УДК 512.44
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).127-133

М. М. Ломага[1], Н. В. Семенова[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
старший викладач системного аналізу і теорії оптимізації
mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8813-0464

[2] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ,
провідний науковий співробітник,
доктор фізико-математичних наук, с.н.с.
nvsemenova@meta.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5442-5413

КВАДРАТИЧНІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ І ВІДОБРАЖЕННЯ ЛАГРАНЖА

В різних сферах науки і техніки майже будь-яка складна задача оптимального вибору, що виникає, є багатокритеріальною, оскільки для пошуку найкращої альтернативи доводиться враховувати багато різних вимог, можливо навіть таких, що суперечать одна одній. При цьому на практиці найбільш часто використовуваними як критеріальні є лінійні та квадратичні функції. Вони дозволяють досить адекватно описати досліджувані процеси і застосовувати для розв'язання таких задач відомі і вивчені алгоритми. Одними із перших методів, що використовувались для розв'язання багатокритеріальних задач оптимізації були методи, в основі яких лежить підхід зведення вхідної задачі до однокритеріальної. Однак дана процедура в більшості випадків призводить до серйозних змін властивостей, які має вхідна задача, а отже, до невиправданої заміни багатокритеріальної моделі задачі однокритеріальною моделлю. Також не слід забувати про обчислювальні труднощі, що виникають при втраті основних властивостей вхідної задачі, та про неможливість застосувати відомі алгоритми розв'язання відповідних однокритеріальних задач. Тому актуальною залишається розробка методів розв'язання векторних задач оптимізації, в яких не втрачаються початкові властивості критеріальних функцій та функцій обмежень. В однокритеріальній оптимізації ряд алгоритмів для пошуку екстремуму побудовано на використанні апарату двоїстості. Це питання представляє теоретичний та практичний інтерес і для задач багатокритеріальної оптимізації. В статті досліджуються опуклі квадратичні задачі лексикографічної оптимізації на множині, заданій системою лінійних нерівностей, та питання побудови двоїстих до них задач. Двоїсті задачі до початкової будуються за допомогою відображенням Лагранжа, де множники Лагранжа – це векторні змінні, множиною значень кожної з яких є множина векторів простору, розмірність якого рівна кількості часткових критеріїв, із введеним на ньому лексикографічним порядком. Встановлені необхідні та достатні умови існування й оптимальності лексикографічних розв'язків вхідної задачі. Пропонується підхід, що дозволяє звести розв'язання задачі лексикографічної оптимізації до послідовності систем нерівностей і рівнянь в лексикографічному порядку. В основі лежить аналог схеми скаляризації та використання властивостей побудованого для векторної функції і обмежень відображення Лагранжа. Перспективною також є можливість побудови обчислювальних алгоритмів для розв'язання лексикографічної задачі квадратичної оптимізації, в основі яких лежить двоїстий підхід.

Ключові слова: лексикографічні квадратичні задачі оптимізації, відображення Лагранжа, виконання систем нерівностей в лексикографічному порядку.

1. Вступ. Під квадратичною екстремальною задачею як в однокритеріальній, так і в багатокритеріальній оптимізації розуміємо задачу, цільова функція і обмеження якої виражаються за допомогою поліноміальних функцій не вище другого степеня.

Ці задачі мають широку область застосувань. Питання їх розв'язування займають важливе місце при вирішенні проблем математичної економіки, теорії ігор, оптимального керування, статистичних рішень та інших наукових дисциплін. Особливістю квадратичних задач є те, що їх функція Лагранжа при довільних значеннях множників Лагранжа є квадратичною функцією від змінних задачі. Тому визначення стаціонарної точки функції Лагранжа, якщо відомі множники, зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь або нерівностей.

Таким чином, для квадратичних екстремальних задач як і для задач лінійного та опуклого квадратичного програмування є можливість побудови обчислювальних алгоритмів, в основі яких лежить двоїстий підхід.

