



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Випуск № 2

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №2 2012

**Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №2, 2012**

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України.

Редакційна колегія:

Анісімов Анатолій Васильович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор, **головний редактор**;
Хусаїнов Денис Яхьєвич, доктор фізико-математичних наук, професор, **заступник головного редактора, відповідальний за видання**;
Акіменко Віталій Володимирович, доктор технічних наук, професор;
Анісімов Ігор Олексійович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Буй Дмитро Борисович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник;
Булавін Леонід Анатолійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Волошин Олексій Федорович, доктор технічних наук, професор;
Гарашенко Федір Георгійович, доктор технічних наук, професор;
Данилов Вадим Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Єжов Станіслав Миколайович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Заславський Володимир Анатолійович, доктор технічних наук, доцент;
Кириченко Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Козаченко Юрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Кудін Володимир Іванович, доктор технічних наук, старший науковий співробітник;
Левитський Сергій Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Макара Володимир Арсенійович, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Макарець Микола Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор;
Перестюк Микола Олексійович, академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор;
Погорілий Сергій Дем'янович, доктор технічних наук, професор;
Скришевський Валерій Антонович, доктор фізико-математичних наук, професор.

Редакційний відділ:

Анісімова Тетяна Харитонівна, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Мороз Костянтин Олександрович, morozko@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
Хмелюк Надія Кузьмівна, khmeluk@univ.kiev.ua;
Сільвейструк Людмила Миколаївна, **технічний редактор**, slm-klm@ukr.net.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Безущак О.О., Рябухо О.М. Ендоморфізми та спряженість за Сушкевичем у напівгрупі перетворень зліченної множини	7
Добровська І.А., Майборода Р.Є. Оцінювання параметрів лінійної регресії з похибками в змінних за допомогою від'ємних ймовірностей	12
Млавець Ю.Ю. $F_{\psi}(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ	19
Рагуліна О.Ю. Оцінки і властивості ймовірності небанкрутства страхової компанії в класичній моделі ризику за умови розміщення капіталу на фінансовому (B,S)-ринку	23
Ревенко Г.О. Інволютивна алгебра, утворена напівгрупою операторів	31
Сахно Л.М. Дослідження інтегралів від квадрату періодограми та їх застосування до статистичного параметричного оцінювання	35
Семенюта М.Ф., Джума Л.М. Про (a,d)-антимагічні розмітки графів	39
Турчин Є.В. Посилений закон великих чисел для послідовностей випадкових величин з просторів Орліча	46

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Горошко О.О., Лебедева І.В., Григор'єв Є.Ю. Рух гіроскопа зі сферичною опорною поверхнею на горизонтальній площині	51
Григоренко О.Я., Єфімова Т.Л., Власова І.В. Вільні коливання квадратних анізотропних пластин зі змінною товщиною шарів	55
Оксенчук Н.Д. Вплив аустеніт-мартенситного перетворення на напружений стан сталевого диска при імпульсному тепловому опроміненні	59
Стецюк О.Д. Гранична поведінка математичного сподівання повної енергії осцилятора при зовнішньому випадковому збуренні	65

