Міністерство освіти і науки України

ДВНЗ Ужгородський національний університет

Мукачівський державний університет

Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю.

Аналітичні методи дослідження крайових задач

Ужгород
Видавництво "Говерла"
2018

ББК
УДК

Рецензенти

Карарар — доктор фізико–математичних наук, професор кафедри РРРР університету
Карарар — доктор фізико–математичних наук, професор кафедри РРРР університету
Карарар — доктор фізико–математичних наук, професор кафедри РРРР університету

Друкується за ухвалою Вченої ради , протокол № від 2018 р.

Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. — Ужгород: .... — 288 с.

У монографі розглянуто ....

ISBN

Зміст

Стор.

Основні позначення

У монографії оперуємо з полем дійсних чисел і з дійсними функціями однієї або кількох дійсних змінних.

$\{v \in V(P(v))\}$	множина елементів v із V, яка володіє властивістю $P(v)$
$\mathbb{R}^n$	n-вимірний евклідів простір
$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$	множина всіх дійсних чисел
$\mathbb{N}$	множина цілих додатних чисел (множина натуральних чисел)
$M_1 \times M_2$	декартів добуток множин
$M_1 \cup M_2$	об'єднання множин
$M_1 \cap M_2$	переріз (перетин) множин
$M_1 \setminus M_2$	різниця множин
B	область в $\mathbb{R}^n$
∂B	межа області B
$\overline{B} = B \cup \partial B$	замикання області B
$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$	точка в $\mathbb{R}^n$
$x = (x,y)$	точка в $\mathbb{R}^2$
$\overline{1, n}$	відрізок натурального ряду
$x \,\vert ...$	множина елементів x
$[a, b]$	замкнений проміжок(відрізок) $\{x \in \mathbb{R} \,\vert a \leq x \leq b\}$
(a, b)	відкритий проміжок (інтервал) $\{x \in \mathbb{R} \,\vert a < x < b\}$
$[a, b)$	напіввідкритий інтервал $\{x \in \mathbb{R} \,\vert a \leq x < b\}$

$A \equiv B$	конгруєнтність, тотожність, логічна рівносильність
$\Longleftrightarrow$	тоді і лише тоді (знак еквівалентності)
$\Longrightarrow$	випливає (знак імплікації)
$\sum$	знак суми
$\underset{m\to\infty}{\overset{B}{\rightrightarrows}}$	рівномірна збіжність в B
$\subset$	знак включення для множин
$\supset$	знак умісту для множин
$\in$	знак належності
$\notin$	знак неналежності
$\ni$	знак умісту для елементів
$y^{(s)}(x) \equiv \dfrac{d^s y(x)}{dx^s}$	похідна порядку s
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$	мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, n}$
$\lvert\alpha\rvert = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$	довжина мультиіндексу α
$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \equiv$ $\equiv u_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}}(x) \equiv$ $\equiv D^\alpha U(x)$, $x = (x_1, x_2, ...x_n)$	частинна похідна порядку $\lvert\alpha\rvert$
$C^{\lvert\alpha\rvert}(B)$, $C^\alpha(B)$, $C^\alpha(\overline{B})$, $C^k(a, b)$	простори гладких функцій
$\{u_n(x)\}$	послідовність функцій
$\dfrac{D(y_1, y_2, ...y_n)}{D(x_1, x_2, ...x_n)}$	якобіан
$A = (a_{ij})$	матриця, $i, j = \overline{1, n}$
A^T	транспонована матриця
A^{-1}	обернена матриця
$\lvert A\rvert = det A$	детермінант матриці A

$col(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$	стовпець
$const$	стала
$\forall$	для кожного, для всіх (квантор загальності)
$\exists$	існує (квантор існування)
δ_{ij}	символ Кронекера
$f^{-1}(x)$	обернена функція
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$	границя послідовності
$\max$	максимальний елемент, максимум
$n!$	факторіал
$TF\,(U(x,y))$	оператор
$r < 0$	від'ємне число
$r \leq 0$	недодатне число
$r > 0$	додатне число
$r \geq 0$	невід'ємне число
$\sup A$	верхня грань
$X \to Y$	відображення
$=$	знак рівності
$\neq$	знак нерівності
$=:$	означення
$\int\limits_a^b$	визначений (Рімана, Стільтьєса) інтеграл
$\int \cdots \int\limits_D$	кратний інтеграл
$\Vert x \Vert$	норма
$U\vert_S$	звуження функції U на множину S

Вступ

При дослідженні різних процесів та проблем в області механіки, фізики, електромеханіки, теорії управління, біології, медицини, економіки, соціології, хімії тощо приходять до різних типів лінійних та нелінійних крайових задач як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП). Теорія нелінійних крайових задач є одним з актуальних розділів сучасної математики, оскільки запити практики і велика кількість ще не повністю розв'язаних теоретичних питань багато в чому стимулюють бурхливий розвиток даної області математики.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від нелінійності диференціального рівняння та крайових умов, так і від геометрії області, в якій розглядається задача. Очевидно, що чим складніший об'єкт, що вивчається, тим важче піддаються конструктивному дослідженню розв'язки таких задач.

Саме побудові конструктивних методів дослідження та наближеного розв'язання складних крайових задач і присвячена пропонована читачу монографія.

До конструктивних методів слід віднести і модифікації чисельно-аналітичного методу академіка А.М.Самойленко, ідею якого він запропонував ще в 1965-1966 роках, та двостороннього методу академіка С.О.Чаплигіна, які базуються на послідовних наближеннях.

Універсальність підходів у вказаних методах і, у ряді випадків, простота практичної реалізації, стимулювали активні дослідження по їх узагальненню та застосуванню до широкого класу задач з лінійними або нелінійними крайовими умовами [4, 10, 90] та в областях із складною структурою краю у випадку ДРЧП [61, 72, 176, 204].

Монографія складається із п'яти розділів. У першому розділі, який належить доценту Маринець К.В., викладено нові підходи параметризації для дослідження задач з двоточковими і багатоточковими лінійними, нелінійними та інтегральними крайовими умовами у випадку систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Дослідження проводяться у рамках традицій і підходів відомої Київської школи академіка А.М.Самойленко в області чисельно-аналітичних методів.

Другий та третій розділи присвячені дослідженню крайових задач для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку у випадку двоточкових, багатоточкових крайових умов та умов з параметрами. З цією метою будуються монотонні та альтернуючі модифікації двостороннього методу, за допомогою яких встановлюються достатні умови існування та єдиності шуканого розв'язку, приводиться метод прискорення їх збіжності. Дані розділи написані доцентом Питьовка О.Ю.

У четвертому розділі монографії викладено деякі підходи дослідження крайових задач для систем нелінійних ДРЧП другого порядку гіперболічного типу у випадку, коли область відшукання розв'язку крайової задачі обмежена «вільними» кривими та характеристиками заданої системи. У цьому випадку край області має складну структуру і дослідження таких крайових задач ускладнюється. Зокрема, для такого типу задачі Гурса-Дарбу одержані достатні умови існування, єдиності та знакосталості регулярного або іррегулярного її розв'язку, дається один підхід прискорення збіжності побудованого ітераційного методу знаходження наближеного розв'язку досліджуваної задачі.

У п'ятому розділі досліджуються крайові задачі для нелінійних систем ДРЧП вищого порядку (задачі з локальними та інтегральними умовами А.М.Нахушева, а також задачі в областях із складною структурою краю). З цією метою будуються монотонні та альтернуючі ітераційні методи Зейделя-Манна прискореної збіжності. У випадку альтернуючого методу приводиться практичний метод побудови функцій порівняння нульового наближення. Четвертий та п'ятий розділи підготовлені професором Маринець В.В.

Слід відмітити, що у всіх розділах теоретичні результати, по можливості, ілюструються прикладами.

Розділ 1

Чисельно-аналітичний метод наближеної побудови розв'язків крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь

У розділі пропонується новий підхід параметризації для дослідження нелінійних крайових задач з двоточковими та багатоточковими лінійними, нелінійними та інтегральними крайовими умовами. Будуються модифікації чисельно-аналітичного алгоритму для наближеної побудови розв'язків параметризованих задач, а також встановлюються необхідні та достатні умови їх розв'язності.

Не дивлячись на достатньо велику кількість робіт по цій тематиці, питання існування та побудови розв'язків певних класів і типів крайових задач або зовсім не розглядалися, або вивчалися у неповній мірі. Виникає ряд актуальних, цікавих, нетривіальних проблем по узагальненню, розробці та побудові нових чисельно–аналітичних методів, орієнтованих на дослідження розв'язків істотно нелінійних крайових задач, що й обґрунтовує доцільність дослідження у цій області.

У п.1.1 сформульовано базові визначення та твердження, які надалі використовуються при обґрунтуванні збіжності побудованих послідовностей функцій, а також встановленні необхідних та достатніх умов розв'язності розглядуваних класів нелінійних крайових задач.

П. 1.2 монографії присвячений багатоточковій крайовій задачі з розділеними крайовими умовами типу Коші–Ніколетті. Показано доцільність зведення її до двоточкової параметризованої задачі з невиродженими матрицями.

Для побудови наближених розв'язків останньої запропоновано відповідну модифікацію чисельно–аналітичного алгоритму [134, 242], що базується на послідовних наближеннях. Встановлено рівномірну збіжність побудованої послідовності функцій до її граничної функції, доведено теореми про контрольний параметр та зв'язок граничної функції з розв'язком вихідної крайової задачі. Теоретичні викладки продемонстровано на ілюстративному прикладі.

У п.1.3 розглянуто нелінійну крайову задачу, підпорядковану нелінійним двоточковим крайовим умовам. Показано ефективність її зведення до еквівалентної параметризованої задачі з лінійними крайовими умовами при виконанні певних умов параметризації.

Для вивчення перетвореної двоточкової задачі обґрунтовано метод, який базується на спеціального типу наближеннях, побудованих в аналітичній формі. Доведено рівномірну збіжність цих апроксимацій до параметризованої граничної функції, її зв'язок з точним розв'язком, а також встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків вихідної крайової задачі. Одержані результати апробовано на модельному прикладі.

Інтегральна крайова задача розглянута у п. 1.4 даного розділу. Із застосуванням техніки параметризації дослідження її розв'язків зведено до аналізу розв'язків більш простої задачі, а саме — з лінійними двоточковими крайовими умовами.

Для наближеної побудови розв'язків перетвореної задачі запропоновано модифікацію чисельно–аналітичного алгоритму. Встановлено рівномірну збіжність побудованої послідовності функцій, доведено теорему про керуючий параметр та зв'язок граничної функції з розв'язком вихідної крайової задачі з інтегральними крайовими умовами, а також необхідні та достатні умови існування розв'язків. Конструктивність та ефективність описаного підходу параметризації проілюстровано на прикладі.

1.1 Допоміжні твердження та означення

При обґрунтуванні запропонованого методу дослідження нелінійних крайових задач знадобляться деякі допоміжні твердження та визначення, які наводимо нижче.

Лема 1.1.1. *[242]. Для будь–якої неперервної функції $f : [0,T] \to D$ має місце оцінка:*

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right] d\tau\right| \leq \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right], \quad (1.1)$$

де

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (1.2)$$

Лема 1.1.2. *[242] Нехай послідовність функцій $\{\alpha_m\}$ визначається рекурентним співвідношенням:*

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)ds, \quad (1.3)$$

де $\alpha_0(t) = 1$.

Тоді мають місце оцінки:

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(t) &\leq \left(\tfrac{3T}{10}\right)^m \alpha_m(t), m \geq 2, \\ \alpha_{m+1}(t) &\leq \tfrac{10}{9}\left(\tfrac{3T}{10}\right)^m \alpha_1(t), m > 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $\alpha_1(t)$ визначена згідно з (1.2).

Означення 1.1.1. *[112, 221]. Для всіх індексів i_1 та i_2, що приймають значення від 1 до n, визначимо матрицю J_{i_1,i_2} розмірності $(i_2 - i_1 + 1) \times n$ наступним чином:*

$$J_{i_1,i_2} := \left(O_{i_2-i_1+1,i_1-1}, I_{i_2-i_1+1}, O_{i_2-i_1+1,n-i_2}\right). \quad (1.5)$$

Тобто множення зліва деякого вектора матрицею J_{i_1,i_2} еквівалентно вибору його компонент з номерами від i_1 до i_2.

Означення 1.1.2. *[112, 221] Нехай $H \subset \mathbb{R}^{2n}$ – деяка непорожня множина. Для будь–якої пари функцій*

$$f_j = col\left(f_{j,1}, \ldots, f_{j,2n}\right) : H \to \mathbb{R}^{2n}, j = 1,2$$

будемо писати:

$$f_1 \triangleright_H f_2 \quad (1.6)$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція

$$k : H \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$$

така, що

$$f_{1,k(x)} > f_{2,k(x)}, \tag{1.7}$$

для всіх $x \in H$.

Це означає, що у кожній точці $x \in H$ *принаймні одна з компонент вектора* f_1 *більша, ніж відповідна їй компонента* f_2.

Теорема 1.1.1. *[181]. Якщо* f *— одиничне відображення, тобто* $f(x) = x$, $x \in D$, *то має місце співвідношення:*

$$deg\,[f, D, 0] = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \in D, \\ 0, & \text{якщо } 0 \neq \bar{D}. \end{cases}$$

Крім того, якщо функція $f \in C^0\left(\bar{D}\right)$ *така, що* $f(x) \neq 0$, $x \in \partial D$ *і* $deg[f, D, 0] \neq 0$, *тоді існує точка* $x^0 \in D$, *для якої* $f\left(x^0\right) = 0$.

Наведемо теорему про інваріантність індексу Брауера над гомотопією.

Теорема 1.1.2. *[181]. Нехай однопараметрична сім'я відображень* $f \in C^0\left([0, 1] \times \bar{D}\right)$ *така, що* $f_t(x) := f(t, x) \neq 0$ *при* $t \in [0, 1]$, $x \in \partial D$.

Тоді

$$deg[f_t, D, 0] = const,$$

для всіх $t \in [0, 1]$.

Нагадаємо також теорему Борсука.

Теорема 1.1.3. *[181]. Припустимо, що замкнена обмежена множина* D *містить образ та симетричний до нього образ. Це означає, що якщо* $x \in D$, *то й* $-x \in D$.

Тоді, за умови, що $f : \bar{D} \to \mathbb{R}^n$ *— деяка непарна функція, тобто має місце співвідношення:* $f(-x) = -f(x)$ *при* $x \in \bar{D}$, *і* $f(x) \neq 0$ *для* $x \in \partial D$, *індекс Брауера* $deg[f, D, 0]$ *приймає непарне значення.*

З цієї теореми випливає, що для непарних відображень індекс Брауера відмінний від нуля.

1.2 Багатоточкова задача типу Коші–Ніколетті

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = f\,(t, x\,(t))\,, \tag{1.8}$$

з розділеними триточковими крайовими умовами типу Коші–Ніколетті:

$$\begin{gathered} x_1(0) = x_{01}, \cdots, x_p(0) = x_{0p}, \\ x_{p+1}(t_1) = d_{p+1}, \cdots, x_{p+q}(t_1) = d_{p+q}, \\ x_{p+q+1}(T) = d_{p+q+1}, \cdots, x_n(T) = d_n, \end{gathered} \tag{1.9}$$

де $t \in [0, T]$, $t_1 \in (0, T)$, $d_i \in \mathbb{R}, i = \overline{p+1, n}$.

Припустимо, що вектор–функція

$$f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$$

неперервна, де $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.8), який задовольняє крайові умови (1.9), у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0, T] \to D$.

Триточкові крайові умови (1.9) можна записати у матрично–векторній формі:

$$Ax(0) + A_1 x(t_1) + C_1 x(T) = d, \tag{1.10}$$

де $A = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(p+q)} \end{pmatrix}$,
$d = col\,(x_{01}, \ldots, x_{0p}, d_{p+1}, \ldots, d_{p+q}, d_{p+q+1}, \ldots, d_n)$.

Очевидно, що матриці, які входять у крайові умови (1.10), є виродженими. У зв'язку з цим зауважимо, що безпосереднє застосування відомих схем чисельно–аналітичного методу [134, 242, 243, 248] неможливе або пов'язане зі значними труднощами обчислювального характеру.

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1, замінимо значення перших $p + q$ компонент розв'язку крайової задачі (1.8), (1.10) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p+q}$:

$$\begin{gathered} x_1(T) = \lambda_1, \ldots, x_p(T) = \lambda_p, \\ x_{p+1}(T) = \lambda_{p+1}, \ldots, x_{p+q}(T) = \lambda_{p+q}. \end{gathered} \tag{1.11}$$

З використанням параметризації (1.11) триточкові умови (1.10) перепишуться у вигляді двоточкових:

$$Ax(0) + Cx(T) = d - A_1 x(t_1) +$$
$$+ col\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-(p+q)}\right), \quad (1.12)$$

де $C = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-(p+q)} \end{pmatrix} \equiv I_n$.

Введемо позначення:

$$d(\lambda) := d - A_1 x(t_1) + col\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-(p+q)}\right) =$$
$$= col\left(x_{01} + \lambda_1, \ldots, x_{0p} + \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q}, d_{p+q+1}, \ldots, d_n\right),$$

де

$$\lambda = col(x_1(T), \ldots, x_{p+q}(T)) = col\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+q}\right) \in \Lambda. \quad (1.13)$$

Тоді параметризовані крайові умови (1.12) матимуть вигляд:

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda). \quad (1.14)$$

Відмітимо, що у рівності (1.14), на відміну від (1.10), фігурує невироджена матриця C.

Зауваження 1.2.1. *Множина розв'язків триточкової крайової задачі (1.8), (1.10) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1.8), (1.14), які задовольняють додатковим умовам (1.11).*

Таким чином, замість задачі (1.8), (1.10) з триточковими крайовими умовами будемо розглядати еквівалентну їй параметризовану задачу (1.8), (1.14), яка містить двоточкові умови. Для дослідження розв'язків останньої обґрунтуємо відповідну чисельно–аналітичну схему.

1.2.1 Збіжність послідовних наближень

На основі заданої функції f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) та області визначення D введемо у розгляд вектор:

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right], \tag{1.15}$$

для якого справедлива нерівність [113, 221]:

$$\delta_D(f) \leq \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f\,(t,x)|\,.$$

Припустимо, що функція f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) неперервна в $[0,T]\times D$ і задовольняє умову Ліпшиця вигляду:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K\,|u-v|\,, \tag{1.16}$$

для всіх $t \in [0,T]\,,\ \{u,v\} \subset D$, де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами.

Для спектрального радіуса $r(K)$ виконується нерівність:

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{1.17}$$

Нехай параметризована крайова задача (1.8), (1.14) така, що множина

$$D_\beta := \Big\{z \in D : B\Big(z + \frac{t}{T}\left[d\,(\lambda) - (A+I_n)z\right], \frac{T}{2}\delta_D(f)\Big) \subset D, \forall\lambda \in \Lambda\Big\}, \tag{1.18}$$

непорожня, тобто для всіх $\lambda \in \Lambda$

$$D_\beta \neq \emptyset. \tag{1.19}$$

З визначення множини D_β випливає, що вона складається із таких $z \in D$, що сукупність точок $z + \frac{t}{T}\left[d\,(\lambda) - (A+I_n)z\right]$ належить області D разом зі своїм

$$\beta := \frac{T}{2}\delta_D(f) \tag{1.20}$$

околом, $\forall\lambda \in \Lambda$, $t \in [0,T]$.

Розглянемо також множину $U \subset \mathbb{R}^{n-p}$ вигляду:

$$U := \left\{u \in \mathbb{R}^{n-p} : col\,(x_{01},\ldots,x_{0p},u_{p+1},u_{p+2},\ldots,u_n) \in D_\beta\right\}.$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.8), (1.14) побудуємо послідовність функцій $\{x_m\}$ згідно рекурентного співвідношення:

$$x_m(t,u,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,u,\lambda))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[d\left(\lambda\right) - (A+I_n)z\right], m \in \mathbb{N}, \quad (1.21)$$

$$x_m\left(t,u,\lambda\right) = col\left(x_{m,1}\left(t,u,\lambda\right), x_{m,2}\left(t,u,\lambda\right), \ldots, x_{m,n}\left(t,u,\lambda\right)\right),$$

$$x_0(t,u,\lambda) = z + \frac{t}{T}\left[d\left(\lambda\right) - (A+I_n)z\right] \in D_\beta,$$

де

$$z = col(x_{01}, \ldots, x_{0p}, u) \in D_\beta,$$
$$u = col(x_{p+1}(0), \ldots, x_n(0)) = col(u_{p+1}, \ldots, u_n) \in U \quad (1.22)$$

та $\lambda \in \Lambda$ розглядаються як параметри.

Параметризована послідовність (1.21) побудована так, що для всіх $m \geq 1$, $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$ та $z \in D_\beta$, функції x_m задовольняють двоточкові крайові умови (1.14) та початкові умови

$$x_m\left(0,u,\lambda\right) = z.$$

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (1.21).

Теорема 1.2.1. *Нехай функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8), а також параметризовані крайові умови (1.14) задовольняють умови (1.16), (1.17), (1.19).*

Тоді при всіх фіксованих значеннях параметрів $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$, $z \in D_\beta$:

1. *Всі функції (1.21) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$Ax_m(0,u,\lambda) + Cx_m(T,u,\lambda) = d(\lambda), \; m \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

2. *Послідовність функцій (1.21) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції:*

$$x^*(t,u,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,u,\lambda). \quad (1.24)$$

3. *Функція x^* задовольняє початкові умови:*

$$x^*(0, u, \lambda) = z,$$

а також параметризовані двоточкові крайові умови:

$$Ax^*(0, u, \lambda) + Cx^*(T, u, \lambda) = d(\lambda).$$

4. *Гранична функція (1.24) для всіх $t \in [0, T]$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[d\left(\lambda\right) - (A + I_n)z\right], \quad (1.25)$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(u, \lambda), \quad (1.26)$$

$$x(0) = z, \quad (1.27)$$

де $\Delta : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ — відображення, визначене формулою:

$$\Delta\left(u, \lambda\right) := \frac{1}{T}\left[d\left(\lambda\right) - (A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds. \quad (1.28)$$

5. *Справедлива оцінка відхилення функції x^* від її m–го наближення для всіх $t \in [0, T]$:*

$$|x^*(t, u, \lambda) - x_m(t, u, \lambda)| \leq \\ \leq \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)Q^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f), \quad (1.29)$$

де

$$Q := \frac{3T}{10}K. \quad (1.30)$$

Доведення. Доведемо, що послідовність функцій (1.21) є послідовністю Коші у Банаховому просторі $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t,u,\lambda)\in D$, для всіх $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times\Lambda$, $m\in\mathbb{N}$.

Справді, з використанням оцінок Леми 1.1.1, Леми 1.1.2 та із співвідношення (1.21), при $m=0$ отримаємо:

$$|x_1(t,u,\lambda)-x_0(t,u,\lambda)|\leq$$
$$\leq\left|\int_0^t\left[f(s,x_0(s,u,\lambda))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_0(s,u,\lambda))ds\right]ds\right|\leq$$
$$\leq\alpha_1(t)\delta_D(f)\leq\frac{T}{2}\delta_D(f).\quad(1.31)$$

Виходячи з нерівності (1.31), можемо зробити висновок, що $x_1(t,u,\lambda)\in D$, коли $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times\Lambda$.

За індукцією легко показати, що всі функції x_m, визначені згідно з (1.21), також належать множині D, $\forall m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$, $u\in U$, $\lambda\in\Lambda$.

Розглянемо різницю:

$$x_{m+1}(t,u,\lambda)-x_m(t,u,\lambda)=$$
$$=\int_0^t\left[f(s,x_m(s,u,\lambda))-f(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))\right]ds-$$
$$-\frac{t}{T}\int_0^T\left[\,f\,(s,x_m(s,u,\lambda))-f\,(s,x_{m-1}(s,u,\lambda))\,\right]ds,\quad(1.32)$$

m=0, 1, 2, ...
та позначимо:

$$r_m(t,u,\lambda):=|x_m(t,u,\lambda)-x_{m-1}(t,u,\lambda)|\,,$$

m=1, 2, 3, ...

З використанням оцінки (1.1) та умови Ліпшиця (1.16), з (1.32) отримаємо:

$$r_{m+1}(t,u,\lambda)\leq K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s,u,\lambda)ds+\right.$$
$$\left.+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(s,u,\lambda)ds\right],\quad(1.33)$$

$\forall$ *m=1, 2, 3, ...*

На підставі нерівності (1.31) одержимо:

$$r_1(t,u,\lambda)=|x_1(t,u,\lambda)-x_0(t,u,\lambda)|\leq\alpha_1(t)\delta_D(f).\quad(1.34)$$

З урахуванням оцінок Леми 1.1.2 та рекурентної формули (1.3), із співвідношення (1.33) при m= *1* випливає:

$$r_2(t,u,\lambda) \le K\delta_D(f)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds+\right.$$
$$\left.+\frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] \le K\alpha_2(t)\delta_D(f).$$

За індукцією можна показати, що

$$r_{m+1}(t,u,\lambda) \le K^m \alpha_{m+1}(t)\delta_D(f), \tag{1.35}$$

m=*0, 1, 2, ...,* де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ мають вигляд (1.3), а вектор $\delta_D(f)$ обчислюється згідно з (1.15).

З урахуванням оцінки (1.4) Леми 1.1.2, із співвідношення (1.35) одержимо:

$$r_{m+1}(t,u,\lambda) \le \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\delta_D(f), \tag{1.36}$$

$\forall m$=*1, 2, 3, ...,* де матриця Q має вигляд (1.30).

Тоді, беручи до уваги нерівність (1.36), розглянемо різницю:

$$|x_{m+j}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)| \le |x_{m+j}(t,u,\lambda) - x_{m+j-1}(t,u,\lambda)| +$$
$$+|x_{m+j-1}(t,u,\lambda) - x_{m+j-2}(t,u,\lambda)| + \ldots +$$
$$+|x_{m+1}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)| = \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,u,\lambda) \le$$
$$\le \frac{10}{9}\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{j} Q^{m+i}\delta_D(f) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\delta_D(f). \tag{1.37}$$

На підставі умови (1.17), спектральний радіус матриці Q вигляду (1.30) не перевищує *1.* Тоді маємо:

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (I_n - Q)^{-1}, \ \lim_{m\to\infty} Q^m = O_n.$$

Тому, з оцінки (1.37) можемо зробити висновок, що, згідно з критерієм Коші, послідовність $\{x_m\}$, яка задається формулою (1.21), рівномірно збігається на множині $[0,T]\times U\times\Lambda$ до деякої граничної функції x^*.

Оскільки функції x_m послідовності (1.21) задовольняють крайові умови (1.14) при довільних значеннях параметрів, x^* також їх задовольняє. Переходячи у співвідношенні (1.21) до границі при $m \to \infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (1.25), а отже, є розв'язком задачі Коші (1.26), (1.27), де Δ — відображення, визначене згідно з (1.28). Оцінка (1.29) є безпосереднім наслідком нерівності (1.37). □

У наступному підрозділі встановимо умови, при виконанні яких гранична функція побудованої послідовності функцій (1.21) є розв'язком вихідної задачі з виродженими матрицями у крайових умовах.

1.2.2 Зв'язок граничної функції послідовності (1.21) з розв'язком вихідної крайової задачі

Поряд із системою (1.8) розглянемо задачу Коші (1.38), (1.27) для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \mu, \tag{1.38}$$

де $t \in [0, T]$, а $\mu = col(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ є керуючим параметром.

Покажемо, що для всіх фіксованих $u \in U, \lambda \in \Lambda$ параметр μ можна вибрати так, щоб розв'язок $x = x(t, u, \lambda, \mu)$ задачі Коші (1.38), (1.27) у той же час був розв'язком двоточкової параметризованої крайової задачі (1.38), (1.14).

Теорема 1.2.2. *Нехай $u \in U$, $\lambda \in \Lambda$ та $\mu \in \mathbb{R}^n$ — довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.8) виконуються всі умови Теореми 1.2.1.*

Тоді, для того, щоб розв'язок задачі Коші (1.38), (1.27) задовольняв також і двоточкові параметризовані крайові умови (1.14), необхідно й достатньо, щоб параметр $\mu = \mu_{u,\lambda}$ у (1.38) був заданий рівністю:

$$\mu_{u,\lambda} := \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda))ds. \tag{1.39}$$

При цьому

$$x\,(t, u, \lambda, \mu) = x^*\,(t, u, \lambda)\,, \tag{1.40}$$

де $x^*\,(\cdot, u, \lambda)$ — гранична функція послідовності (1.21).

*Доведення. Достатність.*Нехай у правій частині системи (1.38) $\mu = \mu_{u,\lambda}$ має вигляд (1.39). З Теореми 1.2.1 випливає, що при заданих u і λ гранична функція (1.24) послідовності (1.21) є єдиним розв'язком крайової задачі (1.38), (1.14), коли $\mu = \mu_{u,\lambda}$. Крім того, x^* задовольняє і початкові умови (1.27), тобто є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при $\mu = \mu_{u,\lambda}$. Таким чином, знайдено значення μ вигляду (1.39), для якого має місце (1.40).
Необхідність. Покажемо, що значення параметра μ (1.39) єдине, оскільки для будь–яких інших $\mu = \bar{\mu} \neq \mu_{u,\lambda}$ розв'язок $x\,(t, u, \lambda, \bar{\mu})$ задачі Коші (1.41), (1.27)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \bar{\mu}, \tag{1.41}$$

не задовольняє крайові умови (1.14).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує хоча б два значення $\mu_{u,\lambda}$ та $\bar{\mu}$ ($\mu_{u,\lambda} \neq \bar{\mu}$) такі, що розв'язки $x = x\,(t, u, \lambda, \mu_{u,\lambda}) = x_{u,\lambda}(t)$ і $x = x\,(t, u, \lambda, \bar{\mu}) = \bar{x}(t)$ задач Коші (1.38), (1.27), (1.39) та (1.41), (1.27), відповідно, у той же час задовольняють двоточкові крайові умови (1.14).

Очевидно, що функції $x_{u,\lambda}$ та $\bar{x}$ є розв'язками інтегральних рівнянь:

$$x_{u,\lambda}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{u,\lambda}(s))ds + \mu_{u,\lambda}t, \tag{1.42}$$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t. \tag{1.43}$$

відповідно.

За припущенням, $x_{u,\lambda}$ і $\bar{x}$ задовольняють як крайові умови (1.14), так і початкові умови (1.27). Тому мають місце співвідношення:

$$Ax_{u,\lambda}(0) + Cx_{u,\lambda}(T) = d(\lambda), \tag{1.44}$$

$$x_{u,\lambda}(0) = z, \tag{1.45}$$

$$A\bar{x}(0) + C\bar{x}(T) = d(\lambda), \tag{1.46}$$

$$\bar{x}(0) = z, \tag{1.47}$$

звідки отримуємо, що

$$x_{u,\lambda}(T) = d(\lambda) - Az, \tag{1.48}$$

$$\bar{x}(T) = d(\lambda) - Az. \tag{1.49}$$

При цьому з рівностей (1.42), (1.43) при $t = T$ маємо:

$$\mu_{u,\lambda} = \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{u,\lambda}(s))ds. \tag{1.50}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds. \tag{1.51}$$

Підставивши (1.50), (1.51) в інтегральні рівняння (1.42), (1.43), одержуємо, що для всіх $t \in [0, T]$

$$x_{u,\lambda}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{u,\lambda}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{u,\lambda}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A + I_n)z\right], \tag{1.52}$$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A + I_n)z\right]. \tag{1.53}$$

Так як $u \in U$ і $\lambda \in \Lambda$, то аналогічно доведенню Теореми 1.2.1, виходячи з вигляду рівнянь (1.52), (1.53) та визначення множини D_β, можна встановити, що всі значення функцій $x_{u,\lambda}(t)$, $\bar{x}(t)$ при $t \in [0, T]$ містяться в області D.

Із співвідношень (1.52), (1.53) очевидно, що

$$x_{u,\lambda}(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t \big[f(s, x_{u,\lambda}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds - \\ - \frac{t}{T}\int_0^T \big[f(s, x_{u,\lambda}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds. \tag{1.54}$$

З формули (1.54), з урахуванням умови Ліпшиця (1.16), маємо, що функція

$$\omega(t) = |x_{u,\lambda}(t) - \bar{x}(t)|, t \in [0, T], \tag{1.55}$$

задовольняє інтегральні нерівності:

$$\omega(t) \leq K\left[\int_0^t \omega(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T \omega(s)ds\right] \leq K\alpha_1(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s), \tag{1.56}$$

де $t \in [0, T]$, а $\alpha_1(t)$ має вигляд (1.2).

Використовуючи (1.56) рекурентно, одержуємо:

$$\omega(t) \leq K^m \alpha_m(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \tag{1.57}$$

де $t \in [0, T]$, m — довільне натуральне число, а функції α_m задаються за допомогою співвідношення (1.3).

З урахуванням оцінок (1.4), з нерівності (1.57) для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо:

$$\omega(t) \leq K\alpha_1(t)\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1} \max_{s\in[0,T]} \omega(s), \tag{1.58}$$

де $t \in [0, T]$.

Спрямовуючи у співвідношенні (1.58) $m \to \infty$ і враховуючи властивість (1.17), приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s\in[0,T]} \omega(s) \to 0.$$

Це означає, згідно з (1.55), що функція $x_{u,\lambda}$ співпадає з $\bar{x}$. І тому, на основі формул (1.50) та (1.51) маємо, що $\mu_{u,\lambda} = \bar{\mu}$.

Одержане протиріччя завершує доведення теореми.

$\square$

З'ясуємо відношення граничної функції $x^* = x^*(t, u, \lambda)$ послідовності (1.21) до розв'язку параметризованої крайової задачі (1.8), (1.14) або еквівалентної їй триточкової задачі (1.8), (1.10).

Теорема 1.2.3. *Нехай для вихідної крайової задачі (1.8), (1.10) виконуються умови (1.16), (1.17), (1.19).*

Тоді пара $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої задачі (1.8), (1.14) тоді і тільки тоді, коли $u^* = (u^*_{p+1}, u^*_{p+2}, \dots, u^*_n)$, $\lambda^* = (\lambda^*_1, \lambda^*_2, \dots, \lambda^*_{p+q})$ задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta(u, \lambda) = 0, \tag{1.59}$$

$$x^*_j(t_1, u, \lambda) - d_j = 0, \tag{1.60}$$

$j = \overline{p+1, p+q}$, *де Δ має вигляд (1.28).*

Доведення. Достатньо застосувати Теорему 1.2.2 і зауважити, що диференціальне рівняння (1.26) співпадає з (1.8) тоді і тільки тоді, коли пара (u^*, λ^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(u^*, \lambda^*) = 0.$$

Враховуючи (1.11) та еквівалентність задач (1.8), (1.10) і (1.8), (1.14), очевидно, що $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ збігається з розв'язком параметризованої крайової задачі (1.8), (1.11), (1.14) тоді і тільки тоді, коли $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ задовольнятиме рівняння:

$$x_j^*(t_1, u, \lambda) - d_j = 0, j = \overline{p+1, p+q}.$$

Тобто пара $(x^*(\cdot, u^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1.8), (1.14) тоді і тільки тоді, коли виконуються (1.59), (1.60).

□

Наступне твердження доводить, що визначальна система рівнянь (1.59), (1.60) виявляє усі можливі розв'язки вихідної триточкової крайової задачі (1.8), (1.10).

Лема 1.2.1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 1.2.1. Крім того, існують деякі вектори $u \in U$ і $\lambda \in \Lambda$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.59), (1.60).*

Тоді нелінійна крайова задача (1.8), (1.10) має розв'язок $x(\cdot)$ такий, що:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= u_i, \\ x_j(T) &= \lambda_j, \end{aligned} \tag{1.61}$$

$i = \overline{p+1, n}$, $j = \overline{1, p+q}$.

Більше того, він має вигляд:

$$x(t) = x^*(t, u, \lambda), \tag{1.62}$$

де $t \in [0, T]$, а x^* є граничною функцією послідовності (1.21).

І навпаки: якщо крайова задача (1.8), (1.10) має розв'язок $x(\cdot)$, тоді він обов'язково має вигляд (1.62), і система визначальних рівнянь (1.59), (1.60) задовольняється при

$$\begin{aligned} u_i &= x_i(0), \\ \lambda_j &= x_j(T), \end{aligned}$$

$i = \overline{p+1, n}$, $j = \overline{1, p+q}$.