Питання двоїстості для векторних задач значно складніше, ніж для задач з одним критерієм. Справа в тому, що поняття двоїстості в багатокритеріальній оптимізації базується на співвідношенні максимальних і мінімальних елементів в частково впорядкованих множинах, на відміну від поняття двоїстості у звичайній теорії оптимізації [1], де двоїстість пов'язана зі збігом максимальних і мінімальних елементів лінійно впорядкованих множин на числовій прямій. Цей перехід від лінійно впорядкованих множин на прямій до множин в евклідовому просторі при вивченні двоїстості є нетривіальним. Тобто, в скалярному випадку для отримання збігу розв'язків прямої і двоїстої задач достатньо переконатися у відсутності „розриву" між множинами образів розв'язків прямої і двоїстої задач. Якщо такого „розриву" немає, то зазначені множини образів „склеюються" в точці, яка дає одночасно розв'язок прямої і двоїстої задач. У багатокритеріальному випадку „склеювання" прямої і двоїстої множини недостатньо; двоїста конструкція повинна бути такою, щоб пряма і двоїста множини „склеювалися" в точності своїми множинами максимальних і мінімальних елементів. Наявні публікації, присвячені двоїстості в багатокритеріальної оптимізації, умовно можна розбити на дві групи, де в першій групі робіт двоїстість пов'язана з певного типу функціями Лагранжа [1, 2], а у другій групі двоїстість вивчається з використанням апарату спряжених функцій [3].

Дана робота присвячена дослідженню властивостей двоїстих до квадратичних лексикографічних задач оптимізації, встановленню необхідних і достатніх умов існування та оптимальності лексикографічних розв'язків цих задач, зведенню розв'язання початкової задачі до розв'язання лексикографічно впорядкованих систем нерівностей і рівнянь.

2. Багатокритеріальна модель квадратичної задачі лексикографічної оптимізації. Розглянемо квадратичну задачу лексикографічної оптимізації у такій постановці:
знайти лексикографічний максимум вектор-функції

$$F\left(x\right) = \left(f_1\left(x\right), \ldots, f_l\left(x\right)\right) \tag{1}$$

з впорядкованими за спаданням важливості частковими критеріями

$$f_i\left(x\right) = x^T C_i x + {d_i}^T x, i = 1, 2, \ldots, l \tag{2}$$

на множині $X = \left\{x \in R^n \middle| \, Ax \leq b, \; x \geq 0\right\}$, де $C_k = \left\|c_{ij}^k\right\|, \; i = 1, 2, \ldots, n,$

$j=1,2,\dots,n$, $k=1,2,\dots,\ell$ – симетричні не додатно визначені матриці, $d\in R^n$, $A=\|a_{ij}\|$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$, $b\in R^m$.

Задачу коротко позначатимемо так:

$$\max{}^L F(x)\,,\ x\in X \tag{3}$$

Задача (3) еквівалентна послідовності задач

$$P_1:\max f_1(x)\,,\ x\in X,$$

$$P_2:\max f_2(x)\,,\ x\in Arg(P_1),$$

$$\dots$$

$$P_\ell:\max f_\ell(x)\,,\ x\in Arg(P_{\ell-1}),$$

де $Arg(P_i)$ – множина оптимальних розв'язків задачі (P_i), $i\in\{1,2,\dots,\ell-1\}$.

Відображення Лагранжа в квадратичному лексикографічному програмуванні. Позначимо U – простір R^ℓ, в якому задано лексикографічний порядок. Нехай $u_i\in U$, $i=1,2,\dots,m$, – векторні змінні, множиною значень кожної з яких є множина векторів U. Відображення $\varphi: R^n\times U^m\to U$, яке будуємо за правилом $\varphi(x,u_1,\dots,u_m)=F(x)+\sum\limits_{i=1}^m\left(b_i-\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)u_i$, де $U^m=\underbrace{U\times U\times\dots\times U}_{m}$, називають відображенням Лагранжа [4], а u_i, $i=1,2,\dots,m$, – множниками Лагранжа.

Теорема 1 [4]. *Нехай $x^*\in R^n$ і $u_i^*\in U(u_i^*\geq^L 0)$, $i=1,2,\dots,m$ – фіксовані вектори. Якщо для всіх $x\in R^n$ і $u_i\geq^L 0$, $i=1,2,\dots,m$, виконуються лексикографічні нерівності*

$$\varphi(x,u_1^*,\dots,u_m^*)\leq^L\varphi(x^*,u_1^*,\dots,u_m^*)\leq^L\varphi(x^*,u_1,\dots,u_m) \tag{4}$$

то x^* – оптимальний розв'язок задачі (1).

Означення 1.*Двоїстою до задачі* (3) *називатимемо задачу*

$$\min_{u\in U^m}{}^L\max_{x\in R^n}{}^L\varphi(x,u_1,\dots,u_m)\,, \tag{5}$$

де $x\in R^n$, $u=(u_1,\dots,u_m)$, $u_i\in U$, $i=1,2,\dots,m$.