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Антонова І.А. Властивості операторів нерухомої точки в предикатних алгебрах	73
Бичков О.С. Стійкість імпульсних нечітких гібридних автоматів	79
Бомба А.Я., Кузьменко А.П., Гладка О.М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей	87
Верченко А.П., Сторожук А.І. Аналіз завантаженості дороги за відеопотоком	95
Галкін О.А. Застосування опорно-векторних машин в інтелектуальному аналізі даних	99
Галкіна О.А. Генерація дерев сценаріїв для багатоступеневих стохастичних проблем	105
Галкін О.В., Провотар О.І., Катеринич Л.О., Верес М.М., Заміховський А.А., Концепція адаптивного мовлення та системи автоматичної підготовки контенту	111
Глушко І.М. Розширена (некласична) таблична алгебра	117
Джалладова І.А., Хусаїнова О.С. Деякі проблеми динаміки однієї математичної моделі ринку вільної конкуренції	125
Ивохин Е.В., Аджубей Л.Т. Об одном подходе к моделированию нечетких дискретных динамических систем	130
Карнаух Т.О. Відстані в синтаксичних просторах	134
Крак Ю.В., Єфімов Г.М., Тернов А.С. Технологія аналізу емоційних станів обличчя людини для правильного розуміння жестової мови	140
Крак Ю.В., Кудін Г.І., Шкільнюк Д.В. Удосконалення методів векторного аналізу та гіперплощинної класифікації для розпізнавання елементів дактильної мови	144
Лівінська Г.В. Багатоканальні мережі з періодичним зовнішнім навантаженням	149
Лук'янова О.О. Про прискорення обчислень знаходження структурних інваріантів при компонентному аналізі CN_1 -мереж	155
Ліндер Я.М. Апроксимація максимальної множини практичної стійкості нелінійного диференціального включення з імпульсним впливом	161
Макушенко І.А. Про двокритеріальну оптимізаційну задачу для багатоканальної мережі марковського типу	165

УДК 519.2

Ю.Ю. Млавець, аспірант

$F_\psi(\Omega)$ – простори випадкових величин з експоненціальною функцією ψ

Досліджуються властивості випадкових величин та процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$ з експоненціальною функцією ψ .

Ключові слова: простори Банаха випадкових величин, випадкові процеси, моментні норми, мажоруюча характеристика.

E-mail: yura-mlavec@ukr.net

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

В роботі вивчаються простори $F_\psi(\Omega)$ випадкових величин з функцією $\psi(u) = e^{au^\beta}$. Простори $F_\psi(\Omega)$ були введені в роботі [1], а в [2] вивчалися загальні властивості цих просторів.

2 $F_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 2.1 ([2]). Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$, якщо $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty$.

Теорема 1 ([1]). Простір $F_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u \geq 1} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}. \quad (1)$$

Теорема 2 ([2]). Нехай випадкова величина ξ належить простору $F_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\|\xi\|_\psi^u (\psi(u))^u}{x^u}. \quad (2)$$

Теорема 3. Нехай випадкова величина ξ належить $F_\psi(\Omega)$ і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{x}{\|\xi\|_\psi}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\},$$

якщо $x > \|\xi\|_\psi$.

Yu. Yu. Mlavets, Postgraduate

$F_\psi(\Omega)$ – spaces of random variables with exponential function ψ

The properties of random variables and processes from spaces $F_\psi(\Omega)$ are investigated with exponential function ψ .

Key Words: Banach spaces of random variables, random processes, moment norms, majorant characteristic.

Доведення. Дійсно, використовуючи попередню теорему, позначимо, що $b = \frac{\|\xi\|_\psi}{x}$. Мінімум виразу $b^u e^{au^{\beta+1}}$ набувається в точці $u = \left(\frac{\ln 1/b}{a(\beta+1)} \right)^{1/\beta}$, то, підставляючи значення в (2), отримаємо потрібне.

Означення 2.2 ([2]). Додатньо монотонно неспадна послідовність $(\kappa(n), n \geq 1)$ називається M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ з цього простору виконується нерівність

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \right\|_\psi \leq \kappa(n) \max_{1 \leq i \leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 4 ([2]). Послідовність

$$\kappa(n) = \sup_{u \geq 1} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} \quad (3)$$

є M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_\psi(\Omega)$.

Теорема 5. Послідовність

$\kappa(n) = \frac{1}{e^a} \exp \left\{ S(a, \beta) (\ln n)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\}$, де $S(a, \beta) = (\beta a)^{\frac{1}{\beta+1}} (\beta^{-1} + 1)$ є M -характеристикою простору $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$.

Доведення. Використовуючи попередню теорему та знайшовши мінімум виразу $n^{\frac{1}{u+v}} e^{a(u+v)^\beta - au^\beta}$, який набуває в точці $v = \left(\frac{\ln n}{a\beta} \right)^{1/\beta+1} - u$ та дорівнює $n^{\left(\frac{a\beta}{\ln n} \right)^{1/\beta+1}} e^{a \left(\frac{a\beta}{\ln n} \right)^{1/\beta+1} - au^\beta}$. Підставляючи це значення в (3) і обчислити супремум, отримаємо шукане.