Доведення. Будемо застосовувати Теорему 1.2.2 і Теорему 1.2.3. Якщо існують такі $u \in U$ і $\lambda \in \Lambda$, що задовольняють систему визначальних рівнянь (1.59), (1.60), то, на основі Теореми 1.2.3, функція (1.62) є розв'язком крайової задачі (1.8), (1.10). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком (1.8), (1.10), тоді ця функція є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при

$$\mu = 0,$$
$$u_i = x_i(0), i = \overline{p+1, n}.$$

Тому що $x(\cdot)$ задовольняє крайові умови (1.10), а отже, і параметризовані умови (1.14) при виборі параметрів u та λ згідно з (1.22), (1.13) відповідно, то з Теореми 1.2.3 випливає, що має місце рівність (1.62).

Крім того,

$$\begin{aligned} \mu = \mu_{u,\lambda} = 0, \\ u_i = x_i(0), i = \overline{p+1, n}. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Однак, $\mu_{u,\lambda}$ має вигляд (1.39), тому перше рівняння (1.59) визначальної системи задовольняється, якщо

$$u = col(x_{p+1}(0), \ldots, x_n(0)), \lambda = col(x_1(T), \ldots, x_{p+q}(T)) :$$

$$\Delta(u, \lambda) = 0. \tag{1.64}$$

Зрештою, із співвідношення (1.9) безпосередньо випливає, що друге рівняння (1.60) визначальної системи також має місце.

Таким чином, ми вказали пари (u, λ), які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.59), (1.60), що і завершує доведення.

□

Зауваження 1.2.2. *Основна складність реалізації даного методу пов'язана з відшуканням граничної функції x^*. Однак у більшості випадків ця проблема може бути розв'язана, використовуючи властивості наближеного розв'язку x_m, побудованого в аналітичній формі.*

При деякому $m \geq 1$ введемо функцію $\Delta_m : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ згідно формули:

$$\Delta_m (u, \lambda) := \frac{1}{T} [d(\lambda) - (A + I_n) z] - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_m(s, u, \lambda)) ds, \tag{1.65}$$

де параметри u та λ визначені співвідношеннями (1.22) і (1.13) відповідно.

Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.8), (1.14) розглядатимемо наступну наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta_m(u, \lambda) = 0, \tag{1.66}$$

$$x_{m,j}(t_1, u, \lambda) - d_j = 0, \tag{1.67}$$

$j = \overline{p+1, p+q}$, *де* Δ_m *має вигляд (1.65), а* x_m *— вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (1.21).*

Відмітимо, що, на відміну від (1.59), (1.60), система (1.66), (1.67) конструктивно будується на основі $x_m(\cdot, u, \lambda)$ *і не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція* $X_m(t) := x_m(t, \bar{u}, \bar{\lambda}), t \in [0, T]$, *де* $\bar{u}$, $\bar{\lambda}$ *є розв'язками (1.66), (1.67), може бути прийнята за* m*–е наближення до точного розв'язку задачі (1.8), (1.10).*

Зрозуміло, що зі зростанням m *системи (1.59), (1.60) та (1.66), (1.67) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв'язку* $X_m(t)$ *вихідної триточкової крайової задачі (1.8), (1.10).*

1.2.3 Приклад

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t)(:= f_1(t, x_1, x_2, x_3)), \\ x_2'(t) = x_3(t)(:= f_2(t, x_1, x_2, x_3)), \\ x_3'(t) = \frac{t^2}{16} - \frac{1}{2}x_3^2(t) - \frac{1}{2}x_1(t)(:= f_3(t, x_1, x_2, x_3)), \end{cases} \tag{1.68}$$

де $t \in [0, 1]$, з розділеними триточковими крайовими умовами типу Коші–Ніколетті:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= -\tfrac{1}{16}, \\ x_2(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{8}, \\ x_3(1) &= \tfrac{1}{4}. \end{aligned} \tag{1.69}$$

Легко переконатися, що точний розв'язок (1.68), (1.69) має вигляд:

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{t^2}{8} - \frac{1}{16}, \\ x_2^*(t) = \frac{t}{4}, \\ x_3^*(t) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Крайова задача (1.68), (1.69) визначена в області

$$D := \left\{ x = col\,(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \le \frac{1}{2}, |x_2| \le \frac{1}{2}, |x_3| \le \frac{1}{3} \right\}. \tag{1.70}$$

Умови (1.69) можна записати у матрично–векторній формі:

$$Ax(0) + A_1 x\left(\frac{1}{2}\right) + C_1 x(1) = d, \tag{1.71}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Очевидно, тут матриця C_1 вироджена.

Для того, щоб обійти виродженість матриці C_1 у (1.71) та для переходу до двоточкових крайових умов, замінимо значення перших двох компонент розв'язку задачі (1.68), (1.71) у точці T параметрами λ_1 і λ_2:

$$\begin{aligned} x_1(1) &= \lambda_1, \\ x_2(1) &= \lambda_2. \end{aligned} \tag{1.72}$$

З урахуванням параметризації (1.72), умови (1.71) запишуться наступним чином:

$$Ax(0) + Cx(1) = d(\lambda), \tag{1.73}$$

де $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d(\lambda) := d - A_1 x\left(\frac{1}{2}\right) + col\,(\lambda_1, \lambda_2, 0) = col\left(-\frac{1}{16} + \lambda_1, \lambda_2, \frac{1}{4}\right)$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda$, $\Lambda := \left\{\lambda \in D : |\lambda_1| \le \frac{1}{4}, |\lambda_2| \le \frac{1}{3}\right\}$.

У співвідношенні (1.73) матриця $C \equiv I_3$ — невироджена, тобто $detC \ne 0$.

Таким чином, замість триточкової крайової задачі (1.68), (1.71) розглядаємо еквівалентну їй параметризовану задачу (1.68), (1.73).

Безпосередніми обчисленнями переконуємось, що для (1.68), (1.73) в області визначення D вигляду (1.70) виконуються умови (1.19), (1.16), (1.17), про які йшла мова у даному розділі. При цьому

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \; r(K) \le 0.93,$$

а вектори $\delta_D(f)$ і β у співвідношеннях (1.15) та (1.20), відповідно, задовольняють нерівності:

$$\delta_D(f) \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix}, \quad \beta \leq \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{5}{32} \end{pmatrix}.$$

Підмножина D_β вигляду (1.18) визначена наступним чином:

$$\left|t\left(\frac{1}{16}+\lambda_1\right)-\frac{5}{16}\right| \leq \frac{1}{2}; \ \left|u_2+t\left(\lambda_2-u_2\right)-\frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{2};$$

$$\left|u_3+t\left(\frac{1}{4}-u_3\right)-\frac{5}{32}\right| \leq \frac{1}{3}.$$

Отже, до параметризованої двоточкової крайової задачі (1.68), (1.73) можна застосувати чисельно–аналітичний алгоритм, описаний вище, і сконструювати послідовність наближених розв'язків.

Послідовність функцій $\{x_m\}$, визначена рекурентним співвідношенням (1.21), для параметризованої крайової задачі (1.68), (1.73) має вигляд:

$$x_{m+1,1}(t,u,\lambda) = -\frac{1}{16} + \int_0^t x_{m,2}(s,u,\lambda))ds - \\ - t\int_0^1 x_{m,2}(s,u,\lambda))ds + t\left(\frac{1}{16}+\lambda_1\right), \quad (1.74)$$

$$x_{m+1,2}(t,u,\lambda) = u_2 + \int_0^t x_{m,3}(s,u,\lambda))ds - \\ - t\int_0^1 x_{m,3}(s,u,\lambda))ds + t\left(\lambda_2-u_2\right), \quad (1.75)$$

$$x_{m+1,3}(t,u,\lambda) = u_3 + \int_0^t \left(\frac{t^2}{16}-\frac{1}{2}x_{m,3}^2(s,u,\lambda)-\frac{1}{2}x_{m,1}(s,u,\lambda)\right)ds - \\ - t\int_0^1 \left(\frac{t^2}{16}-\frac{1}{2}x_{m,3}^2(s,u,\lambda)-\frac{1}{2}x_{m,1}(s,u,\lambda)\right)ds + t\left(\frac{1}{4}-u_3\right), \quad (1.76)$$

де

$$x_{0,1}(t,u,\lambda) = -\frac{1}{16} + t\left(\frac{1}{16}+\lambda_1\right),$$

$$x_{0,2}(t,u,\lambda) = u_2 + t\left(\lambda_2 - u_2\right),$$
$$x_{0,3}(t,u,\lambda) = u_3 + t\left(\frac{1}{4} - u_3\right),$$

$\lambda \in \Lambda$, $u = col(x_{02}, x_{03}) = col(u_2, u_3) \in U$, причому

$$U := \left\{ u \in D : |u_2| \leq \frac{1}{7}, |u_3| \leq \frac{1}{3} \right\}.$$

Наближена m–а система визначальних рівнянь (1.66), (1.67) має вигляд:

$$\Delta_{m+1,1}(u,\lambda) = \frac{1}{16} + \lambda_1 - \int_0^1 x_{m+1,2}(s,u,\lambda)ds = 0,$$

$$\Delta_{m+1,2}(u,\lambda) = \lambda_2 - u_2 - \int_0^1 x_{m+1,3}(s,u,\lambda)ds = 0,$$

$$\Delta_{m+1,3}(u,\lambda) = \frac{1}{4} - u_3 - \int_0^1 \left(\frac{s^2}{16} - \frac{1}{2}x_{m,3}^2(s,u,\lambda) - \frac{1}{2}x_{m,1}(s,u,\lambda) \right) ds = 0,$$

$$x_{m+1,2}\left(\frac{1}{2}, u, \lambda\right) - \frac{1}{8} = 0.$$

За допомогою математичного пакету Maple, на основі формул (1.74)–(1.76), при $m = 0$ отримано першу апроксимацію до точного розв'язку крайової задачі (1.68), (1.71), залежну від невідомих параметрів:

$$x_{11}(t,u,\lambda) = (0.5\lambda_2 - 0.5u_2)t^2 + (0.5u_2 + \lambda_1 - 0.5\lambda_2 + 0.0625)t - 0.0625,$$

$$x_{12}(t,u,\lambda) = (0.125 - 0.5u_3)t^2 + (-u_2 + 0.5u_3 + \lambda_2 - 0.125)t + u_2,$$

$$\begin{aligned} x_{13}(t,u,\lambda) = {} & (-0.1666666666u_3^2 + 0.08333333332u_3 + 0.01041666667)t^3 + \\ & + (0.5u_3^2 - 0.125u_3 - 0.25\lambda_1 - 0.015625)t^2 + (-0.3333333333u_3^2 - \\ & - 0.9583333334u_3 + 0.25\lambda_1 + 0.2552083333)t. \end{aligned}$$

Значеннями шуканих параметрів у першій ітерації є:

$$u_2 = u_{12} = -1.031831810 \cdot 10^{-7},$$
$$u_3 = u_{13} = 0.2500002837,$$
$$\lambda_1 = \lambda_{11} = 0.06249998818,$$
$$\lambda_2 = \lambda_{12} = 0.2500000323.$$

Обчислення показують, що першим наближенням до точного розв'язку є наступні значення функцій:

$$x_{11}(t) = 0.1250000678t^2 - 7.96 \cdot 10^{-8}t - 0.0625,$$

$$x_{12}(t) = -1.418 \cdot 10^{-7}t^2 + 0.2500002773t - 1.031831810 \cdot 10^{-7},$$

$$x_{13}(t) = 0.02083333334t^3 - 0.03124996158t^2 + \\ + 0.01041634449t + 0.2500002837.$$

На Рис. 1.1 наведено графіки компонент точного та наближеного розв'язків вихідної крайової задачі у першому наближенні.

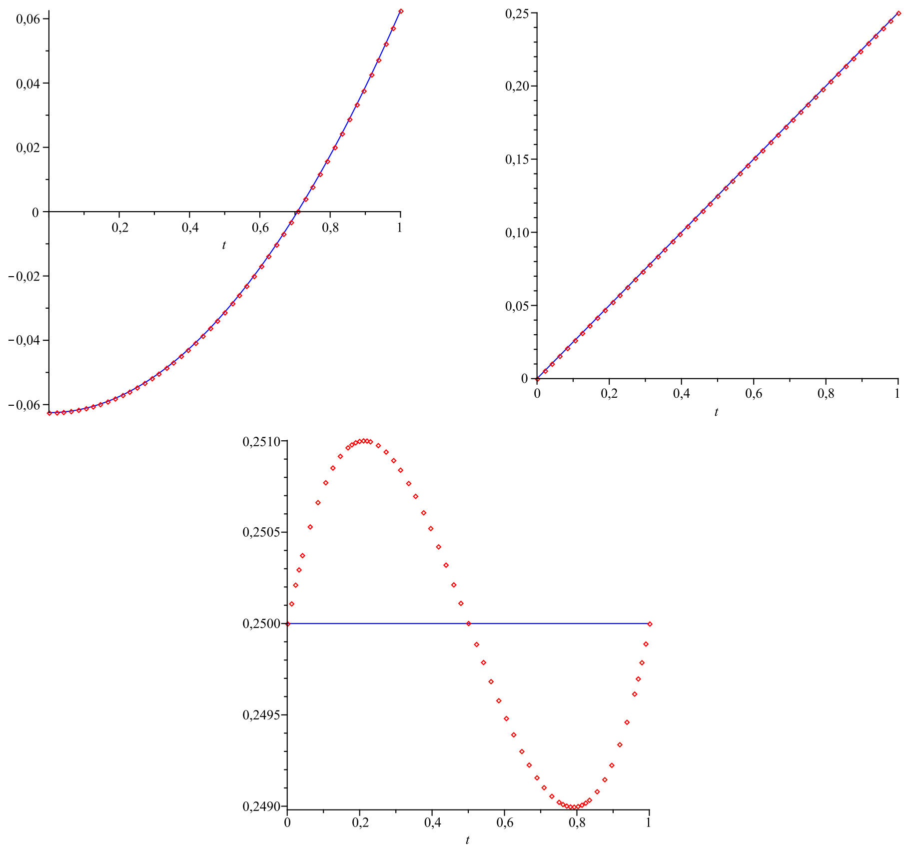


Рис. 1.1. Перша, друга та третя компоненти точного (лінія) та наближеного (пунктир) розв'язків у першій апроксимації

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першої ітерації дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,T]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \le 2.34 \cdot 10^{-8},$$

$$\max_{t\in[0,T]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \le 1.04 \cdot 10^{-7},$$

$$\max_{t\in[0,T]} |x_3^*(t) - x_{13}(t)| \le 1.01 \cdot 10^{-3}.$$

Обчислення показують, що значення шуканих параметрів у третій апроксимації є наступними:

$$u_2 = u_{32} = 2.676718489 \cdot 10^{-9},$$
$$u_3 = u_{33} = 0.2500000009,$$
$$\lambda_1 = \lambda_{31} = 0.06250000301,$$
$$\lambda_2 = \lambda_{32} = 0.2500000032.$$

На третій ітерації компоненти наближеного розв'язку є такими:

$$x_{31}(t) = 0.001041666667t^5 - 0.002604166719t^4 + 0.1250000004t^2 +$$
$$0.00173611106t^3 - 0.0001736084t - 0.0625,$$

$$x_{32}(t) = -0.0000003875248016t^8 + 0.00001550099239t^7 -$$
$$-0.00002350983829t^6 - 0.0002441406261t^5 +$$
$$+0.000646520552t^4 - 0.0004340279923t^3 + 1.28977 \cdot 10^{-7}t^2 +$$
$$+0.2500434036t + 2.676718489 \cdot 10^{-9},$$

$$x_{33}(t) = -3.203743401 \cdot 10^{-11}t^{15} + 2.402807598 \cdot 10^{-10}t^{14} -$$
$$-1.878194525 \cdot 10^{-9}t^{12} + 1.842542046 \cdot 10^{-8}t^{11} -$$
$$-4.931662750 \cdot 10^{-8}t^{10} - 2.655273859 \cdot 10^{-8}t^9 +$$
$$+0.00000134045449t^8 - 0.0000045800098t^7 +$$
$$+0.000006438728416t^6 + 0.00006086548073t^5 -$$
$$-0.0001616300356t^4 + 0.000108506919t^3 -$$
$$-3.291455504 \cdot 10^{-8}t^2 - 0.0000108498t + 0.2500000009.$$

На Рис. 1.2 зображено графіки компонент точного та наближеного розв'язку в третій апроксимації.

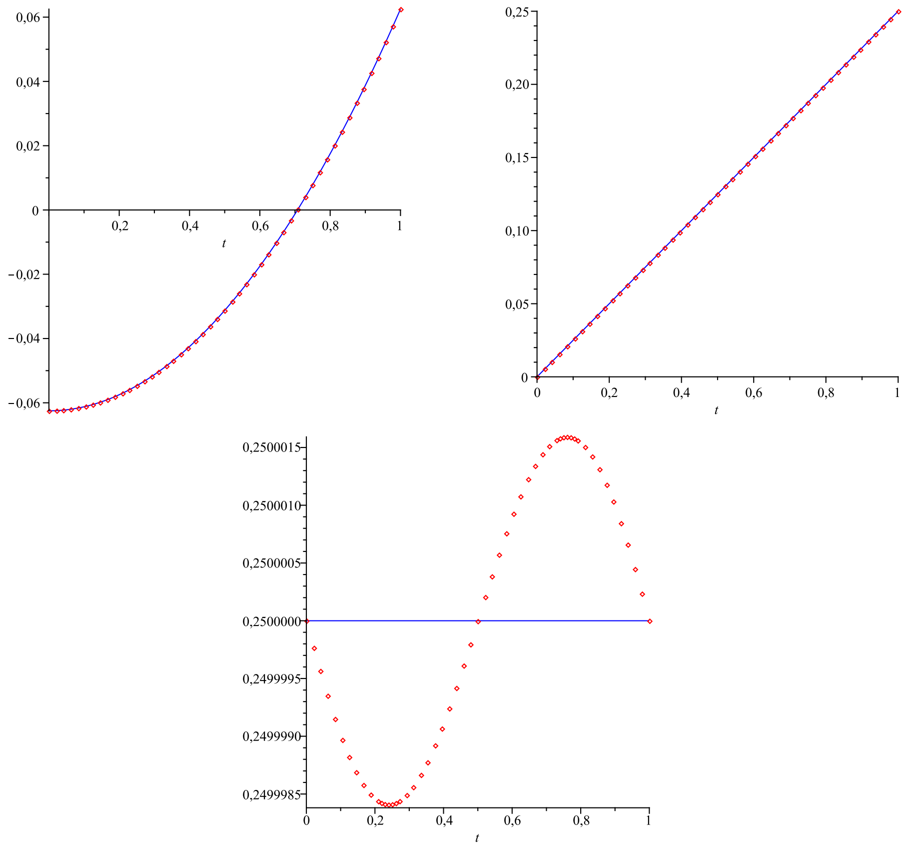


Рис. 1.2. Перша, друга та третя компоненти точного (лінія) та наближеного (пунктир) розв'язку у третьому наближенні

Максимальне відхилення точного розв'язку від його третього наближення наступне:

$$\max_{t\in[0,T]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \le 2.55 \cdot 10^{-5},$$
$$\max_{t\in[0,T]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \le 6.37 \cdot 10^{-6},$$
$$\max_{t\in[0,T]} |x_3^*(t) - x_{33}(t)| \le 1.60 \cdot 10^{-6}.$$

Продовжуючи процес далі, можна отримати апроксимацію до точного розв'язку вихідної крайової задачі з іще більшою точністю.

1.3 Багатоточкові крайові задачі з нелінійними крайовими умовами

Даний підрозділ присвячений дослідженню розв'язків нелінійних крайових задач, підпорядкованих нелінійним двоточковим крайовим умовам. Демонструється ефективність зведення вихідної задачі до еквівалентної їй задачі з параметризованими лінійними крайовими умовами, якщо виконуються певні умови параметризації.

Для вивчення перетвореної двоточкової задачі обґрунтовується метод, що базується на спеціального типу наближеннях, побудованих в аналітичній формі. Доводиться рівномірна збіжність цих апроксимацій до параметризованої граничної функції та її зв'язок з точним розв'язком. Крім того, встановлюються необхідні та достатні умови існування розв'язків вихідної крайової задачі.

Запропонований підхід параметризації узагальнюється на задачу з багатоточковими крайовими умовами.

Конструктивність теоретичних викладок ілюструється на модельному прикладі.

1.3.1 Задачі з двоточковими нелінійними крайовими умовами

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (1.8), підпорядковану нелінійним двоточковим крайовим умовам вигляду:

$$Ax(0) + Cx(T) + g\left(x\left(0\right), x\left(T\right)\right) = d, \tag{1.77}$$

де $A,\ C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — задані матриці, причому $detC \neq 0$, а d — заданий n–вимірний вектор.

Припустимо, що вектор–функції

$$f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$$

із системи диференціальних рівнянь (1.8) та

$$g : D \times D \to \mathbb{R}^n \, (n \geq 2)$$

з нелінійних крайових умов (1.77) неперервні, де $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.8), який задовольняє нелінійним крайовим умовам (1.77), у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0, T] \to D$.

Покажемо, що замість задачі (1.8), (1.77) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (1.8) при певних параметризованих двоточкових крайових умовах, до яких треба приєднати відповідну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь для визначення числових значень введених параметрів.

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами замінимо значення компонент розв'язку (1.8), (1.77) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\begin{gathered} z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = \\ = col\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,, \\ \lambda := x(T) = col\,(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = \\ = col\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,. \end{gathered} \tag{1.78}$$

З використанням параметризації (1.78), нелінійні крайові умови (1.77) запишуться у вигляді:

$$Ax(0) + Cx(T) = d - g(z, \lambda). \tag{1.79}$$

Позначивши через

$$d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda),$$

параметризовані умови (1.79) виглядатимуть наступним чином:

$$Ax(0) + Cx(T) = d(z, \lambda). \tag{1.80}$$

Зауваження 1.3.1. *Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1.8), (1.77) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1.8), (1.80), які задовольняють додатковим умовам (1.78).*

Отже, замість крайової задачі (1.8), (1.77) будемо розглядати еквівалентну їй параметризовану задачу (1.8), (1.80) з лінійними крайовими умовами, до якої потрібно приєднати (1.78).

Для дослідження модифікованої задачі (1.8), (1.80) обґрунтуємо відповідну чисельно–аналітичну схему.

Припустимо, що функція f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) задовольняє умову Ліпшиця (1.16) з невід'ємною матрицею K, спектральний радіус якої задовольняє нерівність (1.17).

Крім того, нехай параметризована крайова задача (1.8), (1.80) така, що множина

$$D_{\beta_1} := \Bigg\{ z \in D : B\Bigg(z + \frac{t}{T}\left[C^{-1}d\left(z,\lambda\right) - \right.$$

$$\left. -(C^{-1}A + I_n)z \right], \frac{T}{2}\delta_D(f) \Bigg) \subset D, \forall\lambda \in D \Bigg\} \quad (1.81)$$

непорожня, тобто для всіх $\lambda \in D$ задовольняє умову (1.19).

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.8), (1.80) будуємо послідовність функцій $\{x_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням:

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds +$$

$$+ \frac{t}{T}\left[C^{-1}d\left(z,\lambda\right) - (C^{-1}A + I_n)z \right], \; m \in \mathbb{N}, \quad (1.82)$$

$$x_m\left(t,z,\lambda\right) = col\left(x_{m,1}\left(t,z,\lambda\right), x_{m,2}\left(t,z,\lambda\right), \ldots, x_{m,n}\left(t,z,\lambda\right)\right),$$

$$x_0(t,z,\lambda) = z + \frac{t}{T}\left[C^{-1}d\left(z,\lambda\right) - (C^{-1}A + I_n)z \right] \in D_{\beta_1},$$

де z та λ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що для всіх $m \geq 1$, $z \in D_{\beta_1}$ та $\lambda \in D$, функції x_m задовольняють лінійні двоточкові крайові умови (1.80) та початкові умови

$$x_m\left(0,z,\lambda\right) = z.$$

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (1.82) та відношення її граничної функції до розв'язку вихідної нелінійної крайової задачі (1.8), (1.77).

Теорема 1.3.1. *Нехай функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8), а також параметризовані крайові умови (1.80) задовольняють умови (1.16), (1.17) та (1.19) для множини D_{β_1}.*

Тоді при всіх фіксованих $z \in D_{\beta_1}$, $\lambda \in D$:

1. *Функції (1.82) неперервно диференційовні і задовольняють лінійні крайові умови:*

$$Ax_m(0,z,\lambda) + Cx_m(T,z,\lambda) = d(z,\lambda), \quad (1.83)$$

m=1,2,3,. . . .

2. *Послідовність функцій (1.82) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції*

$$x^*(t,z,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda). \tag{1.84}$$

3. *Гранична функція x^* задовольняє початкові умови*

$$x^*(0,z,\lambda) = z,$$

а також параметризовані лінійні двоточкові крайові умови

$$Ax^*(0,z,\lambda) + Cx^*(T,z,\lambda) = d(z,\lambda).$$

4. *Функція (1.84) для всіх $t \in [0,T]$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_0^t f(s,x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[C^{-1}d\,(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right], \tag{1.85}$$

або еквівалентної йому задачі Коші (1.86), (1.27) для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \Delta(z,\lambda), \tag{1.86}$$

де $\Delta : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^n$ — відображення, визначене формулою:

$$\Delta\,(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d\,(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds, \tag{1.87}$$

а підмножина D_{β_1} має вигляд (1.81).

5. *Справедлива оцінка відхилення функції x^* від її m–го наближення для всіх $t \in [0,T]$:*

$$|x^*(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| \leq \\ \leq \frac{20}{9} t\left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^m (I_n - Q)^{-1}\delta_D(f), \tag{1.88}$$

де матриця Q має вигляд (1.30), а вектор $\delta_D(f)$ визначений згідно з (1.15).

Доведення. Доведення проведемо аналогічно до Теореми 1.2.1. Покажемо, що послідовність функцій (1.82) є послідовністю Коші у Банаховому просторі $C([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Доведемо, що $x_m(t,z,\lambda)\in D$, для всіх $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times D_{\beta_1}\times D$, $m\in\mathbb{N}$.

Справді, з використанням оцінок Леми 1.1.1 та Леми 1.1.2, а також співвідношення (1.82), при $m=0$ отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&|x_1(t,z,\lambda)-x_0(t,z,\lambda)|\le\\
&\le\left|\int_0^t\left[f(s,x_0(s,z,\lambda))-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_0(s,z,\lambda))ds\right]ds\right|\le\\
&\le\alpha_1(t)\delta_D(f)\le\frac{T}{2}\delta_D(f). \qquad (1.89)
\end{aligned}
$$

Виходячи з нерівності (1.89), можемо зробити висновок, що $x_1(t,z,\lambda)\in D$, коли $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times D_{\beta_1}\times D$.

За індукцією не важко показати, що всі функції x_m, визначені згідно з (1.82), також належать множині D, $\forall m\in\mathbb{N}$, $t\in[0,T]$, $z\in D_{\beta_1}$, $\lambda\in D$.

Розглянемо різницю:

$$
\begin{aligned}
&x_{m+1}(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)=\int_0^t[f(s,x_m(s,z,\lambda))-\\
&-f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))]\,ds-\frac{t}{T}\int_0^T[f(s,x_m(s,z,\lambda))-\\
&-f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))]\,ds,\ m\in\mathbb{N}. \qquad (1.90)
\end{aligned}
$$

Позначимо $r_m(t,z,\lambda):=|x_m(t,z,\lambda)-x_{m-1}(t,z,\lambda)|$, $m\in\mathbb{N}$.

Використовуючи оцінку (1.1), та беручи до уваги умову Ліпшиця (1.16), отримаємо:

$$
\begin{aligned}
&r_{m+1}(t,z,\lambda)\le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s,z,\lambda)ds+\right.\\
&\left.+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(s,z,\lambda)ds\right],\ \forall m\in\mathbb{N}. \qquad (1.91)
\end{aligned}
$$

На підставі нерівності (1.89) одержимо:

$$r_1(t,z,\lambda)=|x_1(t,z,\lambda)-x_0(t,z,\lambda)|\le\alpha_1(t)\delta_D(f). \qquad (1.92)$$

На основі оцінок Леми 1.1.2, з урахуванням рекурентного співвідношення (1.3), із (1.91) при $m=1$ випливає:

$$r_2(t,z,\lambda) \le K\delta_D(f)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \right.$$
$$\left. +\frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] \le K\alpha_2(t)\delta_D(f).$$

За індукцією можна показати, що справедлива оцінка:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \le K^m \alpha_{m+1}(t)\delta_D(f), \tag{1.93}$$

$m=0,1,2,\ldots$, де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ обчислюються за формулою (1.3), а $\delta_D(f)$, визначений згідно з (1.15).

З урахуванням (1.4), із співвідношення (1.93) одержимо:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \le \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\delta_D(f), \tag{1.94}$$

$\forall m=1,2,3,\ldots$, де матриця Q має вигляд (1.30).

Тоді, беручи до уваги нерівність (1.94), розглянемо різницю:

$$|x_{m+j}(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)| \le |x_{m+j}(t,z,\lambda)-x_{m+j-1}(t,z,\lambda)| +$$
$$+ |x_{m+j-1}(t,z,\lambda)-x_{m+j-2}(t,z,\lambda)| + \ldots + |x_{m+1}(t,z,\lambda)-$$
$$-x_m(t,z,\lambda)| = \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,z,\lambda) \le$$
$$\le \frac{10}{9}\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{j} Q^{m+i}\delta_D(f) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\delta_D(f). \tag{1.95}$$

На підставі умови (1.17), спектральний радіус матриці Q вигляду (1.30) не перевищує *1*.

Тоді маємо:

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (I_n - Q)^{-1}, \ \lim_{m\to\infty} Q^m = O_n.$$

Отже, із нерівності (1.95) можемо зробити висновок, що, згідно з критерієм Коші, послідовність $\{x_m\}$, яка задається формулою (1.82), рівномірно збігається на множині $[0,T]\times D_{\beta_1}\times D$ до деякої граничної функції x^*.

Оскільки функції x_m послідовності (1.82) задовольняють крайові умови (1.80) при довільних значеннях параметрів, x^* також їх задовольняє. Переходячи у співвідношенні (1.82) до границі при $m \to \infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (1.85), а отже, є розв'язком задачі Коші (1.86), (1.27), де Δ — відображення, визначене згідно з (1.87).

Оцінка (1.88) є безпосереднім наслідком нерівності (1.95).

□

Встановимо зв'язок граничної функції послідовності (1.82) з розв'язком вихідної задачі з нелінійними крайовими умовами. З цією метою поряд із системою (1.8) розглянемо систему диференціальних рівнянь (1.38) з постійним збуренням у правій частині, підпорядковану початковим умовам (1.27).

Покажемо, що для всіх фіксованих $z \in D_{\beta_1}, \lambda \in D$ параметр μ можна вибрати так, що розв'язок $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ задачі Коші (1.38), (1.27) у той же час є розв'язком двоточкової параметризованої крайової задачі (1.38), (1.80).

Теорема 1.3.2. *Нехай $z \in D_{\beta_1}$, $\lambda \in D$ та $\mu \in \mathbb{R}^n$ — довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.8) виконуються всі умови Теореми 1.3.1.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (1.38), (1.27) задовольняв також і двоточкові параметризовані крайові умови (1.80), необхідно і достатньо, щоб параметр $\mu = \mu_{z,\lambda}$ у правій частині (1.38) був заданий рівністю:

$$\mu_{z,\lambda} := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s,z,\lambda))ds. \quad (1.96)$$

При цьому

$$x\left(t, z, \lambda, \mu\right) = x^*\left(t, z, \lambda\right), \quad (1.97)$$

де $x^*\left(\cdot, z, \lambda\right)$ — гранична функція послідовності (1.82).

Доведення. Достатність. Нехай у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.38) $\mu = \mu_{z,\lambda}$ має вигляд (1.96). З Теореми 1.3.1 випливає, що при заданих z і λ гранична функція (1.84) послідовності (1.82) є єдиним розв'язком крайової задачі (1.38), (1.80), коли $\mu = \mu_{z,\lambda}$.

Крім того, x^* задовольняє і початкові умови (1.27), тобто є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при $\mu = \mu_{z,\lambda}$. Таким чином, знайдено значення μ вигляду (1.96), для якого має місце (1.97).

Необхідність. Покажемо, що значення параметра μ вигляду (1.96) є єдиним, оскільки для будь–якого іншого $\mu = \bar{\mu} \neq \mu_{z,\lambda}$ розв'язок $x(t, z, \lambda, \bar{\mu})$ задачі Коші (1.41), (1.27) не задовольняє крайові умови (1.80).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існує хоча б два значення $\mu_{z,\lambda}$ та $\bar{\mu}$ ($\mu_{z,\lambda} \neq \bar{\mu}$) такі, що розв'язки $x = x(t, z, \lambda, \mu_{z,\lambda}) = x_{z,\lambda}(t)$ і $x = x(t, z, \lambda, \bar{\mu}) = \bar{x}(t)$ задач Коші (1.38), (1.27), (1.96) і (1.41), (1.27) відповідно у той же час задовольняють двоточкові крайові умови (1.80).

Очевидно, що функції $x_{z,\lambda}$ та $\bar{x}$ є розв'язками інтегральних рівнянь:

$$x_{z,\lambda}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{z,\lambda}(s))ds + \mu_{z,\lambda}t \tag{1.98}$$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t \tag{1.99}$$

відповідно.

За припущенням, $x_{z,\lambda}$, $\bar{x}$ задовольняють як крайові умови (1.80), так і початкові умови (1.27). Тому мають місце співвідношення:

$$Ax_{z,\lambda}(0) + Cx_{z,\lambda}(T) = d(z, \lambda), \tag{1.100}$$

$$x_{z,\lambda}(0) = z, \tag{1.101}$$

$$A\bar{x}(0) + C\bar{x}(T) = d(z, \lambda), \tag{1.102}$$

$$\bar{x}(0) = z, \tag{1.103}$$

звідки отримуємо, що

$$x_{z,\lambda}(T) = C^{-1}d(z, \lambda) - C^{-1}Az, \tag{1.104}$$

$$\bar{x}(T) = C^{-1}d(z, \lambda) - C^{-1}Az. \tag{1.105}$$

При цьому з рівностей (1.98), (1.99) при $t = T$ маємо:

$$\mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}[C^{-1}d(z, \lambda) - (C^{-1}A + I_n)z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{z,\lambda}(s))ds, \tag{1.106}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}[C^{-1}d(z, \lambda) - (C^{-1}A + I_n)z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds. \tag{1.107}$$

Підставивши (1.106), (1.107) в інтегральні рівняння (1.98), (1.99), одержуємо, що для всіх $t \in [0, T]$

$$x_{z,\lambda}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{z,\lambda}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{z,\lambda}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z], \quad (1.108)$$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}[C^{-1}d(z,\lambda) - (C^{-1}A + I_n)z]. \quad (1.109)$$

Через те, що $z \in D_{\beta_1}$ і $\lambda \in D$, то, аналогічно доведенню Теореми 1.3.1, виходячи з вигляду рівнянь (1.108), (1.109) та визначення множини D_{β_1}, можна встановити, що всі значення функцій $x_{z,\lambda}(t)$, $\bar{x}(t)$ при $t \in [0, T]$ містяться в області D.

Із співвідношень (1.108), (1.109) очевидно, що

$$x_{z,\lambda}(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t \big[f(s, x_{z,\lambda}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds - \\ - \frac{t}{T}\int_0^T \big[f(s, x_{z,\lambda}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds. \quad (1.110)$$

З формули (1.110), з урахуванням умови Ліпшиця (1.16), маємо, що функція

$$\omega(t) = |x_{z,\lambda}(t) - \bar{x}(t)|, t \in [0, T] \quad (1.111)$$

задовольняє інтегральні нерівності:

$$\omega(t) \le K\left[\int_0^t \omega(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T \omega(s)ds\right] \le \\ \le K\alpha_1(t)\max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0, T], \quad (1.112)$$

де $\alpha_1(t)$ має вигляд (1.2).