Функція $\varphi(x,u_1,\dots,u_m)$ для задачі (3) матиме вигляд

$$\varphi(x,u_1,\dots,u_m)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,u_1,\dots,u_m)\\ \varphi_2(x,u_1,\dots,u_m)\\ \dots\\ \varphi_l(x,u_1,\dots,u_m)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^TC_1x+{d_1}^Tx+\sum\limits_{i=1}^m\left(b_i-\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)u_{i1}\\ x^TC_2x+{d_2}^Tx+\sum\limits_{i=1}^m\left(b_i-\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)u_{i2}\\ \dots\\ x^TC_\ell x+{d_\ell}^Tx+\sum\limits_{i=1}^m\left(b_i-\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)u_{i\ell}\end{pmatrix}.$$

Вважатимемо, що послідовність систем нерівностей виконується в лексикографічному порядку, якщо розв'язки наступної шукатимемо на множині $\bigcap\limits_i Y_i$, де Y_i – множина розв'язків i-ої системи. Позначимо через $Arg(X)$ – множину оптимальних розв'язків задачі (3).

Теорема 2. *Якщо* $Arg(X) \subset intX$ *і* $x^* \in Arg(X)$, *то* $\exists U(x^*, \varepsilon) = \{x \in R^n \,|\|x - x^*\| \le \varepsilon\}$, *що для всіх* $x \in X \bigcap U(x^*, \varepsilon)$ *має місце виконання однієї з умов*

$$T_1: \ \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} \le 0, x_j{}^* \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$T_2: \ \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} \le 0, x_j{}^* \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_j} \le 0, x_j{}^* \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \ldots, n;$$

....

T_ℓ : $\frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} \le 0$, $x_j{}^* \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $\frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_j} \le 0$, $x_j{}^* \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $\ldots$, $\frac{\partial f_l(x^*)}{\partial x_j} \le 0$, $x_j{}^* \frac{\partial f_\ell(x^*)}{\partial x_j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$,
в лексикографічному порядку.

Доведення. Задача (3) еквівалентна послідовності задач (P_i), $i \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}$. Якщо x^* є розв'язком задачі P_i, $i \in \{1, 2, \ldots, \ell - 1\}$, то умова T_i є необхідною умовою оптимальності для задачі P_i. За визначенням це є виконання умов T_i, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, в лексикографічному порядку.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Для того, щоб в задачі* (3) *для точки* (x^*, u^*) *виконувались умови* (4)$\forall\ x \in X$, $u_i \ge^L 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *необхідно і достатньо виконання однієї із умов*

$$T_1: \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1x^* + A^T u_1^* \le 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = b - Ax^* \ge 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = 0. \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1x^* + A^T u_1^* \le 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ b - Ax^* \ge 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial x} = d_2 + 2C_2x^* + A^T u_2^* \le 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ u_2^* \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

....

$$T_\ell: \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1x^* + A^T u_1^* \le 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ b - Ax^* \ge 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = 0, \\ \ldots \\ \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial x} = d_\ell + 2C_\ell x^* + A^T u_\ell^* \le 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ u_\ell^* \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial u_\ell} = 0. \end{cases}$$

в лексикографічному порядку.

Доведення.*Необхідність.* Нехай виконуються умови (4). Тоді згідно теореми 1 x^* є допустимим оптимальним розв'язком задачі (3).

Розглянемо ліву частину $\varphi(x, u_1^*, \ldots, u_m^*) \leq^L \varphi(x^*, u_1^*, \ldots, u_m^*)$ подвійної лексикографічної нерівності і зафіксуємо $x_k = x_k^*$, $k \neq j$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Отримаємо лексикографічну нерівність

$$\varphi\left(x_1^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_m^*\right) \leq^L$$
$$\leq^L \varphi\left(x_1^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j^*, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_m^*\right).$$

Вектор-функція $\varphi\left(x_1^*, \ldots, x_{j-1}^*, x_j, x_{j+1}^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_m^*\right)$ є вектор-функцією, часткові критерії якої залежать від однієї змінної, і яка в точці (x^*, u^*) досягає лексикографічного максимуму. За теоремою 2 має місце сукупність умов T_i, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, записаними в координатній формі умовами (6), (7).