Означення 2.3 ([2]). Нехай S_k монотонно зростаюча послідовність ($S_k \geq 1$) і $S_k \rightarrow \infty$, коли $k \rightarrow \infty$. Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$, така що $\psi(u) \rightarrow \infty$ коли $u \rightarrow \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $F_{S_k, \psi, \tau}(\Omega)$, якщо виконується умова $\sup_{k \geq \tau} \frac{(E|\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty$.

Простори $F_{S_k, \psi, \tau}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k, \psi, \tau} = \sup_{k \geq \tau} \frac{(E|\xi|^{S_k})^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Теорема 6 ([2]). Нехай випадкова величина ξ належить простору $F_{S_k, \psi, \tau}(\Omega)$, то для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність

$$P\{|\xi| > x\} \leq \inf_{k \geq \tau} \frac{\|\xi\|_{S_k, \psi, \tau}^{S_k} (\psi(S_k))^{S_k}}{x^{S_k}}. \quad (4)$$

Теорема 7 ([2]). Послідовність

$$\kappa(n) = \sup_{k \geq \tau} \inf_{v > 0} n^{\frac{1}{S_k+v}} \frac{\psi(S_k+v)}{\psi(S_k)} \quad (5)$$

є M -характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $F_{S_k, \psi, \tau}(\Omega)$.

Означення 2.4 ([2]). Простір Банаха $B(\Omega)$ випадкових величин має властивість H , якщо існує абсолютна константа C_B , що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з $B(\Omega)$ виконується умова

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \leq C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2.$$

Теорема 8 ([2]). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні центровані випадкові величини з простору $F_\psi(\Omega)$. Тоді, якщо ξ_k - симетричні випадкові величини, де $k \geq \max(\tau, 2)$ і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \quad (6)$$

$l = \overline{1, k-1}$, то має місце нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2 (\xi_i).$$

Якщо відмовитись від умови симетричності, то за умови (6), виконується нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq 4 \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2 (\xi_i).$$

Якщо ξ_i не симетричні і виконується умова

$$C_{2k}^{2l} \left(1 + \frac{k}{3} \right) \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l,$$

$l = \overline{1, k-1}$, то маємо нерівність

$$\theta_{2,r}^2 \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_{2,r}^2 (\xi_i).$$

Лема 1. При $k \geq 2$, $1 \leq l \leq k-1$ має місце нерівність

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l^{l(k-l)^{k-l}}} \quad (7)$$

Доведення. Лема випливає з леми 2.2 з [2], оскільки $\frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + 1 \right) \right\} \leq 1$, $k \geq 2$.

Теорема 9. Розглянемо простір $F_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u)$, $u \geq 1$ така що $\varphi(u) = \frac{\psi(u)}{u^{1/2}}$ - строго монотонна при $u \geq u_0$. Якщо $u_0 \leq 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість H з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість H з константою $C_\psi = S_\psi \cdot S_{\tilde{\psi}}$, де

$$S_\psi = \max \left(1, \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)} \left(\frac{u}{u_0} \right)^{1/2} \right),$$

$$S_{\tilde{\psi}} = \max \left(1, \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{\psi(u)}{\psi(u_0)} \left(\frac{u_0}{u} \right)^{1/2} \right).$$

Доведення. Спочатку доведемо теорему, коли $u_0 \leq 1$. Перевіримо умову (6). З леми 1 випливає

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l \frac{(\psi(2l))^{2l}}{(2l)^l} \cdot \frac{(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(2k-2l)^{k-l}} =$$

$$C_k^l \frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}}.$$

Оскільки

$$\frac{(\varphi(2l))^{2l} (\varphi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\varphi(2k))^{2k}} =$$

$$\left(\frac{\varphi(2l)}{\varphi(2k)}\right)^{2l} \left(\frac{\varphi(2k-2l)}{\varphi 2k}\right)^{2k-2l} \leq 1$$

Отже, функція $\varphi(u)$ монотонно зростає, при $u \geq 1$, то теорема в цьому випадку доведена.