Використовуючи (1.112) рекурентно, приходимо до оцінки:

$$\omega(t) \le K^m \alpha_m(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0, T], \quad (1.113)$$

де $\forall m \in \mathbb{N}$, а функції α_m задаються за допомогою співвідношення (1.3).

З урахуванням (1.4), з нерівності (1.113) для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо:

$$\omega(t) \leq K\alpha_1(t)\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1} \max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0,T]. \tag{1.114}$$

Спрямовуючи в останній оцінці $m \to \infty$, і враховуючи властивість (1.17), приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s\in[0,T]} \omega(s) \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Це означає, згідно з (1.111), що функція $x_{z,\lambda}$ співпадає з $\bar{x}$, і тому, на основі формул (1.106) та (1.107), маємо, що $\mu_{z,\lambda} = \bar{\mu}$.

Одержане протиріччя завершує доведення теореми.

$\square$

З'ясуємо відношення граничної функції $x^* = x^*(t, z, \lambda)$ послідовності (1.82) до розв'язку параметризованої крайової задачі (1.8), (1.80) або еквівалентної їй задачі (1.8), (1.77).

Теорема 1.3.3. *Нехай для крайової задачі (1.8), (1.77) з множиною D_{β_1} виконуються умови (1.16), (1.17), (1.19).*

Тоді пара $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1.8), (1.80) тоді і тільки тоді, коли $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta(z, \lambda) = 0, \tag{1.115}$$

$$x^*(T, z, \lambda) - \lambda = 0, \tag{1.116}$$

де Δ — вектор–функція вигляду (1.87).

Доведення. Для доведення Теореми 1.3.3 достатньо застосувати Теорему 1.3.2 і зауважити, що диференціальне рівняння (1.86) співпадає з (1.8) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, λ^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(z^*, \lambda^*) = 0.$$

Враховуючи (1.78), та еквівалентність задач (1.8), (1.77) та (1.8), (1.80), очевидно, що $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ збігається з розв'язком параметризованої крайової задачі (1.8), (1.78), (1.80) тоді і тільки тоді, коли $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ задовольнятиме рівняння:

$$x^*(T, z, \lambda^*) - \lambda^* = 0.$$

Тобто пара $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої задачі (1.8), (1.80) тоді і тільки тоді, коли виконується (1.115), (1.116).

$\square$

Наступне твердження доводить, що визначальна система рівнянь (1.115), (1.116) виявляє усі можливі розв'язки задачі (1.8), (1.77) з нелінійними крайовими умовами.

Лема 1.3.1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 1.3.1. Крім того, існують деякі вектори $z \in D_{\beta_1}$ і $\lambda \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.115), (1.116).*

Тоді нелінійна крайова задачі (1.8), (1.77) має розв'язок $x(\cdot)$ вигляду:

$$x(t) = x^*(t, z, \lambda), \ t = [0, T], \tag{1.117}$$

такий, що:

$$\begin{aligned} x(0) &= z, \\ x(T) &= \lambda, \end{aligned} \tag{1.118}$$

де x^* є граничною функцією послідовності (1.82).

І навпаки: якщо крайова задача (1.8), (1.77) має розв'язок $x(\cdot)$, тоді він обов'язково має вигляд (1.117), і система визначальних рівнянь (1.115), (1.116) задовольняється при

$$\begin{aligned} z &= x(0), \\ \lambda &= x(T). \end{aligned}$$

Доведення. Будемо застосовувати Теорему 1.3.2 і Теорему 1.3.3. Якщо існують $z \in D_{\beta_1}$ і $\lambda \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.115), (1.116), то, на основі Теореми 1.3.3, функція (1.117) є розв'язком вихідної крайової задачі (1.8), (1.77). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком (1.8), (1.77), тоді ця функція є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ z &= x(0). \end{aligned}$$

Тому що $x(\cdot)$ задовольняє крайові умови (1.77), а отже, і параметризовані умови (1.80), при виборі параметрів z та λ згідно з (1.78), то з Теореми 1.3.3 випливає, що має місце рівність (1.117). Крім того,

$$\begin{aligned} \mu = \mu_{z,\lambda} &= 0, \\ z &= x(0). \end{aligned} \tag{1.119}$$

Однак, $\mu_{z,\lambda}$ має вигляд (1.96), тому перше рівняння (1.115) визначальної системи задовольняється, якщо

$$z = x(0), \lambda = x(T):$$

$$\Delta(z,\lambda) = 0. \tag{1.120}$$

Зрештою, із співвідношення (1.78) безпосередньо випливає, що друге рівняння (1.116) визначальної системи також має місце. Таким чином, ми вказали пари $(z,\lambda) = (x(0), x(T))$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.115), (1.116), що і завершує доведення.

□

Зауваження 1.3.2. *При деякому $m \geq 1$ визначимо функцію*

$$\Delta_m : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^n$$

згідно формули:

$$\Delta_m(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1}d(z,\lambda) - \left(C^{-1}A + I_n\right)z\right] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))ds, \tag{1.121}$$

де z та λ мають вигляд (1.78), а підмножина D_{β_1} визначена згідно з (1.81).

Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.8), (1.80) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь, що має вигляд:

$$\Delta_m(z,\lambda) = 0, \tag{1.122}$$

$$x_m(T,z,\lambda) - \lambda = 0, \tag{1.123}$$

де Δ_m — відображення вигляду (1.121), а x_m — вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (1.82).

Відмітимо, що, на відміну від (1.115), (1.116), система (1.122), (1.123) конструктивно будується на основі функції $x_m(\cdot,z,\lambda)$ і не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція

$$X_m(t) := x_m(t,\bar{z},\bar{\lambda}), t \in [0,T],$$

де $\bar{z}$, $\bar{\lambda}$ — розв'язки системи (1.122), (1.123), може бути прийнята за m–ве наближення до точного розв'язку задачі (1.8), (1.77).

Природньо очікувати, що за відповідних умов зі зростанням m системи рівнянь (1.115), (1.116) та (1.122), (1.123) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв'язку вихідної задачі (1.8), (1.77).

Обґрунтуємо необхідні та достатні умови існування розв'язків крайової задачі (1.8), (1.77). Для цього спочатку доведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1.3.2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.1.*

Тоді для кожного $m \geq 1$ та z, λ вигляду (1.78), для точної та наближеної визначальних функцій

$$\begin{gathered} \Delta : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^n, \\ \Delta_m : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{1.124}$$

де підмножина D_{β_1} має вигляд (1.81), визначених згідно з (1.87) та (1.121), справедлива оцінка:

$$|\Delta(z, \lambda) - \Delta_m(z, \lambda)| \leq \frac{10T}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \tag{1.125}$$

де K, Q, $\delta_D(f)$ задаються співвідношеннями (1.16), (1.30), (1.15) відповідно.

Доведення. Зафіксуємо параметри z, λ вигляду (1.78). З урахуванням умови Ліпшиця (1.16), оцінки (1.88) та рівності

$$\int_0^T \alpha_1(t) dt = \frac{T^2}{3}, \tag{1.126}$$

маємо:

$$\begin{gathered} |\Delta(z, \lambda) - \Delta_m(z, \lambda)| = \\ = \left| \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_m(s, z, \lambda)\right) ds - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x^*(s, z, \lambda)\right) ds \right| \leq \\ \leq \frac{1}{T} \int_0^T K \left| x^*(s, z, \lambda) - x_m(s, z, \lambda) \right| ds \leq \\ \leq \frac{1}{T} K \int_0^T \frac{10}{9} \alpha_1(s) Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) ds = \\ = \frac{10}{9T} K Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \int_0^T \alpha_1(s) ds = \end{gathered}$$

$$\frac{10T}{27} KQ^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f),$$

що і доводить лему.

$\square$

На основі систем визначальних рівнянь (1.115), (1.116) і (1.122), (1.123) введемо у розгляд відображення:

$$\begin{gathered} \Phi : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^{2n}, \\ \Phi_m : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^{2n}, \end{gathered} \tag{1.127}$$

які, для всіх z, λ з (1.78), мають вигляд:

$$\Phi(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \Delta(z,\lambda) \\ x^*(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.128}$$

$$\Phi_m(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \Delta_m(z,\lambda) \\ x_m(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}, \tag{1.129}$$

та розглянемо множину:

$$\Omega = D_1 \times \Lambda, \tag{1.130}$$

де $D_1 \subset D_{\beta_1}$, $\Lambda \subset D$ — деякі відкриті множини, а D_{β_1} визначена співвідношенням (1.81).

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.3.4. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.1 і можна вказати $m \geq 1$ та множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ вигляду (1.130) такі, що має місце співвідношення:*

$$|\Phi_m| \rhd_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} KQ^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{5T}{9} Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}, \tag{1.131}$$

де вектор $\delta_D(f)$ визначений згідно з (1.15).

Крім того, якщо індекс Брауера векторного поля Φ_m на множині Ω відносно нуля задовольняє нерівність

$$deg\,(\Phi_m, \Omega, 0) \neq 0, \tag{1.132}$$

тоді існує пара $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$ така, що функція

$$x^*(t) := x^*(t, z^*, \lambda^*) \tag{1.133}$$

при $t \in [0,T]$ є розв'язком нелінійної крайової задачі (1.8), (1.77) з початковою умовою

$$x^*(0) = z^* \in D_1. \tag{1.134}$$

Доведення. Доведемо, що векторні поля Φ та Φ_m гомотопні. Для цього введемо у розгляд сім'ю векторних відображень:

$$P(\theta, z, \lambda) := \Phi_m(z, \lambda) + \theta \left[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)\right], (z, \lambda) \in \partial\Omega, \qquad (1.135)$$

де $\theta \in [0, 1]$.

Очевидно, що $P(\theta, \cdot, \cdot)$ — неперервне на $\partial\Omega$ для кожного $\theta \in [0, 1]$. Крім того,

$$P(0, z, \lambda) = \Phi_m(z, \lambda), P(1, z, \lambda) = \Phi(z, \lambda),$$

для всіх $(z, \lambda) \in \partial\Omega$.

Для довільної пари $(z, \lambda) \in \partial\Omega$, з урахуванням (1.135), маємо:

$$|P(\theta, z, \lambda)| = |\Phi_m(z, \lambda) + \theta \left[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)\right]| \geq$$
$$\geq |\Phi_m(z, \lambda)| - |\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)|. \qquad (1.136)$$

З іншого боку, використовуючи позначення (1.128), (1.129), наближення (1.82) та оцінку (1.125), одержимо покомпонентні нерівності:

$$|\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)| \leq \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{5T}{9} Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}, \qquad (1.137)$$

звідки, на основі співвідношень (1.131), (1.136), (1.137), випливає, що:

$$|P(\theta, \cdot, \cdot)| \triangleright_{\partial\Omega} 0, \theta \in [0, 1]. \qquad (1.138)$$

Вираз (1.138) показує, що $P(\theta, \cdot, \cdot)$ не перетворюється в 0 для жодного значення $\theta \in [0, 1]$, тобто відображення (1.135) невироджене, а отже, векторні поля Φ_m та Φ гомотопні.

Беручи до уваги (1.132) та властивість інваріантності індексу Брауера відносно гомотопії, можемо зробити висновок, що

$$deg\left(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0\right) = deg\left(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0\right) \neq 0. \qquad (1.139)$$

Класичний топологічний результат [див. Теорему 1.1.2] гарантує існування пари:

$$(z^*, \lambda^*) \in \Omega \qquad (1.140)$$

такої, що справедлива рівність:

$$\Phi(z^*, \lambda^*) = 0.$$

Тому (z^*, λ^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (1.115), (1.116).

Беручи до уваги умови Теореми 1.3.3, приходимо до висновку, що функція (1.133) є розв'язком вихідної нелінійної двоточкової крайової задачі (1.8), (1.77) з початковою умовою (1.134). Останнє твердження завершує доведення. □

Розглянемо матрицю

$$R := \sup_{t\in[0,T]} \left| I_n - \frac{t}{T}\left(C^{-1}A + I_n\right)\right| \tag{1.141}$$

та вектор

$$\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right) := C^{-1}\left(g\left(z^0, \lambda^0\right) - g\left(z^1, \lambda^1\right)\right), \tag{1.142}$$

де g — функція, яка фігурує у крайових умовах (1.77).

Лема 1.3.3. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.1.*

Тоді гранична функція (1.84), як функція z та λ, задовольняє умову ліпшицевого типу наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\left|x^*\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x^*\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \le \\ \le \left[R + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right]\left|z^0 - z^1\right| + \\ + \left[I_n + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\alpha_1(t)\right]\left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|,\end{aligned} \tag{1.143}$$

де $z^j \in D_{\beta_1}$, $\lambda^j \in D$, $j = 0, 1$, $t \in [0, T]$, а матриця Q визначена формулою (1.30).

Доведення. Безпосередньо з виразу (1.82) випливає:

$$\begin{aligned} x_1\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_1\left(t, z^1, \lambda^1\right) = \left(z^0 - z^1\right) + \int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \\ \frac{t}{T}\int_0^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds + \frac{t}{T}\Big[C^{-1}d(z,\lambda) - C^{-1}g\left(z^0, \lambda^0\right) - \\ - \left(C^{-1}A + I_n\right) z^0 - C^{-1}d(z,\lambda) + C^{-1}g\left(z^1, \lambda^1\right) + \left(C^{-1}A + I_n\right) z^1\Big] = \\ = \left(z^0 - z^1\right) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)\int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \end{aligned}$$

$$-\frac{t}{T}\int_t^T\left[f\left(s,z^0\right)-f\left(s,z^1\right)\right]ds-\frac{t}{T}C^{-1}\left(g\left(z^0,\lambda^0\right)-g\left(z^1,\lambda^1\right)\right)-$$
$$-\frac{t}{T}\left[\left(C^{-1}A+I_n\right)\left(z^0-z^1\right)\right].$$

Використовуючи рекурентну формулу (1.3), та беручи до уваги співвідношення (1.141), (1.142), (1.2), (1.16), одержимо:

$$\left|x_1\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x_1\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le R\left|z^0-z^1\right|+\frac{t}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+$$
$$+K\left[\left(1-\frac{t}{T}I_n\right)\int_0^t ds+\frac{t}{T}\int_t^T ds\right]\left|z^0-z^1\right|=$$
$$=\left[R+\alpha_1(t)K\right]\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|, \quad (1.144)$$

для всіх $t\in[0,T]$.

Аналогічно, враховуючи вирази (1.82), (1.3) та (1.144), матимемо:

$$\left|x_2\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x_2\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le R\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+$$
$$+K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\left[\left(R+\alpha_1(s)K\right)\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|\right]ds+\right.$$
$$\left.+\frac{t}{T}\int_t^T\left[\left(R+\alpha_1(s)K\right)\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|\right]ds\right]\le$$
$$\le R\left|z^0-z^1\right|+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+$$
$$+K\left\{\left[R\alpha_1(t)+\alpha_2(t)K\right]\left|z^0-z^1\right|+K\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|\alpha_1(t)\right\}=$$
$$=\left[R+KR\alpha_1(t)+K^2\alpha_2(t)\right]\left|z^0-z^1\right|+$$
$$+K\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|\alpha_1(t)+\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|. \quad (1.145)$$

За індукцією можна показати, що:

$$\left|x_m\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x_m\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le\left[R+\sum_{i=1}^{m-1}K^iR\alpha_i(t)+K^m\alpha_m(t)\right]\times$$
$$\times\left|z^0-z^1\right|+\sum_{i=0}^{m-1}K^i\alpha_i(t)\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|. \quad (1.146)$$

З нерівності (1.146), з використанням оцінок (1.4), (1.17) та формули (1.30), отримаємо:

$$\left|x_m\left(t,z^0,\lambda^0\right)-x_m\left(t,z^1,\lambda^1\right)\right|\le$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \sum_{i=1}^{m-2} Q^i R \alpha_i(t) + \frac{10}{9} K Q^{m-1} \alpha_1(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K \alpha_1(t) \sum_{i=1}^{m-2} Q^i\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|. \tag{1.147}$$

При переході у (1.147) до границі при $m \to \infty$, одержимо:

$$\left|x^*\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x^*\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} R \alpha_1(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} \alpha_1(t)\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|.$$

Остання нерівність доводить лему.

□

Лема 1.3.4. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.1. Тоді для функції $\Delta : D_{\beta_1} \times D \to \mathbb{R}^n$ із системи визначальних рівнянь (1.115), (1.116) справедлива оцінка:*

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq \frac{1}{T} \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right| +$$

$$+ \left\{\frac{1}{T} \left|C^{-1} A + I_n\right| + K \left[R + \frac{10T}{27} K \left(I_n - Q\right)^{-1} R\right]\right\} \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ K \left[I_n + \frac{10T}{27} K \left(I_n - Q\right)^{-1}\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|, \tag{1.148}$$

де $z^j \in D_{\beta_1}$, $\lambda^j \in D$, j=0,1.

Доведення. Згідно із співвідношеннями (1.115), (1.16), (1.143) маємо:

$$\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right) = \frac{1}{T} \rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right) - \frac{1}{T} \left(C^{-1} A + I_n\right) \left(z^0 - z^1\right) +$$

$$+ \frac{1}{T} \int_0^T \left[f\left(s, x^*\left(s, z^1, \lambda^1\right)\right) - f\left(s, x^*\left(s, z^0, \lambda^0\right)\right)\right] ds. \tag{1.149}$$

А тоді, враховуючи (1.16), (1.141) та (1.126), із (1.149) отримаємо:

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq \frac{1}{T} \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right| +$$

$$+\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right|+\frac{1}{T}\int_0^T K\left|x^*\left(s,z^1,\lambda^1\right)-x^*\left(s,z^0,\lambda^0\right)\right|ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right|+$$

$$+K\left[\frac{1}{T}R\int_0^T ds+\frac{10}{9T}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\int_0^T\alpha_1(s)ds\right]\left|z^0-z^1\right|+$$

$$+K\left[\frac{1}{T}\int_0^T ds+\frac{10}{9T}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\int_0^T\alpha_1(s)ds\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|,$$

$$\left|\Delta\left(z^0,\lambda^0\right)-\Delta\left(z^1,\lambda^1\right)\right|\leq\frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|\left|z^0-z^1\right|+K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\left|z^0-z^1\right|+$$

$$+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{T}\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|+K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\cdot\left|z^0-z^1\right|+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\left|\rho\left(z^0,\lambda^0,z^1,\lambda^1\right)\right|,$$

що і доводить лему.

$\square$

Теорема 1.3.5. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.1. Крім того, існують деякий номер $m\in\mathbb{N}$ і пара*

$$\left(\bar z,\bar\lambda\right)\in\Omega,$$

де множина Ω має вигляд (1.130), такі, що покомпонентна нерівність:

$$\left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right|\leq\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\frac{1}{T}\left|\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right)\right|+$$

$$+\sup_{z\in D}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|+K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\left|z-\bar z\right|+$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right)+$$

$$+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f) \tag{1.150}$$

не справджується, де вектори $\delta_D(f)$ та ρ мають вигляд (1.15) та (1.142), матриці K, Q, R визначені згідно з (1.16), (1.30) і (1.141) відповідно, а матриці A, C фігурують у крайових умовах (1.77).

Тоді не існує пари $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$, для якої двоточкова задача (1.8), (1.77) з нелінійними крайовими умовами матиме розв'язок $x = x(t)$ такий, що:

$$x(0) = z^*,$$
$$x(T) = \lambda^*.$$

Доведення. Нехай $m \in \mathbb{N}$ та $\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right) \in D_{\beta_1} \times \Lambda$ — довільні. Покажемо, що при зроблених припущеннях система визначальних рівнянь (1.115), (1.116) не має жодного розв'язку на множині Ω вигляду (1.130). Доведемо це від супротивного. Припустимо, що пара $\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)$ є розв'язком (1.115), (1.116).

Згідно з Теоремою 1.3.3, розв'язок крайової задачі (1.8), (1.80) задається формулою (1.133). Використаємо оцінку (1.148), покладаючи

$$\left(z^0, \lambda^0\right) = \left(z^*, \lambda^*\right), \left(z^1, \lambda^1\right) = \left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right). \tag{1.151}$$

Тоді з (1.148) випливає:

$$\left|\Delta\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| \leq \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^*, \lambda^*, \bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| +$$
$$+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A + I_n\right| + K\left[R + \frac{10T}{27}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\right\}\left|z^* - \bar{z}\right| +$$
$$+K\left[I_n + \frac{10T}{27}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\rho\left(z^*, \lambda^*, \bar{z}, \bar{\lambda}\right). \tag{1.152}$$

З урахуванням нерівності (1.125) Леми 1.3.2, матимемо:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| \leq \left|\Delta\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| + \left|\Delta_m\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right) - \Delta\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\Delta\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| + \frac{10T}{27}KQ^{m-1}\delta_D(f). \tag{1.153}$$

Поєднуючи (1.153) та (1.152), можемо записати, що:

$$\left|\Delta\left(\bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| \leq \frac{1}{T}\left|\rho\left(z^*, \lambda^*, \bar{z}, \bar{\lambda}\right)\right| +$$
$$+\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A + I_n\right| + K\left[R + \frac{10T}{27}K\left(I_n - Q\right)^{-1}\right]\right\}\left|z^* - \bar{z}\right| +$$

$$+K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\rho\left(z^*,\lambda^*,\bar z,\bar\lambda\right)+$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^{m-1}\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f) \tag{1.154}$$

або

$$\left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right|\le\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\frac{1}{T}\left|\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right)\right|+$$

$$+\sup_{z\in D}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right|+K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}|z-\bar z|+$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z,\lambda,\bar z,\bar\lambda\right)+$$

$$+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f),$$

тобто отримали оцінку, яка співпадає з (1.150). Але, за припущенням теореми, для пари $(\bar z,\bar\lambda)$ покомпонентна нерівність (1.150) не виконується. Отримали протиріччя, яке означає, що визначальна система (1.115), (1.116) не має розв'язків на множині Ω. Тому, на основі Теореми 1.3.3, функція x^*, що визначена формулою (1.84), не є розв'язком крайової задачі (1.8), (1.80) при будь–якому виборі пари $(\bar z,\bar\lambda)$ з області Ω. Отже, згідно з Лемою 1.3.1, нелінійна крайова задача (1.8), (1.77) не має жодного розв'язку $x(\cdot)$, для якого $(x(0),x(T))$ належить області Ω.

□

Зауваження 1.3.3. *Згідно з Теоремою 1.3.5, можемо задати алгоритм для наближеного відшукання пари (z^*,λ^*), яка визначає розв'язок (1.133) вихідної крайової задачі (1.8), (1.77). Для цього подамо множину Ω вигляду (1.130) як об'єднання скінченої кількості підмножин:*

$$\Omega:=\cup_{i=1}^{N}\Omega_i=D_i\times\Lambda_i. \tag{1.155}$$

У кожній множині Ω_i вибираємо довільну точку

$$\left(\bar z^i,\bar\lambda^i\right)\in\Omega_i, \tag{1.156}$$

та для деякого m обчислюємо m–ве наближення $x_m\left(t,\bar z^i,\bar\lambda^i\right)$, користуючись рекурентним співвідношенням (1.82), а тоді знаходимо значення "визначальної функції" $\Delta_m\left(\bar z^i,\bar\lambda^i\right)$ згідно формули (1.121).

Беручи до уваги нерівність (1.150), виключаємо з (1.155) ті підмножини Ω_i, для яких нерівність:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)\right| \leq \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_i} \frac{1}{T}\left|\rho\left(z,\lambda,\bar{z}^i,\bar{\lambda}^i\right)\right| +$$

$$+\sup_{z\in D_i}\left\{\frac{1}{T}\left|C^{-1}A+I_n\right| + K\left[R+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}R\right]\right\}\left|z-\bar{z}^i\right| +$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega_i}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\right]\right\}\rho\left(z,\lambda,\bar{z}^i,\bar{\lambda}^i\right) +$$

$$+\frac{10T}{27}K\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f) \tag{1.157}$$

не виконується.

Це обумовлюється тим, що, згідно з Теоремою 1.3.5, вони не можуть містити пари (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок (1.133) крайової задачі (1.8), (1.77).

Решта підмножин

$$\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \ldots, \Omega_{i_s} \tag{1.158}$$

утворюють деяку множину

$$\Omega_{m,N} = D_{m,N} \times \Lambda_{m,N}, \tag{1.159}$$

таку, що тільки $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ може визначити розв'язок (1.133).

Коли N та m прямують до ∞, $\Omega_{m,N}$ "прямує" до

$$\Omega^* = D^* \times \Lambda^*, \tag{1.160}$$

яка може містити значення (z^*, λ^*), що визначає розв'язок крайової задачі (1.8), (1.77) у вигляді (1.133).

Кожну пару $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ розглядатимемо як наближення до (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок вихідної крайової задачі (1.8), (1.77).

У цьому випадку очевидно, що

$$|\tilde{z}-z^*| \leq \sup_{z\in D_{m,N}}|\tilde{z}-z|, \left|\tilde{\lambda}-\lambda^*\right| \leq \sup_{\lambda\in\Lambda_{m,N}}\left|\tilde{\lambda}-\lambda\right|, \tag{1.161}$$

а значення функції $x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$, яке визначається рекурсивним співвідношенням (1.82), може бути взяте в якості наближеного розв'язку крайової задачі (1.8), (1.77).

Теорема 1.3.6. *Нехай мають місце умови Теореми 1.3.1. Крім того, (z^*, λ^*) є розв'язком точної системи визначальних рівнянь (1.115), (1.116), а $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$ — довільна пара з множини $\Omega_{m,N}$.*

Тоді справедлива оцінка відхилення точного розв'язку

$$x^*(t, z^*, \lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \lambda^*)$$

від його апроксимації $x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$, що задається рекурентною формулою (1.82):

$$\left|x^*(t, z^*, \lambda^*) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) +$$

$$+ \sup_{z\in D_{m,N}} \left[R + \frac{10}{9} K\alpha_1(t)(I_n - Q)^{-1} R\alpha_1(t)\right] |z - \tilde{z}| +$$

$$+ \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}} \left[I_n + \frac{10}{9} K\alpha_1(t)(I_n - Q)^{-1}\right] \left|\rho\left(z, \lambda, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right|. \qquad (1.162)$$

Доведення. Використаємо співвідношення:

$$\left|x^*(t, z^*, \lambda^*) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \leq |x^*(t, z^*, \lambda^*) - x_m(t, z^*, \lambda^*)| +$$

$$+ \left|x_m(t, z^*, \lambda^*) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right|. \qquad (1.163)$$

Оцінимо перший доданок у правій частині (1.163) нерівністю (1.88):

$$|x^*(t, z^*, \lambda^*) - x_m(t, z^*, \lambda^*)| \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f). \qquad (1.164)$$

З урахуванням (1.147), другий доданок (1.163) будемо оцінювати наступним чином:

$$\left|x_m(t, z^*, \lambda^*) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \sum_{i=1}^{m-2} Q^i R\alpha_1(t) + \frac{10}{9} K Q^{m-1}\alpha_1(t)\right] |z^* - \tilde{z}| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K\alpha_1(t) \sum_{i=0}^{m-2} Q^i\right] \left|\rho\left(z^*, \lambda^*, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in D_{m,N}} \left[R + \frac{10}{9}K\left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right] |z - \tilde{z}| +$$

$$+ \sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}} \left[I_n + \frac{10}{9}K\alpha_1(t)\left(I_n - Q\right)^{-1}\right] \left|\rho\left(z, \lambda, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right|. \qquad (1.165)$$

Об'єднуючи (1.164) та (1.165), отримуємо нерівність (1.162), що і завершує доведення теореми.

□

Узагальнимо розглянутий підхід параметризації крайової задачі з нелінійними двоточковими крайовими умовами до дослідження багатоточкових нелінійних крайових задач.

1.3.2 Задачі з p–точковими нелінійними крайовими умовами

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (1.8), підпорядковану нелінійним крайовим умовам вигляду:

$$g\left(x\left(0\right), x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_{p-2}), x\left(T\right)\right) = 0, \qquad (1.166)$$

$t_i \in (0, T), i = \overline{1, p-2}$.

Припустимо, що функції

$$f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n,$$

з системи диференціальних рівнянь (1.8), та

$$g : D^p \to \mathbb{R}^n, \left(n \geq 2\right),$$

в умовах (1.166), неперервні, де $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.8), що задовольняє нелінійним p–точковим крайовим умовам (1.166), у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0, T] \to D$.

Для переходу до лінійних крайових умов, замінимо значення компонент розв'язку задачі (1.8), (1.166) у точках $t = 0$, $t = t_i$, $(i =$

$\overline{1, p-2})$ та $t = T$ параметрами:

$$
\begin{aligned}
z &:= x(0) = col\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,, \\
\eta_1 &:= x(t_1) = col\,(\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n})\,, \\
\eta_2 &:= x(t_2) = col\,(\eta_{21}, \eta_{22}, \ldots, \eta_{2n})\,, \\
&\cdots \\
\eta_{p-2} &:= x(t_{p-2}) = col\,(\eta_{p-2,1}, \eta_{p-2,2}, \ldots, \eta_{p-2,n})\,, \\
\lambda &:= x(T) = col\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,.
\end{aligned}
\tag{1.167}
$$

Перепишемо умови (1.166) наступним чином:

$$
\begin{aligned}
&Ax(0) + Cx(T) + g\,(x(0), x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_{p-2}), x(T)) = \\
&\qquad = Ax(0) + Cx(T),
\end{aligned}
\tag{1.168}
$$

де A та $C \equiv I_n$ — деякі фіксовані матриці.

З використанням параметризації (1.167), нелінійні p–точкові крайові умови (1.168) запишуться у вигляді двоточкових:

$$
Ax(0) + x(T) = Az + \lambda - g\,(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda)\,. \tag{1.169}
$$

Покладемо:

$$
d(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) := Az + \lambda - g\,(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda)\,. \tag{1.170}
$$

Приймаючи до уваги (1.170), параметризовані крайові умови (1.169) перепишуться наступним чином:

$$
Ax(0) + x(T) = d(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda). \tag{1.171}
$$

Розглянемо спеціальний спрощений випадок (1.171), коли $A \equiv O_n$:

$$
\begin{aligned}
x(0) &= z, \\
x(T) &= d(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda).
\end{aligned}
\tag{1.172}
$$

Таким чином, замість вихідної p–точкової крайової задачі з нелінійними крайовими умовами (1.8), (1.166), будемо досліджувати еквівалентну їй параметризовану задачу (1.8), (1.172) з розділеними двоточковими крайовими умовами.

Зауваження 1.3.4. *Множина розв'язків нелінійної p–точкової крайової задачі (1.8), (1.166) співпадає з множиною розв'язків задачі з лінійними умовами (1.8), (1.172), які задовольняють додаткові умови (1.167).*

Припустимо, що для функції f, яка є правою частиною системи диференціальних рівнянь (1.8), справедлива умова Ліпшиця (1.16) з невід'ємною матрицею K, радіус вектор $r(K)$ якої задовольняє нерівність (1.17), а крайова задача (1.8), (1.166) така, що підмножина

$$D_{\beta_2} := \left\{ z \in D : B\left(z, \max_{t\in[0,T]} \left| z + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{t}{T}\left[d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) - z \right] \right| \right) \subset D,\ \forall \eta_1, \eta_2, \lambda \in D \right\},$$

$t \in [0, T]$, непорожня, тобто задовольняє нерівність (1.19).

Побудуємо послідовність функцій згідно рекурентного співвідношення:

$$\begin{aligned} x_m(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) &:= z + \\ &+ \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda))ds - \\ &- \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda))ds + \\ &+ \frac{t}{T}\left[d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) - z \right],\ m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1.173}$$

$$x_0(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = z + \frac{t}{T}\left[d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) - z \right] \in\ D_\beta,$$

де $z \in D_{\beta_2}$, $\eta_i \in D$, $i = \overline{1, m-2}$, $\lambda \in D$ розглядаються як параметри.

Для параметризованої крайової задачі, аналогічно підрозділу 4.1., сформулюємо теореми про збіжність, контрольний параметр та зв'язок граничної функції з розв'язком вихідної p–точкової крайової задачі.

Теорема 1.3.7. *Нехай функція $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) та множина D_{β_2} задовольняють умови (1.16), (1.17), (1.19).*

Тоді для всіх фіксованих $z \in D_{\beta_2}$, $\eta_i \in D$ $(i = \overline{1, p-2})$, $\lambda \in D$:

1. *Функції (4.97) неперервно диференційовні та при всіх $m = 1, 2, 3, \ldots$ задовольняють параметризовані лінійні крайові умови:*

$$\begin{gathered} x_m(0, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = z, \\ x_m(T, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right). \end{gathered} \tag{1.174}$$

2. *Послідовність функцій (4.97) для $t \in [0, T]$ рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції*

$$\begin{gathered} x^*(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = \\ = \lim_{m \to \infty} x_m(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda). \end{gathered} \tag{1.175}$$

3. *Гранична функція x^* задовольняє лінійні параметризовані умови:*

$$\begin{gathered} x^*(0, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = z, \\ x^*(T, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = d(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda). \end{gathered} \tag{1.176}$$

4. *Функція (1.175) для всіх $t \in [0, T]$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\begin{aligned} x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x(s))ds + \\ + \frac{t}{T} \left[d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) - z \right], \end{aligned} \tag{1.177}$$

або, що те ж саме, розв'язком задачі Коші (1.178), (1.27) для модифікованої системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda), \tag{1.178}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) := \frac{1}{T} \left[d\left(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda\right) - z \right] - \\ - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s))ds. \end{aligned} \tag{1.179}$$

5. *Має місце оцінка відхилення функції x^* від її m–го наближення:*

$$\begin{aligned} |x^*(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - x_m(t, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda)| \leq \\ \leq \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \end{aligned} \tag{1.180}$$

де матриця Q має вигляд (1.30), а вектор $\delta_D(f)$ визначений згідно з (1.15).

Теорема 1.3.8. *Нехай мають місце умови Теореми 1.3.7.*

Тоді розв'язок $x = x(\cdot, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda, \mu)$ *розглядуваної задачі Коші (1.38), (1.27) задовольняє параметризовані крайові умови (1.172) тоді і тільки тоді, коли* $x = x(\cdot, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda, \mu)$ *співпадає з граничною функцією* $x^*(\cdot, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda, \mu)$ *послідовності (4.97).*

Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{p-2},\lambda} := \frac{1}{T}\left[d(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - z\right] - \\ - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda))ds.$$

Теорема 1.3.9. *Нехай для задачі (1.8), (1.166) виконуються умови (1.16), (1.17) та (1.19) для множини* D_{β_2}.

Тоді $x^*(\cdot, z^*, \eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_{p-2}^*, \lambda^*)$ *є розв'язком параметризованої крайової задачі (1.8), (1.172) тоді і тільки тоді, коли* z^*, η_1^*, η_2^*, $\ldots$, η_{p-2}^*, λ^* *задовольняють визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:*

$$\begin{gathered}
\Delta(z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) = 0, \\
x^*(t_1, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_1 = 0, \\
x^*(t_2, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_2 = 0, \\
\cdots \\
x^*(t_2, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_{p-2} = 0, \\
x^*(T, z, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-2}, \lambda) - \lambda = 0.
\end{gathered} \tag{1.181}$$

Має місце лема.

