Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет"
Математичний факультет
Кафедра системного аналізу і теорії оптимізації

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних робіт з курсу
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Частина I

СКІНЧЕННОВИМІРНІ ЗАДАЧІ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИІЗАЦІЇ

Ужгород – 2011

Грендужа В.І., Брила А.Ю. Методичні вказівки до практичних робіт з курсу «Методи оптимізації». Ч. І. Скінченновимірні задачі безумовної оптимізації.– Ужгород, 2011 .– 34с.

Розглядається класичний метод розв’язання скінченновимірних задач безумовної оптимізації, що ґрунтується на використанні необхідних і достатніх умов оптимальності. Наведено необхідний теоретичний матеріал та приклади розв’язання деяких практичних задач. Запитання для самоконтролю та завдання для самостійного виконання дозволяють закріпити розглядуваний матеріал.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Тегза А.М.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Погоріляк О.О.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ “Ужгородський національний університет” 24 червня 2011 року, протокол № 10.

1. Основні поняття та означення

Часто в процесі своєї діяльності людині доводиться вирішувати задачу вибору із множини можливих варіантів деякого одного варіанта поведінки. Якщо такий вибір передбачає проведення кількісного аналізу шляхом порівняння різних варіантів, то кажуть про необхідність розв'язання *задачі оптимізації*. Зрозуміло, що задача вибору має зміст лише тоді, коли є декілька можливих варіантів. Такі варіанти називають *альтернативами* а множину всіх альтернатив називають *допустимою множиною*. Позначимо її X . У скінченновимірних задачах оптимізації $X \subseteq R^n$.

Звичайно, людина прагне завжди вибрати найкращу або непокращувану альтернативу $x^* \in X$, яку ще називають *оптимальною*. Часто вибір здійснюється шляхом попарного порівняння альтернатив за допомогою певним чином встановлених оцінок цих альтернатив. Позначимо множину оцінок C. Функція, яка кожній альтернативі ставить у відповідність її оцінку, називається *цільовою функцією*

$$f : X \to C.$$

Задачу знаходження альтернативи $x^*_{\max} \in X$, такої, що $f\left(x^*_{\max}\right) \geq f(x), \forall x \in X$ називають *задачею максимізації* і записують так:

$$\max f(x), \; x \in X ,$$

або ж

$$f(x) \to \max, \; x \in X .$$

Альтернативу $x^*_{\max}$ називають *оптимальним розв'язком*, а допустиму альтернативу $x \in X$ – *допустимим розв'язком*. Значення функції $f^*_{\max} = f\left(x^*_{\max}\right)$ називають *максимумом функції* f *на* X , а $x^*_{\max}$ – *точкою глобального максимуму*. Іноді для точки глобального максимуму використовують позначення $x^*_{\max} = \arg\max\limits_{x \in X} f(x)$.

Означення. Точка $x^*_{\max} \in X$ називається точкою *глобального максимуму* функції $f(x)$ на множині X, якщо вона досягає в цій точці найбільшого значення, тобто

$$f\left(x^*_{\max}\right) \geq f(x),\ \forall x \in X .$$

Множину всіх точок глобального максимуму позначать $abs \max\limits_{x \in X} f(x)$.

Означення. Точка $x^*_{\max} \in X$ називається точкою *локального максимуму* функції $f(x)$ на множині X, якщо існує такий ε-окіл

$$U_\varepsilon\left(x^*_{\max}\right) = \left\{x \in R^n \middle|\ \left\|x - x^*_{\max}\right\| < \varepsilon\right\},$$

що

$$\forall x \in X \cap U_\varepsilon\left(x^*_{\max}\right),\ f\left(x^*_{\max}\right) \geq f(x).$$

Множину точок локального максимуму позначають $loc \max\limits_{x \in X} f(x)$.

Задачу знаходження альтернативи $x^*_{\min} \in X$, такої, що $f\left(x^*_{\min}\right) \leq f(x), \forall x \in X$ називають *задачею мінімізації* і записують так:

$$\min f(x),\ x \in X ,$$

або ж

$$f(x) \to \min,\ x \in X .$$

$f^*_{\min} = f\left(x^*_{\min}\right)$, відповідно, називають *мінімальним значенням функції* f *на множині* X, а $x^*_{\min}$ – *точкою глобального мінімуму*. Для точки глобального мінімуму також використовують позначення $x^*_{\min} = \arg\min\limits_{x \in X} f(x)$.

Означення. Точка $x^*_{\min} \in X$ називається точкою *глобального мінімуму* функції $f(x)$ на множині X, якщо функція досягає в цій точці найменшого значення, тобто

$$f\left(x^*_{\min}\right) \leq f(x),\ \forall x \in X .$$

Множину точок глобального мінімуму позначають $abs \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Означення. Точка $x^*_{\min} \in X$ називається точкою *локального мінімуму* функції $f(x)$ на множині X, якщо існує такий ε-окіл

$$U_\varepsilon\left(x^*_{\min}\right) = \left\{x \in R^n \,\middle|\, \left\|x - x^*_{\min}\right\| < \varepsilon\right\},$$

що

$$\forall x \in X \cap U_\varepsilon\left(x^*_{\min}\right),\ f\left(x^*_{\min}\right) \le f(x).$$

Множину точок локального мінімуму позначають $loc \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Відмітимо, що будь-яку задачу мінімізації

$$\min f(x),\ x \in X,$$

можна замінити еквівалентною їй задачею максимізації

$$\max\ (-f(x)),\ x \in X,$$

і навпаки.

Якщо допустима множина X співпадає з простором R^n, то задачу

$$f(x) \to extr,\ x \in R^n,$$

називають *скінченновимірною задачею безумовної оптимізації*.

Якщо допустима множина X є власною підмножиною простору R^n, то задачу

$$f(x) \to extr,\ \ x \in X \subset R^n,$$

називають *скінченновимірною задачею умовної оптимізації*.

У роботі розглядаються скінченновимірні задачі безумовної оптимізації та загальні правила їх розв’язування. У своїй більшості такі правила дозволяють виділити деяку підмножину допустимих точок, серед яких містяться розв’язки задачі, якщо вони існують. Ці підозрілі на екстремум цільової функції точки називають *критичними*. Виділити такі точки дозволяють, зокрема, *необхідні умови оптимальності* – умови, яким *повинна* задовольняти допустима точка, яка є точкою локального екстремуму цільової функції, Дослідження характеру критичних точок, тобто виділення серед них таких точок, в яких дійсно досягається глобальний або локальний, строгий або нестрогий мінімум чи максимум цільової функції, здійснюється або на основі означень, або на основі достатніх умов оптимальності. *Достатні умови екстремуму* – це умови, з яких випливає, що критична точка, яка їм задовольняє, *дійсно є* точкою локального мінімуму або локального максимуму цільової функції.

Множина критичних точок може бути дещо ширшою за множину абсолютних і навіть локальних екстремумів. Однак, як правило, вона містить не дуже велику кількість точок. Тому, довівши, що розв'язки задачі існують, їх можна знайти тим чи іншим способом. Наприклад, їх можна знайти в результаті аналізу властивостей задачі або шляхом обчислення та порівняння значень цільової функції в усіх критичних точках і відбору з них точок з найменшим або з найбільшим значенням цільової функції, або на основі геометричного чи фізичного змісту задачі.

Очевидно, якщо існування розв'язку екстремальної задачі зрозуміло з її геометричного або фізичного змісту, або випливає з властивостей задачі, і при цьому існує тільки одна допустима критична точка, то вона і буде оптимальним розв'язком.

Широкий клас скінченновимірних екстремальних задач, для яких гарантується існування розв'язку, виділяє теорема Вейерштрасса про найбільше і найменше значення функції.