Доведемо теорему у випадку $u_0 > 1$. Розглянемо два простори $F_\psi(\Omega)$ і $F_{\hat{\psi}}(\Omega)$, де

$$\hat{\psi}(u) = \begin{cases} \psi(u), & \text{якщо } u \geq u_0; \\ \frac{\psi(u_0)}{u_0^{1/2}} u^{1/2}, & \text{якщо } 1 \leq u < u_0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\|\xi\|_\psi = \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

$$\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_0^{1/2}} u^{1/2}} \cdot \frac{\psi(u_0) u_0^{1/2}}{\psi(u) u_0^{1/2}},$$

тоді $\|\xi\|_\psi \leq$

$$S_\psi \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_0^{1/2}} u^{1/2}}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

тобто $\|\xi\|_\psi \leq S_\psi \|\xi\|_{\hat{\psi}}$. Тепер розглянемо

$$\|\xi\|_{\hat{\psi}} = \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_0^{1/2}} u^{1/2}}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right).$$

Оскільки

$$\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\frac{\psi(u_0)}{u_0^{1/2}} u^{1/2}} = \sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \cdot \frac{\psi(u) u_0^{1/2}}{\psi(u_0) u^{1/2}},$$

то $\|\xi\|_{\hat{\psi}} \leq$

$$S_{\hat{\psi}} \max \left(\sup_{1 \leq u < u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)}, \sup_{u \geq u_0} \frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{\psi(u)} \right),$$

тобто $\|\xi\|_{\hat{\psi}} \leq S_{\hat{\psi}} \|\xi\|_\psi$.

Отже, простори $F_\psi(\Omega)$ і $F_{\hat{\psi}}(\Omega)$ містять одні й тіж елементи і норми в цих просторах еквівалентні.

Із означення 2.4 маємо, що

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \leq S_\psi \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{\hat{\psi}}^2 \leq S_\psi S_{\hat{\psi}} \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2.$$

Отже, з останньої нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Легко бачити, що $S_\psi \leq \frac{\psi(u_0)}{\psi(u)}$ і $S_{\hat{\psi}} \leq (u_0)^{1/2}$.

Наслідок 1. Якщо при $u \leq u_0$ функція $\varphi(u)$ монотонно спадає, то $S_\psi = 1$, а $S_{\hat{\psi}} = \max \left(1, \frac{\psi(1)}{\psi(u_0)} u_0^{1/2} \right)$.

Доведення наслідку очевидне.

Теорема 10. Розглянемо простір $F_\psi(\Omega)$, де функція $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Якщо $u_0 \leq 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість Н з константою $C_\psi = 1$, а коли $u_0 > 1$, то для $F_\psi(\Omega)$ виконується властивість Н з константою $C_\psi = \max \left(1, \frac{e^{-a^{-1/\beta}}}{(2a\beta)^{1/2\beta}} \right)$.

Доведення Легко бачити, що для функції $\psi(u) = e^{au^\beta}$ $u_0 = \frac{1}{(2a\beta)^{1/\beta}}$, то із попереднього наслідку справджується твердження теореми.

3 Випадкові процеси

Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ – випадковий процес, $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \rho)$ – компактний метричний простір, ρ – метрика. Розглянемо $N(u)$ – метричну масивність простору (\mathbf{T}, ρ) [2] і $\gamma = \sigma \left(\sup_{t,s \in \mathbf{T}} \rho(t,s) \right)$.

Означення 3.1 ([2]). Випадковий процес $X \in F_\psi(\Omega)$, якщо для всіх t випадкова величина $X(t) \in F_\psi(\Omega)$.