Лема 1.3.5. *Нехай виконуються умови Теореми 1.3.7. Крім того, існують вектори* $z \in D_{\beta_2}$, $\eta_1 \in D$, $\eta_2 \in D$, $\ldots$, $\eta_{p-2} \in D$ *і* $\lambda \in D$ *такі, що задовольняють систему визначальних рівнянь (1.181).*

Тоді нелінійна p–точкова крайова задача (1.8), (1.166) має розв'язок $x(\cdot)$ *такий, що*

$$\begin{gathered}
x(0) = z, \\
x(t_1) = \eta_1,\ x(t_2) = \eta_2,\ \ldots,\ x(t_{p-2}) = \eta_{p-2}, \\
x(T) = \lambda.
\end{gathered}$$

Більше того, він задається формулою:

$$x(t) = x^*(t, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda),\ t = [0, T], \tag{1.182}$$

де x^* *— гранична функція послідовності (4.97).*

І навпаки: якщо крайова задача (1.8), (1.166) має розв'язок $x(\cdot)$*, тоді він задається співвідношенням (1.182), і система визначальних рівнянь (1.181) задовольняється при*

$$\begin{gathered} z = x(0), \\ \eta_1 = x(t_1),\ \eta_2 = x(t_2),\ \dots,\ x(t_{p-2}) = \eta_{p-2}, \\ \lambda = x(T). \end{gathered}$$

Зауваження 1.3.5. *Для* $m \geq 1$ *введемо у розгляд функцію* $\Delta_m : D_{\beta_2} \times D^{p-1} \to \mathbb{R}^n$*, визначену співвідношенням:*

$$\begin{aligned} \Delta_m (z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) := \frac{1}{T} [d(z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) - z] - \\ - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_m(s, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda)) ds, \end{aligned} \tag{1.183}$$

де z, η_1, η_2, $\dots$, η_{p-2} *і* λ *мають вигляд (1.167).*

Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.8), (1.172) розглянемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\begin{gathered} \Delta_m(z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) = 0, \\ x_m (t_1, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_1 = 0, \\ x_m (t_2, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_2 = 0, \\ \dots \\ x_m (t_2, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) - \eta_{p-2} = 0, \\ x_m (T, z, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-2}, \lambda) - \lambda = 0. \end{gathered} \tag{1.184}$$

де x_m *— вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (4.98).*

Відмітимо, що, на відміну від (1.181), система (1.184) конструктивно будується на основі функції $x_m(\cdot, u, \lambda)$ *і не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція*

$$X_m(t) := x_m(t, \bar{z}, \bar{\lambda}), t \in [0, T],$$

де $\bar{z}$, $\bar{\lambda}$ задовольняють (1.184), може бути прийнята за m–ве наближення до точного розв'язку задачі (1.8), (1.166).

Із збільшенням m системи (1.181) і (1.184) достатньо близькі для забезпечення потрібної точності відшукання наближеного розв'язку вихідної нелінійної p–точкової крайової задачі (1.8), (1.166).

1.3.3 Приклад

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \ (:= f_1(t, x_1, x_2)), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{2}\, x_2^2 - \dfrac{1}{2}\, x_1 + \dfrac{t}{8}\, x_2 + \dfrac{t^2}{16} + \dfrac{9}{32} \ (:= f_2(t, x_1, x_2)), \end{cases} \tag{1.185}$$

$t \in [0, 1]$,
з нелінійними двоточковими крайовими умовами вигляду:

$$\begin{cases} x_1\,(0) + x_1\,(1) - [x_2\,(1)]^2 = \dfrac{3}{16}, \\ x_2\,(0) + x_1\,(1) - x_2\,(1) = -\dfrac{1}{16}. \end{cases} \tag{1.186}$$

Зауважимо, що точним розв'язком задачі (1.185), (1.186) є:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{1}{16}, \\ x_2^* = \dfrac{t}{4}. \end{cases}$$

Припустимо, що крайова задача (1.185), (1.186) визначена на множині:

$$D := \left\{ (x_1, x_2) : |x_1| \leq 1, |x_2| \leq \frac{3}{4} \right\}.$$

Крайові умови (1.186) можна записати у матрично–векторній формі, а саме:

$$Ax\,(0) + Cx\,(1) + g\,(x\,(0)\,, x\,(1)) = d, \tag{1.187}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 3/16 \\ -1/16 \end{pmatrix}$,

$$g\,(x\,(0)\,, x\,(1)) = \begin{pmatrix} -\,[x_2\,(1)]^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами введемо наступні параметри:

$$\begin{aligned} x(0) &= z := col(z_1, z_2), \\ x(1) &= \lambda := col(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{1.188}$$

З використанням параметризації (1.188), умова (1.187) запишеться у вигляді лінійної параметризованої крайової умови:

$$Ax(0) + Cx(1) = d - g(z, \lambda). \tag{1.189}$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо:

$$d(z, \lambda) := d - g(z, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 + \dfrac{3}{16} \\ -\dfrac{1}{16} \end{pmatrix}. \tag{1.190}$$

З урахуванням позначення (1.190), умови (1.189) виглядатимуть наступним чином:

$$Ax(0) + Cx(1) = d(z, \lambda). \tag{1.191}$$

За матрицю K, яка фігурує в умові Ліпшиця (1.16), можна взяти матрицю:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 7/8 \end{pmatrix},$$

причому має місце нерівність:

$$r(K) < 1.27.$$

Вектори $\delta_D(f)$ та β вигляду (1.15), (1.20) виберемо наступним чином:

$$\delta_D(f) \le \begin{pmatrix} 3/4 \\ 355/512 \end{pmatrix}, \beta \le \begin{pmatrix} 3/8 \\ 355/1024 \end{pmatrix}.$$

Параметризована задача (1.185), (1.191) є такою, що множина D_{β_1} визначається нерівностями:

$$\left| z_1 + t\left(\frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1\right) - \frac{3}{8} \right| \le 1,$$

$$\left| z_2 + t\left(\frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1\right) - \frac{355}{1024} \right| \le \frac{3}{4}.$$

Тобто, умова непорожності D_{β_1} також виконується.

Отже, до крайової задачі (1.185), (1.191) можна застосувати запропоновану модифікацію чисельно–аналітичного алгоритму, описану в даному розділі.

Послідовні наближення (4.97) для крайової задачі (1.185), (1.191) мають вигляд:

$$x_{m,1}(t,z,\lambda) := z_1 + \int_0^t f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda))ds - \\ - t\int_0^1 f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda))ds + t\left(\frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1\right),$$

$$x_{m,2}(t,z,\lambda) := z_2 + \int_0^t f_2(s, x_{m-1,2}(s,z,\lambda))ds - \\ - t\int_0^1 f_2(s, x_{m-1,2}(s,z,\lambda))ds + t\left(\frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1\right),$$

m=*1,2,3,* $\ldots$, де

$$x_{0,1}(t,z,\lambda) := z_1 + t\left(\frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1\right),$$

$$x_{0,2}(t,z,\lambda) := z_2 + t\left(\frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1\right).$$

При цьому m–а наближена визначальна система рівнянь буде наступною:

$$\Delta_{m,1}(z,\lambda) := \frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1 - \int_0^1 f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda))ds = 0,$$

$$\Delta_{m,2}(z,\lambda) := \frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1 - \int_0^1 f_2(s, x_{m-1,2}(s,z,\lambda))ds = 0,$$

$$x_{m,1}(1,z,\lambda) - \lambda_1 = 0,$$

$$x_{m,2}(1,z,\lambda) - \lambda_2 = 0.$$

Використовуючи пакет символьної математики Maple, одержуємо, що результатом першої ітерації з невідомими шуканими параметрами є такі значення компонент наближеного розв'язку:

$$x_{11} = (-0.5z_1 + 0.5\lambda_2^2 + 0.125)t^2 + (-1.5z_1 + 0.5\lambda_2^2 + 0.0625)t + z_1,$$

$$x_{12} = (-0.1666666666z_1^2 + 0.04166666666z_1 - 0.1666666666\lambda_2^4 -$$
$$-0.04166666666\lambda_2^2 + 0.3333333333\lambda_2^2 z_1 + 0.02083333333)t^3 +$$
$$+(0.5z_1 - 0.0625z_2 + 0.5z_1 z_2 - 0.25\lambda_2^2 - 0.5z_2\lambda_2^2 - 0.046875)t^2 +$$
$$(0.1666666667z_1^2 - 1.541666667z_1 + 0.0625z_2 - 0.5z_2 z_1 +$$
$$+0.1666666667\lambda_2^4 + 1.291666667\lambda_2^2 - 0.3333333334\lambda_2^2 z_1 +$$
$$+0.5z_2\lambda_2^2 + 0.2760416667)t + z_1.$$

Розв'язками системи визначальних рівнянь в першій ітерації є:

$$\lambda_1 = \lambda_{11} = 0.1875172131,$$
$$\lambda_2 = \lambda_{12} = 0.2500279256,$$
$$z_1 = z_{11} = 0.06249675048,$$
$$z_2 = z_{12} = 0.00001071250609.$$

Значення наближеного розв'язку у першій апроксимації є наступними:

$$x_{11}(t) = 0.1250086066t^2 + 0.00001185607t + 0.06249675048,$$
$$x_{12}(t) = 0.02083261607t^3 - 0.03125578528t^2 +$$
$$+0.2604403824t + 0.00001071250609.$$

На Рис. 1.3 зображено першу та другу компоненти точного та наближеного розв'язку у першій ітерації.

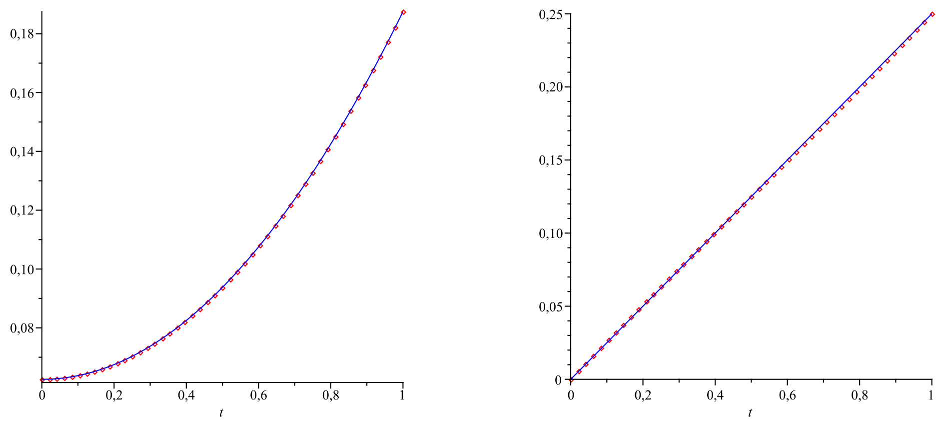


Рис. 1.3. Перша та друга компоненти точного розв'язку (лінія) та їх перші наближення (пунктир)

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першого наближення при $t \in [0,1]$ дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \le 3.3 \cdot 10^{-6},$$
$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \le 9.8 \cdot 10^{-4}.$$

Максимальне відхилення точного розв'язку від його третього наближення дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \le 1.4 \cdot 10^{-6},$$
$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \le 1.3 \cdot 10^{-5}.$$

Розрахунки показують доцільність та ефективність розв'язання розглядуваної задачі з використанням модифікації чисельно–аналітичного алгоритму, описаного у даному розділі.

1.4 Нелінійні крайові задачі з інтегральними граничними обмеженнями

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь (1.8), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$Ax(0) + \int_0^T P(s)x(s)ds + Cx(T) = d, \tag{1.192}$$

де $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — довільна матриця, $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — деяка задана вироджена матриця вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & O_{n-p} \end{pmatrix},$$

де $C_{11} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, $detC_{11} \neq 0$, C_{12} і C_{21} — матриці розмірності $p \times (n-p)$ та $(n-p) \times p$ відповідно, а $P : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ — неперервна матрична функція.

Припустимо, що матриці, які фігурують у крайових умовах (1.192), задовольняють нерівність:

$$det(I_{n-p} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}) \neq 0. \tag{1.193}$$

Нехай вектор–функція

$$f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$$

у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) неперервна, де $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена й обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.8), що задовольняє інтегральним крайовим умовам (1.192), у класі неперервно диференційових функцій $x : [0, T] \to D$.

Для переходу до лінійних двоточкових крайових умов у (1.192), введемо параметри:

$$\begin{gathered} z := x(0) = col\,(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = col\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,, \\ \lambda := \int_0^T P(s)x(s)ds = col\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,, \\ \eta := col\left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{p} x_{p+1}(T), x_{p+2}(T), \ldots, x_n(T)\right) = \\ = col\left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{p} \eta_{p+1}, \eta_{p+2}, \ldots, \eta_n\right). \end{gathered} \tag{1.194}$$

З використанням (1.194), інтегральні крайові умови (1.192) можуть бути записані у вигляді лінійних:

$$Ax(0) + C_1x(T) = d - \lambda + \eta, \tag{1.195}$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & I_{n-p} \end{pmatrix}, \tag{1.196}$$

а λ і η — параметри, визначені співвідношеннями (1.194).

Покладаючи

$$d(\lambda, \eta) := d - \lambda + \eta,$$

параметризовані крайові умови (1.195) запишуться у вигляді:

$$Ax(0) + C_1x(T) = d(\lambda, \eta). \tag{1.197}$$

Зауваження 1.4.1. *Якщо умова (1.193) не виконується, то завжди можна у (1.196) замість I_{n-p} підібрати матрицю $C_{22} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-p})$ так, щоб $det(C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}) \neq 0$.*

Зауваження 1.4.2. *Множина розв'язків нелінійної задачі з інтегральними крайовими умовами (1.8), (1.192) збігається з множиною розв'язків параметризованої задачі (1.8), (1.197), яка містить лінійні крайові умови, при виконанні (1.194).*

Таким чином, замість крайової задачі з інтегральними крайовими умовами (1.8), (1.192) досліджуємо еквівалентну їй задачу (1.8), (1.197), яка містить лінійні умови.

Відмітимо, що у (1.197) матриця C_1 — невироджена.

Нехай функція f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.8) задовольняє умову Ліпшиця (1.16).

Покладемо:

$$\mathcal{P} := \left\{ \int_0^T P(s)x(s)ds : x \in C\left([0,T], D\right) \right\}.$$

Припустимо, що крайова задача (1.8), (1.197) така, що множина $D_{\beta_3} \subset D$,

$$D_{\beta_3} := \left\{ z \in D : B\left(z + \frac{t}{T} C_1^{-1} \left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)\, z \right], \frac{T}{2}\delta_D(f) \right) \right\}$$

непорожня, тобто для всіх $\lambda \in \mathcal{P}$, $\eta \in D$, $t \in [0,T]$ має місце умова (1.19).

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.8), (1.197) введемо у розгляд наступну послідовність функцій:

$$\begin{aligned} x_m(t, z, \lambda, \eta) := z + \int_0^t & f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda, \eta))ds - \\ & \frac{t}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, z, \lambda, \eta))ds + \\ & \qquad + \frac{t}{T} C_1^{-1} \left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)\, z \right], m \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1.198}$$

$$x_m\left(t, z, \lambda, \eta\right) = col\left(x_{m,1}\left(t, z, \lambda, \eta\right), x_{m,2}\left(t, z, \lambda, \eta\right), \ldots, x_{m,n}\left(t, z, \lambda, \eta\right) \right),$$

$$x_0(t, z, \lambda, \eta) := z + \frac{t}{T} C_1^{-1} \left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)\, z \right],$$

де $t \in [0,T]$, а z, λ та η розглядаються як параметри.

Легко перевірити, що функції x_m задовольняють лінійні параметризовані крайові умови (1.197) для всіх $m \geq 1$, $z \in D_{\beta_3}$, $\eta \in D$, $\lambda \in \mathcal{P}$.

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (1.198).

Теорема 1.4.1. *Нехай для множини D_{β_3} має місце умова (1.19) і, більше того, припустимо, що матриця K, яка фігурує в умові Ліпшиця (1.16), задовольняє нерівність (1.17). Тоді для всіх фіксованих $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$ та $\eta \in D$:*

1. *Функції (1.198) неперервно диференційовні та задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$Ax_m(0, z, \lambda, \eta) + C_1 x_m(T, z, \lambda, \eta) = d(\lambda, \eta),$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

2. *Послідовність функцій (1.198) для $t \in [0, T]$ рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції:*

$$x^*(t, z, \lambda, \eta) = \lim_{m \to \infty} x_m(t, z, \lambda, \eta). \tag{1.199}$$

3. *Гранична функція x^* задовольняє параметризовані лінійні двоточкові крайові умови:*

$$Ax^*(0, z, \lambda, \eta) + C_1 x^*(T, z, \lambda, \eta) = d(\lambda, \eta).$$

4. *Функція (1.199) для всіх $t \in [0, T]$ є единим неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \\ + \frac{t}{T} C_1^{-1}\left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)\, z\right], \tag{1.200}$$

або, що те ж саме, є розв'язком задачі Коші (1.201), (1.27) для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(z, \lambda, \eta), \tag{1.201}$$

де $\Delta : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n$ — відображення, визначене співвідношенням:

$$\Delta\,(z, \lambda, \eta) := \frac{1}{T}\left[C_1^{-1}\left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)\, z\right] - \\ - \int_0^T f(s, x(s))ds\right]. \tag{1.202}$$

5. Має місце оцінка:

$$|x^*(t,z,\lambda,\eta) - x_m(t,z,\lambda,\eta)| \leq \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{t}{T}\right) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \tag{1.203}$$

де Q — матриця вигляду (1.30), а вектор $\delta_D(f)$ визначений згідно з (1.15).

Доведення. Доведемо, що послідовність функцій (1.198) є послідовністю Коші у Банаховому просторі $C([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Для цього спочатку покажемо, що $x_m(t,z,\lambda,\eta) \in D$, для всіх $(t,z,\lambda,\eta) \in [0,T] \times D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$, $m \geq 0$.

Дійсно, з використанням оцінок Леми 1.1.1 та Леми 1.1.2, із співвідношення (1.198) при $m = 0$ випливає, що:

$$\begin{aligned} &|x_1(t,z,\lambda,\eta) - x_0(t,z,\lambda,\eta)| \leq \\ &\leq \left| \int_0^t \left[f(t, x_0(s,z,\lambda,\eta)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_0(s,z,\lambda,\eta)) ds \right] dt \right| \leq \\ &\leq \alpha_1(t) \delta_D(f) \leq \frac{T}{2} \delta_D(f). \end{aligned} \tag{1.204}$$

Отже, із нерівності (1.204) одержуємо, що $x_1(t,z,\lambda,\eta) \in D$ тоді, коли $(t,z,\lambda,\eta) \in [0,T] \times D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$.

За індукцією, можна легко показати, що всі функції послідовності (1.198) також належать області D, $\forall m = 1,2,3,\ldots$, $t \in [0,T]$, $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$, $\eta \in D$.

Розглянемо різницю:

$$\begin{aligned} &x_{m+1}(t,z,\lambda,\eta) - x_m(t,z,\lambda,\eta) = \\ &= \int_0^t \big[f(s, x_m(s,z,\lambda,\eta)) - f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda,\eta)) \big] ds - \\ &- \frac{t}{T} \int_0^T \big[f(s, x_m(s,z,\lambda,\eta)) - f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda,\eta)) \big] ds, \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$, та позначимо:

$$r_m(t,z,\lambda,\eta) := |x_m(t,z,\lambda,\eta) - x_{m-1}(t,z,\lambda,\eta)|, m \in \mathbb{N}.$$

З оцінки (1.1) та умови Ліпшиця (1.16) маємо:

$$\begin{aligned} &r_{m+1}(t,z,\lambda,\eta) \leq \\ &\leq K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t r_m(s,z,\lambda,\eta) ds + \frac{t}{T} \int_t^T r_m(s,z,\lambda,\eta) ds \right], \end{aligned} \tag{1.205}$$

$\forall\, m$*=0,1,2, ...*

Згідно з (1.204) отримуємо, що

$$r_1(t,z,\lambda,\eta)=|x_1(t,z,\lambda,\eta)-x_0(t,z,\lambda,\eta)|\le\alpha_1(t)\delta_D(f).$$

З урахуванням оцінок Леми 1.1.2, з нерівності (1.205) при m= *1* випливає:

$$r_2(t,z,\lambda,\eta)\le K\delta_D(f)\left[\left(1-\tfrac{t}{T}\right)\int_0^t\alpha_1(s)ds+\tfrac{t}{T}\int_t^T\alpha_1(s)ds\right]\le \\ \le K\alpha_2\left(t\right)\delta_D(f).$$

За індукцією, з (1.205), легко встановити, що

$$r_{m+1}(t,z,\lambda,\eta)\le K^m\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f), \qquad (1.206)$$

m*=0,1,2,. . . ,* де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ обчислюються згідно з (1.3), а $\delta_D(f)$ заданий співвідношенням (1.15).

Беручи до уваги оцінки (1.4), з нерівності (1.206) отримуємо:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda,\eta)\le\frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\delta_D(f), \qquad (1.207)$$

$\forall m\in\mathbb{N}$, де матриця Q має вигляд (1.30).

Тоді, з урахуванням нерівності (1.207), матимемо:

$$\begin{aligned}&|x_{m+j}(t,z,\lambda,\eta)-x_m(t,z,\lambda,\eta)|\le\\ &\quad|x_{m+j}(t,z,\lambda,\eta)-x_{m+j-1}(t,z,\lambda,\eta)|+|x_{m+j-1}(t,z,\lambda,\eta)-\\ &\quad-x_{m+j-2}(t,z,\lambda,\eta)|+\ldots+|x_{m+1}(t,z,\lambda,\eta)-x_m(t,z,\lambda,\eta)|=\\ &\quad=\sum_{i=1}^{j}r_{m+i}(t,z,\lambda,\eta)\le\frac{10}{9}\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{j}Q^{m+i}\delta_D(f)=\\ &\quad=\frac{10}{9}\alpha_1(t)Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f).\end{aligned} \qquad (1.208)$$

Виходячи з умови (1.17), найбільше власне значення матриці Q вигляду (1.30) не перевищує *1*. Тому одержимо, що:

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\le\left(I_n-Q\right)^{-1},\ \lim_{m\to\infty}Q^m=O_n.$$

Таким чином, з нерівності (1.208) приходимо до висновку, що, згідно з критерієм Коші, послідовність $\{x_m\}$ вигляду (1.198) рівномірно збігається в області $(t, z, \lambda, \eta) \in [0, T] \times D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$ до граничної функції x^*.

Оскільки функції x_m послідовності (1.198) задовольняють параметризовані крайові умови (1.197) для всіх значень штучно введених параметрів, то гранична функція x^* також їх задовольняє. При переході у рівності (1.198) до границі при $m \to \infty$ одержуємо, що гранична функція є розв'язком інтегрального рівняння (1.200) та задачі Коші (1.201), (1.27), де $\Delta\,(z, \lambda, \eta)$ має вигляд (1.202).

□

Розглянемо задачу Коші (1.38), (1.27) для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині та сформулюємо теорему про керуючий параметр.

Теорема 1.4.2. *Нехай $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$, $\eta \in D$ і $\mu \in \mathbb{R}^n$ — задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.8) виконуються всі умови Теореми 1.4.1.*

Для того, щоб розв'язок $x = x(t, z, \lambda, \eta, \mu)$ задачі Коші (1.38), (1.27) задовольняв параметризовані крайові умови (1.197), необхідно і достатньо, щоб контрольний параметр μ мав вигляд:

$$\mu_{z,\lambda,\eta} := \frac{1}{T} C_1^{-1} [d(\lambda, \eta) - (A + C_1) z] - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda, \eta)) ds. \quad (1.209)$$

У цьому випадку

$$x\,(t, z, \lambda, \eta, \mu) = x^*\,(t, z, \lambda, \eta)\,, \quad (1.210)$$

де $x^*\,(\cdot, z, \lambda, \eta)$ — функція вигляду (1.199).

Доведення. Достатність. Припустимо, що $\mu = \mu_{z,\lambda,\eta}$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.38) має вигляд (1.209). Згідно з Теоремою 1.4.1, гранична функція (1.199) послідовності (1.198) є єдиним розв'язком крайової задачі (1.38), (1.197) для фіксованих значень параметрів z, λ і η, коли $\mu = \mu_{z,\lambda,\eta}$. Більше того, x^* задовольняє початкові умови (1.27), тобто є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при $\mu = \mu_{z,\lambda,\eta}$.

Отже, знайдено значення параметру μ вигляду (1.209), для якого має місце співвідношення (1.210).

Необхідність. Покажемо, що контрольний параметр μ вигляду (1.209) визначається єдиним чином, тому що для будь–яких інших

$\mu = \bar{\mu} \neq \mu_{z,\lambda,\eta}$ розв'язок $x\,(t, z, \lambda, \eta, \bar{\mu})$ задачі Коші (1.41), (1.27) не задовольняє параметризовані крайові умови (1.197).

Припустимо супротивне. Тоді існує щонайменше два значення $\mu_{z,\lambda,\eta}$ та $\bar{\mu}$ ($\mu_{z,\lambda,\eta} \neq \bar{\mu}$), для яких розв'язки $x = x\,(t, z, \lambda, \eta, \mu_{z,\lambda,\eta}) = x_{z,\lambda,\eta}(t)$ і $x = x\,(t, z, \lambda, \eta, \bar{\mu}) = \bar{x}(t)$ задач Коші (1.38), (1.27), (1.209) та (1.41), (1.27) відповідно також задовольняють двоточкові параметризовані крайові умови (1.197).

Очевидно, функції $x_{z,\lambda,\eta}$ та $\bar{x}$ є розв'язками наступних інтегральних рівнянь:

$$x_{z,\lambda,\eta}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds + \mu_{z,\lambda,\eta}t \tag{1.211}$$

та

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t. \tag{1.212}$$

За припущенням $x_{z,\lambda,\eta}(t)$, $\bar{x}(t)$ задовольняють параметризовані крайові умови (1.197) та початкові умови (1.27). Тому

$$Ax_{z,\lambda,\eta}(0) + C_1 x_{z,\lambda,\eta}(T) = d(\lambda, \eta), \tag{1.213}$$

$$x_{z,\lambda,\eta}(0) = z, \tag{1.214}$$

$$A\bar{x}(0) + C_1\bar{x}(T) = d(\lambda, \eta), \tag{1.215}$$

$$\bar{x}(0) = z. \tag{1.216}$$

Беручи до уваги (1.213)–(1.216), одержуємо:

$$x_{z,\lambda,\eta}(T) = C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - Az], \tag{1.217}$$

$$\bar{x}(T) = C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - Az]. \tag{1.218}$$

З урахуванням (1.211), (1.212), при $t = T$ маємо:

$$\mu_{z,\lambda,\eta} = \frac{1}{T}\left[C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds. \tag{1.219}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}\left[C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds. \tag{1.220}$$

Підставляючи (1.219), (1.220) в інтегральні рівняння (1.211), (1.212), отримаємо, що при $t \in [0, T]$

$$x_{z,\lambda,\eta}(t) = z + \int_0^t f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s))ds +$$
$$+ \frac{t}{T}\left[C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)z\right], \tag{1.221}$$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}\left[C_1^{-1}[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)z\right]. \quad (1.222)$$

Оскільки $z \in D_{\beta_3}$ і $\lambda \in \mathcal{P}$, то аналогічно доведенню Теореми 1.4.1, виходячи з вигляду рівнянь (1.221), (1.222) та визначення множини D_{β_3}, можна показати, що усі значення функцій $x_{z,\lambda,\eta}(t)$, $\bar{x}(t)$ належать області D.

З використанням (1.221), (1.222) очевидно, що

$$x_{z,\lambda,\eta}(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t \big[f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds - \\ - \frac{t}{T}\int_0^T \big[f(s, x_{z,\lambda,\eta}(s)) - f(s, \bar{x}(s))\big]ds. \quad (1.223)$$

На основі умови Ліпшиця (1.16), із співвідношення (1.223) маємо, що функції

$$\omega(t) = |x_{z,\lambda,\eta}(t) - \bar{x}(t)|, \ t \in [0, T], \quad (1.224)$$

задовольняють інтегральні нерівності:

$$\omega(t) \leq K\left[\int_0^t \omega(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T \omega(s)ds\right] \leq \\ \leq K\alpha_1(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0, T], \quad (1.225)$$

де $\alpha_1(t)$ визначена згідно з (1.2).

Використовуючи нерівність (1.225) рекурентно, приходимо до оцінки:

$$\omega(t) \leq K^m\alpha_m(t) \max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0, T], \quad (1.226)$$

де $m \in \mathbb{N}$, а функції $\alpha_m(t)$ мають вигляд (1.3).

Беручи до уваги (1.4), з (1.226) для всіх $m \in \mathbb{N}$ отримуємо:

$$\omega(t) \leq K\alpha_1(t)\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}K\right)^{m-1} \max_{s\in[0,T]} \omega(s), t \in [0, T].$$

При переході в останній нерівності до границі при $m \to \infty$, та з урахуванням умови (1.17), приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s\in[0,T]} \omega(s) \to 0.$$

Це означає, згідно з (1.224), що функція $x_{z,\lambda,\eta}$ співпадає з $\bar{x}$. А тому, із співвідношень (1.219) та (1.220) отримуємо:

$$\mu_{z,\lambda,\eta} = \bar{\mu}.$$

Одержане протиріччя доводить теорему.

□

З'ясуємо відношення граничної функції $x = x^*(t, z, \lambda, \eta)$ послідовності (1.198) до розв'язку параметризованої двоточкової крайової задачі (1.8), (1.197) або еквівалентної їй задачі (1.8) (1.192) з інтегральними крайовими умовами.

Теорема 1.4.3. *Нехай для вихідної задачі (1.8), (1.192) з множиною D_{β_3} виконуються умови (1.16), (1.17), (1.19).*

Функція $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ є розв'язком крайової задачі з інтегральними крайовими умовами (1.8), (1.192) тоді і тільки тоді, коли трійка

$$z^* = col(z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*),$$
$$\eta^* = col(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{p}, \eta_{p+1}^*, \eta_{p+2}^*, \ldots, \eta_n^*),$$
$$\lambda^* = col(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$$

задовольняє систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{1.227}$$

$$V(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{1.228}$$

$$x_i^*(T, z, \lambda, \eta) - \eta_i = 0, \;\; i = \overline{p+1, n}, \tag{1.229}$$

де

$$\Delta(z, \lambda, \eta) := \frac{1}{T} C_1^{-1} \left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1) z \right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda, \eta)) ds,$$

$$V(z, \lambda, \eta) := \int_0^T P(s) x^*(s, z, \lambda, \eta)\, ds - \lambda.$$

Доведення. Достатньо застосувати Теорему 1.4.2 та зауважити, що система диференціальних рівнянь (1.201) співпадає з (1.8) тоді і тільки тоді, коли трійка (z^*, λ^*, η^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(z^*, \lambda^*, \eta^*) = 0.$$

Більше того, беручи до уваги (1.194), очевидно, що $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ співпадає з розв'язком інтегральної крайової задачі (1.8), (1.192) тоді і тільки тоді, коли $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ задовольняє рівняння:

$$\int_0^T P(s)x^*(s, z, \lambda, \eta)\, ds - \lambda = 0,$$

$$x_i^*(T, z, \lambda, \eta) - \eta_i = 0, i = \overline{p+1, n}.$$

Це означає, що $x^*(\cdot, z^*, \lambda^*, \eta^*)$ є розв'язком вихідної крайової задачі (1.8), (1.192) тоді і тільки тоді, коли мають місце (1.227)–(1.229).

□

Наступне твердження доводить, що система визначальних рівнянь (1.227)–(1.229) визначає усі можливі розв'язки нелінійної задачі з інтегральними крайовими умовами (1.8), (1.192).

Лема 1.4.1. *Нехай мають місце умови Теореми 1.4.1 та існують вектори $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$ і $\eta \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.227)–(1.229).*

Тоді:

1. *Нелінійна крайова задача з інтегральними крайовими умовами (1.8), (1.192) має розв'язок $x(\cdot)$ такий, що:*

$$x(0) = z,$$
$$\textstyle\int_0^T P(s)x(s)ds = \lambda,$$
$$x_i(T) = \eta_i, i = \overline{p+1, n}$$

   Більше того, він заданий формулою:

$$x(t) = x^*(t, z, \lambda, \eta), \quad t = [0, T], \tag{1.230}$$

   де $x^*(t, z, \lambda, \eta)$ гранична функція послідовності (1.198).

2. *Якщо крайова задача (1.8), (1.192) має розв'язок $x(\cdot)$, тоді він має вигляд (1.230), і система визначальних рівнянь (1.227)–(1.229) задовольняється при*

$$z = x(0),$$
$$\lambda = \textstyle\int_0^T P(s)x(s)ds,$$
$$\eta_i = x_i(T), i = \overline{p+1, n}.$$

Доведення. Застосуємо Теорему 1.4.2 та Теорему 1.4.3. Якщо існують такі значення параметрів $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$ і $\eta \in D$, що задовольняють визначальну систему рівнянь (1.227)–(1.229), тоді, згідно з Теоремою 1.4.3, функція (1.230) є розв'язком вихідної крайової задачі (1.8), (1.192). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (1.8), (1.192), то ця функція є розв'язком задачі Коші (1.38), (1.27) при

$$\mu = 0,$$
$$z = x(0).$$

Оскільки $x(\cdot)$ задовольняє інтегральні умови (1.192) та еквівалентні їм параметризовані крайові умови (1.197), то, за Теоремою 1.4.2, має місце рівність (1.230). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda,\eta} = 0,$$
$$z = x(0),$$

де вектори λ, η визначені згідно з (1.194).

Але $\mu_{z,\lambda,\eta}$ має вигляд (1.209), тому перше рівняння (1.227) визначальної системи задовольняється при

$$z = x(0),$$
$$\lambda = \int_0^T P(s)x(s)ds,$$
$$\eta_i = x_i(T), i = \overline{p+1, n},$$
$$\Delta(z, \lambda, \eta) = 0.$$

Беручи до уваги (1.197), приходимо до висновку, що наступні два рівняння (1.228), (1.229) визначальної системи також мають місце. Отже, ми визначили трійку (z, λ, η), яка задовольняє співвідношення (1.227)–(1.229), що і доводить лему.

□

Зауваження 1.4.3. *Хоча Теорема 1.4.3 дає необхідні та достатні умови розв'язності та побудови розв'язку заданої крайової задачі, їх застосування стикається з труднощами, тому що функції вигляду*

$$\Delta : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n,$$

$$V : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n,$$

$$x^*(\cdot, z, \lambda, \eta) = \lim_{m\to\infty} x_m(\cdot, z, \lambda, \eta),$$

у рівняннях (1.227)–(1.229) зазвичай невідомі.

Цього можна уникнути, якщо використати властивості $x_m(\cdot, z, \lambda, \eta)$ вигляду (1.198) для певного фіксованого m, що дасть змогу замість точної визначальної системи (1.227)—(1.229) ввести у розгляд m–у наближену систему визначальних рівнянь вигляду:

$$\Delta_m(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{1.231}$$

$$V_m(z, \lambda, \eta) = 0, \tag{1.232}$$

$$x_{m,i}\,(T, z, \lambda, \eta) - \eta_i = 0,\ i = \overline{p+1, n} \tag{1.233}$$

де $\Delta_m : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n$ і $V_m : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n$ визначені згідно формул:

$$\Delta_m(z, \lambda, \eta) := \frac{1}{T}\Bigg[C_1^{-1}\left[d(\lambda, \eta) - (A + C_1)z\right] - \\ - \int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda, \eta))ds\Bigg], \tag{1.234}$$

$$V_m(z, \lambda, \eta) := \int_0^T P(s) x_m\,(s, z, \lambda, \eta)\, ds - \lambda, \tag{1.235}$$

а $x_m\,(\cdot, z, \lambda, \eta)$ — вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (1.198).

Важливо відмітити, що, на відміну від точної визначальної системи (1.227)–(1.229), m–а наближена система (1.231)–(1.233) містить тільки вирази відносно функції $x_m\,(\cdot, z, \lambda, \eta)$, а отже, побудована явно.

1.4.1 Необхідні умови існування розв'язків

Для встановлення необхідних умов існування розв'язків нелінійної задачі з інтегральними крайовими умовами доведемо наступні леми.

Лема 1.4.2. *Нехай мають місце умови Теореми 1.4.1.*

Тоді для будь–якого $m \geq 1$ для точної та наближеної визначальних функцій $\Delta : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n$ і $\Delta_m : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^n$ вигляду (1.202) та (1.234) відповідно має місце оцінка:

$$|\Delta(z, \lambda) - \Delta_m(z, \lambda)| \leq \frac{10T}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \tag{1.236}$$

де $(z, \lambda, \eta) \in D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$ — задані у (1.194) параметри, а K, Q, $\delta_D(f)$ визначені згідно з (1.16), (1.30) та (1.15) відповідно.

Доведення. Зафіксуємо значення z, λ, η вигляду (1.194). З використанням умови Ліпшиця (1.16), оцінки (1.203) та, беручи до уваги співвідношення (4.50), отримаємо:

$$|\Delta(z,\lambda,\eta) - \Delta_m(z,\lambda,\eta)| =$$

$$= \left| \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x_m(s,z,\lambda,\eta)\right) ds - \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x^*(s,z,\lambda,\eta)\right) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T K\left|x^*(s,z,\lambda,\eta) - x_m(s,z,\lambda,\eta)\right| ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}K\int_0^T \frac{10}{9}\alpha_1(s)Q^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f)ds =$$

$$= \frac{10}{9T}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f)\int_0^T \alpha_1(s)ds =$$

$$= \frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f),$$

що і завершує доведення.

