УДК 512.547.2

Д. Ю. Білецька, І. В. Шапочка (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕРОЗКЛАДНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ СИМЕТРИЧНОЇ ГРУПИ ТРЕТЬОГО СТЕПЕНЯ

We have been found the formulas for the tensor products of indecomposable integral matrix representations of the symmetric group of the third degree.

В статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень симетричної групи третього степеня над кільцем цілих раціональних чисел.

Нехай S_3 — симетрична група третього степеня з твірними елементами a, b і твірними співвідношеннями:

$$a^2 = b^3 = e, \qquad ba = ab^2,$$

де e — одиничний елемент групи S_3. В цій статті приведені формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень групи S_3 над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих раціональних чисел. В [1] вивчаються тензорні добутки скінченних груп, зокрема приведено формули для тензорних добутків нерозкладних матричних зображень скінченної циклічної p-групи порядку p^2 над повним дискретно нормованим кільцем з полем лишків характеристики p, яке не є полем. Одержані нами результати базуються на класифікації всіх нееквівалентних нерозкладних цілочислових матричних зображень групи S_3, одержаною Л. А. Назаровою та А. В. Ройтером в [2]. Підкреслимо, в цій роботі доведено, що розклад цілочислових матричних зображень групи S_3 у суму нерозкладних зображень є однозначним з точністю до порядку слідування доданків. Всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення симетричної групи S_3 над кільцем цілих раціональних чисел $\mathbb{Z}$ вичерпуються наступними зображеннями:

$$\Gamma_1 : a \to 1, \quad b \to 1; \qquad \Gamma_2 : a \to -1, \quad b \to 1;$$

$$\Gamma_3 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_4 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_5 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_6 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_7 : a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_8 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_9 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{10} : a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Надалі для матричного зображення Γ групи S_3 через $[\Gamma]$ позначимо клас всіх еквівалентних зображенню Γ матричних цілочислових зображень групи S_3. У свою чергу для невід'ємних цілих чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$ через

$$n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + \cdots + n_{10}\Gamma_{10}$$

позначимо цілком розкладне зображення групи S_3, яке містить n_k раз нерозкладну компоненту Γ_k для кожного $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Теорема 1. *Справджуються наступні формули для тензорних добутків нерозкладних цілочислових матричних зображень симетричної групи S_3:*

$$\begin{aligned}
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_1] = [\Gamma_1], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_2],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_3], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_4],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_1 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9], && [\Gamma_1 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_2] = [\Gamma_1], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_4],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_3], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_5],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_7], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9], && [\Gamma_2 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_2 \otimes \Gamma_{10}] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_3] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_9], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_3 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_3 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_4] = [\Gamma_8],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_5] = [\Gamma_3 + \Gamma_4], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_4 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_4 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_5] = [2\Gamma_5], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_{10}], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_3 + \Gamma_{10}],\\
&[\Gamma_5 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_4 + \Gamma_{10}], && [\Gamma_5 \otimes \Gamma_{10}] = [2\Gamma_{10}],
\end{aligned}$$

$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_6] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}]$, $[\Gamma_6 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_7 + \Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_6 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_6 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_7 \otimes \Gamma_7] = [\Gamma_6 + \Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_7 \otimes \Gamma_8] = [2\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_7 \otimes \Gamma_9] = [2\Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_7 \otimes \Gamma_{10}] = [3\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_8 \otimes \Gamma_8] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_8 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_8 + 2\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_8 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_9 \otimes \Gamma_9] = [\Gamma_9 + 2\Gamma_{10}]$, $[\Gamma_9 \otimes \Gamma_{10}] = [4\Gamma_{10}]$,
$[\Gamma_{10} \otimes \Gamma_{10}] = [6\Gamma_{10}]$.

Доведення. Перші дев'ятнадцять рівностей є очевидними. Для доведення наступних двадцяти шести рівностей для всіх $i, j \in \{3, 4, \ldots, 10\}$ таких, що $i \le j$, нами знайдено оборотну матрицю $C^{(i,j)}$ над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ відповідного порядку, для якої справджуються рівності

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(a)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(a)\Big),$$

$$\big(\Gamma_i \otimes \Gamma_j\big)(b)C^{(i,j)} = C^{(i,j)}\Big(\big(n_1^{(ij)}\Gamma_1 + n_2^{(ij)}\Gamma_2 + \cdots + n_{10}^{(ij)}\Gamma_{10}\big)(b)\Big),$$

для деяких невід'ємних цілих чисел $n_1^{(ij)}, n_2^{(ij)}, \ldots, n_{10}^{(ij)}$. Укажемо ці матриці:

$$C^{(3,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad C^{(3,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(3,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad C^{(4,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(4,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{(5,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(5,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(6,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,9)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(7,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C^{(8,8)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -3 & 0 & -2 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 & -1 & -1 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & -2 & 0
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,9)} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2
\end{pmatrix};$$

$$C^{(8,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(8,10)} & C_{12}^{(8,10)} \\ C_{21}^{(8,10)} & C_{22}^{(8,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(8,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & -5 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 & 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -3 & -3 & -5 & -6 & -2 & -2 & -1 & -1 & -3 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & -6 & -4 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -3 & -4 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 0 & 6 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 3 & -1 & -4 & -2 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C^{(9,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(9,10)} & C_{12}^{(9,10)} \\ C_{21}^{(9,10)} & C_{22}^{(9,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(9,10)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$C^{(10,10)} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(10,10)} & C_{12}^{(10,10)} \\ C_{21}^{(10,10)} & C_{22}^{(10,10)} \end{pmatrix};$$

де

$$C_{11}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-2&0&-2&-1&-1&-1&-1&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&-2&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};$$

$$C_{12}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&-1&1&1&1&1&0&1\\
1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&-1&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&-1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&3&1&1&2&0&2&-3&-2&-1&-2&0&-2\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&1&0&-1&-1&-1&0&-1
\end{pmatrix};$$

$$C_{21}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&-1&0&-1&-1&-1&0&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&2&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&1&-1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&-1&2&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-2&-2&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&2&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-2&0&-2&1&-1&0&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-3&-1&-1&-2&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};$$

$$C_{22}^{(10,10)} = \begin{pmatrix}
1&0&1&1&1&0&-1&-1&-1&0&-1&0&1&0&1&1&1&0\\
-1&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&2&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-2&-1&-1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&3&2&2&1&2&0&-3&-1&-2&-1&-2&0\\
0&-1&-1&0&0&0&2&1&1&1&1&1&-1&-1&-1&-1&0&-1\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&-1&1&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&2&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-4&-2&-2&-2&-1&-2&2&1&1&2&0&2\\
0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&-1&-1&-1&1&2&2&1&1&1\\
0&0&-1&0&-1&1&2&1&1&1&1&1&-1&0&-1&-1&-1&0\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-2&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&-1&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-2&-1&-1&-1&-1&-1&1&-1&1&2&1&1\\
0&0&0&0&0&0&-4&-2&-2&-2&-2&-1&2&1&2&1&2&0
\end{pmatrix}.$$

Список використаної літератури

1. *Гудивок П.М., Рудько В. П.* Тензорные произведения конечных групп. – Ужгород: Патент, 1985. – 118 с.
2. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Целочисленные представления симметрической группы третьей степени // Укр. мат. журн. – 1962. – **XIV**, №3. – С. 271–288.