НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

випуск 25 №1

2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск 25 № 1

Ужгород 2014

ББК 22.1+72.4 (4УКР)
У-33
УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В.В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2014. – Вип. 25, № 1. – 151 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою Ужгородського національного університету, протокол № 10-2013/2014 від 19-20.06.2014 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України

Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88016 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): (0312) 642725.

ЗМІСТ

УДК 519.21

Ю. Ю. Млавець (Ужгородський нац. ун-т)

ЗВ'ЯЗОК ПРОСТОРІВ ОРЛІЧА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ПРОСТОРАМИ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

A relationship between the spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ and Orlicz spaces random variables are studied.

Досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вступ. Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ були введені Єрмаковим і Островським в роботі [1]. Робота [2], присвячена детальному вивченню цих просторів. Дана стаття є продовженням роботи [2]. Тут досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та знаходяться умови за яких для просторів Орліча випадкових величин виконується умова $\mathbf{H}$.

Робота складається з вступу та трьох розділів. В першому розділі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В другому розділі розглядаються основні властивості просторів Орліча випадкових величин. В третьому розділі досліджується зв'язок просторів Орліча випадкових величин з просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

1. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори

Означення 1 (див. [2]). *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [1]. Але в ній вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядались випадкові величини, такі що $E\left|\xi\right|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Доведено [1], що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою

$$\left\|\xi\right\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Зауваження 1. *Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, очевидно, є лінійним нормованим простором, і те, що він є простором Банаха, доводиться аналогічно доведенню, що простір Орліча випадкових величин є банаховим* [1].

Теорема 1 (див. [2]). *Якщо випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, тоді для будь-якого $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\left\{\left|\xi\right| > x\right\} \leq \inf_{u\geq 1} \frac{\left\|\xi\right\|_\psi^u \left(\psi(u)\right)^u}{x^u}.$$

Означення 2 (див. [2]). *Додатно неспадна числова послідовність $\varkappa(n)$, $n \geq 1$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою)* *простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *якщо для будь-яких випадкових величин* ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *із цього простору виконується нерівність:*

$$\left\| \max_{1\le i\le n} |\xi_i| \right\|_\psi \le \varkappa(n) \max_{1\le i\le n} \|\xi_i\|_\psi .$$

Означення 3 (див. [2]). *Простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *будемо називати простором* $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$, *якщо для функції* $\psi(u)$ *виконується умова:*

$$\sup_{u\ge 1} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)} < \infty,$$

де $v > 0$ *– будь-яке число.*

Означення 4 (див. [2]). *Нехай* S_k *– зростаюча числова послідовність* ($S_k \ge 1$) *і* $S_k \to \infty$, *коли* $k \to \infty$. *Розглянемо монотонно зростаючу неперервну функцію* $\psi(u) > 0$, $u \ge 1$ *таку, що* $\psi(u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$. *Випадкова величина* ξ *належить простору* $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$, *якщо виконується умова:*

$$\sup_{k\ge r} \frac{\left(E|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)} < \infty,$$

де число r *– таке, що* $S_r \ge 1$.

Як і в попередньому випадку легко довести, що простори $\mathbf{F}_{S_k,\psi,r}(\Omega)$ є просторами Банаха з нормами

$$\|\xi\|_{S_k,\psi,r} = \sup_{k\ge r} \frac{\left(E|\xi|^{S_k}\right)^{1/S_k}}{\psi(S_k)}.$$

Означення 5 (див. [2]). *Скажемо, що для просторів Банаха* $B(\Omega)$ *випадкових величин виконується умова* $\mathbf{H}$, *якщо існує абсолютна константа* C_B *така, що для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *із* $B(\Omega)$ *виконується нерівність:*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \le C_B \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 .$$

Константу C_B назвемо масштабною константою простору $B(\Omega)$. Для всіх просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ константу $C_{\mathbf{F}_\psi(\Omega)}$ будемо позначати C_ψ.