Теорема 11 ([2]). Нехай $X(t)$ – сепарабельний процес на (\mathbf{T}, ρ) з простору $F_\psi(\Omega)$ і виконується умова $\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq \sigma(h)$, де $\sigma(h)$ неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$. Якщо для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \kappa \left(N \left(\sigma^{-1}(u) \right) \right) du < \infty$$

та $\sup_{t \in \mathbf{T}} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$, то $\left\| \sup_{t \in \mathbf{T}} |X(t)| \right\|_\psi \leq B(p)$, де $B(p) = \inf_{t \in \mathbf{T}} \|X(t)\|_\psi +$

$$+ \frac{1}{p(1-p)} \int_0^{\gamma p} \kappa \left(N \left(\sigma^{-1}(u) \right) \right) du,$$

$\kappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $\sigma^{(-1)}(u)$ – обернена функції до $\sigma(u)$, $p \in (0, 1)$. Також для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$P \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{B^u(p)(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 12. Нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ – випадковий процес, $\psi(u) = e^{au^\beta}$ і для будь-якого $z > 0$ виконується умова

$$\int_0^z \frac{1}{e^a} e^{\left\{ S(a, \beta) (\ln(N(\sigma^{(-1)}(u))))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\}} du < \infty$$

та $\sup_{t \in T} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

виконується нерівність $P \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq$

$$\exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{B(p)}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\},$$

$$\text{де } B(p) = \inf_{t \in T} \|X(t)\|_\psi + \frac{1}{p(1-p)} \times \int_0^p \frac{1}{e^a} \exp \left\{ S(a, \beta) (\ln(N(\sigma^{(-1)}(u))))^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\} du.$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 11.

Теорема 13 ([2]). Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$, де $T > 0$ сепарабельний процес з простору $F_\psi(\Omega)$. Нехай для деякого $\omega < 1$ виконується умова

$$\sup_{|t-s| \leq h} \|X(t) - X(s)\|_\psi \leq C \left(\kappa \left(\frac{T}{2u} + 1 \right) \right)^{-1/\omega}.$$

Тоді з ймовірністю одиниця $\sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \in F_\psi(\Omega)$ та справджується нерівність

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \right\|_\psi \leq \inf_{t \in [0, T]} \|X(t)\|_\psi + B(\omega) = \tilde{B},$$

де $B(\omega) = \frac{C\omega}{(1-\omega)} \left(\frac{C\omega}{\kappa(\frac{3}{2})} \right)^{(1-\omega)/\omega} \frac{(1+\omega)^{\omega+1}}{\omega^\omega}$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \inf_{u \geq 1} \frac{\tilde{B}^u(\psi(u))^u}{\varepsilon^u}.$$

Теорема 14. Нехай виконуються умови попередньої теореми і $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$, то $\sigma(h) =$

$$= C \left(\frac{1}{e^a} \exp \left\{ S(a, \beta) \left(\ln \left(\frac{T}{2u} + 1 \right) \right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} \right\} \right)^{-1/\omega},$$

тоді $\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| \right\|_\psi \leq$

$$\inf_{0 \leq t \leq T} \sup_{u \geq 1} \frac{(E|X(t)|^u)^{1/u}}{e^{au^\beta}} + B(\omega) = B_{e^{au^\beta}}.$$

Також для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$P \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\exp \left\{ -\frac{\beta}{a^{1/\beta}} \left(\frac{\ln \frac{\varepsilon}{B_{e^{au^\beta}}}}{\beta + 1} \right)^{\frac{\beta+1}{\beta}} \right\}$$

Доведення. Теорема випливає з теорем 3, 5 і 13.

4 Висновки

В роботі вивчені випадкові процеси з просторів $F_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = e^{au^\beta}$, де $a > 0$, $\beta > 0$. Знайдено норми випадкових величин, мажоруючу характеристику цих просторів з експоненціальною функцією ψ . Ці результати можна використати для підрахунку кратних інтегралів із заданою точністю і надійністю методом Монте-Карло.

Список використаних джерел

1. С.В. Ермаков, Е.И. Островский Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей, Деп. в ВИНТИ – 1986. – №3752-В.86.0. – 42.
2. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю. Простори Банаха випадкових величин $F_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 61-76.

Надійшла до редакції 04.01.12