Розглянемо праву частину $\varphi(x, u_1^*, \ldots, u_m^*) \leq^L \varphi(x^*, u_1, \ldots, u_m)$ подвійної лексикографічної нерівності і зафіксуємо $u_k = u_k^*$, $k \neq i$, $k = 1, 2, \ldots, m$. $\varphi(x_1^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_m^*) \leq^L \varphi\left(x_1^*, \ldots, x_n^*, u_1^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i, x_{i+1}^*, \ldots, u_m^*\right)$. Звідси одержуємо, що вектор функція є лінійною відносно u і досягає лексикографічного мінімуму в (x^*, u^*). Необхідні умови оптимальності: $\frac{\partial \varphi_i(x^*, u^*)}{\partial u_i} = 0$,$u_i^* > 0$, $u_i^* \frac{\partial \varphi_i(x^*, u^*)}{\partial u_i} \geq 0$,$u_i^* = 0$. А ці умови еквівалентні умовам (8), (9).

Достатність. Нехай для точки (x^*, u^*) виконуються умови (6)$-$(9). Покажемо, що має місце (4). Кожен із часткових критеріїв вектор-функції $F(x)$ і $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, задачі (3) є угнутою і диференційовною функцією, отже часткові критерії $\varphi(x, u)$ також є угнутими і диференційовними функціями. За критерієм угнутості диференційованої функції для кожної лексикографічно впорядкованої $\varphi_i(x, u)$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, для будь яких точок, а отже і для точок (x, u^*) і (x^*, u^*) виконуватиметься нерівність:

$$\varphi(x, u_1^*, \ldots, u_m^*) \leq^L \varphi(x^*, u_1^*, \ldots, u_m^*) + \left\langle \frac{\partial \varphi(x^*, u^*)}{\partial x}, x - x^* \right\rangle.$$

Врахувавши, що $\left\langle \frac{\partial \varphi(x^*, u^*)}{\partial x}, x - x^* \right\rangle \leq^L 0$, отримаємо ліву частину подвійної лексикографічної нерівності. Відносно u вектор-функція $\varphi(x, u_1, \ldots, u_m)$ є лінійною, отже має місце $\varphi(x, u_1^*, \ldots, u_m^*) - \varphi(x^*, u_1^*, \ldots, u_m^*) = \left\langle \frac{\partial \varphi(x^*, u^*)}{\partial u}, u - u^* \right\rangle$. $\left\langle \frac{\partial \varphi(x^*, u^*)}{\partial u}, u - u^* \right\rangle \geq^L 0 \Rightarrow \varphi(x, u_1^*, \ldots, u_m^*) - \varphi(x^*, u_1^*, \ldots, u_m^*) \geq^L 0$, тобто виконується права частина лексикографічної подвійної нерівності. Теорема доведена.

Для задачі лексикографічної максимізації вектор-функції $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_\ell(x)\}$ з впорядкованими за спаданням важливості частковими критеріями $f_i(x) = x^T C_i x + d_i{}^T x$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$ на множині $X = \{x \in R^n |\ Ax = b,\ x \geq 0\}$, де $C_i \in R^{n \times n}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell -$ симетричні від'ємно визначені матриці, $d \in R^n$, $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Для того, щоб в задачі* (3) *для точки* (x^*, u^*) *виконувались умови* (4) *для будь-яких* $x \in X$, $u_i \in R^\ell$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *необхідно і достатньо виконання однієї із умов*

$$T_1 : \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*, u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1 x^* + A^T u_1^* \leq 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*, u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1(x^*, u^*)}{\partial u_1} = b - Ax^* = 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*, u^*)}{\partial u_1} = 0. \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1x^* + A^T u_1^* \leq 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = b - Ax^* = 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial x} = d_2 + 2C_2x^* + A^T u_2^* \leq 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial u_2} = b - Ax^* = 0, \\ u_2^* \frac{\partial \varphi_2(x^*,u^*)}{\partial u_2} = 0. \end{cases} \qquad (10-13)$$

. . . .

$$T_\ell: \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = d_1 + 2C_1x^* + A^T u_1^* \leq 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \phi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = b - Ax^* = 0, \\ u_1^* \frac{\partial \varphi_1(x^*,u^*)}{\partial u_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial x} = d_\ell + 2C_\ell x^* + A^T u_\ell^* \leq 0, \\ x^* \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial u_\ell} = b - Ax^* = 0, \\ u_\ell^* \frac{\partial \varphi_\ell(x^*,u^*)}{\partial u_\ell} = 0. \end{cases}$$

в лексикографічному порядку.

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.