Теорема (*Вейерштрасса*). *Неперервна функція на непорожній обмеженій замкненій підмножині скінченновимірного простору* R^n *досягає своїх абсолютних мінімальних і максимальних значень* .

Часто при розв'зуванні задач використовується такий наслідок з теореми Вейерштрасса.

Наслідок. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на* R^n *і* $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = -\infty$), *то вона досягає свого абсолютного мінімуму* (*максимуму*) *на довільній замкненій підмножині простору* R^n**.**

Розглянуті теоретичні відомості дозволяють сформулювати таке *правило дослідження та розв'язування скінченновимірних задач безумовної оптимізації***:**

1) встановити тип задачі;

2) знайти всі критичні точки;

3) провести дослідження критичних точок і відібрати серед них ті, які є точками локального екстремуму;

4) знайти точки глобального екстремуму, або довести, що вони не існують**.**

Зауважимо, що це правило також можна застосовувати при наявності деяких найпростіших обмежень, наприклад, коли на змінну $x \in R$ ставиться обмеження $x \in [a;b]$.

2. Одновимірна задача безумовної оптимізації

Одновимірною задачею оптимізації називається задача

$$f(x) \to extr, \ x \in X \subseteq R, \qquad (2)$$

де $f(x)$ – функція однієї дійсної змінної x, визначена на X .

Одновимірною задачею безумовної оптимізації називається задача:

$$f(x) \to extr, \ x \in R \ , \qquad (3)$$

Класичний метод розв'язування задачі (3) ґрунтується на диференціальному численні, зокрема на використанні необхідних і достатніх умов оптимальності. Ці умови формулюються для задачі, в якій функція $f(x)$ є *гладкою* (неперервно диференційованою). Задачу (3), у якій цільова функція є гладкою, називають *гладкою одновимірною задачею безумовної оптимізації*.

Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції $f(x)$ у гладкій задачі (3) задають такі теореми.

Теорема (*Ферма*. ***Необхідна умова локального екстремуму першого порядку***). *Якщо* $x^* \in R-$ *точка локального екстремуму диференційованої в* x^* *функції* $f(x)$, *то*

$$f'(x^*) = 0. \qquad (4)$$

Точки, які задовольняють умові (4), називаються *стаціонарними* точками задачі (3).

Теорема (***необхідна умова локального екстремуму другого порядку***). *Якщо* $x^* \in R-$ *точка локального мінімуму* (*максимуму*) *два рази диференційованої в* x^* *функції* $f(x)$, *то*

$$f''(x^*) \geq 0 \quad (\ f''(x^*) \leq 0 \ ).$$

Теорема (***достатні умови локального екстремуму другого порядку***). *Якщо функція* $f(x)$ *два рази диференційована в точці* $x^* \in R$ *і виконуються умови*

$$f'(x^*) = 0, \ f''(x^*) > 0 \quad (\ f''(x^*) < 0 \ ),$$

тоді x^* *– точка строгого локального мінімуму* **(***максимуму***)** *функції* $f(x)$**.**

Теорема (**достатні умови локального екстремуму вищого порядку**). *Нехай функція* $f(x)$ *має в точці* $x^* \in R$ *похідні до* k*-го порядку включно, причому,*

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(k-1)}(x^*) = 0, \quad f^{(k)}(x^*) \neq 0 \ .$$

Тоді, якщо k *– парне число і* $f^{(k)}(x^*) > 0$ ($f^{(k)}(x^*) < 0$), *то* x^* *– точка строгого локального мінімуму (максимуму) функції* $f(x)$. *Якщо ж* k *– непарне число, то* x^* *не є ні точкою локального мінімуму, ні точкою локального максимуму функції* $f(x)$.

Очевидно, наведені для гладкої задачі (3) необхідні і достатні умови локальної оптимальності зберігають свою силу і для гладкої задачі (2), в якій допустима множина X не співпадає з простором R, але екстремуми функції $f(x)$ досягаються у внутрішніх точках множини $X \subset R$.

Нехай у задачі (2) $X = [a,b]$, де a і b – задані дійсні числа, а функція $f(x)$ є кусково неперервною і кусково гладкою на відрізку $[a,b]$. Це означає, що на $[a,b]$ може існувати тільки скінчене число точок, в яких $f(x)$ або терпить розрив першого роду, або неперервна, але не має похідної $f'(x)$. Тоді, як відомо, точками локального екстремуму функції $f(x)$ на $[a,b]$ можуть бути тільки ті точки $\bar{x} \in [a,b]$, в яких виконується одна з умов**:**

а) $f(x)$ терпить в $\bar{x}$ розрив першого роду;

б) $f(x)$ неперервна, але похідна $f'(\bar{x})$ не існує;

в) похідна $f'(\bar{x})$ існує і рівна нулю ($\bar{x}$ – стаціонарна точка);

г) $\bar{x} = a$ або $\bar{x} = b$**.**

Умови **а) – г)** дозволяють визначити підозрілі на екстремум (критичні) точки $\bar{x} \in [a,b]$. Звідси одержуємо таке *правило дослідження та розв'язування одновимірних екстремальних задач* **:**

1) встановити тип задачі;

2) знайти всі критичні точки на основі умов **а) – г)**;

3) провести додаткові дослідження кожної критичної точки і на основі достатніх умов локальної оптимальності другого або вищого порядків, або на основі дослідження знаку $f'(x)$ в околі або напівоколі критичної точки, або на основі означення відібрати з них ті, які дійсно є точками строгого або нестрогого локального мінімуму або максимуму;

4) відшукати глобальні екстремуми, або довести, що вони не існують **.**

У тих випадках, коли в критичній точці вдається обчислити похідні другого і більш високого порядків і ця точка є внутрішньою точкою відрізку $[a,b]$, то для дослідження її характеру можна використати відповідні достатні умови локальної оптимальності другого і вищого порядків.

Якщо точка $\bar{x}$ є граничною точкою відрізку $[a,b]$, тобто, якщо $\bar{x}=a$ **(** $\bar{x}=b$ **)**, то у випадку $f^{(k)}(\bar{x})>0$, $k\geq 1$, в $\bar{x}$ досягається локальний мінімум функції $f(x)$, а у випадку $f^{(k)}(\bar{x})<0$ – її локальний максимум.

Зауважимо, що характер критичної точки $\bar{x}$ можна встановити також на основі дослідження знаку похідної $f'(x)$ в околі точки $\bar{x}$ або у відповідному напівоколі граничних точок $\bar{x}=a$ або $\bar{x}=b$.

Щоб знайти розв’язки задачі, тобто точки глобального мінімуму **(**максимуму**)** функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$, треба перебрати всі її точки локального мінімуму **(**максимуму**)** або тільки всі критичні точки, якщо встановлення їх характеру не вимагається, і відібрати з них точки з найменшим **(**найбільшим**)** значенням функції $f(x)$, якщо таке значення існує.

Якщо в задачі (2) $X=(-\infty,b]$, або $X=[a,+\infty)$, або $X=R^1$, то поряд з вказаним вище дослідженням необхідно також вивчити поведінку функції $f(x)$ при $x\to-\infty$, або при $x\to+\infty$, або при $|x|\to+\infty$ відповідно. Зокрема, якщо функція $f(x)$ на таких множинах необмежена знизу, то вона досягає свого абсолютного максимуму і не досягає свого абсолютного мінімуму. Якщо $f(x)$ на таких множинах необмежена зверху, то вона досягає свого абсолютного мінімуму і не досягає свого абсолютного максимуму.

Приклад 2.1. Знайти локальні і глобальні екстремуми функції $f(x)$ у задачі:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 1 \to extr, x \in R.$$

Розв'язання

Застосуємо правило розв'язування одновимірних задач оптимізації.