□

Лема 1.4.3. *Нехай мають місце умови Теореми 1.4.1.*

Тоді для довільних $m \geq 1$ і $(z,\lambda,\eta) \in D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$ вигляду (1.194), для функцій $x^*(\cdot,z,\lambda,\eta)$ і $x_m(\cdot,z,\lambda,\eta)$, визначених згідно з (1.199) та (1.17) відповідно, має місце оцінка:

$$\left| \int_0^T P(s)\left[x^*\left(s,z,\lambda,\eta\right) - x_m\left(s,z,\lambda,\eta\right)\right] ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{10}{9}\bar{B}Q^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f), \quad (1.237)$$

де Q, $\delta_D(f)$ задані формулами (1.30), (1.15), і

$$\bar{B} = \int_0^T |P(s)|\alpha_1(s)ds.$$

Доведення. Зафіксуємо довільні значення z, λ, η вигляду (1.194). З використанням оцінки (1.203) одержимо:

$$\left| \int_0^T P(s)x^*\left(s,z,\lambda,\eta\right) ds - \int_0^T P(s)x_m\left(s,z,\lambda,\eta\right) ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^T |P(s)|\,|x^*(s,z,\lambda,\eta) - x_m(s,z,\lambda,\eta)|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^T |P(s)|\,\frac{10}{9}\alpha_1(s)Q^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f)ds =$$

$$= \frac{10}{9}\int_0^T |P(s)|\,\alpha_1(s)dsQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f) = \frac{10}{9}\bar{B}Q^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f).$$

Одержана нерівність доводить лему. □

На основі систем визначальних рівнянь (1.227)–(1.229) та (1.231)–(1.233) введемо у розгляд відображення $\Phi : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^{3n}$ і $\Phi_m : D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D \to \mathbb{R}^{3n}$, покладаючи:

$$\Phi(z,\lambda,\eta) := \begin{pmatrix} \Delta\left(z,\lambda,\eta\right) \\ V\left(z,\lambda,\eta\right) \\ x^*_{p+1}(T,z,\lambda,\eta) - \eta_{p+1} \\ x^*_{p+2}(T,z,\lambda,\eta) - \eta_{p+2} \\ \dots \\ x^*_n(T,z,\lambda,\eta) - \eta_n \end{pmatrix}, \tag{1.238}$$

$$\Phi_m(z,\lambda,\eta) := \begin{pmatrix} \Delta\left(z,\lambda,\eta\right) \\ V\left(z,\lambda,\eta\right) \\ x_{m,p+1}(T,z,\lambda,\eta) - \eta_{p+1} \\ x_{m,p+2}(T,z,\lambda,\eta) - \eta_{p+2} \\ \dots \\ x_{m,n}(T,z,\lambda,\eta) - \eta_n \end{pmatrix} \tag{1.239}$$

для всіх $(z,\lambda,\eta) \in D_{\beta_3} \times \mathcal{P} \times D$ вигляду (1.194).

Розглядемо множину:

$$\Omega = D_1 \times \Lambda_1 \times D_2, \tag{1.240}$$

де $D_1 \subset D_{\beta_3}$, $\Lambda_1 \subset D_0$, $D_2 \subset D$ — деякі обмежені відкриті множини.

Справедлива теорема.

Теорема 1.4.4. *Нехай виконуються умови Теореми 1.4.1 і можна визначити $m \geq 1$ та множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{3n}$ вигляду (1.240) такі, що* *справедливе співвідношення:*

$$|\Phi_m| \rhd_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} K Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{10}{9} \bar{B} Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{5T}{9} Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}. \qquad (1.241)$$

Якщо індекс Брауера векторного поля Φ_m в області Ω відносно 0 *задовольняє нерівність:*

$$deg\left(\Phi_m, \Omega, 0\right) \neq 0, \qquad (1.242)$$

тоді існує трійка $(z^*, \lambda^*, \eta^*) \in \Omega$ така, що функція

$$x^*(t) := x^*\left(t, z^*, \lambda^*, \eta^*\right) \qquad (1.243)$$

при $t \in [0, T]$ є розв'язком вихідної крайової задачі (1.8), (1.192) з початковою умовою (1.134).

Доведення. Доведемо, що векторні поля Φ і Φ_m гомотопні. З цією метою розглянемо "лінійну деформацію", визначену співвідношенням:

$$P(\theta, z, \lambda, \eta) := \Phi_m(z, \lambda, \eta) + \theta\left[\Phi(z, \lambda, \eta) - \Phi_m(z, \lambda, \eta)\right], \qquad (1.244)$$

де $(z, \lambda, \eta) \in \partial\Omega$, $\theta \in [0, 1]$.

Очевидно, що $P(\theta, \cdot, \cdot, \cdot)$ неперервне на $\partial\Omega$ для всякого $\theta \in [0, 1]$ і, більше того,

$$P(0, z, \lambda, \eta) = \Phi_m(z, \lambda, \eta), P(1, z, \lambda, \eta) = \Phi(z, \lambda, \eta),$$

для всіх $(z, \lambda, \eta) \in \partial\Omega$.

Для довільних $(z, \lambda, \eta) \in \partial\Omega$, з урахуванням (1.244), отримаємо:

$$|P\left(\theta, z, \lambda, \eta\right)| = |\Phi_m(z, \lambda, \eta) + \theta\left[\Phi(z, \lambda, \eta) - \Phi_m(z, \lambda, \eta)\right]| \geq$$
$$\geq |\Phi_m(z, \lambda, \eta)| - |\Phi(z, \lambda, \eta) - \Phi_m(z, \lambda, \eta)|. \qquad (1.245)$$

З іншого боку, використовуючи позначення (1.238), (1.239), рекурентне співвідношення (1.198) та оцінку (1.236), одержуємо покомпонентні нерівності:

$$|\Phi(z, \lambda, \eta) - \Phi_m(z, \lambda, \eta)| \leq \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} K Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{10}{9} \bar{B} Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{5T}{9} Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}, \qquad (1.246)$$

звідки, з урахуванням (1.241), (1.245), (1.246), випливає, що

$$|P(\theta,\cdot,\cdot,\cdot)| \rhd_{\partial\Omega} 0, \theta \in [0,1]. \tag{1.247}$$

У загальному, співвідношення (1.247) показує, що $P(\theta,\cdot,\cdot,\cdot)$ не перетворюється в "0" на $\partial\Omega$ при будь–яких значеннях $\theta \in [0,1]$, тобто перетворення (1.244) невироджене, а, отже, векторні поля Φ_m і Φ гомотопні.

Використовуючи (1.242) та властивість інваріантності індексу Брауера над гомотопією, приходимо до висновку, що

$$deg\,(\Phi(z,\lambda,\eta),\Omega,0) = deg\,(\Phi(z,\lambda,\eta),\Omega,0) \neq 0.$$

Класичний топологічний результат (див. [181] Theorem A.2.4) забезпечує існування векторів $(z^*,\lambda^*,\eta^*) \in \Omega$ таких, що

$$\Phi\,(z^*,\lambda^*,\eta^*) = 0.$$

Тому трійка (z^*,λ^*,η^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (1.227)–(1.229).

Застосовуючи Теорему 1.4.3, одержуємо, що функція (1.243) є розв'язком вихідної інтегральної крайової задачі (1.8), (1.192) з початковою умовою (1.134).

□

Зауваження 1.4.4. *Згідно з підходом, описаним вище, доведення розв'язності вихідної крайової задачі (1.8), (1.192) базується на Теоремах 1.4.1 та 1.4.4.*

Теорема 1.4.1 дає умови збіжності ітераційного методу, а за допомогою Теореми 1.4.4 можна встановити необхідні умови існування розв'язку вихідної задачі (1.8), (1.192).

Зауваження 1.4.5. *Для застосування Теореми 1.4.4 потрібно:*

1. *Обчислити вектор $\delta_D(f)$ згідно формули (1.15).*

2. *Побудувати функцію $x_m(\cdot,z,\lambda,\eta)$ аналітично для певного фіксованого значення $m = m_0$, вважаючи z, λ та η параметрами.*

3. *Обрати відповідну множину Ω та перевірити умови (1.241), (1.242) для $m = m_0$.*

Зауваження 1.4.6. *Для підтвердження умови (1.241) Теореми 1.4.4 у конкретних випадках потрібно використати рекурентне співвідношення (1.198) для обчислення функцій $x_m(\cdot, z, \lambda, \eta)$, які залежать від параметрів $z \in D_{\beta_3}$, $\lambda \in \mathcal{P}$, $\eta \in D$ і встановити, що хоча б одна з компонент вектора Φ_m у лівій частині (1.241) більша, ніж відповідна їй компонента у правій, для всіх точок $\partial\Omega$.*

Тоді у (1.242) необхідно перевірити, чи індекс Брауера вектора Φ_m відмінний від 0. У загальному, це доволі складне завдання. Однак, у ряді випадків, існують відносно прості критерії для дослідження цього питання.

Коли Φ_m — непарне, тобто має місце рівність:

$$\Phi_m(-z, -\lambda, -\eta) = -\Phi_m(z, \lambda, \eta),$$

а згідно з Теоремою 1.1.3, індекс Брауера є числом непарним, а отже, не дорівнює "0".

Безпосередньо з означення топологічного ступеня (див. [181], Definition A 2.1) випливає, що матриця Якобі функції Φ_m у співвідношенні (1.239) невироджена в її ізольованому нулі $(z_{m,0}, \lambda_{m,0}, \eta_{m,0})$, тобто

$$det \frac{\partial}{\partial z \partial \lambda \partial \eta} \Phi_m(z_{m,0}, \lambda_{m,0}, \eta_{m,0}) \neq 0,$$

а тоді має місце нерівність (1.242).

1.4.2 Приклад

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0.05x_2 + x_1x_2 - 0.005t^2 - 0.01t^3 + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 0.1 (:= f_1(t, x_1, x_2)), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0.5x_1 - x_2^2 + 0.01t^4 + 0.15t (:= f_2(t, x_1, x_2)), \end{cases} \tag{1.248}$$

підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$Ax(0) + \int_0^{\frac{1}{2}} P(s)x(s)ds + Cx\left(\frac{1}{2}\right) = d, \tag{1.249}$$

де $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P(t) = \begin{pmatrix} 0 & t/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv I_2, d = \begin{pmatrix} 13/256 \\ 7/960 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися, що точним розв'язком інтегральної задачі (1.248), (1.249) є система функцій:

$$\begin{cases} x_1^* = 0.1t, \\ x_2^* = 0.1t^2. \end{cases}$$

Припустимо, що крайова задача (1.248), (1.249) розглядається в області

$$D = \left\{(x_1, x_2) : |x_1| \leq 0.42, |x_2| \leq 0.4\right\}.$$

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами введемо параметри:

$$\begin{gathered} z := x(0) = col\left(x_1(0), x_2(0)\right) = col\left(z_1, z_2\right), \\ \lambda := \textstyle\int_0^T P(s)x(s)ds = col\left(\lambda_1, \lambda_2\right), \\ \eta_2 := x_2\left(\frac{1}{2}\right). \end{gathered} \tag{1.250}$$

З використанням (1.250), крайові умови (1.249) можуть бути записані як лінійні з невиродженою матрицею C_1:

$$Ax(0) + C_1 x\left(\frac{1}{2}\right) = d(\lambda, \eta), \tag{1.251}$$

де $\eta = col(0, \eta_2)$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d(\lambda, \eta) := d - \lambda + \eta$.

Легко переконатися, що матриця K, яка фігурує в умові Ліпшиця (1.16), матиме вигляд

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.5 & 0.8 \end{pmatrix}$$

і має місце нерівність:

$$r\left(K\right) < 0.84,$$

де $T = \frac{1}{2}$.

Вектори $\delta_D(f)$ та β можна вибрати наступним чином:

$$\delta_D(f) \le \begin{pmatrix} 0.18925 \\ 0.3278125 \end{pmatrix}, \ \beta \le \begin{pmatrix} 0.0473125 \\ 0.081953125 \end{pmatrix}.$$

Множина D_β визначена нерівностями:

$$|z_1 + 2t(0.05078125000 - \lambda_1 - z_1) - 0.0473125| \le 0.42,$$

$$|z_2 + 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2) - 0.081953125| \le 0.4,$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{P}$, $\eta_2 \in D$, а $\mathcal{P}$ така, що

$$\mathcal{P} = \{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1| \le 0.11, |\lambda_2| \le 0.31\}.$$

Функції послідовності (1.198) для системи диференціальних рівнянь (1.248), підпорядкованої лінійним параметризованим крайовим умовам (1.251), мають вигляд:

$$x_{m,1}(t,z,\lambda,\eta) := z_1 + \int_0^t f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m-1,2}(s,z,\lambda,\eta))\, ds - \\ - 2t\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\eta,\lambda), x_{m-1,2}(s,z,\eta,\lambda))\, ds + \\ + 2t(0.05078125 - \lambda_1 - z_1), \quad (1.252)$$

$$x_{m,2}(t,z,\lambda,\eta) := z_2 + \int_0^t f_2(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m-1,2}(s,z,\lambda,\eta))\, ds - \\ - 2t\int_0^{\frac{1}{2}} f_2(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m-1,2}(s,z,\lambda,\eta)))ds + \\ + 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2), \quad (1.253)$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots,$

$$x_{0,1}(t,z,\eta,\lambda) = z_1 + 2t(0.05078125 - \lambda_1 - z_1), \quad (1.254)$$

$$x_{0,2}(t,z,\eta,\lambda) = z_2 + 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2). \quad (1.255)$$

Наближена система визначальних рівнянь вигляду (1.231)–(1.233) є наступною:

$$\Delta_{m,1}(z,\lambda,\eta) := -2\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m-1,2}(s,z,\lambda,\eta))\, ds + \\ + 2(0.05078125 - \lambda_1 - z_1) = 0, \quad (1.256)$$

$$\Delta_{m,2}(z,\lambda,\eta) := -2\int_0^{\frac{1}{2}} f_2\left(s, x_{m-1,1}(s,z,\lambda,\eta), x_{m-1,2}(s,z,\lambda,\eta)\right) ds+ \\ + 2(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2) = 0, \quad (1.257)$$

$$V(z,\lambda,\eta) := \int_0^{\frac{1}{2}} P(s)x_m(s,z,\lambda,\eta)ds - \lambda = 0, \quad (1.258)$$

$$x_{m,2}\left(\frac{1}{2}, z, \lambda, \eta\right) - \eta_2 = 0, \quad (1.259)$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$.

На основі співвідношень (1.252)–(1.255), за допомогою Maple 13 отримано перше наближення до точного розв'язку, для всіх $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:

$$x_{11} = -0.0025t^4 + 0.1019859484t + 1.333333333t^3\lambda_1\lambda_2-$$
$$-1.333333333t^3\lambda_1\eta_2 + 2.666666666t^3\lambda_1 z_2 + 1.333333333t^3 z_1\lambda_2-$$
$$-1.333333333t^3 z_1\eta_2 + 2.666666666t^3 z_1 z_2 + t^2 z_1\eta_2 - t^2 z_1\lambda_2-$$
$$-3t^2 z_1 z_2 - t^2\lambda_1 z_2 - 0.3333333334t\lambda_1\lambda_2+$$
$$+0.3333333334t\lambda_1\eta_2 - 0.1666666667t\lambda_1 z_2 + 0.1666666666tz_1\lambda_2-$$
$$-0.1666666666tz_1\eta_2 - 2.001215278tz_1 - 0.6770833333t^3\lambda_2+$$
$$+0.06770833333t^3\eta_2 - 0.1354166667t^3 z_2 - 0.009722222219t^3\lambda_1-$$
$$-0.009722222219t^3 z_1 - 0.05t^2\lambda_2 + 0.05t^2\eta_2 - 0.04921875t^2 z_2+$$
$$+0.007291666665t^2 z_1 + 0.04192708333t\lambda_2 - 0.04192708333t\eta_2-$$
$$-1.997569444t\lambda_1 + 0.0003645833334t^2 - 0.001172960069t^3 + z_1,$$

$$x_{12} = -0.03571925636t - 1.333333333t^3\lambda_2^2 - 1.333333333t^3\eta_2^2-$$
$$-5.333333333t^3 z_2^2 - 0.5t^2\lambda_1 + 4t^2 z_2^2 + 0.3333333334t\lambda_2^2+$$
$$+0.3333333334t\eta_2^2 + 0.25tz_1 + 0.01944444444t^3\lambda_2-$$
$$-0.01944444444t^3\eta_2 + 0.03888888888t^3 z_2 - 0.01458333333t^2 z_2-$$
$$-0.5t^2 z_1 - 2.004861111t\lambda_2 + 2.004861111t\eta_2 + 0.25t\lambda_1 + 0.002t^5+$$
$$+2.666666666t^3\lambda_2\eta_2 - 5.333333333t^3\lambda_2 z_2+$$
$$+5.333333333t^3\eta_2 z_2 + 2t^2\lambda_2 z_2 - 2t^2\eta_2 z_2 - 0.6666666667t\lambda_2\eta_2+$$
$$+0.3333333334t\lambda_2 z_2 - 0.3333333334t\eta_2 z_2+$$
$$+0.100390625t^2 - 0.00007089120366t^3 + z_2.$$

Обчислення показують, що наближеними розв'язками системи визначальних рівнянь (1.256)–(1.259) при $m = 1$ є значення параметрів:

$$z_1 := z_{11} = -4.253290711 \cdot 10^{-7},$$

$$z_2 := z_{12} = 7.295492706 \cdot 10^{-7},$$

$$\lambda_1 := \lambda_{11} = 0.0007814848293,$$

$$\lambda_2 := \lambda_{12} = 0.007290937121,$$

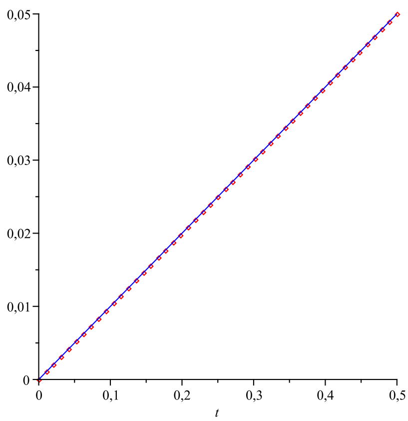
$$\eta_2 := \eta_{12} = 0.0249993271.$$

Перше наближення компонент розв'язку має вигляд:

$$x_{11} = -0.0025t^4 - 8.714713042 \cdot 10^{-8}t^3 + 0.001249955722t^2 + \\ + 0.09968792498t - 4.253290711 \cdot 10^{-7},$$

$$x_{12} = 0.002t^5 - 0.0008332398387t^3 + 0.1000000588t^2 + \\ + 0.00008047566353t + 7.295492706 \cdot 10^{-7}.$$

Графіки компонент точного та наближеного розв'язку вихідної крайової задачі у першому наближенні наведені на Рис. 1.4.



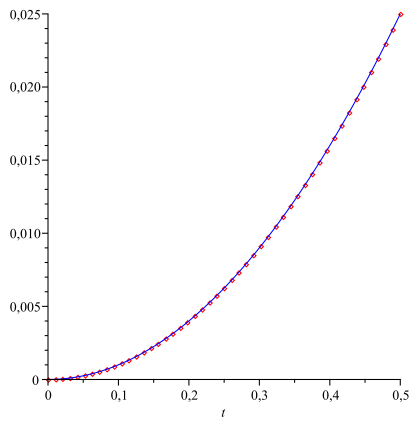


Рис. 1.4. Перша та друга компоненти точного (лінія) та наближеного розв'язків (пунктир) у першій ітерації

Похибка першої апроксимації є наступною:

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \le 2.1 \cdot 10^{-5},$$
$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \le 2.2 \cdot 10^{-6}.$$

На другому кроці ітерації отримано таке максимальне відхилення точного та наближеного розв'язку:

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x_1^*(t) - x_{21}(t)| \leq -4.03 \cdot 10^{-8},$$
$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x_2^*(t) - x_{22}(t)| \leq 1.2 \cdot 10^{-6}.$$

Розділ 2

Модифікації двостороннього методу дослідження крайових задач теорії звичайних диференціальних рівнянь

Теорія наближених методів дослідження крайових задач на сьогоднішній день є добре розвинута. Серед відомих методів слід виділити метод послідовних наближень Пікара, ідея якого виникла ще у XVIII столітті.

Основна цінність запропонованого методу полягала у простоті його обчислювальної схеми, показниковій швидкості збіжності [145], затуханні похибок заокруглень. У зв'язку з цим, метод знайшов широке застосування при побудові двосторонніх процесів, які монотонно знизу та зверху апроксимують шуканий розв'язок досліджуваної задачі і тим самим дають можливість на кожному кроці ітераційного процесу розв'язок охопити у „вилку" і одержати зручну апостеріорну оцінку його похибки.

Ідею двостороннього методу вперше висловив С.О.Чаплигін ще у 1899 році, а у 1919 році він виклав її в своїй першій у цьому напрямі роботі „Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений". Пізніше С.О.Чаплигін застосував свій метод до задачі Коші [154].

Двосторонній метод знайшов широке застосування в теорії диференціальних, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь [1, 2, 29, 41, 56, 76, 93, 141, 149, 154, 202].

У 1957 році було зроблено перший крок у застосуванні ідеї двостороннього методу для дослідження диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом. Але за допомогою побудованої модифікації знайдено тільки односторонні наближення [34]. У подальшому метод Чаплигіна було застосовано для побудови двосторонніх наближень для задач із запізнюючим аргументом [28].

Ідеї двостороннього методу наближеного інтегрування диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом відображено у роботах [44, 45, 99, 159, 252] та інших.

Питання побудови різних модифікацій двостороннього методу для дослідження і наближеного розв'язання різного класу задач залишається актуальним і на сьогоднішній день.

У другому розділі за допомогою побудованих модифікацій альтернуючого двостороннього методу досліджуються двоточкова та багатоточкова крайові задачі для систем нелінійних диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом та пропонується один підхід прискорення збіжності розглядуваного методу [79, 80, 106, 212].

2.1 Модифікація альтернуючого двостороннього методу дослідження двоточкових крайових задач

2.1.1 Постановка задачі, основні означення і позначення

Розглянемо крайову задачу

$$
\begin{aligned}
L_m Y(x) = F(x, Y(x), Y'(x), \dots, Y^{(m-2)}(x), Y(\theta_0(x)),\\
Y'(\theta_1(x)), \dots, Y^{(m-2)}(\theta_{m-2}(x)), Y(\psi_0(x)), Y'(\psi_1(x)), \dots,\\
Y^{(m-2)}(\psi_{m-2}(x))) \equiv F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))],\ x \in [a; b], \quad (2.1)
\end{aligned}
$$

де L_m – диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом

$$
l_m(Y(x)) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(x) Y^{(m-k)}(x) \qquad (2.2)
$$

і крайовими умовами

$$U_v(Y(x)) \equiv \sum_{s=0}^{m-1} \left[A_{v,s}Y^{(s)}(a) + B_{v,s}Y^{(s)}(b)\right] = 0,\ v = \overline{1,m}, \tag{2.3}$$

а

$$Y(x) = (y_i(x)),\ F[Y(x),\ Y(\Theta(x)),\ Y(\Psi(x))] = \\ (f_i[Y(x),\ Y(\Theta(x)),\ \ Y(\Psi(x))]) \text{ — вектори–стовпці,}$$

$$f_i[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \equiv f_i(x, Y(x), Y'(x), \ldots, Y^{(m-2)}(x), \\ Y(\theta_0(x)), Y'(\theta_1(x)), \ldots, Y^{(m-2)}(\theta_{m-2}(x)), \\ Y(\psi_0(x)), Y'(\psi_1(x)), \ldots, Y^{(m-2)}(\psi_{m-2}(x))),$$

$$Y^{(r)}(\theta_r(x)) \equiv (y_i^{(r)}(x - \theta_{i,r}(x))), Y^{(r)}(\psi_r(x)) \equiv (y_i^{(r)}(x + \psi_{i,r}(x))), \\ r = \overline{0, m-2}, i = \overline{1,n},$$

$P_k(x) = (p_{i,j}^k(x)), i, j = \overline{1,n}$ — операторні функції (матриці), неперервні при $x \in [a;b]$, причому $\det P_0(x) \neq 0$ на цьому відрізку, $A_{v,s}$ і $B_{v,s}$ — фіксовані лінійні оператори в дійсному просторі $\mathbb{R}^n$ [64].

Відхилення $\theta_{i,r}(x) \geq 0$, $\psi_{i,r}(x) \geq 0$ — відомі неперервні функції на відрізку $[a;b]$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_{i,r} = \{\overline{x}|\ x - \theta_{i,r}(x) \leq \overline{x} \leq a,\ x \in [a;b]\},$$
$$\overline{S}_{i,r} = \left\{\overline{\overline{x}}\right|\ b \leq \overline{\overline{x}} \leq x + \psi_{i,r}(x),\ x \in [a;b]\left.\right\}.$$

Позначимо $\overline{E} = \bigcup\limits_{i,r} \overline{E}_{i,r}$, $\overline{S} = \bigcup\limits_{i,r} \overline{S}_{i,r}$, $i = \overline{1,n}$, $r = \overline{0, m-2}$ і припустимо, що

$$\begin{aligned} Y(x)\ |_{\overline{E}} &= \Delta(x) \equiv (\delta_i(x)), \delta_i(x) \in C^{m-2}(\overline{E}), \\ Y(x)\ |_{\overline{S}} &= \Omega(x) \equiv (\omega_i(x)), \omega_i(x) \in C^{m-2}(\overline{S}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

причому задані вектори $\Delta(x)$ і $\Omega(x)$ задовольняють умови

$$\Delta(a) = Y(a),\ \Omega(b) = Y(b). \tag{2.5}$$

Дослідимо задачу: в просторі вектор–функцій $C_{m-1}^m[a;b] := = C^m(a;b) \cap C^{m-1}[a;b]$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь (2.1), який задовольняє умови (2.3)—(2.5).

Надалі будемо вважати, що $F[Y(x),\, Y(\Theta(x)),\, Y(\Psi(x))] \in C(\,\overline{D}\,)$, $\overline{D} \in \mathbb{R}^{3n(m-1)+1}$— замкнута область, проекція якої на вісь Ox є відрізок $[a;b] \in \overline{D}$, а однорідна крайова задача

$$L_m Y(x) = 0$$

має тільки тривіальний розв'язок при $x \in [a;b]$.

Тоді існує єдина функція Гріна оператора L_m $G(x,\xi) = (g_{ij}(x,\xi))$ [98], за допомогою якої крайову задачу (2.1)–(2.5) можна записати в еквівалентній інтегральній формі

$$Y(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ \int\limits_a^b G(x,\xi) F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))] d\xi \equiv \\ \equiv TF[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))],\ x \in [a;b]. \end{cases} \tag{2.6}$$

Враховуючи властивості функції Гріна $G(x,\xi)$, подамо її у вигляді

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi),$$

де

$$\frac{\partial^r G_1(x,\xi)}{\partial x^r} \ge 0,\ \frac{\partial^r G_2(x,\xi)}{\partial x^r} \le 0,\ r = \overline{0, m-2}, \tag{2.7}$$

при $(x,\xi) \in [a;b] \times [a;b]$.

І тоді (2.6) перепишеться наступним чином

$$Y(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ \int\limits_a^b G_1(x,\xi) F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))] d\xi + \\ + \int\limits_a^b G_2(x,\xi) F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))] d\xi = \\ = T_1 F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))] + \\ + T_2 F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi)), Y(\Psi(\xi))],\ x \in [a;b]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Означення 2.1.1. *Будемо говорити, що права частина (2.1) $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C_1(\overline{D})$, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1. $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C(\overline{D})$;

2. існує така вектор-функція

$$H[Z(x);V(x)] \equiv (h_i\,[x\ , Z(x),\ Z'(x), \ldots, Z^{(m-2)}(x), Z(\theta_0(x)),$$
$$Z'(\theta_1(x)), \ldots, Z^{(m-2)}(\theta_{m-2}(x)), Z(\psi_0(x)), Z'(\psi_1(x)), \ldots,$$
$$Z^{(m-2)}(\psi_{m-2}(x)); V(x), V'(x), \ldots, V^{(m-2)}(x), V(\theta_0(x)),$$
$$V'(\theta_1(x)), \ldots, V^{(m-2)}(\theta_{m-2}(x)), V(\psi_0(x)), V'(\psi_1(x)), \ldots,$$
$$V^{(m-2)}(\psi_{m-2}(x))\ ]) \in C(\overline{D}_1), \overline{D}_1 \in R^{6n(m-1)+1},$$

що:

(a) $H[Y(x);Y(x)] \equiv F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))]$;

(b) *для довільних з простору* $C^m_{m-1}[a;b]$ *вектор-функцій* $Z(x)$, $V(x) \in \overline{D}_1$, *які задовольняють нерівності*

$$\frac{d^r}{dx^r}(Z(x) - V(x)) \geq 0,\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2},$$

виконується умова

$$H[Z(x);V(x)] \geq H[V(x);Z(x)]; \tag{2.9}$$

(c) *вектор-функція* $H[Z(x);V(x)]$ *задовольняє в області її визначення* $\overline{D}_1$ *умову Ліпшиця з матрицею* $K = (k_{ij} \geq 0)$, $i, j = \overline{1, n}$, *тобто* $\forall\ Z(x),\ V(x),\ Z^*(x),\ V^*(x) \in \overline{D}_1$ *виконується умова:*

$$|H[Z(x);V(x)] - H[Z^*(x);V^*(x)]| \leq$$
$$\leq K \sum_{r=0}^{m-2} \left\{ \left|Z^{(r)}(x) - Z^{*(r)}(x)\right| + \left|V^{(r)}(x) - V^{*(r)}(x)\right| + \right.$$
$$+ \left|Z^{(r)}(\theta_r(x)) - Z^{*(r)}(\theta_r(x))\right| + \left|V^{(r)}(\theta_r(x)) - V^{*(r)}(\theta_r(x))\right| +$$
$$+ \left|Z^{(r)}(\psi_r(x)) - Z^{*(r)}(\psi_r(x))\right| +$$
$$\left. + \left|V^{(r)}(\psi_r(x)) - V^{*(r)}(\psi_r(x))\right| \right\}. \tag{2.10}$$

Тут і надалі $|F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))]| = (|f_1[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))]|, \ldots, |f_n[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))]|)$ і нерівність між векторами розуміємо покомпонентно.

Зауваження 2.1.1. *Якщо* $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C(\overline{D})$ *і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з другого, то завжди* $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C_1(\overline{D})$.

Дійсно, праву частину рівняння (2.1) можна подати у вигляді

$$F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \equiv F[Y^{+}(x), Y^{+}(\Theta(x)), Y^{+}(\Psi(x))]+$$
$$+\sum_{r=0}^{m-2} N_r Y^{+(r)}(x) - \sum_{r=0}^{m-2} N_r Y^{-(r)}(x) \equiv H[Y^{+}(x); Y^{-}(x)],$$

де

$$\sup_{\overline{D}} \left| \frac{\partial F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))]}{\partial Y^{(r)}(x)} \right| \leq N_r,\ r=\overline{0, m-2}.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial H[Y^{+}(x); Y^{-}(x)]}{\partial Y^{+(r)}(x)} \geq 0,\ \frac{\partial H[Y^{+}(x); Y^{-}(x)]}{\partial Y^{-(r)}(x)} \leq 0,$$

а, отже, всі умови визначення простору $C_1(\overline{D})$ виконуються.

Позначимо

$$W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x),$$
$$Z_p(x) = (z_{p,i}(x)),\ V_p(x) = (v_{p,i}(x)) \in C^{m}_{m-1}[a;b],$$
$$F^{p}(x) = H[Z_p(x); V_p(x)],\ F_p(x) = H[V_p(x); Z_p(x)],$$
$$F^{p}(x) = (f^{p}_{i}(x)),\ F_p(x) = (f_{p,i}(x)) - \text{вектори},$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots,\ i = \overline{1, n}.$$

2.1.2 Побудова альтернуючого двостороннього методу наближеного інтегрування крайової задачі (2.1)–(2.5)

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$ і $\{V_p(x)\}$ за формулами

$$Z_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ T_1 F_p(\xi) + T_2 F^{p}(\xi),\ x \in [a;b], \end{cases}$$
$$V_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ T_1 F^{p}(\xi) + T_2 F_p(\xi),\ x \in [a;b], \end{cases} \qquad (2.11)$$

де за нульове наближення $Z_0(x)$ та $V_0(x)$ вибираємо довільні вектор-функції з простору $C_{m-1}^m[a;b]$, які в області $\overline{D}_1$ задовольняють умови

$$
\begin{gathered}
W_0^{(r)}(x) \geq 0,\ \frac{d^r}{dx^r}\left(Z_0(x) - T_1F_0(\xi) - T_2F^0(\xi)\right) \geq 0, \\
\frac{d^r}{dx^r}\left(V_0(x) - T_1F^0(\xi) - T_2F_0(\xi)\right) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b].
\end{gathered} \tag{2.12}
$$

Лема 2.1.1. *У просторі $C_{m-1}^m[a;b]$ множина вектор–функцій нульового наближення $Z_0(x)$, $V_0(x)$, які задовольняють умови (2.3), непорожня.*

Доведення. Нехай $Z(x)$ довільна з простору $C_{m-1}^m[a;b]$ вектор-функція, яка задовольняє умови (2.4)—(2.5), а

$$
l_m(Z(x) - F[Z(x), Z(\Theta(x)), Z(\Psi(x))]) = \alpha(x).
$$

Очевидно, вектор-функція

$$
\Sigma(x) = (T_1 - T_2)\left|\alpha(\xi)\right|,\ x \in [a;b],
$$

в силу умов (2.7), задовольняє нерівності

$$
\frac{d^r}{dx^r}\left(\Sigma(x)\right) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b]. \tag{2.13}
$$

Покажемо, що якщо вектор-функції

$$
Z_0(x) = Z(x) + \Sigma(x),\ V_0(x) = Z(x) - \Sigma(x)
$$

належать області $\overline{D}_1$, то вони задовольняють умови (2.12).

