 1, \ldots, m\right)$, а δ_f – некласичною діаграмою Ньютона.
Величини

$$R_{ij}\left(x\right) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}} \left(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m;\ \ R_{0j} = 0\right)$$

і

$$R_{ij}\left(y\right) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}} \left(j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, n;\ \ R_{i0} = 0\right)$$

називатимемо (i,j) −ми числовими нахилами мажоранти Ньютона $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини

$$D_{ij}(x) = \frac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)}\,(i = 1,2,\ldots,n-1;\;\; j = 0,1,\ldots,m;\quad D_{0j} = D_{nj} = \infty)$$

і

$$D_{ij}(y) = \frac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)}\,(j = 1,2,\ldots,m-1;\;\; i = 0,1,\ldots,n;\quad D_{i0} = D_{im} = \infty)$$

називатимемо (i,j) −ми відхиленнями мажоранти Ньютона $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy.

Із опуклості вниз поверхні δ_f випливають такі нерівності

$$R_{ij}(x) \le R_{i+1,j}(x)\,(i = 0,1,\ldots,n-1;\; j = 0,1,\ldots,m)\,,$$

$$R_{ij}(y) \le R_{i,j+1}(y)\,(j = 0,1,\ldots,m-1;\; i = 0,1,\ldots,n)\,,$$

$$D_{ij}(x) \ge 1\,(i = 1,2,\ldots,n-1;\; j = 0,1,\ldots,m)\,,$$

$$D_{ij}(y) \ge 1\,(j = 1,2,\ldots,m-1;\; i = 0,1,\ldots,n)\,.$$

3. Постановка задачі. Нехай в області $D = \{\, a \le x \le b,\;\; c \le y \le d \,\}$ визначена логарифмічно вгнута функція $f(x,y)$, яка може бути як гладкою, так і негладкою. Потрібно знайти максимальне значення вищеназваної функції.

Побудуємо в області D сітку:

$$x = x_i = a + ih,\quad i = 0,1,\ldots,n,\;\; h = (b-a)/n;$$

$$y = y_j = c + js,\quad j = 0,1,\ldots,m,\;\; s = (d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i,y_j) = a_{ij}\quad (i = 0,1,\ldots,n;\; j = 0,1,\ldots,m)$. Побудуємо для значень $f(x_i,y_j) = a_{ij}$ некласичну мажоранту Ньютона $M_f(x,y)$ [1]. Оскільки функція $f(x,y)$ є логарифмічно вгнутою в області D, то

$$R_{ij}(x) = \left(\frac{a_{i-1,j}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}}\,(i = 1,2,\ldots,n;\; j = 0,1,\ldots,m)\,,$$

$$R_{ij}(y) = \left(\frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}}\,(i = 0,1,\ldots,n;\; j = 1,2,\ldots,m)\,,$$

$$R_{ij}(x,y) = \left(\frac{a_{i-1,j-1}}{a_{ij}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{h^2+s^2}}}\,(i = 1,2,\ldots,n;\; j = 1,2,\ldots,m)\,.$$

Легко бачити, що якщо для деякої точки $(x_k,y_l) \in D$ виконуються умови

$$R_{kl}(x) \le 1,\, R_{k+1,l}(x) > 1, \tag{1}$$

$$R_{kl}(y) \le 1,\, R_{k,l+1}(y) > 1, \tag{2}$$

то точка (x_k,y_l) з точністю $\varepsilon = \max(s,h)$ є точкою екстремуму функції $f(x,y)$. Вибравши за початкове наближення екстремальної точки будь-яку точку $(x_k,y_l) \in D$, алгоритм методу є таким.

1. Обчислюємо $R_{kl}(x)$, $R_{kl}(y)$, $R_{k+1,l}(x)$, $R_{k,l+1}(y)$. Якщо умови (1), (2) виконуються, то точку (x_k, y_l) з точністю $\varepsilon \leq \max(s, h)$ приймаємо за оптимальну і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо обидві умови не виконуються, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(y), R_{kl}(x,y)\}$ і переходимо до пункту 2. Якщо умова (1) виконується, а умова (2) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(y), R_{kl}(x,y)\}$ і переходимо до пункту 3. Якщо умова (2) виконується, а умова (1) не виконується, то визначаємо $\tilde{R}_{kl} = \max\{R_{kl}(x), R_{kl}(x,y)\}$ і переходимо до пункту 4.

2. Якщо $R_{kl}(x) \leq 1$ і $R_{kl}(y) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x) \geq 1$, $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$, то за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1. У випадку якщо $R_{kl}(x) \leq 1$ і $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

   У випадку якщо $R_{kl}(x) \geq 1$ і $R_{kl}(y) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1.