1. *Встановлення типу задачі*. Дана задача є гладкою одновимірною задачею безумовної оптимізації.
2. *Знаходження критичних точок*. У даному випадку критичними точками є стаціонарні точки, які знаходимо на основі необхідної умови оптимальності першого порядку (теореми Ферма)

$$f'(x) \equiv -3x^2 + 3 = 0.$$

Стаціонарними точками є точки: $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = -1$.

3. *Встановлення характеру критичних точок*. Для встановлення характеру критичних точок $\bar{x}_1$ та $\bar{x}_2$ використаємо достатні умови другого порядку:

$$f''(x) = -6x,$$

$f''(\bar{x}_1) = -6 \cdot 1 = -6 < 0 \Rightarrow x_1$ – точка локального максимуму функції $f(x)$;

$f''(\bar{x}_2) = -6 \cdot (-1) = 6 > 0 \Rightarrow x_2$ – точка локального мінімуму функції $f(x)$.

4. *Дослідження існування глобальних екстремумів.* Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, тобто функція $f(x)$ є необмеженою знизу і зверху, то вона не має точок глобального екстремуму.

Відповідь: $\bar{x}_1 \in loc\max\limits_{x \in R} f(x)$, $f(\bar{x}_1) = 3$; $\bar{x}_2 \in loc\min\limits_{x \in R} f(x)$, $f(\bar{x}_2) = -1$; точок глобального екстремуму функції $f(x)$ не існує.

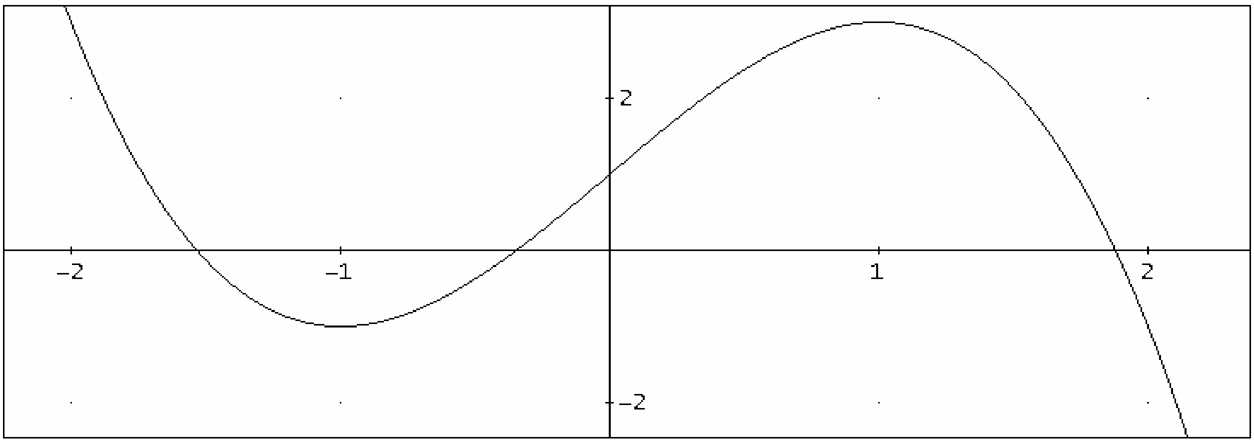

Рис. 2.1. Графік функції $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

Приклад 2.2. Розглянемо попередній приклад у випадку, коли $X=[-2;0]$.

1. Дана задача є гладкою одновимірною задачею умовної оптимізації.
2. Із знайдених у прикладі 2.1 стаціонарних точок множині X належить тільки точка $\bar{x}_1=-1$. Крім стаціонарної точки, критичними є кінці відрізка $\bar{x}_2=-2$ і $\bar{x}_3=0$.
3. У попередньому прикладі встановлено, що точка $\bar{x}_1=-1$ є точкою локального мінімуму. Для дослідження характеру точок $\bar{x}_2$ та $\bar{x}_3$ дослідимо знак першої похідної в ε-околі цих точок, де $\varepsilon\in(0{,}1)$:
$$f'(x)=-3x^2+3;$$
$f'(x)<0, x\in[-2;-2+\varepsilon]\Rightarrow$ $\bar{x}_2$ є точкою локального максимуму;
$f'(x)>0, x\in[-\varepsilon;0]\Rightarrow$ $\bar{x}_3$ є точкою локального максимуму.
4. Порівнюючи значення функції у критичних точках, виділяємо точки глобального екстремуму

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}_1)=-1 \\ f(\bar{x}_2)=3 \\ f(\bar{x}_3)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \bar{x}_1\in abs\min_{x\in X} f(x),\quad \bar{x}_2\in abs\max_{x\in X} f(x).$$

Відповідь:

$$\bar{x}_1\in abs\min_{x\in X} f(x),\ f(\bar{x}_1)=-1;$$

$$\bar{x}_2\in abs\max_{x\in X} f(x),\ f(\bar{x}_2)=3;$$

$$\bar{x}_3\in loc\max_{x\in X} f(x),\ f(\bar{x}_3)=0.$$

Приклад 2.3. Знайти локальні і глобальні екстремуми функції $f(x)$ у задачі:

$$f(x)=(1-x)^3\to extr, x\in R.$$

Розв'язання

1. *Встановлення типу задачі.* Дана задача є гладкою одновимірною задачею безумовної оптимізації.

2. *Знаходження критичних точок*. Критичними точками є стаціонарні точки, які знаходимо на основі необхідної умови оптимальності першого порядку (теореми Ферма)

$$f'(x) \equiv -3(1-x)^2 = 0 .$$

Стаціонарною точкою є точка $\bar{x}_1 = 1$.

3. *Встановлення характеру критичних точок*. Для встановлення характеру критичної точки $\bar{x}_1$ скористаємось достатніми умовами другого порядку:

$$f''(x) = 6(1-x),$$
$$f''(\bar{x}_1) = 0 .$$

Достатні умови другого порядку не виконуються, тому застосуємо достатні умови вищого порядку (знаходимо похідні вищих порядків до тих пір, поки не знайдемо похідну, значення якої у точці $\bar{x}_1$ буде відмінним від нуля)

$$f'''(x) = f'''(\bar{x}_1) = -6 .$$

Порядок похідної відмінної від нуля є натуральним непарним числом, а отже, згідно достатньої умови вищого порядку, точка $\bar{x}_1$ не є точкою екстремуму. Ця точка є точкою перегину.

4. *Дослідження існування глобальних екстремумів*. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, то функція $f(x)$ не має точок глобального екстремуму.

Відповідь: функція $f(x) = (1-x)^3$ не має точок екстремуму.

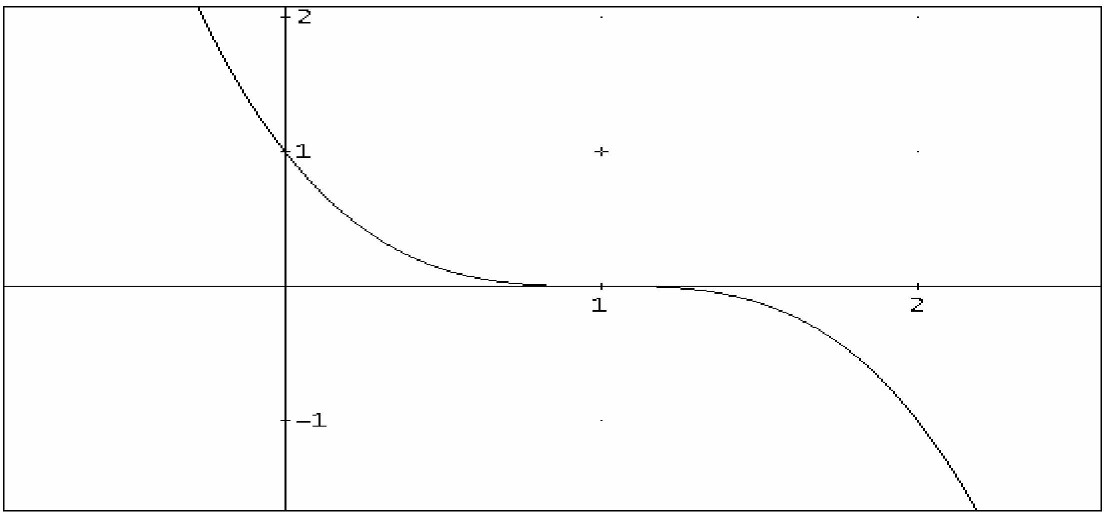

Рис. 2.2. Графік функції $f(x) = (1-x)^3$

Приклад 2.4. Знайти локальні і глобальні екстремуми функції $f(x)$ у задачі:

$$f(x) = (1 - x)^4 \to extr, x \in R.$$

Розв'язання

1. *Встановлення типу задачі*. Дана задача є гладкою одновимірною задачею безумовної оптимізації.
2. *Знаходження критичних точок*. Критичними точками є стаціонарні точки, які знаходимо на основі необхідної умови оптимальності першого порядку (теореми Ферма)

$$f'(x) \equiv -4(1 - x)^3 = 0.$$

Стаціонарною точкою є точка $\bar{x}_1 = 1$.

3. *Встановлення характеру критичних точок*. Для встановлення характеру критичної точки $\bar{x}_1$ скористаємось достатніми умовами другого порядку:

$$f''(x) = 12(1 - x)^2;$$

$$f''(\bar{x}_1) = 0.$$

Достатні умови другого порядку не виконуються, тому застосуємо достатні умови вищого порядку (знаходимо похідні вищих порядків до тих пір, поки не знайдемо похідну, значення якої у точці $\bar{x}_1$ буде відмінним від нуля):

$$f'''(x) = -24(1 - x);$$

$$f'''(\bar{x}_1) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = f^{(4)}(\bar{x}_1) = 24 \neq 0.$$

Порядок похідної відмінної від нуля є парним числом і $f^{(4)}(\bar{x}_1) > 0$, а отже, згідно достатньої умови вищого порядку, точка $\bar{x}_1$ є точкою локального мінімуму.

4. *Дослідження існування глобальних екстремумів.* Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, то точка $\bar{x}_1$ є точкою глобального мінімуму.

Відповідь: $\bar{x}_1 \in abs\min\limits_{x\in R} f(x)$, $f(\bar{x}_1)=0$.

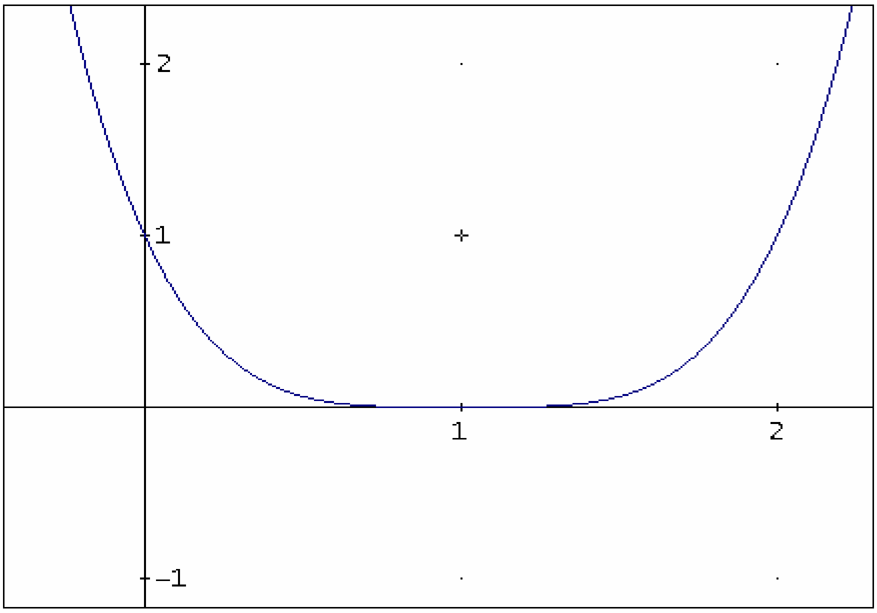

Рис. 2.3. Графік функції $f(x)=(1-x)^4$

Наведемо ряд прикладів одновимірних задач безумовної оптимізації з різними множинами точок екстремуму.

1. Множини точок глобального максимуму і глобального мінімуму нескінченні:

$$f(x)=\sin x \to extr,\ x\in R.$$

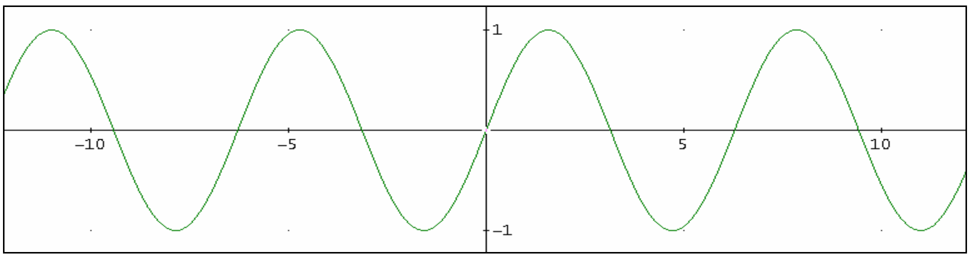

Рис. 2.4. Графік функції $f(x)=\sin x$

2. Функція обмежена, існує точка глобального максимуму, але не існує точки глобального мінімуму:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \to extr,\ x\in R.$$

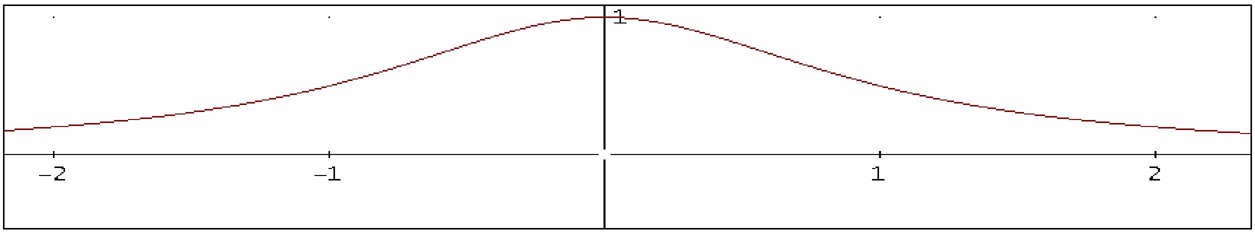

Рис. 2.5. Графік функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

3. Функція обмежена, але точки глобального максимуму і мінімуму не існують:

$$f(x)=arctg\,x\to extr,\ x\in R.$$

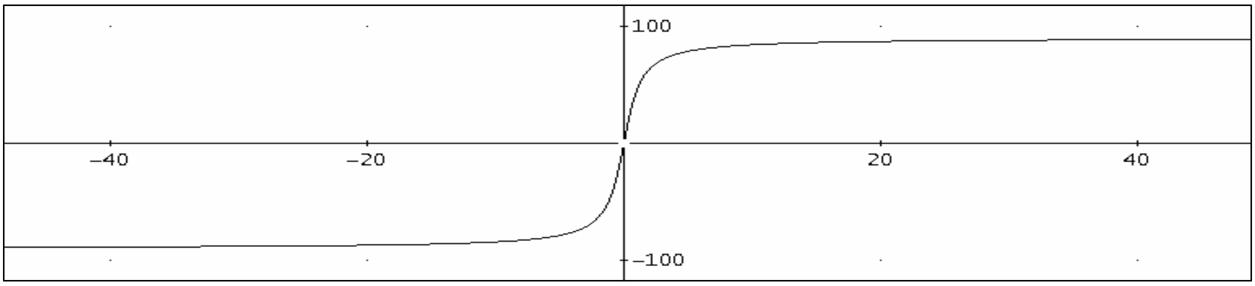

Рис. 2.6. Графік функції $f(x)=arctg\,x$

4. Функція обмежена, множини точок локального максимуму і локального мінімуму нескінченні, але не існують точки глобального екстремуму:

$$f(x)=arctg\,x\cdot\sin x\to extr,\ x\in R.$$

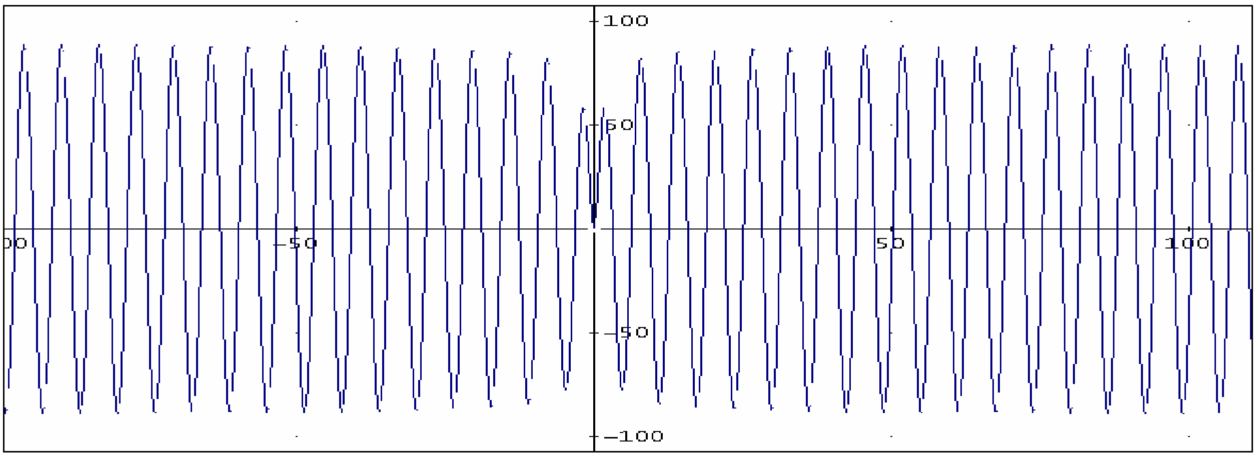

Рис. 2.7. Графік функції $f(x)=arctg\,x\cdot\sin x$

Запитання для самоперевірки

1. *Запишіть загальну постановку скінченновимірної задачі безумовної оптимізації.*
2. *Запишіть загальну постановку одновимірної задачі безумовної оптимізації.*
3. *Дайте означення точок глобального екстремуму.*
4. *Дайте означення точок локального екстремуму.*
5. *Які точки називають стаціонарними?*
6. *Які точки називають критичними?*
7. *Сформулюйте необхідну умову оптимальності першого порядку і для гладкої одновимірної задачі безумовної оптимізації.*
8. *Сформулюйте необхідну умову оптимальності другого порядку для гладкої одновимірної задачі безумовної оптимізації.*
9. *Сформулюйте достатню умову оптимальності другого порядку для гладкої одновимірної задачі безумовної оптимізації.*
10. *Сформулюйте достатню умову оптимальності вищого порядку для гладкої одновимірної задачі безумовної оптимізації.*
11. *Сформулюйте загальне правило розв'язання гладкої одновимірної задачі безумовної оптимізації.*

Завдання для самостійної роботи

1. На проміжку $[-2,2]$ знайти точки екстремумів функції $f(x) = ax^3 + bx + 1$. Параметри a і b задані у варіанті завдання

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1.	**1**	**-2**	7.	**1/4**	**-1/2**	13.	**4**	**-8**	19.	**1/5**	**-2/5**	25.	**2/5**	**-4/5**
2.	**-1**	**2**	8.	**1/4**	**1/2**	14.	**-4**	**8**	20.	**-1/5**	**2/5**	26.	**-2/5**	**4/5**
3.	**1/2**	**-1**	9.	**3**	**-6**	15.	**2/3**	**-4/3**	21.	**3/4**	**-3/2**	27.	**7**	**-14**
4.	**-1/2**	**1**	10.	**-3**	**6**	16.	**-2/3**	**4/3**	22.	**-3/4**	**3/2**	28.	**-7**	**14**
5.	**2**	**-4**	11.	**1/3**	**-2/3**	17.	**5**	**-10**	23.	**6**	**-12**	29.	**3/5**	**-2/5**
6.	**-2**	**4**	12.	**-1/3**	**2/3**	18.	**-5**	**10**	24.	**-6**	**12**	30.	**-3/5**	**2/5**

2. Знайти екстремуми функції

1) $f(x)=x^{2/3}-(x^2-1)^{1/3}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+1}$;

3) $f(x)=1-x^3$;

4) $f(x)=1-x^4$;

5) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$;

6) $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x$;

7) $f(x)=(1+x^2)e^{-x^2}$.

3. Знайти екстремуми функції $f(x), x\in X\subset R^1$

1) $f(x)=(x^2-3x+2)/(x+1)$, $x\in[-2,2]$;

2) $f(x)=x-2\sin x$, $x\in[0,+\infty)$;

3) $f(x)=x^{2/3}e^{-x}$, $x\in[-1,+\infty)$;

4) $f(x)=|x|e^{-x}$, $x\in[-2,2]$;

5) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$, $x\in[-7,2]$;

6) $f(x)=x\sqrt[3]{x^2-1}$, $x\in[-7,2]$;

7) $f(x)=x\sqrt[3]{|x|-1}$, $x\in[0,+\infty)$;

8) $f(x)=x(x-2)^{2/3}$, $x\in[0,+\infty)$.

4. При яких значеннях параметра a функція $f(x)=(a+1)x+a\ln x-2\sin x$ досягає глобального мінімуму на множині додатних чисел.

5. Довести, що $|3x-x^3|\le 2$, коли $|x|\le 2$.

3. n-вимірна гладка задача безумовної оптимізації

n*-вимірною гладкою задачею безумовної оптимізації* називається задача:

$$f(x) \to extr\,, \quad x \in R^n\,, \tag{5}$$

де $f(x)$ – функція n дійсних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, яка володіє певною гладкістю.

Вектор $f'(x)$, складений із частинних похідних, називається *вектором градієнтом*

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right),$$

а матриця $f''(x)$, складена із других частинних похідних, називається *матрицею Гессе*

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Необхідні і достатні умови локального екстремуму функції $f(x)$ у задачі (5) задають наступні теореми.

Теорема 4 (необхідна умова локального екстремуму першого порядку). *Нехай функція* $f(x)$ *диференційована в точці* $x^* \in R^n$. *Якщо* x^* *є точкою локального екстремуму* $f(x)$ *у задачі* (5), *то*

$$f'(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right) = \bar{0}\,. \tag{6}$$

Умова (6) еквівалентна умовам

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0\,, \quad i = 1,2,...,n\,. \tag{7}$$

Умови (7) є системою n рівнянь з n невідомими. Точки x^*, які є розв'язками системи рівнянь (7), називають *стаціонарними* точками задачі (5).

Якщо функція $f(x)$ два рази диференційована в точці $x^* \in R^n$, то характер стаціонарної точки x^* пов'язаний із *знаковизначеністю* квадратичної форми

$$\left\langle h, f''(x^*)\, h \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i\, \partial x_j} h_i\, h_j,\ h \in R^n.$$

Нагадаємо, що *квадратичною формою* називають функцію $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Вона однозначно визначається симетричною квадратною матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{i,\, j = \overline{1,n}}$, яку називають *матрицею квадратичної форми*. Квадратичну форму коротко записують у вигляді скалярного добутку $\langle x, A\,x \rangle$ векторів $x\,, Ax \in\ R^n$.