Наслідок 1 (див. [2]). *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *– незалежні центровані випадкові величини з простору* $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$. *Якщо* ξ_i *– симетричні випадкові величини і при* $k \ge \max(r, 2)$ *виконується умова*

$$C_{2k}^{2l} \frac{(\psi(2l))^{2l} (\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \le C_k^l, \ l = \overline{1, k-1}, \tag{1}$$

тоді має місце нерівність

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_\psi^2 \le \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2 .$$

Тобто в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* **H** *із константою* $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$, *де* $\widehat{\psi}_r = \max\left(\overline{\psi}_r, \widetilde{C}_r\right)$, $\overline{\psi}_r = \sup\limits_{u\geq r} \frac{\psi(u+2)}{\psi(u)}$, $\widetilde{C}_r = \sup\limits_{1\leq u\leq S_r} \frac{\psi(S_r)}{\psi(u)}$.

Якщо відмовитись від умови симетричності, тоді при умові (1) *справджується нерівність*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leq 4\widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2$$

і в цьому випадку для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ *теж виконується умова* **H** *із константою* $C_\psi = 4\widehat{\psi}_r^2$.

Якщо ξ_i *– не симетричні і виконується умова*

$$C_{2k}^{2l}\left(1+\frac{k}{3}\right)\frac{(\psi(2l))^{2l}(\psi(2k-2l))^{2k-2l}}{(\psi(2k))^{2k}} \leq C_k^l, \ l=\overline{1,k-1},$$

тоді має місце нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|_\psi^2 \leq \widehat{\psi}_r^2 \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_\psi^2,$$

або, аналогічно попереднім випадкам, для простору $\check{\mathbf{F}}_\psi(\Omega)$ *виконується умова* **H** *із константою* $C_\psi = \widehat{\psi}_r^2$.

Лема 1. *Нерівність*

$$C_{2k}^{2l} \leq C_k^l \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}$$

справедлива при $k\geq 2$, $1\leq l\leq k-1$.

Доведення. Розглянемо рівність

$$C_{2k}^{2l} = C_k^l \frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l}.$$

За формулою Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta_n}$, де $|\theta_n| < \frac{1}{12n}$ отримаємо:

$$\frac{C_{2k}^{2l}}{C_k^l} = \frac{(2k)!l!(k-l)!}{(2l)!(2k-2l)!k!} = \frac{k^{2k}l^l(k-l)^{k-l}}{\sqrt{2}l^{2l}(k-l)^{2(k-l)}k^k}\exp\left\{\theta_{2k}+\theta_{2l}+\theta_k+\theta_l+\theta_{k-l}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\frac{1}{24k}+\frac{1}{24l}+\frac{1}{24(k-l)}+\frac{1}{12k}+\frac{1}{12l}+\frac{1}{12(k-l)}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left\{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+1\right)\right\} \leq \frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}},$$

що й треба було довести.

Приклад 1. *Розглянемо простір* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\theta$, $\theta\geq\frac{1}{2}$. *Доведемо, що в цьому випадку виконується умова* (1). *Оскільки*

$$C_{2k}^{2l}\frac{(2l)^{2l\theta}(2k-2l)^{(2k-2l)\theta}}{(2k)^{2k\theta}} = C_{2k}^{2l}\left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\theta \leq$$

$$\leq C_k^l\frac{k^k}{l^l(k-l)^{k-l}}\left(\frac{l^{2l}(k-l)^{(2k-2l)}}{k^{2k}}\right)^\theta = C_k^l\left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1},$$

а також

$$\left(\frac{l^l(k-l)^{k-l}}{k^k}\right)^{2\theta-1} = \left(\frac{l^l}{k^l}\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \le 1,$$

тоді при $k \ge 2,\ 1 \le l \le k-1$ *маємо, що* $\left(\frac{l^l}{k^l}\right)^{2\theta-1} \le 1$ *і* $\left(\frac{(k-l)^{k-l}}{k^{k-l}}\right)^{2\theta-1} \le 1$.