3. Якщо $R_{kl}(y) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(y) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_k, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

4. Якщо $R_{kl}(x) \leq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k+1}, y_{l+1}) і переходимо до пункту 1. Якщо $R_{kl}(x) \geq 1$, то при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_l) і переходимо до пункту 1; при $\tilde{R}_{kl} = R_{kl}(x,y)$ за точку (x_k, y_l) приймаємо точку (x_{k-1}, y_{l-1}) і переходимо до пункту 1.

4. Приклад. Розглянемо задачу мінімізації штрафної функції №2 .

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 10^{-3}(x^2+y^2-0.25)^2.$$

Графік даної функції зображений на рис.1

Дана функція є строго опуклою, тоді вищенаведений алгоритм будемо застосовувати до задачі максимізації функції

$$-f(x,y) = -(x-1)^2 - (y-1)^2 - 10^{-3}(x^2+y^2-0.25)^2 \to \max$$

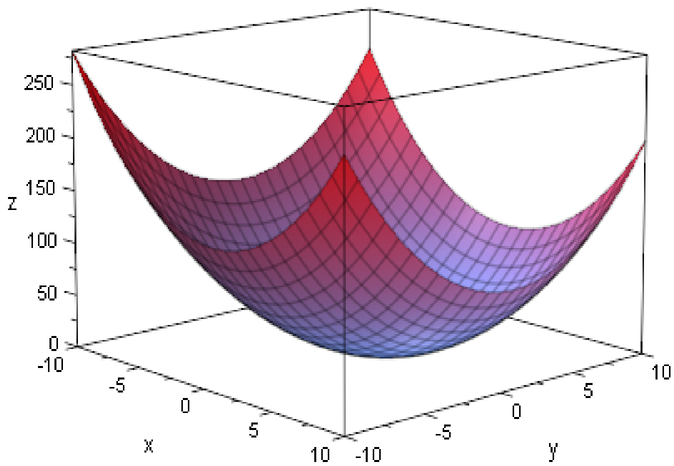

Рис. 1. Графік штрафної функції №2

Будемо розглядати функцію $-f(x_1, x_2) + 10$, оскільки для неї виконується умова $-f(x_1, x_2) + 10 > 0$ в області $D = \{-1 \le x \le 5,\ -1 \le y \le 5\}$.

Виберемо точку (-0,9;0,1) за початкову і перевіримо виконання умов (1) та (2). Обидві умови не виконуються, тож перейдемо до п.2.

Таблиця 1. Значення параметрів на початковому кроці

(x_k, y_l)	$h = s$	$R_{kl}(x)$	$R_{k+1,l}(x)$	$R_{kl}(y)$	$R_{k+1,l}(y)$
(-0,9;0,1)	0,1	0,4843	0,5261	0,7072	0,7407

У результаті застосування послідовності кроків описаного алгоритму отримаємо послідовність точок: $(-0,9;0,2)$, $(-0,9;0,3)$, $(-0,9;0,4)$, $(-0,9;0,5)$, $(-0,9;0,6)$, $(-0,9;0,7)$, $(-0,9;0,8)$, $(-0,9;0,9)$, $(-0,9;1)$, $(-0,8;1,1)$, $(-0,7;1)$, $(-0,6;1,1)$, $(-0,5;1)$, $(-0,4;1,1)$, $(-0,3;1)$, $(-0,2;1,1)$, $(-0,1;1)$, $(0;1,1)$, $(0,1;1)$, $(0,2;1,1)$, $(0,3;1)$, $(0,4;1,1)$, $(0,5;1)$, $(0,6;1,1)$, $(0,7;1)$, $(0,8;1,1)$, $(0,9;1)$, $(1;1,1)$, $(1;1)$.

Отже, з точністю 0,1 точку (1;1) приймаємо за точку, в якій функція досягає максимуму. Уточнимо дану точку в області $D = \{0,9 \le x \le 1,1,\ 0,9 \le y \le 1,1\}$, зменшивши крок. За початкову точку виберемо $(0,99;0,99)$ і покладемо $h = s = 0,002$. Виконавши послідовність кроків алгоритму, одержимо точку (0,996;0,996), в якій функція досягає найбільшого значення. Значення функції в цій точці дорівнює $f(x, y) = 0,003038866977024$.

5. Висновки. Запропоновано новий чисельний метод відшукання екстремуму як гладких, так і негладких логарифмічно увігнутих функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. Перевагами методу є збіжність, яка не залежить від вибору початкового наближення. Збіжність методу випливає із опуклості вниз діаграми Ньютона. Згідно алгоритму початкове наближення вибираємо довільним чином, а напрям руху від точки до точки вибираємо в залежності від виконання нерівностей для числових нахилів. Тобто, з будь-якої точки області, в якій шукаємо екстремум, будемо рухатись до точки екстремуму. В результаті застосування алгоритму одержимо розв'язок з точністю до величини кроку.