Враховуючи (2.9), маємо

$$
\begin{gathered}
\frac{d^r}{dx^r}\left(Z_0(x) - T_1F_0(\xi) - T_2F^0(\xi)\right) = \frac{d^r}{dx^r}\left(T_1\left\{|\alpha(\xi)| + \alpha(\xi)\right\} - \right. \\
-T_2\left\{|\alpha(\xi)| - \alpha(\xi)\right\} - T_1\left\{F_0(\xi) - F[Z(\xi), Z(\Theta(\xi)), Z(\Psi(\xi))]\right\} - \\
\left. -T_2\left\{F^0(\xi) - F[Z(\xi), Z(\Theta(\xi)), Z(\Psi(\xi))]\right\}\right) \geq 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{d^r}{dx^r}\left(V_0(x) - T_1F^0(\xi) - T_2F_0(\xi)\right) = \frac{d^r}{dx^r}\left(-T_1\left\{|\alpha(\xi)| - \alpha(\xi)\right\} + \right. \\
+T_2\left\{|\alpha(\xi)| + \alpha(\xi)\right\} - T_1\left\{F^0(\xi) - F[Z(\xi), Z(\Theta(\xi)), Z(\Psi(\xi))]\right\} - \\
\left. -T_2\left\{F_0(\xi) - F[Z(\xi), Z(\Theta(\xi)), Z(\Psi(\xi))]\right\}\right) \leq 0,
\end{gathered}
$$

що і потрібно було довести. □

Ітераційний процес (2.11) при $x \in [a;b]$ можна подати у вигляді

$$Z_{p+1}(x) = Z_p(x) - \alpha_p(x);\ V_{p+1}(x) = V_p(x) - \beta_p(x), \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\alpha_p(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ Z_p(x) - T_1 F_p(\xi) - T_2 F^p(\xi),\ x \in [a;b], \end{cases} \\ \beta_p(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ V_p(x) - T_1 F^p(\xi) - T_2 F_p(\xi),\ x \in [a;b]. \end{cases}\end{gathered} \tag{2.15}$$

В силу (2.12) маємо

$$\alpha_0^{(r)}(x) \geq 0,\ \beta_0^{(r)}(x) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2}.$$

Із (2.14) при $x \in [a;b]$ одержуємо

$$Z_p(x) - Z_{p+1}(x) = \alpha_p(x);\ V_p(x) - V_{p+1}(x) = \beta_p(x), \tag{2.16}$$

а із (2.11), (2.15)

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}(x) = T_1 \left\{F_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right\} + T_2 \left\{F^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right\}, \\ \beta_{p+1}(x) = T_1 \left\{F^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right\} + T_2 \left\{F_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right\};\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}\alpha_p(x) + \alpha_{p+1}(x) = Z_p(x) - Z_{p+2}(x), \\ \beta_p(x) + \beta_{p+1}(x) = V_p(x) - V_{p+2}(x);\end{gathered} \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}(x) + \alpha_{p+2}(x) = \\ = T_1 \left\{F_p(\xi) - F_{p+2}(\xi)\right\} + T_2 \left\{F^p(\xi) - F^{p+2}(\xi)\right\}, \\ \beta_{p+1}(x) + \beta_{p+2}(x) = \\ = T_1 \left\{F^p(\xi) - F^{p+2}(\xi)\right\} + T_2 \left\{F_p(\xi) - F_{p+2}(\xi)\right\}.\end{gathered} \tag{2.19}$$

Із (2.16)—(2.17), враховуючи (2.7), (2.9) і (2.12), маємо, що якщо $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ належать області $\overline{D}_1$, то при $p = 0$ одержуємо

$$\begin{gathered}\frac{d^r}{dx^r}(Z_0(x) - Z_1(x)) \geq 0,\ \frac{d^r}{dx^r}(V_0(x) - V_1(x)) \leq 0, \\ \alpha_1^{(r)}(x) \leq 0,\ \beta_1^{(r)}(x) \geq 0,\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Отже, із (2.16) при $p = 1$ маємо

$$\begin{gathered}Z_1^{(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) \leq 0,\ V_1^{(r)}(x) - V_2^{(r)}(x) \geq 0, \\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}.\end{gathered} \tag{2.21}$$

Нехай при $x \in [a;b]$

$$\alpha_0^{(r)}(x) + \alpha_1^{(r)}(x) \geq 0,\ \beta_0^{(r)}(x) + \beta_1^{(r)}(x) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2}. \tag{2.22}$$

Тоді із (2.18) при $p = 0$ маємо

$$Z_0^{(r)} - Z_2^{(r)}(x) \geq 0,\ V_0^{(r)}(x) - V_2^{(r)}(x) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2}. \tag{2.23}$$

Враховуючи (2.20), (2.21), (2.23), переконуємось у справедливості наступних нерівностей

$$Z_1^{(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x),\ V_0^{(r)}(x) \leq V_2^{(r)}(x) \leq V_1^{(r)}(x),$$
$$x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2},$$

тобто, при виконанні умов (2.22), якщо вектор–функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ належать області $\overline{D}_1$, то і наступне наближення, яке обчислене за формулами (2.11), належить цій області.

Тоді при $x \in [a;b]$ із (2.17), (2.16) та (2.19) при $p = 1, 2, 0$ відповідно одержуємо

$$\alpha_2^{(r)}(x) \geq 0,\ \beta_2^{(r)}(x) \leq 0,$$
$$Z_2^{(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x) \geq 0,\ V_2^{(r)}(x) - V_3^{(r)}(x) \leq 0,$$
$$\alpha_1^{(r)}(x) + \alpha_2^{(r)}(x) \leq 0,\ \beta_1^{(r)}(x) + \beta_2^{(r)}(x) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2}.$$

А із (2.18) при $p = 1$ отримаємо

$$Z_1^{(r)} - Z_3^{(r)}(x) \leq 0,\ V_1^{(r)}(x) - V_3^{(r)}(x) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2}.$$

Таким чином,

$$Z_1^{(r)}(x) \leq Z_3^{(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x),$$
$$V_0^{(r)}(x) \leq V_2^{(r)}(x) \leq V_3^{(r)}(x) \leq V_1^{(r)}(x),\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}.$$

Повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції переконуємось, що якщо виконуються умови (2.22), то послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$, побудовані згідно формул (2.11), (2.12), задовольняють в області $\overline{D}_1$ нерівності:

$$\begin{gathered} Z_{2p+1}^{(r)}(x) \leq Z_{2p+3}^{(r)}(x) \leq Z_{2p+2}^{(r)}(x) \leq Z_{2p}^{(r)}(x), \\ V_{2p}^{(r)}(x) \leq V_{2p+2}^{(r)}(x) \leq V_{2p+3}^{(r)}(x) \leq V_{2p+1}^{(r)}(x), \\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2},\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.24}$$

Визначимо достатні умови рівномірної збіжності побудованих послідовностей вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ до єдиного в просторі вектор–функцій $C^m_{m-1}[a;b]$ розв'язку крайової задачі (2.1)—(2.5).

Нехай

$$\|\alpha_0(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[a;b]} |\alpha_{0,i}(x)| \right\}, \|\beta_0(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[a;b]} |\beta_{0,i}(x)| \right\},$$

$$\|W_0(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[a;b]} |w_{0,i}(x)| \right\},\ \varepsilon = \max_r \left\{ \sup_{[a;b]} \left[\left\|\alpha_0^{(r)}(x)\right\|, \right.\right.$$

$$\left.\left. \left\|\beta_0^{(r)}(x)\right\|, \left\|W_0^{(r)}(x)\right\|,\ \left\|W_0^{(r)}(\vartheta r(x))\right\|,\ \left\|W_0^{(r)}(\psi_r(x)\right\|\right] \right\},$$

$$R = \max_r \left\{ \sup_{[a;b]\times[a;b]} \left\| \frac{\partial^r G(x,\xi)}{\partial x^r} \right\|, \sup_{[a;b]\times[a;b]} \left\| \frac{\partial^r}{\partial x^r} (G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)) \right\| \right\},$$

$$\|K\| \le \frac{N}{6(m-1)}.$$

Із (2.17) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(x) = T_1 \left\{ F_0(\xi) - F_1(\xi) \right\} + T_2 \left\{ F^0(\xi) - F^1(\xi) \right\},$$
$$\beta_1(x) = T_1 \left\{ F^0(\xi) - F^1(\xi) \right\} + T_2 \left\{ F_0(\xi) - F_1(\xi) \right\}.$$

Тоді

$$\|\alpha_1(x)\| \le N\varepsilon \left(\int_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int_a^b |G_2(x,\xi)|\, d\xi \right) \le NR(b-a)\varepsilon,$$
$$\left\|\alpha_1^{(r)}(x)\right\| \le NR(b-a)\varepsilon,$$

$$\|\beta_1(x)\| \le N\varepsilon \left(\int_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int_a^b |G_2(x,\xi)|\, d\xi \right) \le NR(b-a)\varepsilon,$$
$$\left\|\beta_1^{(r)}(x)\right\| \le NR(b-a)\varepsilon,\ r = \overline{0, m-2}.$$

Аналогічно при $p = 1$ із (2.17) одержуємо

$$\|\alpha_2(x)\| \le N^2 R(b-a)\varepsilon \left(\int_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int_a^b |G_2(x,\xi)|\, d\xi \right) \le$$
$$\le (NR(b-a))^2 \varepsilon,\ \left\|\alpha_2^{(r)}(x)\right\| \le (NR(b-a))^2 \varepsilon,$$
$$\|\beta_2(x)\| \le N^2 R(b-a)\varepsilon \left(\int_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int_a^b |G_2(x,\xi)|\, d\xi \right) \le$$
$$\le (NR(b-a))^2 \varepsilon,\ \left\|\beta_2^{(r)}(x)\right\| \le (NR(b-a))^2 \varepsilon,\ r = \overline{0, m-2}.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ та $x \in [a;b]$ є справедливими оцінки

$$\left\{ \left\| \alpha_p^{(r)}(x) \right\|, \ \left\| \beta_p^{(r)}(x) \right\| \right\} \le (NR(b-a))^p \, \varepsilon, \ r = \overline{0, m-2}. \qquad (2.25)$$

Тоді

$$\|\alpha_{p+1}(x)\| \le N \left(NR(b-a)\right)^p \varepsilon \left(\int\limits_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int\limits_a^b |G_2(x,\xi)| \, d\xi \right) \le$$
$$\le (NR(b-a))^{p+1} \, \varepsilon, \quad \left\| \alpha_{p+1}^{(r)}(x) \right\| \le (NR(b-a))^{p+1} \, \varepsilon,$$
$$\|\beta_{p+1}(x)\| \le N \left(NR(b-a)\right)^p \varepsilon \left(\int\limits_a^b G_1(x,\xi) d\xi + \int\limits_a^b |G_2(x,\xi)| \, d\xi \right) \le$$
$$\le (NR(b-a))^{p+1} \, \varepsilon, \quad \left\| \beta_{p+1}^{(r)}(x) \right\| \le (NR(b-a))^{p+1} \, \varepsilon, \quad r = \overline{0, m-2}.$$

Таким чином, справедливими є нерівності (2.25) $\forall x \in [a;b]$ і $\forall p \in \mathbb{N}$. Якщо $NR(b-a) < 1$, то із оцінок (2.25) випливає, що

$$\lim_{p \to \infty} \alpha_p^{(r)}(x) = \lim_{p \to \infty} \beta_p^{(r)}(x) = 0, \ r = \overline{0, m-2}.$$

Враховуючи (2.16) та нерівності (2.24), маємо

$$\lim_{p \to \infty} Z_p^{(r)}(x) = \overline{Y}^{(r)}(x), \ \lim_{p \to \infty} V_p^{(r)}(x) = \underline{Y}^{(r)}(x).$$

Із (2.11)

$$W_{p+1}(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ -(T_1 - T_2)(F^p(\xi) - F_p(\xi)). \end{cases} \qquad (2.26)$$

Приймаючи до уваги нерівності (2.9), (2.12) та рівність (2.26), одержимо

$$W_{2p}^{(r)}(x) \ge 0, \ W_{2p+1}^{(r)}(x) \le 0.$$

На підставі вище введених позначень із (2.26) при $p = 0$ матимемо

$$\|W_1(x)\| = \|-(T_1 - T_2)(F^0(\xi) - F_0(\xi))\| \le NR(b-a)\varepsilon,$$
$$\left\| W_1^{(r)}(x) \right\| \le NR(b-a)\varepsilon, \ r = \overline{1, m-2}, \ x \in [a;b].$$

Аналогічним чином одержуємо

$$\|W_2(x)\| = \|-(T_1 - T_2)(F^1(\xi) - F_1(\xi))\| \le (NR(b-a))^2 \varepsilon,$$
$$\left\| W_2^{(r)}(x) \right\| \le (NR(b-a))^2 \varepsilon, \ r = \overline{1, m-2}.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$\left\|W_p^{(r)}(x)\right\| \leq (NR(b-a))^p \,\varepsilon,\ r = \overline{0, m-2}.$$

Тоді

$$\left\|W_{p+1}^{(r)}(x)\right\| \leq (NR(b-a))^p \,\varepsilon NR(b-a) = (NR(b-a))^{p+1} \,\varepsilon,$$
$$r = \overline{0, m-2}.$$

Таким чином, для довільного $p \in \mathbb{N}$ та $x \in [a; b]$ справедливими є оцінки

$$\left\|W_p^{(r)}(x)\right\| \leq (NR(b-a))^p \,\varepsilon,$$

тобто

$$\lim_{p\to\infty} W_p^{(r)}(x) = 0$$

при

$$NR(b-a) < 1, \tag{2.27}$$

а, отже,

$$\overline{Y}^{(r)}(x) = \underline{Y}^{(r)}(x) = Y^{(r)}(x),\ r = \overline{0, m-2}.$$

Теорема 2.1.1. *Нехай* $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C_1(\,\overline{D}\,)$ *і в області* $\overline{D}_1$ *існують вектор-функції нульового наближення* $Z_0(x)$, $V_0(x) \in C_{m-1}^m[a; b]$, *які задовольняють умови (2.12).*

Тоді послідовності $\{Z_p(x)\}$ *та* $\{V_p(x)\}$, *побудовані згідно формул (2.11), при виконанні умов (2.22), (2.27),* $Z_1(x)$, $V_1(x) \in \overline{D}_1$, *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку крайової задачі (2.1)—(2.5), причому в області* $\overline{D}_1$ *справедливі нерівності:*

$$\begin{gathered} Z_{2p+1}^{(r)}(x) \leq Z_{2p+3}^{(r)}(x) \leq Y^{(r)}(x) \leq Z_{2p+2}^{(r)}(x) \leq Z_{2p}^{(r)}(x), \\ V_{2p}^{(r)}(x) \leq V_{2p+2}^{(r)}(x) \leq Y^{(r)}(x) \leq V_{2p+3}^{(r)}(x) \leq V_{2p+1}^{(r)}(x), \\ x \in [a; b],\ r = \overline{0, m-2},\ p = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{2.28}$$

Доведення. Покажемо, що гранична функція $Y(x)$ є розв'язком крайової задачі (2.1)—(2.5). З цією метою ітераційний процес (2.11) подамо у вигляді:

$$Z_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ TF_p(\xi) + T_2\left\{F^p(\xi) - F_p(\xi)\right\},\ x \in [a; b], \end{cases}$$

$$V_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ TF^p(\xi) + T_2\left\{F_p(\xi) - F^p(\xi)\right\},\ x \in [a; b]. \end{cases}$$

Переходячи в останніх рівностях до границі при $p \to \infty$ і враховуючи, що

$$\lim_{p\to\infty}(F^p(\xi) - F_p(\xi)) = 0$$

при виконанні умови (2.27), одержуємо:

$$Y(x) = T\left\{H[Y(\xi);Y(\xi)]\right\} \equiv T\left\{F[Y(\xi),Y(\Theta(\xi)),Y(\Psi(\xi))]\right\},$$

тобто $Y(x)$ є розв'язком задачі (2.1)—(2.5).

Для доведення єдиності розв'язку $Y(x)$ крайової задачі (2.1) припустимо супротивне.

Нехай вектор–функція $\widetilde{Y}(x)$ також є розв'язком задачі (2.1)—(2.5). Тоді, використовуючи (2.6), при $x \in [a;b]$, маємо

$$Y(x) - \widetilde{Y}(x) = \int\limits_a^b G(x,\xi)\left(F[Y(\xi),Y(\Theta(\xi)),Y(\Psi(\xi))]-\right.$$

$$\left.-F[\widetilde{Y}(\xi),\widetilde{Y}(\Theta(\xi)),\widetilde{Y}(\Psi(\xi))]\right)d\xi = T\left(F[Y(\xi),Y(\Theta(\xi)),Y(\Psi(\xi))]-\right.$$

$$\left.-F[\widetilde{Y}(\xi),\widetilde{Y}(\Theta(\xi)),\widetilde{Y}(\Psi(\xi))]\right).$$

Нехай

$$L(x) = Y(x) - \widetilde{Y}(x),\ \max_r\left\{\sup_{[a;b]}\left\|L^{(r)}(x)\right\|\right\} = \mu,\ r = \overline{0,m-2}.$$

Використовуючи умову Ліпшиця , можемо записати:

$$\|L(x)\| \le R(b-a)\left\|F[Y(\xi)] - F[\widetilde{Y}(\xi)]\right\| \le$$

$$\le R\frac{N}{6(m-1)}3(m-1)\mu(b-a) = \frac{RN\mu(b-a)}{2}.$$

Аналогічно одержуємо

$$\left\|L^{(r)}(x)\right\| \le \frac{RN\mu(b-a)}{2}.$$

Повторюючи попередні міркування, маємо

$$\|L(x)\| \le R(b-a)\left\|F[Y(\xi)] - F[\widetilde{Y}(\xi)]\right\| \le$$

$$\le \frac{N}{6(m-1)}3(m-1)\frac{R(b-a)\mu}{2}R(b-a) = \left(\frac{RN(b-a)}{2}\right)^2\mu,$$

$$\left\|L^{(r)}(x)\right\| \le \left(\frac{RN(b-a)}{2}\right)^2\mu.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$

$$\max_r \left\{ \sup_{[a;b]} \left\| L^{(r)}(x) \right\| \right\} \leq \left(\frac{RN(b-a)}{2} \right)^p \mu. \tag{2.29}$$

Тоді легко бачити, що на наступному кроці одержуємо

$$\max_r \left\{ \sup_{[a;b]} \left\| L^{(r)}(x) \right\| \right\} \leq \left(\frac{RN(b-a)}{2} \right)^{p+1} \mu,$$

тобто для довільного $p \in \mathbb{N}$ справедливими є оцінки (2.29).

Але, при досить великих p і виконанні умови (2.27), права частина (2.29) є як завгодно мала величина, тобто $L(x) \equiv 0$ при $x \in [a; b]$. А це означає, що $Y(x)$ є єдиний розв'язок задачі (2.1)—(2.5).

Доведемо справедливість нерівностей (2.28).

Для цього припустимо супротивне. Нехай в довільній точці $x_0 \in (a; b)$ для деякого $p = 2l$ виконується, наприклад, нерівність $Y(x_0) > Z_{2l}(x_0)$, тобто $Y(x_0) - Z_{2l}(x_0) > 0$. Тоді, згідно (2.24), для довільного $p \in \mathbb{N}$ в деякому околі даної точки при $r = 0$ маємо

$$Z_{2l+2p}(x) \leq Z_{2l}(x) < Y(x).$$

Але тоді послідовність вектор-функцій $\{Z_{2l+2p}(x)\}$ при $p \to \infty$ не збігається в заданій точці до розв'язку $Y(x)$. А це суперечить раніше доведеному.

Аналогічно можна довести справедливість всіх нерівностей (2.28) □

Зауваження 2.1.2. *Вектор-функції $Z_{p+1}(x)$ та $V_{p+1}(x)$ не задовольняють усі крайові умови (2.3). Тому за $p+1$-ше наближення приймаємо функцію $\frac{1}{2}(Z_{p+1}(x) + V_{p+1}(x))$, яка задовольняє ці умови.*

Теорема 2.1.2. *Нехай у крайовій задачі (2.1) вектор-функція $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \in C_1(\overline{D})$ і в просторі $C^m_{m-1}[a; b]$ існує така вектор–функція $V_0(x)$ ($Z_0(x)$), яка задовольняє умови (2.3) — (2.5), що*

$$V_0^{(r)}(x) \leq 0, \ \frac{d^r}{dx^r}(T_1 H[V_0(\xi); 0] + T_2 H[0; V_0(\xi)]) \leq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}(V_0(x) - T_1 H[0; V_0(\xi)] - T_2 H[V_0(\xi); 0]) \leq 0, \ x \in (a; b).$$

$$\left(\begin{array}{c} Z_0^{(r)}(x) \geq 0,\ \dfrac{d^r}{dx^r}(T_1H[Z_0(\xi);0] + T_2H[0;Z_0(\xi)]) \geq 0, \\ \dfrac{d^r}{dx^r}(Z_0(x) - T_1H[0;Z_0(\xi)] - T_2H[Z_0(\xi);0]) \geq 0,\ x \in (a;b). \end{array}\right)$$

Тоді розв'язок задачі (2.1)—(2.5) в області $\overline{D}_1$ при виконанні умов (2.27) задовольняє нерівності $Y^{(r)}(x) \leq 0,\ \left(Y^{(r)}(x) \geq 0\right),\ r = \overline{0, m-2}$.

Доведення. Нехай у просторі $C^m_{m-1}[a;b]$ існує вектор-функція $V_0(x)$, для якої виконуються умови Теореми 2.1.2. Тоді вектор–функції $Z_0(x) \equiv 0$ і $V_0(x)$ задовольняють умови

$$\begin{gathered} \alpha_0^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r}(-T_1F_0(\xi) - T_2F^0(\xi)) \geq 0, \\ \beta_0^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r}(V_0(x) - T_1F^0(\xi) - T_2F_0(\xi)) \leq 0, \\ W_0(x) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b]. \end{gathered}$$

Таким чином, вектор–функції $Z_0(x) \equiv 0$ і $V_0(x)$ є двостороннім нульовим наближенням до розв'язку крайової задачі (2.1)—(2.5), тобто справедливими є нерівності (2.28) або $V_0^{(r)}(x) \leq Y^{(r)}(x) \leq 0$ при $x \in [a;b]$, що і потрібно було довести. □

Наслідок 2.1.1. *Якщо права частина задачі (2.1) задовольняє умови Теореми 2.1.2 і* $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \equiv H[0;Y(x)]$, *то для того, щоб розв'язок крайової задачі (2.1)—(2.5) при* $x \in [a;b]$ *задовольняв нерівності*

$$Y^{(r)}(x) \leq 0\ (Y^{(r)}(x) \geq 0),\ r = \overline{0, m-2},$$

достатньо вимагати виконання умов

$$F[0,0,0] \leq 0\ (F[0,0,0] \geq 0).$$

Зауваження 2.1.3. *Якщо в області* $\overline{D}$ *вектор–функція* $F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \equiv H[0;Y(x)]$ *і* $\dfrac{\partial^r G(x,\xi)}{\partial x^r} \geq 0,\ r = \overline{0, m-2}$, *то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку крайової задачі (2.1) —(2.5) достатньо побудувати одну послідовність вектор–функцій* $\{Z_p(x)\}$ *згідно закону*

$$Z_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x), x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ TH[0;Z_p(\xi)], x \in [a;b], \end{cases}$$

де за нульове наближення вибираємо вектор–функцію $Z_0(x) \in C^m_{m-1}[a;b]$*, яка задовольняє умови*

$$\frac{d^r}{dx^r} TH[0; Z_0(\xi)] \geq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}\left(Z_0(x) - TH[0; Z_0(\xi)]\right) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b].$$

Якщо ж $\dfrac{\partial^r G(x,\xi)}{\partial x^r} \leq 0,\ r = \overline{0, m-2}$*, то будуємо послідовність вектор–функцій* $\{V_p(x)\}$ *за формулою*

$$V_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x), x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ TH[V_p(\xi); 0], x \in [a;b] \end{cases}$$

і за нульове наближення вибираємо вектор–функцію $V_0(x) \in C^m_{m-1}[a;b]$*, яка задовольняє умови*

$$\frac{d^r}{dx^r} TH[V_0(\xi); 0] \leq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}\left(V_0(x) - TH[V_0(\xi); 0]\right) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b].$$

Таким чином, при побудові двосторонніх наближень до шуканого розв'язку задачі (2.1) кількість операцій у цих випадках скорочується у два рази.

2.1.3 Прискорення збіжності альтернуючого двостороннього методу

Нехай в області $\overline{D}$ вектор-функція

$$F[Y(x), Y(\Theta(x)), Y(\Psi(x))] \equiv H[0; Y(x)]$$

і

$$\frac{\partial^r G(x;\xi)}{\partial x^r} \geq 0,\ (x,\xi) \in [a;b] \times [a;b],\ r = \overline{0, m-2}.$$

Побудуємо послідовність вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ згідно закону

$$Z_{p+1}(x) = \begin{cases} \Delta(x),\ x \in \overline{E};\ \Omega(x),\ x \in \overline{S}, \\ TH[0; Z^*_p(\xi)],\ x \in [a;b], \end{cases} \tag{2.30}$$

де

$$Z^*_{p+1}(x) = Z_{p+1}(x) - Q_p\left(Z_{p+1}(x) - Z^*_p(x)\right),\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$Z^*_0(x) = Z_0(x),$$

$Q_p = \left(\delta_{ij} q^p_{ij}\right)$ — матриці з довільними сталими невід'ємними елементами, які задовольняють умови

$$q^p_{ij} \leq \frac{1}{2},\ i, j = \overline{1, n},\ p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.31}$$

За нульове наближення $Z_0(x)$ вибираємо довільну вектор–функцію, яка належить простору $C^m_{m-1}[a; b]$ і в області $\overline{D}$ задовольняє умови

$$\begin{gathered}\alpha^{(r)}_0(x) = \frac{d^r}{dx^r}\left(Z_0(x) - TH[0; Z_0(\xi)]\right) \geq 0,\\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a; b].\end{gathered} \tag{2.32}$$

Позначимо

$$\alpha_p(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ Z_p(x) - TH[0; Z_p(\xi)],\ x \in [a; b], \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\alpha^*_p(x) = \begin{cases} 0,\ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ Z^*_p(x) - TH[0; Z^*_p(\xi)],\ x \in [a; b], \end{cases} \tag{2.34}$$

$$\alpha_0(x) = \alpha^*_0(x).$$

Із (2.33) та (2.34), враховуючи (2.30), при $x \in [a; b]$ одержуємо, що

$$\alpha_{p+1}(x) = T\left\{H[0; Z^*_p(\xi)] - H[0; Z_{p+1}(\xi)]\right\}, \tag{2.35}$$

$$\alpha^*_{p+1}(x) = Z^*_{p+1}(x) - Z_{p+2}(x), \tag{2.36}$$

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}(x) + \alpha_{p+2}(x) = T\left\{H[0; Z^*_p(\xi)] - H[0; Z_{p+2}(\xi)]\right\} + \\ +T\left\{H[0; Z^*_{p+1}(\xi)] - H[0; Z_{p+1}(\xi)]\right\}.\end{gathered} \tag{2.37}$$

Якщо ж вектор-функція $Z_1(x) \in \overline{D}$, то із (2.33), в силу умов (2.32), при $p = 0$ та $x \in [a; b]$ маємо

$$Z^{(r)}_0(x) - Z^{(r)}_1(x) \geq 0,\ r = \overline{0, m-2}. \tag{2.38}$$

Беручи до уваги нерівності (2.38) та умови (2.31), переконуємось у справедливості наступних нерівностей при $x \in [a;b]$

$$Z_1^{*(r)}(x) - Z_1^{(r)}(x) = Z_1^{(r)}(x) - Q_0\left(Z_1^{(r)}(x) - Z_0^{(r)}(x)\right) - Z_1^{(r)}(x) = \\ = Q_0\left(Z_0^{(r)}(x) - Z_1^{(r)}(x)\right) \geq 0, \quad (2.39)$$

$$Z_0^{(r)}(x) - Z_1^{*(r)}(x) = Z_0^{(r)}(x) - Z_1^{(r)}(x) + Q_0\left(Z_1^{(r)}(x) - \right. \\ \left. -Z_0^{(r)}(x)\right) = (1 - Q_0)\left(Z_0^{(r)}(x) - Z_1^{(r)}(x)\right) \geq 0, \\ r = \overline{0, m-2}. \quad (2.40)$$

Таким чином, із нерівностей (2.38)—(2.40) одержуємо

$$Z_1^{(r)}(x) \leq Z_1^{*(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x),\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}. \quad (2.41)$$

А це означає, що $Z_1^*(x) \in \overline{D}$.
Із (2.35) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(x) = T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_1(\xi)]\right\}.$$

Враховуючи умову (2.9) та нерівності (2.38), будемо мати:

$$\alpha_1^{(r)}(x) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2},\ x \in [a;b].$$

Нехай

$$\alpha_0^{(r)}(x) + \alpha_1^{(r)}(x) \geq 0,\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}. \quad (2.42)$$

Тоді при $x \in [a;b]$

$$\alpha_0^{(r)}(x) + \alpha_1^{(r)}(x) = Z_0^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} T H[0; Z_0(\xi)] + \\ + Z_1^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} T H[0; Z_1(\xi)] = Z_0^{(r)}(x) - \frac{d^r}{dx^r} T H[0; Z_1(\xi)] = \\ = Z_0^{(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) + \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_1(\xi)]\right\}.$$

Оскільки, в силу нерівностей (2.9), (2.41),

$$\frac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_1(\xi)]\right) \leq 0,\ r = \overline{0, m-2},$$

то, при виконанні умов (2.42), справедливими є нерівності

$$Z_0^{(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) \geq 0, \; r = \overline{0, m-2}. \tag{2.43}$$

Використовуючи умову (2.9) та одержані нерівності (2.41), маємо

$$Z_1^{(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_1^*(\xi)]\right\} \leq 0. \tag{2.44}$$

Таким чином, із (2.43) та (2.44) випливають нерівності

$$Z_1^{(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x), \; x \in [a; b], \; r = \overline{0, m-2}, \tag{2.45}$$

а це означає, що $Z_2(x) \in \overline{D}$.

Якщо елементи матриці Q_0 вибирати таким чином, щоб в області $\overline{D}$ виконувалися нерівності

$$\begin{cases} Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) = \\ Z_1^{(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) - Q_0\left(Z_1^{(r)}(x) - Z_0^{(r)}(x)\right) \leq 0, \\ \dfrac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_2(\xi)]\right) - \\ Q_0 \dfrac{d^r}{dx^r}\left(Z_1(x) - Z_0(x)\right) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}, \end{cases} \tag{2.46}$$

то, враховуючи умови (2.31), при $x \in [a; b]$ очевидними є наступні нерівності

$$Z_2^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) = Q_1\left(Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x)\right) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}; \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{*(r)}(x) = Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) + \\ + Q_1\left(Z_2^{(r)}(x) - Z_1^{*(r)}(x)\right) = (1 - Q_1) \times \\ \times \left(Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x)\right) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Таким чином, із (2.45) та (2.47), (2.48) одержуємо

$$\begin{aligned} Z_1^{(r)}(x) \leq Z_1^{*(r)}(x) \leq Z_2^{*(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x), \\ x \in [a; b], \; r = \overline{0, m-2}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

А це означає, що $Z_2^*(x) \in \overline{D}$.

Беручи до уваги нерівності (2.49), із (2.36) та (2.35) при $p = 0, 1$ відповідно, маємо

$$\alpha_1^{*(r)}(x) = Z_1^{*(r)}(x) - Z_2^{(r)}(x) \leq 0,$$
$$\alpha_2^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_2(\xi)]\right\} \geq 0,$$
$$x \in [a; b],\ r = \overline{0, m-2}.$$

Із (2.37) при $p = 0$ одержуємо

$$\alpha_1^{(r)}(x) + \alpha_2^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_2(\xi)]\right\} +$$
$$+ \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_1(\xi)]\right\} \leq 0.$$

Приймаючи до уваги нерівності (2.49), легко переконатися у справедливості наступних нерівностей:

$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_1(x) - Z_3(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_2^*(\xi)]\right\} \leq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_2(x) - Z_3(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_2^*(\xi)]\right\} \geq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_1^*(x) - Z_3(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_2(\xi)]\right\} -$$
$$-Q_0\left(Z_1^{(r)}(x) - Z_0^{(r)}(x)\right) + \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_2(\xi)] - H[0; Z_2^*(\xi)]\right\} \leq 0,$$
$$r = \overline{0, m-2},$$

а це означає, що $Z_3(x) \in \overline{D}$.

Вибираємо елементи матриці Q_1 таким чином, щоб при $x \in [a; b]$ виконувались наступні нерівності

$$\begin{cases} Z_2^{*(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x) = \\ = Z_2^{(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x) - Q_1\left(Z_2^{(r)}(x) - Z_1^{*(r)}(x)\right) \geq 0, \\ \dfrac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_3(\xi)]\right) - Q_1 \dfrac{d^r}{dx^r}(Z_2(x) - Z_1^*(x)) \geq 0, \\ r = \overline{0, m-2}. \end{cases}$$

Тоді, при виконанні умов (2.31), справедливими є нерівності

$$Z_3^{*(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x) = Q_2\left(Z_2^{*(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x)\right) \geq 0,$$
$$Z_2^{*(r)}(x) - Z_3^{*(r)}(x) = (1-Q_2)\left(Z_2^{*(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x)\right) \geq 0,\ x \in [a;b],$$

тобто $Z_3^*(x) \in \overline{D}$.

Таким чином, доведено нерівності

$$Z_1^{(r)}(x) \leq Z_1^{*(r)}(x) \leq Z_3^{(r)}(x) \leq Z_3^{*(r)}(x) \leq$$
$$\leq Z_2^{*(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x),\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}. \tag{2.50}$$

Із (2.35) при $p = 2$ та із (2.36), (2.37) при $p = 1$, враховуючи (2.50), маємо

$$\alpha_3^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_2^*(\xi)] - H[0; Z_3(\xi)]\right\} \leq 0,$$
$$\alpha_2^{*(r)}(x) = Z_2^{*(r)}(x) - Z_3^{(r)}(x) \geq 0,$$
$$\alpha_2^{(r)}(x) + \alpha_3^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_3(\xi)]\right\} +$$
$$+\frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_2^*(\xi)] - H[0; Z_2(\xi)]\right\} \geq 0,\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2}.$$

Використовуючи (2.50), при $x \in [a;b]$ одержуємо наступні нерівності

$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_2(x) - Z_4(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_3^*(\xi)]\right\} \geq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_3(x) - Z_4(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\ \left\{H[0; Z_2^*(\xi)] - H[0; Z_3^*(\xi)]\right\} \leq 0,$$
$$\frac{d^r}{dx^r}(Z_2^*(x) - Z_4(x)) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_1^*(\xi)] - H[0; Z_3(\xi)]\right\} -$$
$$-Q_1\left(Z_2^{(r)}(x) - Z_1^{*(r)}(x)\right) + \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_3(\xi)] -\right.$$
$$\left.-H[0; Z_3^*(\xi)]\right\} \geq 0,\ r = \overline{0, m-2},$$

а, отже, $Z_4(x) \in \overline{D}$.

Якщо на наступному кроці ітераційного процесу елементи матриці

Q_2 вибирати таким чином, щоб при $x \in [a;b]$

$$\begin{cases} Z_3^{*(r)}(x) - Z_4^{(r)}(x) = \\ = Z_3^{(r)}(x) - Z_4^{(r)}(x) - Q_2\left(Z_3^{(r)}(x) - Z_2^{*(r)}(x)\right) \leq 0, \\ \dfrac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_2^*(\xi)] - H[0; Z_4(\xi)]\right) - \\ -Q_2 \dfrac{d^r}{dx^r}\left(Z_3(x) - Z_2^*(x)\right) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}, \end{cases}$$

то, при виконанні умов (2.31), очевидними є нерівності

$$Z_4^{*(r)}(x) - Z_4^{(r)}(x) = Q_3\left(Z_3^{*(r)}(x) - Z_4^{(r)}(x)\right) \leq 0,$$

$$Z_3^{*(r)}(x) - Z_4^{*(r)}(x) = (1 - Q_3)\left(Z_3^{*(r)}(x) - Z_4^{(r)}(x)\right) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}.$$

Таким чином, $Z_4^*(x) \in \overline{D}$,

$$\alpha_4^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r} T\left\{H[0; Z_3^*(\xi)] - H[0; Z_4(\xi)]\right\} \geq 0,$$

$$\alpha_3^{*(r)}(x) \leq 0, \; r = \overline{0, m-2}, \; x \in [a;b].$$

Отже,

$$\begin{gathered} Z_1^{(r)}(x) \leq Z_1^{*(r)}(x) \leq Z_3^{(r)}(x) \leq Z_3^{*(r)}(x) \leq Z_4^{*(r)}(x) \leq \\ \leq Z_4^{(r)}(x) \leq Z_2^{*(r)}(x) \leq Z_2^{(r)}(x) \leq Z_0^{(r)}(x), \\ x \in [a;b], \; r = \overline{0, m-2}. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Методом математичної індукції переконуємось, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (2.30)–(2.32), (2.42) елементи матриць Q_p вибирати таким чином, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} Z_{2p-1}^{*(r)}(x) - Z_{2p}^{(r)}(x) = Z_{2p-1}^{(r)}(x) - Z_{2p}^{(r)}(x) - \\ -Q_{2p-2}\left(Z_{2p-1}^{(r)}(x) - Z_{2p-2}^{*(r)}(x)\right) \leq 0, \\ \frac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_{2p-2}^*(\xi)] - H[0; Z_{2p}(\xi)]\right) - \\ -Q_{2p-2}\frac{d^r}{dx^r}\left(Z_{2p-1}(x) - Z_{2p-2}^*(x)\right) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{2p}^{*(r)}(x) - Z_{2p+1}^{(r)}(x) = Z_{2p}^{(r)}(x) - Z_{2p+1}^{(r)}(x) - \\ -Q_{2p-1}\left(Z_{2p}^{(r)}(x) - Z_{2p-1}^{*(r)}(x)\right) \geq 0, \\ \frac{d^r}{dx^r} T\left(H[0; Z_{2p-1}^*(\xi)] - H[0; Z_{2p+1}(\xi)]\right) - \\ -Q_{2p-1}\frac{d^r}{dx^r}\left(Z_{2p}(x) - Z_{2p-1}^*(x)\right) \geq 0, \end{cases} \tag{2.52}$$

$$r = \overline{0, m-2}, \; p = 1, 2, 3, \ldots, \; x \in [a;b],$$

то в $\overline{D}$ справедливими будуть наступні нерівності

$$\begin{gathered}\alpha_{2p}^{(r)}(x)\geq 0,\ \alpha_{2p-1}^{(r)}(x)\leq 0,\\ \alpha_{2p}^{(r)}(x)+\alpha_{2p+1}^{(r)}(x)=\frac{d^r}{dx^r}T\left\{H[0;Z_{2p-1}^*(\xi)]-H[0;Z_{2p+1}(\xi)]\right\}+\\ +\frac{d^r}{dx^r}T\left\{H[0;Z_{2p}^*(\xi)]-H[0;Z_{2p}(\xi)]\right\}\geq 0,\\ \alpha_{2p-1}^{(r)}(x)+\alpha_{2p}^{(r)}(x)=\frac{d^r}{dx^r}T\left\{H[0;Z_{2p-2}^*(\xi)]-H[0;Z_{2p}(\xi)]\right\}+\\ +\frac{d^r}{dx^r}T\left\{H[0;Z_{2p-1}^*(\xi)]-H[0;Z_{2p-1}(\xi)]\right\}\leq 0,\\ Z_{2p-1}^{(r)}(x)\leq Z_{2p-1}^{*(r)}(x)\leq Z_{2p+1}^{(r)}(x)\leq Z_{2p+1}^{*(r)}(x)\leq Z_{2p+2}^{*(r)}(x)\leq\\ \leq Z_{2p+2}^{(r)}(x)\leq Z_{2p}^{*(r)}(x)\leq Z_{2p}^{(r)}(x)\leq Z_{2p-2}^{(r)}(x),\\ p=1,2,3,\ldots,\ x\in[a;b],\ r=\overline{0,m-2}.\end{gathered}\tag{2.53}$$

Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 2.1.3. *Нехай* $F[Y(x),Y(\Theta(x)),Y(\Psi(x))]\in C_1(\overline{D})$ *і*

$$F[Y(x),Y(\Theta(x)),Y(\Psi(x))]\equiv H[0;Y(x)],\ \frac{\partial^r G(x;\xi)}{\partial x^r}\geq 0,\ r=\overline{0,m-2},$$

а в просторі вектор–функцій $C_{m-1}^m[a;b]$ *існує вектор–функція* $Z_0(x)$, *яка задовольняє умови (2.32).*

Тоді послідовності вектор-функцій $\left\{Z_p^{(r)}(x)\right\}$, *побудовані згідно закону (2.30), (2.31), при виконанні умов (2.42), (2.52), задовольняють нерівності (2.53) для* $\forall p\in\mathbb{N}$ *та* $x\in[a;b]$.