Очевидно, що при $\theta \ge \frac{1}{2}$ *і* $k > 2$ *має місце нерівність* (1). *Тобто для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, *де* $\psi(u) = u^\theta$ *виконується умова* $\mathbf{H}$ *і справджується така нерівність:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_\psi^2 \le 4 \cdot 9^\theta \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_\psi^2 .$$

Зауважимо, що при $\theta < \frac{1}{2}$ *для простору* $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ *умова* $\mathbf{H}$ *не виконується.*

2. Основні властивості просторів Орліча

Означення 6 (див. [3]). *Неперервна парна опукла функція* $U = \{U(x), x \in \mathbb{R}\}$ *називається* C*-функцією, якщо* $U(x)$ *монотонно зростає при* $x > 0$ *і* $U(0) = 0$.

Приклад 2. *Прикладами* C*-функцій Орліча є такі функції:*

1) $U(x) = A|x|^\alpha,\ x \in \mathbb{R},\ A > 0, \alpha \ge 1$;

2) $U(x) = C(\exp\{B|x|^\beta\} - 1),\ x \in \mathbb{R},\ C > 0, B > 0, \beta \ge 1$;

3) $U(x) = C(\exp\{\varphi(x)\} - 1),\ x \in \mathbb{R}, C > 0$ *та* $\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$, – *довільна* C*-функція;*

4) $U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{при } |x| \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{при } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \end{cases} \quad 0 < \alpha < 1;$

5) $U(x) = D|x|^\alpha \ln(|x|+1),\ x \in \mathbb{R},\ D > 0, \alpha \ge 1$.

Означення 7 (див. [3]). *Нехай* U – *довільна* C*-функція. Простором Орліча випадкових величин* $L_U(\Omega)$ *називається сім'я таких випадкових величин, що для кожної* $\xi \in L_U(\Omega)$ *існує константа* $r_\xi > 0$, *для якої виконується умова:*

$$EU\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty.$$

Простір Орліча – це простір Банаха з нормою

$$\|\xi\|_U = \inf\left\{r > 0 : EU\left(\frac{\xi}{r}\right) \le 1\right\},$$

яка називається нормою Люксембурга.

Лема 2 (див. [3]). *Нехай* $\xi \in L_U(\Omega)$ *і* $\|\xi\|_U > 0$. *Тоді для всіх* $x > 0$ *справедлива нерівність*

$$P\{|\xi| \ge x\} \le \frac{1}{U(x/\|\xi\|_U)}.$$

Означення 8 (див. [3]). *Скажемо, що C-функція U задовольняє g-умову, якщо існують константи $z_0 \geq 0$, $K > 0$ і $A > 0$ такі, що при $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ має місце нерівність:*

$$U(x)U(y) \leq AU(Kxy).$$

Означення 9 (див. [3]). *C-функція Орліча $U = \{U(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ називається N-функцією Орліча (N-функція), якщо виконуються такі умови:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{x} = 0; \ \lim_{x\to 0} \frac{U(x)}{x} = \infty.$$

Означення 10 (див. [3]). *Нехай $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ – N-функція. Функція φ^*, яка визначається умовою*

$$\varphi^*(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$$

називається перетворенням Юнга-Фенхеля відносно φ.

Приклад 3 (див. [4]). *Функція $U(x) = a\,|x|^{\alpha}, x \in \mathbb{R}, a > 0, \alpha \geq 1$ задовольняє g-умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$.*

C-функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1, x \in \mathbb{R}$, де $\varphi = (\varphi(x), x \in \mathbb{R})$ – довільна C-функція, яка задовольняє g-умову при $K = 1$, $A = 1$, $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^{\alpha}, \alpha \geq 1$, тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Лема 3 (див. [4]). *Нехай m – деяка константа. Тоді для будь-якого простору Орліча $m \in L_U(\Omega)$ і $\|m\|_U = \frac{|m|}{U^{(-1)}(1)}$.*

Лема 4 (див. [4]). *Нехай ξ належить простору $L_U(\Omega)$. Тоді існує така константа d_U, що $E\,|\xi| \leq d_U\,\|\xi\|_U$.*

Приклад 4 (див. [4]). *Для функції $U(x) = |x|^p, p \geq 2$ маємо $d_U = 1$. Для $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, де $\varphi(x)$ є N-функцією, маємо $d_U = \frac{2}{\varphi^{*(-1)}(1)}$. Тут $\varphi^{*(-1)}(x)$ – обернена функція до $\varphi^*(x)$, $x \in \mathbb{R}$ є перетворенням Юнга-Фенхеля функції $\varphi(x)$.*