Отже, лексикографічна задача опуклої квадратичної оптимізації зводиться до розв'язання лексикографічно впорядкованих систем нерівностей і рівнянь.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Встановлені необхідні та достатні умови існування й оптимальності лексикографічних розв'язків опуклої задачі квадратичної оптимізації. Обґрунтовано зведення розв'язання початкової задачі до розв'язання послідовності лексикографічно впорядкованих систем нерівностей та рівнянь. Для розв'язання лексикографічної задачі квадратичної оптимізації існує можливість побудови обчислювальних алгоритмів, в основі яких лежить двоїстий підхід.

Список використаної літератури

1. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. Москва: Физматгиз, 1971.
2. Ногин В. Д. Двойственность в многоцелевом программировании. *ЖВМ и МФ*, 1977, № 1, с. 254–258.
3. Gros C. Generalization of Fenchel's duality theorem for convex vector optimization. *Europ. J.Oper. Res.*, 1979, v. 2, p. 368–376.
4. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.
5. Подиновский В. В.,Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука. 1982. 256 с.
6. Еремин И. И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 312 с.
7. Вагнер Г. Основы исследования операций. т.1. Перевод с англ. Б.Т. Вавилова. Москва: Издательство „Мир", 1972. 336 с.

Lomaha M. M., Semenova N. V. Quadratic lexicographic problems of optimization and Lagrange's reflection.

In different spheres of science and technology almost any appearing complicated problem of the optimal selection is multicriterion, since in course of searching for the best alternative we have to take into consideration a number of different requirements and some of them may even contradict each other. Meanwhile in practice linear and quadratic functions are the most frequently applied as criterion ones. They enable us to describe processes under investigation rather adequately and to apply known and studied algorithms for solving the problems. The first methods used for solving multicriterion problems of optimization were the methods based on the approach of reducing an input problem to a one-criterion one. However, the given procedure in most cases leads to dramatic changes of properties of an input problem and thus to unjustified replacing of a multicriterion model of the problem by a one-criterion model. We also should remember about calculation difficulties caused by the loss of properties of an input problem and about the impossibility of applying known algorithms in order to solve corresponding one-criterion problems. So developing methods for solving vector problems of optimization, in which original properties of criterion and limitation functions are not lost, remains relevant. In terms of one-criterion optimization a number of algorithms for extremum searching are elaborated using the dual approach. This issue is also of great importance to multicriterion optimization problems. The article deals with convex quadratic problems of lexicographic optimization within the set prescribed by a linear inequality system and with the issue of drawing up dual problems to them. Dual problems to an original one are constructed by means of Lagrange's reflection where Lagrange multipliers are vector variables and the value set of each of them is a set of vectors of the space, the dimensionality of which is equal to a quantity of partial criteria and which is prescribed by some lexicographic order. Necessary and sufficient conditions of the existence and optimality of lexicographic solutions of the derived problem are established. We suggest an approach that enables the reducing of the solving of a lexicographic optimization problem to the sequence of inequality and equation systems in lexicographic order. The scalarization scheme analogue and applying of properties of Lagrange's reflection constructed for a vector function and limitations underlie the approach. There is also promising possibility of constructing calculation algorithms for solving a lexicographic problem of quadratic optimization which are based on the dual approach.

Keywords: lexicographic quadratic problems of optimization, Lagrange's reflection, inequality system solving in lexicographic order.

References

1. Golshteyn, E. G. (1971). Teoriya dvoystvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya. *Moscow: Fizmatgiz* [in Russian].
2. Nogin, V. D. (1977). Dvoystvennost v mnogotselevom programmirovanii. *ZhVM i MF,* 1, 254–258 [in Russian].
3. Gros, C. (1979). Generalization of Fenchel's duality theorem for convex vector optimization. *Europ. J.Oper. Res., 2,* 368–376.
4. Chervak, Y. Y. (2002). Optimizatsiya. Nepokraschuvaniy vibir. *Uzhgorod*: *Uzhgorodskiy natsIonalniy unIversitet* [in Ukrainian].
5. Podinovskiy, V. V., & Nogin, V.D. (1982). Pareto-optimalnyie resheniya mnogokriterialnyih zadach. *Moscow:: Nauka* [in Russian].
6. Eremin, I. I. (1999). Teoriya lineynoy optimizatsii. *Ekaterinburg: UrO RAN* [in Russian].
7. Vagner, G. (1972). Osnovyi issledovaniya operatsiy (Vol. 1, B. T. Vavilova, Trans.) . *Moscow: Izdatelstvo „Mir”* [in Russian].

Одержано 11.10.2019