Одержимо достатню умову абсолютної та рівномірної збіжності до єдиного розв'язку крайової задачі (2.1)—(2.5) послідовностей вектор–функцій $\left\{Z_p^{(r)}(x)\right\}$, які побудовані згідно закону (2.30), (2.31), (2.42) та (2.52).

Нехай

$$\|Z_0(x)-Z_1(x)\|=\max_i\left\{\sup_{[a;b]}|z_{0,i}(x)-z_{1,i}(x)|\right\},$$

$$\varepsilon=\sup_r\left\|\tfrac{d^r}{dx^r}\left(Z_0(x)-Z_1(x)\right)\right\|,2R=\max_r\left\{\sup_{[a;b]\times[a;b]}\left\|\tfrac{\partial^r G(x,\xi)}{\partial x^r}\right\|\right\},$$

$$\|K\|\leq\frac{N}{6(m-1)},\ \tau=\max_{k=\overline{0,p}}\left\{\|E-Q_p\|\right\},\ r=\overline{0,m-2},\ p=0,1,2,\ldots.$$

Тоді

$$\|Z_0(x) - Z_1^*(x)\| = \|(E - Q_0)(Z_0(x) - Z_1(x))\| \le$$
$$\le \|E - Q_0\| \cdot \|Z_0(x) - Z_1(x)\| \le \tau\varepsilon.$$

Аналогічним чином одержуємо, що

$$\left\| \frac{d^r}{dx^r} (Z_0(x) - Z_1^*(x)) \right\| \le \tau\varepsilon.$$

Із (2.30) маємо

$$Z_1(x) - Z_2(x) = T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_1^*(\xi)]\right\}.$$

Тоді

$$\|Z_1(x) - Z_2(x)\| = \|T\left\{H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_1^*(\xi)]\right\}\| \le$$
$$\le \int\limits_a^b |G(x;\xi)| \cdot |H[0; Z_0(\xi)] - H[0; Z_1^*(\xi)]|\, d\xi \le$$
$$\le 2R(b-a)\frac{N}{6(m-1)}3(m-1)\tau\varepsilon = R(b-a)N\tau\varepsilon,$$

аналогічно

$$\left\| \frac{d^r}{dx^r} (Z_1(x) - Z_2(x)) \right\| \le R(b-a)N\tau\varepsilon.$$

Розглянемо

$$Z_1^*(x) - Z_2^*(x) = Z_1^*(x) - Z_2(x) + Q_1(Z_2(x) - Z_1^*(x)) =$$
$$= (E - Q_1)(Z_1^*(x) - Z_2(x)),$$

тоді

$$\|Z_1^*(x) - Z_2^*(x)\| = \|(E - Q_1)\| \cdot \int\limits_a^b |G(x;\xi)| \cdot |H[0; Z_1^*(\xi)] -$$
$$- H[0; Z_0(\xi)] + Q_0\left(Z_1(\xi) - Z_0(\xi)\right)|\, d\xi \le \tau \int\limits_a^b |G(x;\xi)| \cdot |H[0; Z_1^*(\xi)] -$$
$$- H[0; Z_0(\xi)]|\, d\xi \le \tau 2R(b-a) \cdot \frac{N}{6(m-1)} \cdot 3(m-1)\tau\varepsilon =$$
$$= R(b-a)N\tau^2\varepsilon, \quad \left\| \frac{d^r}{dx^r} (Z_1^*(x) - Z_2^*(x)) \right\| \le R(b-a)N\tau^2\varepsilon.$$

Аналогічним чином одержуємо наступні оцінки

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}(Z_2(x)-Z_3(x))\right\| \le (R(b-a)N\tau)^2\,\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}(Z_2^*(x)-Z_3^*(x))\right\| \le (R(b-a)N\tau)^2\,\tau\varepsilon,\ x\in[a;b],\ r=\overline{0,m-2}.$$

Припустимо, що для деякого довільного $p\in\mathbb{N}$ та $x\in[a;b]$ справедливими є оцінки

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}(Z_{2p+1}(x)-Z_{2p+2}(x))\right\| \le (R(b-a)N\tau)^{2p+1}\,\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}\left(\,Z_{2p+1}^*(x)-Z_{2p+2}^*(x)\,\right)\right\| \le (R(b-a)N\tau)^{2p+1}\,\tau\varepsilon, \tag{2.54}$$

$$r=\overline{0,m-2}.$$

Тоді легко отримати

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}(Z_{2p+2}(x)-Z_{2p+3}(x))\right\| \le (R(b-a)N\tau)^{2p+2}\,\varepsilon,$$

$$\left\|\frac{d^r}{dx^r}\left(Z_{2p+2}^*(x)-Z_{2p+3}^*(x)\right)\right\| \le (R(b-a)N\tau)^{2p+2}\,\tau\varepsilon,$$

$$r=\overline{0,m-2}.$$

Таким чином, для $\forall p\in\mathbb{N}$ та $x\in[a;b]$ справедливими є оцінки (2.54).

Якщо

$$R(b-a)N\tau<1, \tag{2.55}$$

то

$$\lim_{p\to\infty}(Z_{2p+1}(x)-Z_{2p+2}(x))=0,\ \lim_{p\to\infty}\left(Z_{2p+1}^*(x)-Z_{2p+2}^*(x)\right)=0.$$

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2.1.4. *Нехай* $F[Y(x),Y(\Theta(x)),Y(\Psi(x))]\in C_1(\overline{D})$,

$$F[Y(x),Y(\Theta(x)),Y(\Psi(x))]\equiv H[0;Y(x)]\ \text{i}\ \frac{\partial^r G(x;\xi)}{\partial x^r}\ge 0,\ r=\overline{0,m-2}.$$

В області $\overline{D}$ *існує вектор–функція нульового наближення* $Z_0(x) \in C^m_{m-1}[a;b]$, *яка задовольняє умови (2.32).*

Тоді послідовність вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$, *побудована згідно закону (2.30), (2.31), (2.52), при виконанні умови (2.42) та (2.55) збігається абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку крайової задачі (2.1)–(2.5), причому в області* $\overline{D}$ *справедливими є нерівності*

$$\begin{gathered} Z^{(r)}_{2p-1}(x) \le Z^{*(r)}_{2p-1}(x) \le Z^{(r)}_{2p+1}(x) \le Z^{*(r)}_{2p+1}(x) \le Y^{(r)}(x) \le \\ \le Z^{*(r)}_{2p+2}(x) \le Z^{(r)}_{2p+2}(x) \le Z^{*(r)}_{2p}(x) \le Z^{(r)}_{2p}(x) \le Z^{(r)}_{2p-2}(x), \\ x \in [a;b],\ r = \overline{0, m-2},\ p = 1, 2, 3, \dots . \end{gathered} \tag{2.56}$$

Для доведення справедливості нерівностей (2.56) достатньо повторити міркування, приведені при доведенні нерівностей (2.28).

2.1.4 Приклад

У просторі функцій $C^2(0;1) \cap C^1[0;1]$ дослідити розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1''(x) = -0,2\left(y_2(x) + xy_1\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) - 0,2x - 2, \\ y_2''(x) = \dfrac{1}{2(x-2)}\,y_2(x) - \dfrac{x}{8}\,y_1(x) + \dfrac{x}{8}\,(11 - x^2) - 1, \end{cases} \tag{2.57}$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{cases} y_1(0) + y_1'(0) = 0, \\ y_1(1) - y_1'(1) = 0, \\ y_2(0) + y_2'(0) = 0, \\ y_2(1) - y_2'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.58}$$

Записуємо задачу (2.57)—(2.58) в еквівалентній інтегральній формі

$$Y(x) = \begin{cases} 0, x \in \overline{E}, \\ \int\limits_0^1 G(x,\xi) F[Y(\xi), Y(\Theta(\xi))] d\xi, x \in [0;1], \end{cases}$$

де початкова множина $\overline{E} = \{0\}$, а функція Гріна визначається наступним чином

$$G(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi),\ \xi \in [0;x], \\ \xi(1-x),\ \xi \in (x;1]. \end{cases}$$

і при $(x,\xi) \in [0;1] \times [0;1] \quad G(x,\xi) \geq 0$.

Із (2.57) легко бачити, що

$$\frac{\partial f_1[Y(x), Y(\Theta(x))]}{\partial y_1(x/2)} \leq 0, \ \frac{\partial f_2[Y(x), Y(\Theta(x))]}{\partial y_1(x)} \leq 0,$$
$$\frac{\partial f_i[Y(x), Y(\Theta(x))]}{\partial y_2(x)} < 0$$

при $x \in [0;1],\ i = 1,2$.

Отже, $F[Y(x), Y(\Theta(x))] \equiv \ H[0; Y(x)]$.

Двосторонній ітераційний процес будуємо згідно закону

$$\begin{aligned} z_{p+1,1}(x) &= \int_0^x x(1-\xi) f_{p,1}(\xi) d\xi + \int_x^1 \xi(1-x) f_{p,1}(\xi) d\xi, \\ z_{p+1,2}(x) &= \int_0^x x(1-\xi) f_{p,2}(\xi) d\xi + \int_x^1 \xi(1-x) f_{p,2}(\xi) d\xi, \end{aligned} \tag{2.59}$$

де

$$f_{p,1}(x) = -0,2(z^*_{p,2}(x) + x z^*_{p,1}\left(\tfrac{x}{2}\right)) - 0,2x - 2,$$
$$f_{p,2}(x) = \frac{-1}{2(2-x)}\, z^*_{p,2}(x) - \frac{x}{8}\, z^*_{p,1}(x) + \frac{x}{8}(11 - x^2) - 1,$$
$$z^*_{p+1,i}(x) = z_{p+1,i}(x) - q^p_{ij}\left(z_{p+1,i}(x) - z^*_{p,i}(x)\right),$$
$$z^*_{0,i}(x) = z_{0,i}(x),\ i = 1,2.$$

За нульові наближення вибираємо функції

$$z_{0,1}(x) = 0,8(x^2 - x + 1),$$
$$z_{0,2}(x) = 0,5(x^2 - x + 1),$$

які задовольняють умови (2.32).

При $p = 0$ із (2.59) одержуємо

$$z_{1,1}(x) = -1,1497 + 1,1497x - 1,050x^2 - 4,333 \cdot 10^{-2} x^3 -$$
$$-1,667 \cdot 10^{-3} x^4 - 2,0 \cdot 10^{-3} x^5,$$

$$z_{1,2}(x) = 0,863 - 1,50 \ln(2-x) + (0,750 \ln(2-x) - 1,093)x -$$
$$-0,375x^2 + 0,254x^3 + 8,333 \cdot 10^{-3} x^4.$$

Нехай $q^0_{11} = 0,04,\ q^0_{22} = 0,01$. Тоді наступні наближення

$$z_{2,1}(x) = -1,1245 + 0,198 \ln(2-x) + (1,2921 - 0,297 \ln(2-x))x +$$
$$(-1,2097 + 0,148 \ln(2-x))x^2 + (-2,475 \cdot 10^{-2} \ln(2-x) +$$
$$+5,927 \cdot 10^{-2})x^3 - 2,826 \cdot 10^{-3} x^4 - 7,625 \cdot 10^{-5} x^5 -$$
$$-2,033 \cdot 10^{-5} x^6 + 5,351 \cdot 10^{-5} x^7 + 2,143 \cdot 10^{-7} x^8,$$

$$z_{2,2}(x) = -1,182 + 1,734\ln(2-x) + (-1,238\ln(2-x) + 1,706)x +$$
$$+(-1,010 + 0,186\ln(2-x))x^2 + 0,258x^3 - 1,848\cdot 10^{-3}x^4 -$$
$$-5,006\cdot 10^{-4}x^5 - 1,229\cdot 10^{-5}x^6 + 4,762\cdot 10^{-6}x^7 + 4,286\cdot 10^{-6}x^8.$$

При цьому елементи матриці Q_0 підібрано таким чином, що справедливими є нерівності (2.46).

На наступному кроці вибираємо $q_{11}^1 = 0,04$, $q_{22}^1 = 0,08$ і записуємо обчислені наближення

$$z_{3,1}(x) = -0,840 - 4,055\cdot 10^{-2}\ln(4-x) - 0,151\ln(2-x) +$$
$$+(0,2498\ln(2-x) + 3,041\ln(4-x) + 0,700)x + (-0,786 -$$
$$-0,148\ln(2-x))x^2 + (3,5997\cdot 10^{-2}\ln(2-x) - 6,451\cdot 10^{-2} -$$
$$-6,336\cdot 10^{-3}\ln(4-x))x^3 + (2,846\cdot 10^{-3}\ln(2-x) + 4,619\cdot 10^{-3} +$$
$$+2,376\cdot 10^{-3}\ln(4-x))x^4 + (-3,564\cdot 10^{-4}\ln(4-x) +$$
$$7,917\cdot 10^{-4})x^5 + (-6,008\cdot 10^{-5} + 1,980\cdot 10^{-5}\ln(4-x))x^6 +$$
$$+7,263\cdot 10^{-6}x^7 + 5,713\cdot 10^{-8}x^8,$$

$$z_{3,2}(x) = 0,434 + 0,4\cdot 10^{-9}\ln(2-x)^2 - 0,629\ln(2-x) +$$
$$+(0,6297\ln(2-x) - 0,749 - 0,2\cdot 10^{-9}\ln(2-x)^2)x + (-0,136 -$$
$$-0,184\ln(2-x))x^2 + (1,027\cdot 10^{-2}\ln(2-x) + 0,203)x^3 +$$
$$+(2,970\cdot 10^{-3}\ln(2-x) - 3,779\cdot 10^{-3})x^4 + (1,462\cdot 10^{-3} -$$
$$-8,910\cdot 10^{-4}\ln(2-x))x^5 + (-2,885\cdot 10^{-4} + 9,900\cdot 10^{-5})x^6 +$$
$$+8,424\cdot 10^{-6}x^7 + 4,443\cdot 10^{-7}x^8.$$

Елементи матриці Q_1 підібрано таким чином, що виконуються умови (2.52) при $p = 1$.

На наступному кроці ітераційного процесу покладемо: $q_{11}^2 = 0,01$, $q_{22}^2 = 0,02$. Тоді

$$z_{4,1}(x) = -1,152 + 4,078\cdot 10^{-2}\ln(8-x) + 4,245\cdot 10^{-2}\ln(2-x) +$$
$$+2,744\cdot 10^{-2}\ln(4-x) + (-8,078\cdot 10^{-2}\ln(2-x) - 1,835\ln(8-x) -$$
$$-2,127\cdot 10^{-2}\ln(4-x) + 1,157)x + (5,865\cdot 10^{-2}\ln(2-x) -$$
$$-1,082)x^2 + (4,931\cdot 10^{-3}\ln(4-x) - 1,985\cdot 10^{-2}\ln(2-x) +$$
$$+1,338\cdot 10^{-3}\ln(8-x) + 2,448\cdot 10^{-2})x^3 + (-2,037\cdot 10^{-3}\ln(4-x) -$$
$$2,700\cdot 10^{-3} + 2,958\cdot 10^{-3}\ln(2-x) - 2,509\cdot 10^{-4}\ln(8-x))x^4 +$$

$$+(-1,007\cdot 10^{-4}\ln(2-x)+3,619\cdot 10^{-4}\ln(4-x)-3,772\cdot 10^{-4})x^5+$$
$$+(1,077\cdot 10^{-4}-2,950\cdot 10^{-5}\ln(4-x)-1,940\cdot 10^{-5}\ln(2-x))x^6-$$
$$-9,327\cdot 10^{-6}x^7+9,802\cdot 10^{-7}x^8-1,979\cdot 10^{-8}x^9,$$

$$z_{4,2}(x)=-0,098+0,136\ln(2-x)+3,186\cdot 10^{-3}\ln(4-x)+$$
$$+(-2,867\cdot 10^{-3}\ln(4-x)+0,191-0,171\ln(2-x))x+(-0,6198+$$
$$+7,331\cdot 10^{-2}\ln(2-x))x^2+(8,363\cdot 10^{-4}\ln(4-x)+0,276-$$
$$-9,513\cdot 10^{-3}\ln(2-x))x^3+(-1,998\cdot 10^{-3}\ln(2-x)-$$
$$-3,136\cdot 10^{-4}\ln(4-x)+1,399\cdot 10^{-3})x^4+(-1,664\cdot 10^{-3}+$$
$$+9,436\cdot 10^{-4}\ln(2-x))x^5+(3,262\cdot 10^{-4}+2,614\cdot 10^{-5}\ln(4-x)-$$
$$-1,588\cdot 10^{-4}\ln(2-x))x^6+(1,832\cdot 10^{-5}+9,541\cdot 10^{-5}\ln(2-x)-$$
$$-7,001\cdot 10^{-6}\ln(4-x))x^7-1,837\cdot 10^{-6}x^8+1,141\cdot 10^{-7}x^9.$$

Для кожного наближення визначено оцінки похибки, які зведено в таблицю.

Таблиця 2.1.

p	$\sup\limits_{[0;1]}\lvert z_{p,1}(x)-z_{p+1,1}(x)\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]}\lvert z_{p,2}(x)-z_{p+1,2}(x)\rvert$
0	$1,9497$	$8,5389\cdot 10^{-1}$
1	$1,6241\cdot 10^{-1}$	$1,9603\cdot 10^{-1}$
2	$1,5079\cdot 10^{-2}$	$2,1531\cdot 10^{-2}$
3	$1,4034\cdot 10^{-3}$	$2,0777\cdot 10^{-3}$

При $x\in[0;1]$ справедливими є нерівності

$$Z_1(x)\le Z_3(x)\le Y(x)\le Z_4(x)\le Z_2(x)\le Z_0(x),$$

де $Y(x)$ - точний розв'язок заданої задачі.

Із Рис. 2.1 та Рис. 2.2 видно, що графіки 3-го і 4-го наближень майже співпадають із графіками функцій, які є точним розв'язком розглядуваної задачі.

Легко переконатися, що точним розв'язком є функції

$$y_1(x)=-x^2+x-1 \ \text{ та } \ y_2(x)=\frac{x^2}{4}(x-2)\,,$$

які виділяються уже на першому кроці побудованого ітераційного процесу.

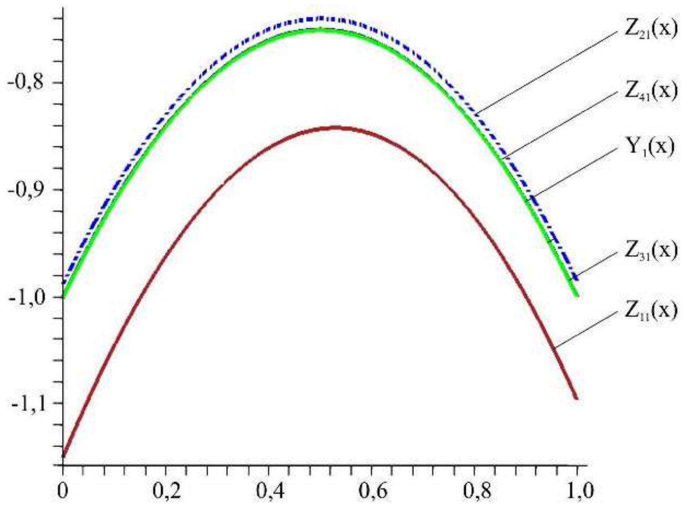


Рис. 2.1. Наближення до розв'язку $Y_1(x)$

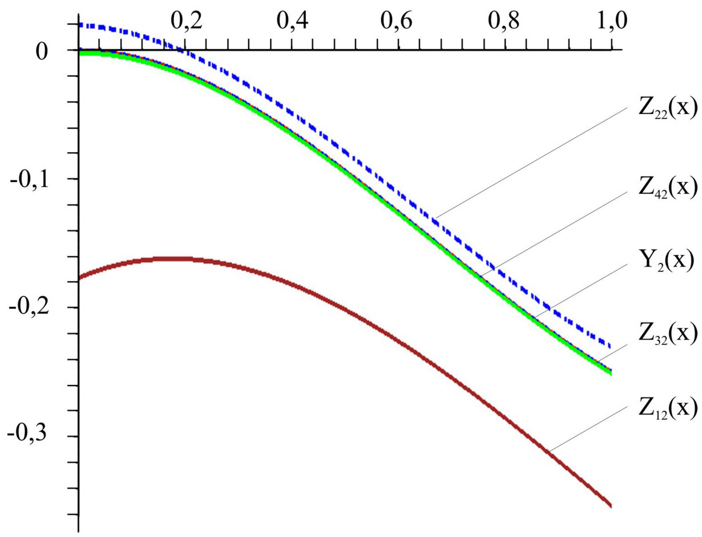


Рис. 2.2. Наближення до розв'язку $Y_2(x)$

За наближений розв'язок задачі беремо функції

$$y_{p,i}(x) = 0,5 \cdot (z_{p-1,i}(x) + z_{p,i}(x)).$$

і для нього одержуємо кращі оцінки :

$$\sup_{[0;1]} |y_1(x) - y_{4,1}(x)| \le 5,6064 \cdot 10^{-4},$$
$$\sup_{[0;1]} |y_2(x) - y_{4,2}(x)| \le 8,4681 \cdot 10^{-4}.$$

2.2 Двостороній метод дослідження багатоточкових крайових задач

2.2.1 Постановка задачі і основні позначення

Дослідимо задачу Валле-Пуссена: у просторі вектор–функцій $C_4[0;l] \equiv C^4(0;l) \cap C[0;l]$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$Y^{(4)}(x) = F\left(x, Y(x), Y(\Lambda(x)), Y(\Theta(x))\right) \equiv F[Y(x)],\ x \in [0;l], \tag{2.60}$$

який задовольняє умови:

$$Y(0) = A_1,\ Y(l/3) = A_2,\ Y(2l/3) = A_3,\ Y(l) = A_4, \tag{2.61}$$

де

$$Y(x) = (y_i(x)),\ F[Y(x)] = (f_i[Y(x)]),\ A_s = (a_{is}),$$
$$i = \overline{1,n}, s = \overline{1,4} \text{— вектори;}$$
$$f_i[Y(x)] = f_i(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1(\lambda_1(x)), ...,$$
$$y_n(\lambda_n(x)), y_1(\theta_1(x)), .., y_n(\theta_n(x))),$$
$$\lambda_i(x) = x - \tau_i(x), \theta_i(x) = x + \delta_i(x), i = \overline{1,n}.$$

Відхилення $\tau_i(x) \ge 0$, $\delta_i(x) \ge 0$ — відомі неперервні функції на відрізку $[0;l]$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_i = \{\overline{x} |\ x - \tau_i(x) \le \overline{x} \le 0,\ x \in [0;l]\},$$
$$\overline{S}_i = \left\{\overline{\overline{x}} \middle|\ l \le \overline{\overline{x}} \le x + \delta_i(x),\ x \in [0;l]\right\},\ i = \overline{1,n}.$$

Нехай $\overline{E} = \bigcup\limits_i \overline{E}_i$, $\overline{S} = \bigcup\limits_i \overline{S}_i$, $i = \overline{1,n}$ та

$$Y(x)\mid_{\overline{E}} = \Phi(x),\ Y(x)\mid_{\overline{S}} = \Psi(x), \tag{2.62}$$

де $\Phi(x) = (\phi_i(x))$, $\Psi(x) = (\psi_i(x))$ — відомі з простору $C(\overline{E})$ та $C(\overline{S})$ відповідно вектор-функції, які задовольняють умови:

$$\Phi(0) = A_1,\ \Psi(l) = A_4. \tag{2.63}$$

Будемо вважати, що $F[Y(x)] \in C(\overline{D})$, $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{D} \in \mathbb{R}^{3n+1}$ — замкнута область, проекція якої на вісь Ox є відрізок $[0;l] \in \overline{D}$, а відповідна однорідна крайова задача має тільки тривіальний розв'язок при $x \in [0;l]$.

Тоді існує єдина функція Гріна $G(x,\xi)$, за допомогою якої задачу (2.60)–(2.61) можна подати у вигляді [87]:

$$Y(x) = \begin{cases} \Phi(x),\ x \in \overline{E};\ \Psi(x),\ x \in \overline{S}; \\ \Omega(x) - \dfrac{81}{8l^6}\int\limits_0^l G(x,\xi)F[Y(\xi)]d\xi \\ \equiv \Omega(x) - TF[Y(\xi)],\ x \in [0;l], \end{cases} \tag{2.64}$$

де $\Omega(x) = (\omega_i(x))$,

$$\omega_i(x) = a_{i1} + \frac{243}{4l^6}\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \dfrac{l}{3} & a_{i2} - a_{i1} & \dfrac{l^2}{9} & \dfrac{l^3}{27} \\ \dfrac{2l}{3} & a_{i3} - a_{i1} & \dfrac{4l^2}{9} & \dfrac{8l^3}{27} \\ l & a_{i4} - a_{i1} & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_1(x,\xi),\ 0 \le x \le \frac{l}{3}, \\ G_2(x,\xi),\ \frac{l}{3} \le x \le \frac{2l}{3}, \\ G_3(x,\xi),\ \frac{2l}{3} \le x \le l, \end{cases} \quad G_1(x,\xi) = \begin{cases} R_{11}(x,\xi),\ 0 \le \xi \le x, \\ R_{12}(x,\xi),\ x \le \xi \le \frac{l}{3}, \\ R_{13}(x,\xi),\ \frac{l}{3} \le \xi \le \frac{2l}{3}, \\ R_{14}(x,\xi),\ \frac{2l}{3} \le \xi \le l, \end{cases}$$

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} R_{21}(x,\xi), 0 \le \xi \le \frac{l}{3}, \\ R_{22}(x,\xi), \frac{l}{3} \le \xi \le x, \\ R_{23}(x,\xi), x \le \xi \le \frac{2l}{3}, \\ R_{24}(x,\xi), \frac{2l}{3} \le \xi \le l, \end{cases} \quad G_3(x,\xi) = \begin{cases} R_{31}(x,\xi), 0 \le \xi \le \frac{l}{3}, \\ R_{32}(x,\xi), \frac{l}{3} \le \xi \le \frac{2l}{3}, \\ R_{33}(x,\xi), \frac{2l}{3} \le \xi \le x, \\ R_{34}(x,\xi), x \le \xi \le l, \end{cases}$$

$$R_{k1}(x,\xi) = \begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & (\frac{l}{3}-\xi)^3 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & (\frac{2l}{3}-\xi)^3 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{k4}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & 0 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & 0 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$
$$k=\overline{1,3},$$

$$R_{12}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & (\frac{l}{3}-\xi)^3 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & (\frac{2l}{3}-\xi)^3 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{33}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & 0 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & 0 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{22}(x,\xi)=R_{32}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & 0 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & (\frac{2l}{3}-\xi)^3 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{13}(x,\xi)=R_{23}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{l}{3} & 0 & \frac{l^2}{9} & \frac{l^3}{27} \\ \frac{2l}{3} & (\frac{2l}{3}-\xi)^3 & \frac{4l^2}{9} & \frac{8l^3}{27} \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}.$$

Не важко переконатись, що

$$G_1(x,\xi)\geq 0,\ G_2(x,\xi)\leq 0,\ G_3(x,\xi)\geq 0, \tag{2.65}$$

при $(x,\xi)\in[0;l]\times[0;l]$.

Означення 2.2.1. *Функція в правій частині розглядуваного рівняння (2.60) $F[Y(x)]\in C_1^*(\overline{D})$, де $C_1^*(\overline{D})$ — простір вектор–функцій, які задовольняють наступні умови:*

1. $F[Y(x)]\in C(\overline{D})$;

2. *існує така вектор–функція* $H[Z(x);V(x)] \equiv (h_i[x,\ Z(x),$ $Z(\Lambda(x)),\ Z(\Theta(x));V(x),V(\Lambda(x)),V(\Theta(x))]) \in C(\overline{D}_1),\ \overline{D}_1 \in \mathbb{R}^{6n+1}$, *що*

   (a) $H[Y(x);Y(x)] \equiv F[Y(x)]$;

   (b) *для довільних з простору* $C_4[0;l]$ *вектор–функцій* $Z(x)$, $V(x) \in \overline{D}_1$, *які задовольняють нерівності*

$$Z(x) - V(x) \leq 0,\ x \in [0;l/3] \cup [2l/3;l],$$

$$Z(x) - V(x) \geq 0,\ x \in [l/3;2l/3],$$

$$Z^{(4)}(x) - V^{(4)}(x) \geq 0,\ x \in [0;l],$$

   виконується умова

$$H[Z(x);V(x)] \geq H[V(x);Z(x)],\ x \in [0;l]; \tag{2.66}$$

   (c) *вектор-функція* $H[Z(x);V(x)]$ *в області її визначення* $\overline{D}_1$ *задовольняє умову Ліпшиця з матрицею* $K = (k_{ij} \geq 0)$, $i,j = \overline{1,n}$, *тобто для всяких вектор-функцій* $Z(x)$, $V(x)$, $Z^*(x)$, $V^*(x) \in \overline{D}_1$ *виконується умова*

$$\begin{gathered}|H\left[Z(x);V(x)\right] - H\left[Z^*(x);V^*(x)\right]| \leq K\left(|Z(x) - Z^*(x)| + \right.\\ + |V(x) - V^*(x)| + |Z(\Lambda(x)) - Z^*(\Lambda(x))| + \\ + |V(\Lambda(x)) - V^*(\Lambda(x))| + |Z(\Theta(x)) - Z^*(\Theta(x))| + \\ \left. + |V(\Theta(x)) - V^*(\Theta(x))|\right).\end{gathered}$$

Позначимо

$$Z_p(x) = (z_{p,i}(x)),\ V_p(x) = (v_{p,i}(x)) \in C_4[0;l],$$

$$F^p(x) = H[Z_p(x);V_p(x)],\ F_p(x) = H[V_p(x);Z_p(x)],$$

$$F^p(x) = (f_i^p(x)),\ F_p(x) = (f_{p,i}(x)), \text{—вектори},\ p = 0,1,2,\ldots,\ i = \overline{1,n}.$$

2.2.2 Побудова альтернуючого двостороннього методу для дослідження задачі Валле-Пуссена

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ згідно закону

$$Z_{p+1}(x) = \begin{cases} \Phi(x),\ x \in \overline{E};\ \Psi(x),\ x \in \overline{S}; \\ \Omega(x) - TF_p(\xi),\ x \in [0;l], \end{cases}$$
$$V_{p+1}(x) = \begin{cases} \Phi(x),\ x \in \overline{E};\ \Psi(x),\ x \in \overline{S}; \\ \Omega(x) - TF^p(\xi),\ x \in [0;l], \end{cases} \tag{2.67}$$

де за нульове наближення $Z_0(x)$ та $V_0(x)$ вибираємо довільні вектор–функції із простору $C_4[0;l]$, які задовольняють умови (2.61), (2.62) і

$$\begin{gathered} Z_0(x) \le V_0(x),\ x \in [0;l/3] \cup [2l/3;l], \\ V_0(x) \le Z_0(x),\ x \in [l/3;2l/3], \\ V_0^{(4)}(x) \le Z_0^{(4)}(x),\ x \in [0;l], \end{gathered} \tag{2.68}$$

а

$$\alpha_0(x) = Z_0^{(4)}(x) - F_0(x) \ge 0,\ \beta_0(x) = V_0^{(4)}(x) - F^0(x) \le 0. \tag{2.69}$$

Означення 2.2.2. *Вектор–функції $Z_0(x)$, $V_0(x) \in C_4[0;l]$ будемо називати вектор–функціями порівняння задачі (2.60)—(2.62), якщо вони задовольняють умови (2.61), (2.62), (2.68).*

Лема 2.2.1. *У просторі вектор–функцій $C_4[0;l]$ множина вектор–функцій порівняння задачі (2.60)—(2.62), які задовольняють умови (2.69), непорожня.*

Доведення. Нехай $Z(x)$ довільна з простору $C_4[0;l]$ вектор–функція, яка задовольняє умови (2.61), (2.62), а

$$Z^{(4)}(x) - F[Z(x)] = \alpha(x).$$

Визначимо вектор–функції $\eta(x)$ та $q(x)$ з рівнянь

$$\eta^{(4)}(x) = |\alpha(x)|\,,\ q^{(4)}(x) = -\,|\alpha(x)|\,,$$

при однорідних умовах (2.61).

В результаті одержимо [64]

$$\eta(x) \le 0,\ q(x) \ge 0, x \in [0;l/3],\ [2l/3;l],$$

$$\eta(x) \geq 0,\ q(x) \leq 0, x \in [l/3; 2l/3].$$

Очевидно, що вектор–функції

$$Z_0(x) = Z(x) + \eta(x),\ V_0(x) = Z(x) + q(x)$$

є вектор–функціями порівняння задачі (2.60)—(2.62) і справедливі нерівності

$$\alpha_0(x) = Z_0^{(4)}(x) - F_0(x) = Z^{(4)}(x) + |\alpha(x)| - F_0(x) =$$

$$= \alpha(x) + |\alpha(x)| + F[Z(x)] - F_0(x) \geq 0,$$

$$\beta_0(x) = V_0^{(4)}(x) - F^0(x) = Z^{(4)}(x) - |\alpha(x)| - F^0(x) =$$

$$= \alpha(x) - |\alpha(x)| + F[Z(x)] - F_0(x) \leq 0,\ x \in [0; l].$$

Отже, якщо вектор–функції $Z_0(x),\ V_0(x) \in \overline{D}_1$, то вони є вектор–функціями порівняння задачі (2.60)—(2.62) і задовольняють умови (2.69). □

Ітераційний процес (2.67)—(2.69) подамо у вигляді

$$Z_{p+1}(x) - Z_p(x) = T\alpha_p(x),\ V_{p+1}(x) - V_p(x) = T\beta_p(x),\ x \in [0; l], \quad (2.70)$$

$$\alpha_p(x) = Z_p^{(4)}(x) - F_p(x),\ \beta_p(x) = V_p^{(4)}(x) - F^p(x),\ x \in [0; l], \quad (2.71)$$

при умовах (2.61), (2.62).