Наприклад: якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^{\alpha}}{\alpha}, \alpha > 1$, тоді $\varphi^*(x) = \frac{|x|^{\beta}}{\beta}$, де $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$, $\varphi^{*(-1)}(x) = (x\beta)^{1/\beta}$ і $\varphi^{*(-1)}(1) = (\beta)^{1/\beta}$. Якщо $\alpha = 2$, тоді $\beta = 2$ і $d_U = \sqrt{2}$. Якщо $\alpha = 4$, тоді $\beta = \frac{4}{3}$ і $d_U = \frac{3^{3/4}}{4^{1/4}}$.

Наслідок 2 (див. [3]). *Нехай C-функція задовольняє g-умову з константами A, K і z_0. Послідовність $(\varkappa(n),\ n \geq 1)$ є мажоруючою характеристикою простору $L_U(\Omega)$, якщо*

$$\varkappa(n) = \begin{cases} n, & \text{якщо} \quad n \leq U(z_0), \\ K(1 + U(z_0)) \max\{1, A\}\, U^{(-1)}(n), & \text{якщо} \quad n > U(z_0). \end{cases}$$

3. Зв'язок просторів $\mathbf{F}_{\psi}(\Omega)$ з просторами Орліча

Означення 11 (див. [4]). *Скажемо, що для простору Орліча $L_U(\Omega)$ виконується умова $\mathbf{H}$, якщо для будь-яких центрованих незалежних випадкових величин*

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *із простору* $L_U(\Omega)$ *виконується така нерівність:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right\|_U^2 \leq C_U \sum_{k=1}^{n} \|\xi_k\|_U^2,$$

де C_U *– деяка абсолютна константа.*

Приклади просторів Орліча, для яких має місце умова **H** [4]:

- простори $L_p(\Omega), p \geq 2$, де $C_U = C_p = \sqrt{2}\left(\Gamma(p+1)/2\sqrt{\pi}\right)^{1/p}$;
- простори $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ такі C-функції, що існують $p > q \geq 2$, для яких $U\left(\sqrt[q]{x}\right)$ – опукла, а $U\left(\sqrt[p]{x}\right)$ – увігнута і $C_U = 2B_p$, де $B_p = 2k^{\frac{1}{2}}$, а $2k$ – найменше парне число, не менше, ніж p;
- простори Орліча породжені C-функцією $U(x) = exp\left\{|x|^\alpha\right\} - 1$, де $1 \leq \alpha \leq 2$. При $\alpha \geq 2$ для цих просторів умова **H** не виконується.

Доведемо, що умова **H** виконується для таких просторів Орліча $L_U(\Omega)$, у яких функція $U(x)$ зростає як експонента при $x \to \infty$.

Розглянемо C-функцію Орліча

$$U(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2/\alpha} x^2, & \text{якщо } |x| \leq x_\alpha; \\ \exp\left\{|x|^\alpha\right\}, & \text{якщо } |x| > x_\alpha, \end{cases} \tag{2}$$

де $x_\alpha = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. $L_U(\Omega)$ – простір Орліча, що породжений функцією $U(x)$.

Розглянемо функцію $U_1(x) = \exp\left\{|x|^\alpha\right\}$, $0 < \alpha \leq 1$. Позначимо символом $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ – сім'ю ξ, для яких існує r така, що виконується $EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) < \infty$. Введемо на $\mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ функціонал

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} = \inf\left\{r > 0; EU_1\left(\frac{\xi}{r}\right) \leq 2\right\}.$$

Лема 5 (див. [2]). *Для того щоб* $\xi \in L_U(\Omega)$, *необхідно й достатньо, щоб* $\xi \in \mathcal{S}_{U_1}(\Omega)$ *і справджувалися нерівності:*

$$\|\xi\|_U \leq \left(e^{2/\alpha+2}\right)\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1},$$

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \leq \|\xi\|_U \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{1/\alpha}.$$

Лема 6 (див. [2]). *Справедлива нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \geq \alpha^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right)$$

при $0 < \alpha < 1$.