Головним мінором $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ *матриці* A називають визначник, складений із рядків і стовпців з номерами $i_1 i_2 \ldots i_k$

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k i_1} & a_{i_k i_2} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}, 1 \le i_1 \le i_2, \ldots, i_k \le n\,.$$

Головним кутовим (послідовним) мінором матриці A називають визначник

$$A_{1,2,\ldots,k} = \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Знаковизначеність квадратичної форми пов’язують із знаковизначеністю матриці, що її задає. Знаковизначеність матриці може бути встановлена на основі ***критерію Сільвестра.*** Згідно цього критерію симетрична матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ *додатньо визначена* тоді і тільки тоді, коли всі її *головні кутові мінори* додатні

$$\Delta_k > 0,\ k = 1,2,...,n.$$

Матриця *A від’ємно визначена* тоді і тільки тоді, коли

$$(-1)^k \Delta_k > 0, k = 1,2,...,n,$$

тобто знаки головних кутових мінорів чергуються, починаючи з $\Delta_1 < 0$.

Матриця *A невід’ємно визначена* тоді і тільки тоді, коли всі її головні мінори невід’ємні

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \geq 0,\ 1 \leq i_1 \leq i_2,...,i_k \leq n,\ k = 1,2,...,n.$$

Матриця *A недодатньо визначена* тоді і тільки тоді, коли

$$(-1)^k A_{i_1 i_2 \ldots i_k} \geq 0,\ 1 \leq i_1 \leq i_2,...,i_k \leq n,\ k = 1,2,...,n.$$

Для виявлення стаціонарних точок задачі (5), які не можуть бути точками локального екстремуму, використовується необхідна умова локальної оптимальності другого порядку.

Теорема 5 (необхідна умова локального екстремуму другого порядку). *Нехай функція $f(x)$ два рази диференційована в точці $x^* \in R^n$. Якщо x^* – точка локального мінімуму* (*максимуму*) *функції $f(x)$ в задачі* (5), *то*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \geq 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j \leq 0\right) \text{ для всіх } h \in R^n. \quad (8)$$

Умова (8) означає, що квадратична форма $\left\langle h, f''(x^*)h \right\rangle$ і відповідна їй матриця $f''(x^*)$ *невід’ємно* (*недодатньо*) *визначені*.

Після знаходження стаціонарних точок x^*, які задовольняють умовам (6),(8), необхідно провести додаткові дослідження і відібрати з них ті, які дійсно є точками локального мінімуму або максимуму функції $f(x)$ в задачі (5). Для цього використовується достатня умова локальної оптимальності другого порядку.

Теорема 6 (достатня умова локального екстремуму другого порядку). *Нехай функція* $f(x)$ *два рази диференційована в точці* $x^* \in X$ *і* $f'(x^*) = 0$. *Якщо виконується умова*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}h_i h_j > 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j}h_i h_j < 0\right) \text{ для всіх } h \in R^n,\ h \neq 0, \tag{9}$$

тоді x^* *є точкою строгого локального мінімуму* **(***максимуму***)** *функції* $f(x)$ *в задачі* (5)**.**

Умова (9) означає, що квадратична форма $\langle h, f''(x^*)h \rangle$ і відповідна їй матриця $f''(x^*)$ *додатньо* **(***від'ємно***)** *визначені.*

Зауваження. У деяких випадках характер стаціонарної точки можна дослідити на основі означення точки локального екстремуму функції $f(x)$ шляхом порівняння значення $f(x^*)$ із значеннями $f(x)$ в ε-околі $O_\varepsilon(x^*)$ точки x^* при деякому достатньо малому $\varepsilon > 0$.

Якщо вдається виявити всі точки локального мінімуму **(**максимуму**)** функції $f(x)$ у задачі (5), то для відшукання глобальних розв'язків цієї задачі потрібно відібрати з них точки з найменшим **(**найбільшим**)** значенням $f(x)$, якщо таке існує.

Зауважимо, що теореми $4-6$ зберігають свою силу і для задачі умовної оптимізації

$$f(x) \to extr,\ x \in X \subset R^n, \tag{10}$$

в якій $f(x)$ задовольняє вказаним в цих теоремах умовам, а X є відкритою множиною в R^n, або, коли екстремуми функції $f(x)$ досягаються у внутрішніх точках множини X .

У тих випадках, коли функція $f(x)$ достатньо проста, теореми $4-6$ дозволяють розв'язати задачу (5) у явному вигляді на основі такого ***правила розв'язування скінченновимірних гладких задач безумовної оптимізації*** **:**

1) встановити тип задачі;
2) знайти всі стаціонарні точки;
3) дослідити характер стаціонарних точок на основі необхідних і достатніх умов оптимальності, або на основі означення точки локального екстремуму;
4) відшукати глобальні екстремуми або довести, що вони не існують **.**

Приклад 3.1. Знайти локальні і глобальні екстремуми функції $f(x)$ у задачі

$$f(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4) - (x_1 + x_2)^2 \to extr,\ x \in R^2.$$

Розв'язання

Дослідження проводимо, використовуючи правило розв'язування скінченновимірних гладких задач безумовної оптимізації.

1. Дана задача є гладкою задачею безумовної оптимізації функції двох змінних.

2. Знаходимо стаціонарні точки на основі необхідної умови локального екстремуму першого порядку (теорема 4):

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \equiv 4x_1^3 - 2(x_1 + x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \equiv 4x_2^3 - 2(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 4x_1(x_1^2 - 1) = 0 \ . \end{cases}$$

Стаціонарні точки: $x^1 = (-1, -1)$, $x^2 = (1, 1)$, $x^3 = (0, 0)$.

3. Дослідження характеру стаціонарних точок.

Знайдемо матрицю Гессе, яку будемо використовувати при дослідженні характеру точок .

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=12x_1^2-2,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}=12x_2^2-2,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}=-2,$$

$$f''(x)=\begin{pmatrix} 12x_1^2-2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2-2 \end{pmatrix}.$$

Досліджуємо характер точки $x^1=(-1,-1)$.

$$f''\left(x^1\right)=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=10>0 \\ \Delta_2=96>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''\left(x^1\right) \text{ – додатньо визначена.}$$

Тому на основі достатньої умови локального екстремуму можемо сказати, що стаціонарна точка x^1 є точкою локального мінімуму

$$x^1 \in \underset{x \in R^2}{loc\min}\, f(x).$$

Досліджуємо характер точки $x^2=(1,1)$.

$$f''\left(x^2\right)=\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=10>0 \\ \Delta_2=96>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''\left(x^2\right) \text{ – додатньо визначена.}$$

Отже, на основі достатньої умови локального екстремуму одержуємо, що стаціонарна точка x^2 також є точкою локального мінімуму

$$x^2 \in \underset{x \in R^2}{loc\min}\, f(x).$$

Досліджуємо характер точки $x^3=(0,0)$.

$$f''\left(x^3\right)=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1=-2<0 \\ \Delta_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''\left(x^3\right) \text{ – недодатньо визначена.}$$

Достатня умова не виконується. Досліджуємо x^3 на основі означення точки локального екстремуму, порівнюючи значення функції у точці x^3 із значеннями функції $f(x)$ в ε-околі $O_\varepsilon\left(x^{(3)}\right)$ точки x^3 при деякому достатньо малому $\varepsilon > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x^3\right) = 0 \\ f(\varepsilon/2, -\varepsilon/2) = \varepsilon^4/8 > 0 \\ f(\varepsilon/2, \varepsilon/2) = \varepsilon^4/8 - \varepsilon^2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 \text{ не є точкою екстремуму.}$$

4. Досліджуємо питання існування точок глобального екстремуму.

$$\lim_{\| x \| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

тому, за наслідком теореми Веєрштрасса, функція $f(x)$ на R^2 досягає свого абсолютного мінімуму і не досягає свого абсолютного максимуму.