Список використаної літератури

1. Цегелик Г. Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение. *Укр. мат. журн.* 1989. Т.41. №9. С. 1273–1276.
2. Цегелик Г. Г. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. 190 с.
3. Цегелик Г. Г. Федчишин Н. В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* 1998. Вип. 50. С. 209–211.
4. Глебена М. І. Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття ступеня канд. фіз.-мат. наук спец. 01.05.02 „Математичне моделювання та обчислювальні методи". Івано-Франківськ, 2012. 23 с.
5. Шор Н. З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. К.: Наук. думка, 1979. 199 с.
6. Глебена М. І., Цегелик Г. Г Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2011. Вип. 2(22). С. 50–53.

Hlebena M. I., Hlebena V. F. Modified numerical method of majorant type search of extreme of extraordinary logarifmically concentrated functions of two actual variables.

When solving application problems for determining the optimal modes of complex systems, it is necessary to solve problems for finding extremes of nonsmooth and discontinuous functions. Such situations occur, for example, in the theory of approximation, in solving particular problems of operations research, in the application of the theory of motion control of dynamical systems, etc. Therefore, it is of great interest to develop numerical methods by which absolute extremum of both continuous-differential and arbitrary functions could be found.

We are working on developing such methods. They are based on the use of the apparatus of non-classical majorities and Newton diagrams of the functions given in the table. In [3], the apparatus of nonclassical majorants and Newton diagrams of functions of two real variables, given in tabular form, was constructed, which was used to develop a numerical method for calculating double integrals accurate on a certain class of functions; some numerical methods for finding the extremum of nonsmooth functions of two real variables. In particular, this apparatus was used to construct a numerical zero-order method for finding the extremum of arbitrary logarithmically curved functions of two real variables. The convergence of the numerical methods for finding the absolute extremum of the nonsmooth log-curved functions of one and two real variables does not depend on the choice of the initial approximation. The convergence of the method follows from the convexity of the Newton diagram.

The paper proposes modification of the above method, aimed at improving its efficiency. As a result of applying the algorithm, we obtain a solution up to the magnitude of the step. Note that the numerical method constructed in this paper can be successfully used to find local extremum of arbitrary nonsmooth functions from two real variables, as well as to find the absolute extremum of arbitrary functions of two real variables that satisfy a Lipschitz condition with a constant L.

Keywords: optimization methods, numerical methods, extremum, function, non-smooth function, majorant and Newton diagram.

References

1. Tsehelyk, H. H. (1989). Teoriya mazhorant i diagramm Nyutona funktsiy, zadannyih tablichno, i ee prilozhenie [The theory of majorant and diagrams Newtonian functions which are given discretely and its application]. *Ukrainian Mathematical Journal, 41, 9,* 1273–1276 [in Russian].
2. Tsehelyk, H. H. (2013). Aparat neklasichnih mazhorant i diagram Nyutona funktsiy, zadanih tablichno, ta yogo vikoristannya v chiselnomu analizi monohrafiya. [Apparatus of non-classical majorants and diagrams Newtonian functions which are given discretely and and its use in the numerical analysis]. Lviv [in Ukranian].
3. Tsegelik, G. G., & Fedchishin, N. V. (1998). Aparat neklasichnih mazhorant i dIagram Nyutona funktsiy dvoh diysnih zminnih, zadanih tablichno [The apparatus of non-classical majorants and Newton diagrams of functions of two real variables defined tabular]. *Herald Lviv Univ. Series. mech.-mat., 50,* 209–211 [in Ukranian].
4. Hlebena, M. I. (2012). Matematichni modeli ta chislovi metodi mazhorantnogo tipu dlya analizu diskretnih optimizatsiynih protsesiv [Mathematical models and numerical methods of majorant type for analysis of discrete optimization processes]. *Extended abstract of candidate's thesis.* Ivano-Frankivsk [in Ukranian].
5. Shor, N. Z. (1979). Metodyi minimizatsii nedifferentsiruemyih funktsiy i ih prilozheniya [Methods of minimization of nondifferentiable functions and their application]. Kiev: Nauk. dumka [in Russian].
6. Hlebena, M. I. (2011). Chiselniy metod mazhorantnogo tipu vidshukannya ekstremumu dovilnih logarifmichno vgnutih funktsiy dvoh diysnih zminnih [Numerical method of the majorant type of finding the extremum of arbitrary logarithmically concave functions of two real variables]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics, 2(22),* 50–53 [in Ukranian].

Одержано 11.10.2019