Лема 7 (див. [2]). *При* $0 < \alpha < 1$ *має місце нерівність*

$$\langle\langle\xi\rangle\rangle_{U_1} \leq \left(1 + \frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha} \left(\sup_{n\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi\right|^n\right)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Теорема 2. *Простори Орліча $L_U(\Omega)$, де функція $U(x)$ задана у вигляді (2), містять ті ж самі елементи, що і простори $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$, причому норми в цих просторах – еквівалентні та мають місце нерівності:*

$$\|\xi\|_U \leq C_{\psi U} \|\xi\|_\psi , \tag{3}$$

$$\|\xi\|_U \geq C_{U\psi} \|\xi\|_\psi , \tag{4}$$

де $C_{\psi U} = e^{2/\alpha+2}\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}$, $C_{U\psi} = \frac{1}{2^{1/\alpha}}\left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha}\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}$.

Доведення. Теорема випливає з лем 5, 6 і 7. Із лем 5, 7 маємо, що

$$\|\xi\|_U \leq e^{2/\alpha+2}\left(1+\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1/\alpha} e^{1/\alpha}\left(\sup_{n\geq 1}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right),$$

а з лем 5, 6 випливає нерівність

$$\|\xi\|_U \geq \left(e^{2/\alpha}+1\right)^{-1/\alpha}\alpha^{1/\alpha}e^{1/\alpha}\left(\sup_{n\geq 1}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}}\right).$$

Легко бачити, що $\sup\limits_{n\geq 1}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}} \leq \sup\limits_{u\geq 1}\frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} = \|\xi\|_\psi$. Тоді

$$\sup_{u\geq 1}\frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leq \sup_{n\geq 2}\sup_{n-1\leq u\leq n}\frac{(E|\xi|^u)^{1/u}}{u^{1/\alpha}} \leq$$

$$\leq \sup_{n\geq 2}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{(n-1)^{1/\alpha}} \leq 2^{1/\alpha}\sup_{n\geq 1}\frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n^{1/\alpha}},$$

тому справджуються нерівності (3) і (4).

Теорема 3. *Для простору Орліча $L_U(\Omega)$, де $U(x)$ задана у вигляді (2), справджується умова* **H** *із константою*

$$C_U = 4\cdot 9^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{C_{\psi U}}{C_{U\psi}}\right)^2,$$

де $C_{\psi U}$ та $C_{U\psi}$ визначені у теоремі 2.

Доведення. Нехай ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – незалежні випадкові величини з простору Орліча $L_U(\Omega)$, тоді з теореми 2 випливає, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2\sum_{k=1}^{n}\|\xi_k\|_\psi^2 , \tag{5}$$

де $\psi(u) = u^{1/\alpha}$. Із викладок у прикладі 1 маємо:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\|_\psi^2 \leq 4\cdot 9^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|_\psi^2 . \tag{6}$$

Із теореми 2 та нерівностей (5) і (6) виплває нерівність:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right\|_U^2 \leq C_{\psi U}^2 \cdot 4 \cdot 9^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{C_{U\psi}^2} \sum_{k-1}^{n} \|\xi_k\|_U^2 ,$$

що й треба було довести.

Висновки. В роботі сформульовані деякі відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і властивості просторів Орліча. Встановлено зв'язок між просторами Орліча і просторами $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Знайдено умови при яких для досліджуваного простору Орліча виконується умова $\mathbf{H}$.

1. *Ермаков С. В., Островский Е. И.* Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей – М., 1986. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ, №3752-В.86.0.
2. *Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю.* Простори Банаха випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ // Теорія ймовір. та матем. статист. – 2012. – Вип. 86. – С. 92–107.
3. *V. V. Buldygin and Yu. V. Kozachenko* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes, AMS, Providence, RI, 2000.
4. *Yu. V. Kozachenko and Yu. Yu. Mlavets* Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space // Monte Carlo Methods Appl. – 2011. – Vol. 17. – P. 155–168.

Одержано 04.06.2014