Точку глобального мінімуму функції $f(x)$ знаходимо, порівнюючи значення $f(x)$ в точках локального мінімуму.

$$f\left(x^1\right) = f\left(x^2\right) = -2.$$

Отже, обидві точки x^1 і x^2 є точками глобального мінімуму

$$x^1,\ x^2 \in abs\min_{x \in R^2} f(x),$$

$$f^*_{\min} = \min_{x \in R^2} f(x) = -2.$$

Зауважимо, якщо встановлено існування глобального мінімуму функції $f(x)$, то для відшукання розв’язків задачі достатньо обчислити та порівняти значення $f(x)$ в стаціонарних точках, не досліджуючи їх характеру.

Відповідь: $x^1,\ x^2 \in abs\min_{x \in R^2} f(x)$, $f^*_{\min} = \min_{x \in R^2} f(x) = -2$.

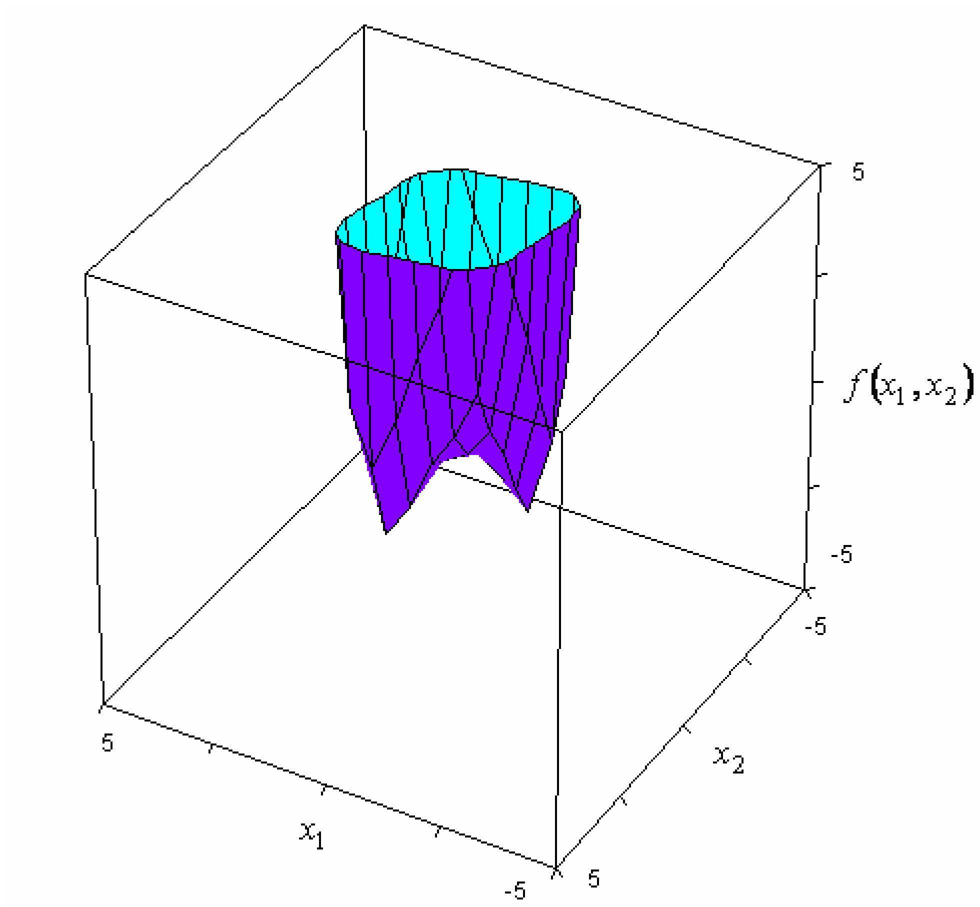

Рис. 3.1. Графік функції $f(x_1, x_2) = (x_1^4 + x_2^4) - (x_1 + x_2)^2$

Приклад 3.2. Знайти локальні і глобальні екстремуми функції $f(x)$ у задачі

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2} \to extr,\ x \in R^2.$$

Розв'язання

1. Дана задача є гладкою задачею безумовної оптимізації функції двох змінних.

2. *Знаходимо стаціонарні точки* на основі необхідної умови локального екстремуму першого порядку (теорема 4):

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \equiv 2x_1 - 4x_1 e^{-x_1^2} = 0; \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} \equiv -2x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо три стаціонарні точки: $\bar{x}^1 = (0, 0)$, $\bar{x}^2 = (\sqrt{\ln 2}, 0)$, $\bar{x}^3 = (-\sqrt{\ln 2}, 0)$.

3. *Дослідження характеру стаціонарних точок.*

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 2 - 4e^{-x_1^2} + 8x_1^2 e^{-x_1^2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$f''\left(\bar{x}^1\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 < 0 \\ \Delta_2 = 4 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''\left(\bar{x}^1\right) \text{ –від’ємно визначена.}$$

На основі достатньої умови локального екстремуму одержуємо, що стаціонарна точка $\bar{x}^1$ є точкою локального максимуму

$$\bar{x}^1 \in \underset{x \in R^2}{loc\max} f(x).$$

$$f''\left(\bar{x}^2\right) = f''\left(\bar{x}^3\right) = \begin{pmatrix} 4\ln 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 4\ln 2 > 0 \\ A_2 = -2 < 0 \\ A_{12} = -8\ln 2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f''\left(\bar{x}^2\right) \text{ і } f''\left(\bar{x}^3\right) \text{ є знаконевизначеними.}$$

Тому точки $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ не є точками екстремуму.

4. Оскільки

$$\lim_{x_1 \to +\infty} f(x_1, 0) = x_1^2 + 2e^{-x_1^2} = +\infty,$$

то за наслідком теореми Веєрштрасса функція f не має точок глобального максимуму **.**

Відповідь: $\bar{x}^1 = (0,0) \in \underset{x \in R^2}{loc\max} f(x)$, $f\left(\bar{x}^1\right) = 2$.

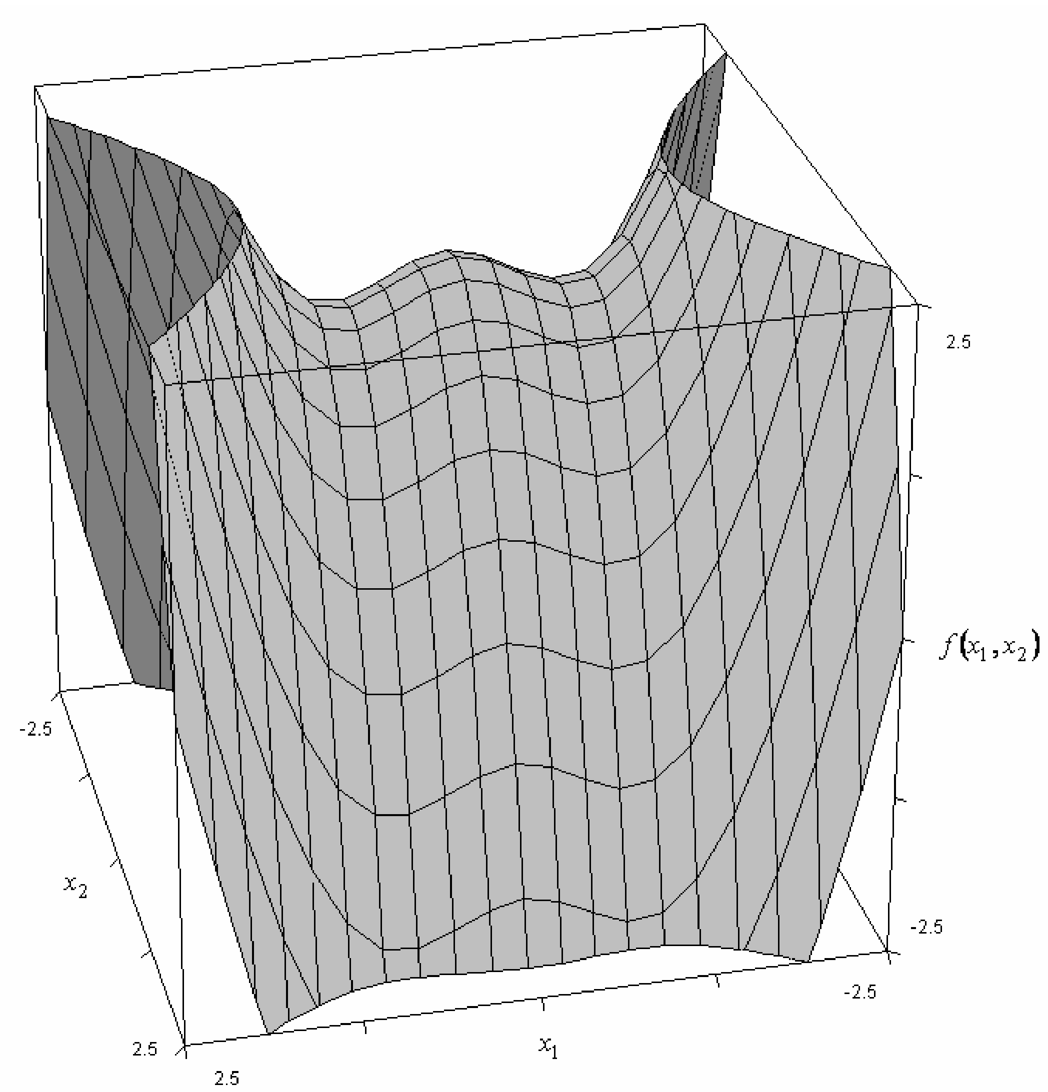

Рис. 3.2. Графік функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}$

Запитання для самоперевірки

1. *Запишіть загальну постановку* n*-вимірної задачі безумовної оптимізації.*
2. *Дайте означення градієнта функції багатьох змінних?*
3. *Сформулюйте необхідну умову оптимальності першого порядку для* n*-вимірноїгладкої задачі безумовної оптимізації.*
4. *Дайте означення другої похідної функції багатьох змінних.*
5. *Сформулюйте критерій Сильвестра для встановлення знаковизначеності матриці квадратичної форми.*

6. *Сформулюйте необхідну умову оптимальності другого порядку для n-вимірної гладкої задачі безумовної оптимізації.*
7. *Сформулюйте достатні умови оптимальності для n-вимірної гладкої задачі безумовної оптимізації.*
8. *Сформулюйте загальне правило розв'язання n-вимірної гладкої задачі безумовної оптимізації.*

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти точки екстремумів функції

$$f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}\left(ax^2+by^3\right)$$

на площині R^2. Параметри a і b подано в таблиці у відповідності до варіанту.

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1.	1	2	2.	8	3	3.	9	1	4.	4	1
5.	7	3	6.	2	4	7.	3	5	8.	6	7
9.	1	4	10.	2	5	11.	3	1	12.	4	3
13.	8	5	14.	7	6	15.	7	2	16.	1	5
17.	1	6	18.	2	7	19.	3	6	20.	5	6

2. Знайти точки екстремумів функції

$$f(x,y) = ax^3 + ax^2y + bx + \frac{1}{3}y^3 + cy$$

на площині R^2. Параметри a, b, c подано у таблиці у відповідності до варіанту.

№	a	b	c	№	a	b	c
1.	-5/4	-5/2	-11/2	2.	-2	-2	-17/2
3.	-5/4	5/2	1/2	4.	-2	2	7/8
5.	-5/4	-10	22	6.	-2	-8	-17/2

7.	-5/4	10	2	8.	-2	8	/2
9.	-5/4	-5	-11	10.	-2	-4	-17/4
11.	-5/4	5	1	12.	-2	4	7/4
13.	-5/4	-5/2	-19/3	14.	-2	-2	-7/3
15.	-5/4	5/2	-1/3	16.	-2	2	2/3
17.	-5/4	-15/2	-19	18.	-2	-6	-7
19.	-5/4	15/2	-1	20.	-2	6	2

3. Знайти точки екстремумів функції

$$f(x) = a\left(x_1^4 + x_2^4\right) + b\left(x_1 + x_2\right)^2$$

на площині R^2. Параметри a і b подано в таблиці у відповідності до варіанту.

№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b	№	a	b
1.	**1**	**1**	2.	**-2**	**-2**	3.	**-1/2**	**-2**	4.	**1/3**	**3**	5.	**-1/4**	**-4**
6.	**-1**	**-1**	7.	**-4**	**-1**	8.	**-2**	**-1/2**	9.	**3**	**1/3**	10.	**-4**	**-1/4**
11.	**1**	**4**	12.	**3**	**3**	13.	**1/4**	**1**	14.	**-1/3**	**-3**	15.	**4**	**4**
16.	**-1**	**-4**	17.	**-3**	**3**	18.	**1**	**1/4**	19.	**-3**	**-1/3**	20.	**-4**	**-4**
21.	**4**	**1**	22.	**1/2**	**2**	23.	**-1/4**	**-1**	24.	**1/4**	**4**	25.	**16**	**1**
26.	**2**	**2**	27.	**2**	**1/2**	28.	**-1**	**-1/4**	29.	**4**	**1/4**	30.	**1**	**16**

4. Знайти точки екстремуму функції

1) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \dfrac{50}{x_1} + \dfrac{20}{x_2}$;

2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2$;

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2$;

4) $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3 - 2x_3$;

5) $f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 4x_1 x_2$;

6) $f(x) x_1 e^{x_1} - \left(1 + e^{x_1}\right)\sin x_2$;

7) $f(x, y) = 4x^2 - 6x - 5xy + 8y^2$;

8) $f(x, y) = xy \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

9) $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^3 - 6/x$;

10) $f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + 2z^2\right)xy$;

11) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 - yz + x + 3y - z$;

12) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - xy$;

13) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 - yz + x + 3y - z$.

5. Довести, що функція $f(x)$ має нескінчену множину локальних максимумів і жодного локального мінімуму
$$f(x) = -\left(x_2^2 + 1\right)\left(\sin x_1 + 2\right).$$

6. Довести, що функція $f(x)$ має нескінчену множину локальних максимумів і жодного локального мінімуму
$$f(x) = \sin x_1 - x_2^2.$$

Список використаної літератури

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи. – М: Наука, Глав. ред. физ.-мат. л-ры, 1984. – 288 с.
2. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 204 с.
3. Ларин Р.М. Методы оптимизации. Примеры и задачи: Учеб. пособие/Р.М.Ларин, А.В.Плясунов, А.В.Пяткин. – Новосибирск: Новосиб. ун-т., 2003. – 115 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. – Київ: 2003. – 380 с.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Ч.4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения: Учебное пособие /под ред. А.В. Ефимова – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. л-ры, 1990. – 304 с.
6. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.– М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. л-ры, 1986. – 328 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск: завідувач кафедрою системного аналізу і теорії оптимізації к. ф.-м. н., доц. Кузка О.І.

Автори: к. ф.-м. н., доц. Гренджа В.І.,
к. ф.-м. н., Брила А.Ю.

Рецензенти: к. ф.-м.н., доц. Тегза А.М.,
к. ф.-м.н., доц. Погоріляк О.О.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних робіт з курсу
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Частина І

СКІНЧЕННОВИМІРНІ ЗАДАЧІ БЕЗУМОВНОЇ ОПТИЗІЗАЦІЇ