Тоді із (2.70)—(2.71) при $x \in [0; l]$ одержимо

$$\alpha_{p+1}(x) = F_p(x) - F_{p+1}(x),\ \beta_{p+1}(x) = F^p(x) - F^{p+1}(x), \quad (2.72)$$

$$\begin{gathered} Z_p(x) - Z_{p+2}(x) = -T(\alpha_p(x) + \alpha_{p+1}(x)), \\ V_p(x) - V_{p+2}(x) = -T(\beta_p(x) + \beta_{p+1}(x)), \end{gathered} \quad (2.73)$$

$$\begin{gathered} \alpha_{p+1}(x) + \alpha_{p+2}(x) = F_p(x) - F_{p+2}(x), \\ \beta_{p+1}(x) + \beta_{p+2}(x) = F^p(x) - F^{p+2}(x). \end{gathered} \quad (2.74)$$

Якщо $Z_1(x),\ V_1(x) \in \overline{D_1}$, то, враховуючи умови (2.65) та (2.69), із (2.70) при $p = 0$ маємо

$$\begin{gathered} Z_1(x) - Z_0(x) \geq 0,\ V_1(x) - V_0(x) \leq 0,\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_1(x) - Z_0(x) \leq 0,\ V_1(x) - V_0(x) \geq 0,\ x \in [l/3; 2l/3]. \end{gathered} \quad (2.75)$$

Тоді із (2.72), беручи до уваги (2.66) та (2.75), при $p = 0$ маємо, що

$$\alpha_1(x) \le 0,\ \beta_1(x) \ge 0.$$

Отже, із (2.70) при $p = 1$ отримаємо

$$\begin{gathered} Z_2(x) - Z_1(x) \le 0,\ V_2(x) - V_1(x) \ge 0,\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_2(x) - Z_1(x) \ge 0,\ V_2(x) - V_1(x) \le 0,\ x \in [l/3; 2l/3]. \end{gathered} \tag{2.76}$$

Нехай при $x \in [0; l]$

$$\alpha_0(x) + \alpha_1(x) \ge 0,\ \beta_0(x) + \beta_1(x) \le 0. \tag{2.77}$$

Тоді із (2.73) при $p = 0$ дістанемо

$$\begin{gathered} Z_0(x) - Z_2(x) \le 0,\ V_0(x) - V_2(x) \ge 0,\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_0(x) - Z_2(x) \ge 0,\ V_0(x) - V_2(x) \le 0,\ x \in [l/3; 2l/3]. \end{gathered} \tag{2.78}$$

Таким чином, із (2.75), (2.76) та (2.78) випливають нерівності

$$\begin{gathered} Z_0(x) \le Z_2(x) \le Z_1(x),\ V_1(x) \le V_2(x) \le V_0(x), \\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_1(x) \le Z_2(x) \le Z_0(x),\ V_0(x) \le V_2(x) \le V_1(x), \\ x \in [l/3; 2l/3], \end{gathered} \tag{2.79}$$

тобто, при виконанні умов (2.77), якщо вектор–функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ належать області $\overline{D}_1$, то і наступне наближення, обчислене згідно закону (2.67), також належить області $\overline{D}_1$.

Тоді із (2.72), (2.70), (2.74) при $p = 1, 2, 0$ відповідно, будемо мати

$$\begin{gathered} \alpha_2(x) \ge 0,\ \beta_2(x) \le 0, \\ Z_3(x) - Z_2(x) \ge 0,\ V_3(x) - V_2(x) \le 0,\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_3(x) - Z_2(x) \le 0,\ V_3(x) - V_2(x) \ge 0,\ x \in [l/3; 2l/3], \\ \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \le 0,\ \beta_1(x) + \beta_2(x) \ge 0. \end{gathered}$$

А із (2.73) при $p = 1$ одержуємо

$$\begin{gathered} Z_1(x) - Z_3(x) \ge 0,\ V_1(x) - V_3(x) \le 0,\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_1(x) - Z_3(x) \le 0,\ V_1(x) - V_3(x) \ge 0,\ x \in [l/3; 2l/3]. \end{gathered}$$

Таким чином, мають силу нерівності

$$Z_0(x) \le Z_2(x) \le Z_3(x) \le Z_1(x),\ V_1(x) \le V_3(x) \le V_2(x) \le V_0(x),$$
$$x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l],$$
$$Z_1(x) \le Z_3(x) \le Z_2(x) \le Z_0(x),\ V_0(x) \le V_2(x) \le V_3(x) \le V_1(x),$$
$$x \in [l/3; 2l/3],$$

тобто $Z_3(x),\ V_3(x) \in \overline{D}_1$.

Методом математичної індукції переконуємось, що при виконанні умов (2.77) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$, побудовані згідно закону (2.67)—(2.69), задовольняють в області $\overline{D}_1$ нерівності

$$\begin{gathered} Z_{2p}(x) \le Z_{2p+2}(x) \le Z_{2p+3}(x) \le Z_{2p+1}(x), \\ V_{2p+1}(x) \le V_{2p+3}(x) \le V_{2p+2}(x) \le V_{2p}(x), \\ x \in [0; l/3] \cup [2l/3; l], \\ Z_{2p+1}(x) \le Z_{2p+3}(x) \le Z_{2p+2}(x) \le Z_{2p}(x), \\ V_{2p}(x) \le V_{2p+2}(x) \le V_{2p+3}(x) \le V_{2p+1}(x), \\ x \in [0; l], p = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{2.80}$$

Визначимо достатні умови рівномірної збіжності побудованих послідовностей вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ до єдиного в просторі $C_4[0; l]$ розв'язку крайової задачі (2.60)—(2.62).

Нехай

$$\|Z_0(x) - Z_1(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[0;l]} |z_{0,i}(x) - z_{1,i}(x)| \right\},$$

$$\|V_0(x) - V_1(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[0;l]} |v_{0,i}(x) - v_{1,i}(x)| \right\},$$

$$\|W_0(x)\| = \max_i \left\{ \sup_{[0;l]} |w_{0,i}(x)| \right\},\ i = \overline{1, n},$$

$$\mu = \sup_{[0;l]} \{ \|Z_0(x) - Z_1(x)\|, \|V_0(x) - V_1(x)\|, \|W_0(x)\| \},$$

$$d = \max_{[0;l]} \int_0^l \|G(x, \xi)\| \, d\xi = \frac{4l^{10}}{3^7},\ \|K\| \le \frac{M}{6}.$$

Тоді

$$\|Z_1(x) - Z_2(x)\| = \|T(F_0(\xi) - F_1(\xi))\| \leq \frac{81}{8l^6} dM\mu,$$

$$\|V_1(x) - V_2(x)\| = \left\|T(F^0(\xi) - F^1(\xi))\right\| \leq \frac{81}{8l^6} dM\mu.$$

Отже,

$$\sup_{[0;l]} \{\|Z_1(x) - Z_2(x)\|, \|V_1(x) - V_2(x)\|\} \leq \frac{81}{8l^6} dM\mu.$$

Аналогічним чином одержуємо

$$\sup_{[0;l]} \{\|Z_2(x) - Z_3(x)\|, \|V_2(x) - V_3(x)\|\} \leq \left(\frac{81}{8l^6} dM\right)^2 \mu.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ та $x \in [0; l]$ справедливими є оцінки

$$\begin{gathered}\sup_{[0;l]} \{\|Z_{2p+1}(x) - Z_{2p+2}(x)\|, \\ \|V_{2p+1}(x) - V_{2p+2}(x)\|\} \leq \left(\tfrac{81}{8l^6} dM\right)^{2p+1} \mu = \left(\tfrac{l^4}{54} M\right)^{2p+1} \mu.\end{gathered} \tag{2.81}$$

Тоді

$$\|Z_{2p+2}(x) - Z_{2p+3}(x)\| =$$

$$= \|T(F_{2p+1}(\xi) - F_{2p+2}(\xi))\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} dM\right)^{2p+2} \mu = \left(\frac{l^4}{54} M\right)^{2p+2} \mu,$$

$$\|V_{2p+2}(x) - V_{2p+3}(x)\| =$$

$$= \left\|T(F^{2p+1}(\xi) - F^{2p+2}(\xi))\right\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} dM\right)^{2p+2} \mu = \left(\frac{l^4}{54} M\right)^{2p+2} \mu.$$

Отже, $\forall p \in \mathbb{N}$ та $x \in [0; l]$ справедливими є оцінки (2.81).

Якщо

$$\frac{l^4}{54} M < 1 \tag{2.82}$$

то із оцінок (2.81) та нерівностей (2.80) випливає, що послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ збігаються відповідно до границь $\underline{Y}(x)$ та $\overline{Y}(x)$.

Покажемо, що $\underline{Y}(x) = \overline{Y}(x)$ для будь–якого $x \in [0; l]$.

Дійсно, із (2.67) одержуємо

$$W_{p+1}(x) = \begin{cases} 0, \ x \in \overline{E} \cup \overline{S}, \\ T(F^p(\xi) - F_p(\xi)), \ x \in [0; l]. \end{cases} \tag{2.83}$$

Тоді на підставі вище введених позначень, із (2.83) при $p = 0$ будемо мати

$$\|W_1(x)\| = \left\|T(F^0(\xi) - F_0(\xi))\right\| \leq \frac{81}{8l^6} M d\mu.$$

Аналогічним чином при $p = 1$ із (2.83) одержуємо

$$\|W_2(x)\| = \left\|T(F^1(\xi) - F_1(\xi))\right\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} M d\right)^2 \mu.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ та $x \in [0; l]$

$$\|W_p(x)\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} M d\right)^p \mu = \left(\frac{l^4}{54} M\right)^p \mu. \tag{2.84}$$

Тоді

$$\|W_{p+1}(x)\| = \|T(F^p(\xi) - F_p(\xi))\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} M d\right)^{p+1} \mu = \left(\frac{l^4}{54} M\right)^{p+1} \mu.$$

Таким чином, для $\forall p \in \mathbb{N}$ та $x \in [0; l]$ справедливими є оцінки (2.84), тобто при виконанні умови (2.82)

$$\lim_{p \to \infty} W_p(x) = 0.$$

Отже, $\underline{Y}(x) = \overline{Y}(x) = Y(x)$, $Y(x)$ — єдиний розв'язок задачі (2.60)–(2.62).

Доведено наступну теорему.

Теорема 2.2.1. *Нехай $F[Y(x)] \in C_1^*(\overline{D})$ і в області $\overline{D}_1$ існують вектор–функції порівняння задачі (2.60)–(2.62) $Z_0(x)$ та $V_0(x)$, які задовольняють умови (2.69).*

Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$, що побудовані згідно закону (2.67), при виконанні умов (2.77), (2.82), $Z_1(x)$, $V_1(x) \in \overline{D}_1$, збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку *задачі (2.60)—(2.62), причому в області $\overline{D}_1$ справедливими є нерівності*

$$\begin{gathered}
Z_{2p}(x) \leq Z_{2p+2}(x) \leq Y(x) \leq Z_{2p+3}(x) \leq Z_{2p+1}(x), \\
V_{2p+1}(x) \leq V_{2p+3}(x) \leq Y(x) \leq V_{2p+2}(x) \leq V_{2p}(x), \\
x \in [0; l/3],\ [2l/3; l], \\
Z_{2p+1}(x) \leq Z_{2p+3}(x) \leq Y(x) \leq Z_{2p+2}(x) \leq Z_{2p}(x), \\
V_{2p}(x) \leq V_{2p+2}(x) \leq Y(x) \leq V_{2p+3}(x) \leq V_{2p+1}(x), \\
x \in [l/3; 2l/3], p = 0, 1, 2, \ldots .
\end{gathered} \tag{2.85}$$

Покажемо, що $Y(x)$ — розв'язок задачі (2.60)–(2.62). Дійсно, якщо в рівностях (2.67) перейти до границі при $p \to \infty$, то одержуємо

$$Y(x) = \begin{cases} \Phi(x),\ x \in \overline{E};\ \Psi(x),\ x \in \overline{S}; \\ \Omega(x) - TF[Y(\xi)],\ x \in [0; l], \end{cases}$$

тобто, $Y(x)$ є розв'язком задачі (2.60)–(2.62).

Доведемо його єдиність.

Припустимо, що вектор–функція $\widehat{Y}(x)$ також є розв'язком задачі (2.60)—(2.62). Тоді, використовуючи (2.64), будемо мати

$$Y(x) - \widehat{Y}(x) = T\left(F[\widehat{Y}(x)] - F[Y(x)]\right). \tag{2.86}$$

Нехай $L(x) = \widehat{Y}(x) - Y(x)$, $\sup\limits_{[0;l]} \|L(x)\| = \gamma$.

Оскільки $F[Y(x)] \in C_1^*(\overline{D})$, то із рівності (2.86), як і у випадку доведення справедливості оцінок (2.82), отримаємо нерівність

$$\sup_{[0;l]} \|L(x)\| \leq \left(\frac{81}{8l^6} dM\right)^p \gamma = \left(\frac{l^4}{54} M\right)^p \gamma \tag{2.87}$$

для довільного $p \in \mathbb{N}$ та $x \in [0; l]$.

При досить великих p та виконанні умови (2.82) $\|L(x)\| \leq \varepsilon$, де ε — як завгодно мала величина. Тоді при $x \in [0; l]$ $L(x) = 0$, тобто $Y(x) = \widehat{Y}(x)$.

Доведення нерівностей (2.85) можна провести аналогічно до того, як це було зроблено для відповідних нерівностей (2.28).

2.2.3 Приклад

На проміжку $(0;3)$ дослідити розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1^{(4)}(x) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \left(\frac{2\pi}{3} y_2(\Theta(x)) y_1(x) + 4y_2(x)\right) + \\ \qquad +8y_1(\lambda(x)) - x\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right), \\ y_2^{(4)}(x) = \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 y_2(x) + \frac{1}{3} y_1(\lambda(x)) - \frac{x}{24}\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right), \end{cases} \tag{2.88}$$

який задовольняє умови

$$\begin{gathered} y_1(0) = 0, \;\; y_1(1) = \frac{\sqrt{3}}{8}, \;\; y_1(2) = \frac{1}{4}; \; y_1(3) = 0; \\ y_2(0) = 0, \; y_2(1) = \frac{1}{8}, \; y_2(2) = \frac{\sqrt{3}}{8}; \; y_2(3) = \frac{1}{4}, \end{gathered} \tag{2.89}$$

$$0 \le y_i(x) \le 0,4 \quad \text{для } \forall x \in [0;3], \; i = 1,2.$$

Відхилення $\Theta(x) = 1,5x + 3$, $\lambda(x) = 0,5x$ визначають початкові множини:

$$\overline{E} = \left\{ \overline{x} \,\middle|\, \frac{x}{2} \le \overline{x} \le 0, \; x \in [0;3] \right\},$$

$$\overline{S} = \left\{ \overline{\overline{x}} \,\middle|\, 3 \le \overline{\overline{x}} \le 1,5x + 3, \; x \in [0;3] \right\} = \left\{ \overline{\overline{x}} \,\middle|\, 3 \le \overline{\overline{x}} \le 7,5 \right\}$$

і

$$y_i(x)\,|_{\overline{E}} = 0, \; y_1(x)\,|_{\overline{S}} = x - 3, \; y_2(x)\,|_{\overline{S}} = \frac{1}{4}. \tag{2.90}$$

Задачу (2.88)—(2.89) можна подати в еквівалентній інтегральній формі

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, \; x \in \overline{E}; \; x - 3, \; x \in \overline{S}; \\ \omega_1(x) - \dfrac{1}{72}\int\limits_0^3 G(x,\xi) F[Y(\xi)] d\xi = \\ = \omega_1(x) - TF[Y(\xi)], \; x \in [0;3], \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, \; x \in \overline{E}; \; \dfrac{1}{4}, \; x \in \overline{S}; \\ \omega_2(x) - \dfrac{1}{72}\int\limits_0^3 G(x,\xi) F[Y(\xi)] d\xi = \\ = \omega_2(x) - TF[Y(\xi)], \; x \in [0;3], \end{cases}$$

де

$$\omega_1(x) = \frac{1}{8}(3\sqrt{3}-3)x + \frac{1}{16}(8-5\sqrt{3})x^2 + \frac{1}{16}(\sqrt{3}-2)x^3,$$

$$\omega_2(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{11}{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)x + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right)x^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{5}{3} - \sqrt{3}\right)x^3,$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G_1(x,\xi),\ 0 \le x \le 1, \\ G_2(x,\xi),\ 1 \le x \le 2, \\ G_3(x,\xi),\ 2 \le x \le 3, \end{cases}$$

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} R_{11}(x,\xi) = -22x\xi^3 + 12\xi^3x^2 - 2\xi^3x^3 + 12\xi^3,\ 0 \le \xi \le x, \\ R_{12}(x,\xi) = 36x\xi^2 - 22x\xi^3 + 12\xi^3x^2 - 2\xi^3x^3 + 12x^3- \\ -36x^2\xi,\ x \le \xi \le 1, \\ R_{13}(x,\xi) = 30x^2 + 6x^3 + 108x\xi - 126x^2\xi - 72x\xi^2+ \\ +18\xi x^3 + 90\xi^2x^2 - 18\xi^2x^3 - 18\xi^3x^2 + 4\xi^3x^3 + 14x\xi^3- \\ -36x,\ 1 \le \xi \le 2, \\ R_{14}(x,\xi) = 108x - 107x\xi + 36x\xi^2 - 4x\xi^3 - 162x^2+ \\ +54x^3 + 162x^2\xi - 54\xi x^3 - 54\xi^2x^2 + 18\xi^2x^3 + 6\xi^3x^2- \\ -2\xi^3x^3,\ 2 \le \xi \le 3, \end{cases}$$

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} R_{21}(x,\xi) = -22x\xi^3 + 12\xi^3x^2 - 2\xi^3x^3 = 12\xi^3,\ 0 \le \xi \le 1, \\ R_{22}(x,\xi) = -36x + 108x\xi - 108x\xi^2 + 14x\xi^3 + 90\xi^2x^2- \\ -18\xi^2x^3 - 18\xi^3x^2 + 4\xi^3x^3 - 6x^3 - 90x^2\xi + 30x^2+ \\ +18\xi x^3 + 12\xi^3,\ 1 \le \xi \le x, \\ R_{23}(x,\xi) = 30x^2 + 6x^3 + 108x\xi - 126x^2\xi - 72x\xi^2+ \\ 18\xi x^3 + 90\xi^2x^2 - 18\xi^2x^3 - 18\xi^3x^2 + 4\xi^3x^3 + 14x\xi^3- \\ -36x,\ x \le \xi \le 2, \\ R_{24}(x,\xi) = 108x - 108x\xi + 36x\xi^2 - 4x\xi^3 - 162x^2+ \\ +54x^3 + 162x^2\xi - 54\xi x^3 - 54\xi^2x^2 + 18\xi^2x^3+ \\ +6\xi^3x^2 - 2\xi^3x^3,\ 2 \le \xi \le 3, \end{cases}$$

$$G_3(x,\xi)=\begin{cases} R_{31}(x,\xi)=-22x\xi^3+12\xi^3x^2-2\xi^3x^3+12\xi^3,\\ 0\le\xi\le 1,\\ R_{32}(x,\xi)=-36x+108x\xi-108x\xi^2+14x\xi^3+\\ 90\xi^2x^2-18\xi^2x^3-18\xi^3x^2+4\xi^3x^3-6x^3-90x^2\xi+\\ +30x^2+18\xi x^3+12\xi^3,\ 1\le\xi\le 2,\\ R_{33}(x,\xi)=108x-108x\xi-4x\xi^3+42x^3+198x^2\xi-\\ -162x^2-54\xi x^3-54\xi^2x^2+18\xi^2x^3+6\xi^3x^2-\\ -2\xi^3x^3+12\xi^3,\ 2\le\xi\le x,\\ R_{34}(x,\xi)=108x-108x\xi+36x\xi^2-4x\xi^3-162x^2+\\ +54x^3+162x^2\xi-54\xi x^3-54\xi^2x^2+18\xi^2x^3+\\ +6\xi^3x^2-2\xi^3x^3,\ x\le\xi\le 3. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$G_1(x,\xi)\ge 0,\ G_2(x,\xi)\le 0,\ G_3(x,\xi)\ge 0$$

при $(x,\xi)\in[0;3]\times[0;3]$.

Двосторонній ітераційний процес будуємо згідно закону

$$z_{p+1,1}(x)=\begin{cases} 0,\ x\in\overline{E};\\ x-3,\ x\in\overline{S};\\ \omega_1(x)-TF_p(\xi),\ x\in[0;3], \end{cases}$$

$$z_{p+1,2}(x)=\begin{cases} 0,\ x\in\overline{E};\\ 1/4,\ x\in\overline{S};\\ \omega_2(x)-TF_p(\xi),\ x\in[0;3], \end{cases}$$

$$(2.91)$$

$$v_{p+1,1}(x)=\begin{cases} 0,\ x\in\overline{E};\\ x-3,\ x\in\overline{S};\\ \omega_1(x)-TF^p(\xi),\ x\in[0;3], \end{cases}$$

$$v_{p+1,2}(x)=\begin{cases} 0,\ x\in\overline{E};\\ 1/4,\ x\in\overline{S};\\ \omega_2(x)-TF^p(\xi),\ x\in[0;3], \end{cases}$$

де

$$f_{p,1}(x)=\begin{cases} -\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,z_{0,1}(x)+4z_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8z_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[0;1], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,v_{0,1}(x)+4v_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8v_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[1;2], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,z_{0,1}(x)+4z_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8z_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[2;3], \end{cases}$$

$$f_1^p(x)=\begin{cases} -\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,v_{0,1}(x)+4v_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8v_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[0;1], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,z_{0,1}(x)+4z_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8z_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[1;2], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^3\left(\frac{\pi}{6}\,v_{0,1}(x)+4v_{0,2}(x)\right)+ \\ \qquad\qquad +8v_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[2;3], \end{cases}$$

$$f_{p,2}(x)=\begin{cases} -\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 z_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,z_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)-\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{x}{24}\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right)\right],\ x\in[0;1], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 v_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,v_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)- \\ \qquad\qquad -\frac{x}{24}\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[1;2], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 z_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,z_{0,1}\left(\frac{x}{2}\right)- \\ \qquad\qquad -\frac{x}{24}\cos\left(\frac{\pi}{12}\,x\right),\ x\in[2;3], \end{cases}$$

$$f_2^p(x)=\begin{cases} -\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^4 v_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,v_{0,1}(x/2)-\right. \\ \qquad\qquad \left.-\frac{x}{24}\cos(\frac{\pi}{12}\,x)\right],\ x\in[0;1], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 z_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,z_{0,1}(x/2)- \\ \qquad\qquad -\frac{x}{24}\cos(\frac{\pi}{12}\,x),\ x\in[1;2], \\ \left(\frac{\pi}{6}\right)^4 v_{0,2}(x)+\frac{1}{3}\,v_{0,1}(x/2)- \\ \qquad\qquad -\frac{x}{24}\cos(\frac{\pi}{12}\,x),\ x\in[2;3], \end{cases}$$

За нульове наближення вибираємо функції:

$$z_{0,1}(x)=\begin{cases}-\frac{119}{48}x-\frac{55}{24}x^3+\frac{211}{48}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+\frac{3}{8}x^4,\ x\in[0;1];\\-\frac{37}{16}x-\frac{17}{8}x^3+\frac{199}{48}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{24},\ x\in[1;2];\\-\frac{175}{48}x-\frac{59}{24}x^3+\frac{247}{48}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{8},\ x\in[2;3];\end{cases}$$

$$v_{0,1}(x)=\begin{cases}\frac{101}{72}x+\frac{59}{36}x^3-\frac{11}{4}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{7}{24}x^4,\ x\in[0;1];\\\frac{101}{72}x+\frac{59}{36}x^3-\frac{11}{4}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{7}{24}x^4,\ x\in[1;2];\\\frac{293}{72}x+\frac{83}{36}x^3-\frac{19}{4}x^2+\frac{3}{8}\sqrt{3}x-\frac{5}{16}\sqrt{3}x^2+\\+\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{3}{8}x^4-\frac{4}{3},\ x\in[2;3];\end{cases}$$

$$z_{0,2}(x)=\begin{cases}-\frac{23}{16}x-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+3x^2-\\-\frac{83}{48}x^3+\frac{7}{24}x^4,\ x\in[0;1];\\-\frac{77}{48}x-\frac{91}{48}x^3+\frac{13}{4}x^2-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\\-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{24},\ x\in[1;2];\\-\frac{13}{48}x-\frac{25}{16}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\\-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3+\frac{7}{24}x^4-\frac{5}{8},\ x\in[2;3];\end{cases}$$

$$v_{0,2}(x)=\begin{cases}\frac{17}{8}x-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{43}{12}x^2+\\+\frac{23}{12}x^3-\frac{1}{3}x^4,\ x\in[0;1];\\\frac{43}{24}x+\frac{19}{12}x^3-\frac{37}{12}x^2-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\\-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{12},\ x\in[1;2];\\\frac{11}{24}x+\frac{5}{4}x^3-\frac{25}{12}x^2-\frac{3}{16}\sqrt{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{3}x^2-\\-\frac{1}{16}\sqrt{3}x^3-\frac{5}{24}x^4+\frac{3}{4},\ x\in[2;3],\end{cases}$$

які задовольняють умови (2.89),(2.90) та нерівності (2.68),(2.69).

В результаті проведених обчислень при $p = 2$ одержано двосторонні наближення

$$
\begin{gathered}
z_{2,1}(x) = 0,2898\cdot 10^{-8}x^{12} - 0,9018\cdot 10^{-7}x^{11} + 0,1283\cdot 10^{-5}x^{10} - \\
- 0,82798\cdot 10^{-5}x^{9} + \left(2,1319\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 3,8337\cdot 10^{-3} - \right. \\
-4,2638\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\, x^{7} + \left(-133,5362\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right) - \right. \\
-12,7916\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 66,7631 + 66,7681\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + \\
+25,5831\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\, x^{6} + \left(-741,6548\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \right. \\
-400,6086\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 422,4175 + 801,2171\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 1483,3095\times \\
\times\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\, x^{5} + \left(-5110,5301 - 5110,53\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + \right. \\
+4577,8443\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 9155,689\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 10221,06\times \\
\times\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\, x^{4} + \left(-69338,5328 - 27820,0199\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + \right. \\
+76335,2587 + 13910,01\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 34669,2664\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\, x^{3} + \\
+ \left(-64294,574 - 129366,419\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 64294,771\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + \right. \\
+258732,838\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 128589,5416\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\, x^{2} + \\
+ \left(0,20297\cdot 10^{8} - 70139,75\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 245587,9339\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \right. \\
-0,2900\cdot 10^{7}\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right) - 491175,8681\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + \\
+30792,5783\cos^{2}\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\, x + 0,1772\cdot 10^{9}\sin^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right) + \\
+ 267914,1098\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right),\ x\in[0;1];
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_{2,1}(x) = 0,2963\cdot 10^{-8}x^{12} - 0,8893\cdot 10^{-7}x^{11} + 0,1241\cdot 10^{-5}x^{10} - \\
- 0,7733\cdot 10^{-5}x^{9} - 0,4611\cdot 10^{-5}x^{8} + 3,8083\cdot 10^{-3}x^{7} - \\
- 5,5154\cdot 10^{-3}x^{6} - 21,7885x^{5} - 3,42197\cdot 10^{-3}x^{4} + 41670,8334x^{3} + \\
+ 0,2291x^{2} + \left(-0,29\cdot 10^{7}\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right) - 0,2033\cdot 10^{8} - \right.
\end{gathered}
$$

$$-4703,0475\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\,x+6,9579\cdot 10^{-3}+0,1772\cdot 10^{9}\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+$$
$$+\,140462,0482\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),\ x\in[1;2];$$

$$z_{2,1}(x)=0,2898\cdot 10^{-8}x^{12}-0,9142\cdot 10^{-7}x^{11}+0,1409\cdot 10^{-5}x^{10}-$$
$$-\,0,1211\cdot 10^{-5}x^{9}+6,9173\cdot 10^{-5}x^{8}+3,1769\cdot 10^{-3}x^{7}-4,9618\cdot 10^{-3}x^{6}-$$
$$-\,21,7556x^{5}-0,2619x^{4}+41671,7425x^{3}-1,4445x^{2}+$$
$$+\left(-4703,0475\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-0,2900\cdot 10^{7}\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)-0,2033\cdot 10^{8}\right)x-$$
$$-\,0,6359+0,1772\cdot 10^{9}\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+140462,0482\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),\ x\in[2;3];$$

$$v_{2,1}(x)=-0,2810\cdot 10^{-8}x^{12}+0,7837\cdot 10^{-7}x^{11}-0,1115\cdot 10^{-5}x^{10}+$$
$$+\,0,918\cdot 10^{-5}x^{9}+\Big(2,624\cdot 10^{-3}+2,1319\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)-$$
$$-4,2638\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x)\right)\Big)\,x^{7}+\Big(66,7681\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-$$
$$-12,7916\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+25,583+66,768\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+$$
$$+66,7732-133,5362\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\,x^{6}+\Big(801,2171\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)+$$
$$+1483,3095\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)-400,6086\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-422,4483-$$
$$-741,6548\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\,x^{5}+\Big(-9155,6886\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)-$$
$$-5110,53\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)+4577,8443\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+10221,06\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)-$$
$$-5110,5301)\,x^{4}+\Big(-69338,5328\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)-27820,02\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+76335,2587+34669,2664\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)+13910,01\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\,x^{3}+\Big(128589,5415\cos^{2}\left(\frac{\pi}{24}x\right)-129366,419\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$$
$$+258732,838\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+64294,951-64294,77079\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\Big)\,x^{2}+\Big(-0,20297\cdot 10^{8}-0,2900\cdot 10^{7}\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)+$$
$$+245587,934\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+30792,5783\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-$$

$$-491175,868\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)-70139,749\cos^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)\Big)\,x+$$
$$+\,0,1772\cdot10^9\sin^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)+267914,1098\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right),$$
$$x\in[0;1];$$

$$v_{2,1}(x)=-0,2375\cdot10^{-8}x^{12}+0,7224\cdot10^{-7}x^{11}-0,1071\cdot10^{-5}x^{10}+$$
$$+\,0,8964\cdot10^{-5}x^{9}+0,7718\cdot10^{-6}x^{8}+2,5687\cdot10^{-3}x^{7}+4,6492\cdot10^{-3}x^{6}-$$
$$-\,21,8197x^5-2,7345\cdot10^{-3}x^4+41671,0198x^3-0,1407x^2+$$
$$+\left(-4703,0475\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-0,29\cdot10^7\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)-0,2033\cdot10^7\right)x+$$
$$+\,7,0074\cdot10^{-3}+0,1772\cdot10^9\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+140462,0483\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),$$
$$x\in[1;2];$$

$$v_{2,1}(x)=-0,2463\cdot10^{-8}x^{12}+0,8335\cdot10^{-7}x^{11}-0,1409\cdot10^{-5}x^{10}+$$
$$+\,0,1856\cdot10^{-4}x^{9}-1,5297\cdot10^{-4}x^{8}+4,1057\cdot10^{-3}x^{7}-3,3093\cdot10^{-3}x^{6}-$$
$$-\,21,8095x^5+0,08096x^4+41670,5874x^3+0,7248x^2+$$
$$+\left(-4703,0475\cos(\frac{\pi}{12}x)-0,29\cdot10^7\cos(\frac{\pi}{24}x)-0,2033\cdot10^8\right)x+$$
$$+\,0,3510+0,1772\cdot10^9\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+140462,0483\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),$$
$$x\in[2;3];$$

$$z_{2,2}(x)=0,1369\cdot10^{-9}x^{12}-0,39199\cdot10^{-8}x^{11}+0,5261\cdot10^{-7}x^{10}-$$
$$-\,0,3337\cdot10^{-6}x^9+(6,631\cdot10^{-2}\sin(\frac{\pi}{12}x)-0,1326\cos(\frac{\pi}{24}x)\sin(\frac{\pi}{24}x)+$$
$$+\,1,5656\cdot10^{-4})x^7+(-4,188\cos^2(\frac{\pi}{24}x)-0,3979\sin(\frac{\pi}{12}x)+2,0938+$$
$$+\,0,7958\cos(\frac{\pi}{24}x)\sin(\frac{\pi}{24}x)+2,0939\cos(\frac{\pi}{12}x))x^6+(25,1276\cos^2(\frac{\pi}{24}x)-$$
$$12,5638\cos(\frac{\pi}{12}x)+46,5314\cos(\frac{\pi}{12}x)\sin(\frac{\pi}{24}x)-13,4673-23,2657\times$$
$$\times\sin(\frac{\pi}{12}x))x^5+(143,5729\sin(\frac{\pi}{12}x)-160,2757\cos(\frac{\pi}{12}x)+320,5514\times$$
$$\times\cos^2(\frac{\pi}{24}x)-287,1459\cos(\frac{\pi}{24}x)\sin(\frac{\pi}{24}x)-160,2757)x^4+$$

$$+ (436,2437\sin(\frac{\pi}{12}x) - 2174,585\cos^2(\frac{\pi}{24}x) + 2820,7914+$$
$$+ 1087,2924\cos(\frac{\pi}{12}x) - 872,4874\sin(\frac{\pi}{24}x)\cos(\frac{\pi}{24}x))x^3+$$
$$+ (4032,8063\cos^2(\frac{\pi}{24}x) + 8114,3413\sin(\frac{\pi}{24}x)\cos(\frac{\pi}{24}x)-$$
$$- 2016,4032\cos(\frac{\pi}{12}x) - 4057,1706\sin(\frac{\pi}{12}x) - 2016,4016)x^2+$$
$$+ (966,8091\cos(\frac{\pi}{12}x) + 7702,0928\sin(\frac{\pi}{12}x)-$$
$$- 15404,1855\cos(\frac{\pi}{24}x)\sin(\frac{\pi}{24}x) - 2199,7125\cos^2(\frac{\pi}{24}x)-$$
$$- 120842,5048\cos(\frac{\pi}{24}x) - 845764,3567)x + 8402,283\cos(\frac{\pi}{24}x)\times$$
$$\times \sin(\frac{\pi}{24}x) + 0,7385\cdot 10^7\sin(\frac{\pi}{24}x),\ x\in[0;1];$$

$$z_{2,2}(x) = 0,1455\cdot 10^{-9}x^{12} - 0,3950\cdot 10^{-8}x^{11} + 0,5145\cdot 10^{-7}x^{10}-$$
$$- 0,3138\cdot 10^{-6}x^9 - 0,1815\cdot 10^{-6}x^8 + 1,55\cdot 10^{-4}x^7 - 2,2721\cdot 10^{-4}x^6-$$
$$- 0,9025x^5 - 1,4143\cdot 10^{-4}x^4 + 1733,6997x^3 + 9,5356\cdot 10^{-3}x^2+$$
$$+ \left(-120842,5048\cos(\frac{\pi}{24}x) - 846917,4314 - 150,7867\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)x+$$
$$+0,7385\cdot 10^7\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+4472,1829\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+6,7783\cdot 10^{-4},\ x\in[1;2];$$

$$z_{2,2}(x) = 0,1369\cdot 10^{-9}x^{12} - 0,3889\cdot 10^{-8}x^{11} + 0,5610\cdot 10^{-7}x^{10}-$$
$$- 0,4730\cdot 10^{-6}x^9 + 0,2723\cdot 10^{-5}x^8 + 1,2937\cdot 10^{-4}x^7-$$
$$- 2,0409\cdot 10^{-4}x^6 - 0,9011x^5 - 0,0109x^4 + 1733,7374x^3 - 0,0631x^2+$$
$$+ \left(-120842,5048\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right) - 846917,3659 - 150,7867\cos\left((\frac{\pi}{12}x)\right)\right)x-$$
$$- 0,0261 + 0,7385\cdot 10^7\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 4472,1829\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),\ x\in[2;3];$$

$$v_{2,2}(x) = -0,1407\cdot 10^{-9}x^{12} + 0,3499\cdot 10^{-8}x^{11} - 0,4597\cdot 10^{-7}x^{10}+$$
$$+ 0,3686\cdot 10^{-6}x^9 + \left(-0,1326\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 1,0711\cdot 10^{-4}+\right.$$
$$\left.+0,0663\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)x^7 + \left(-0,3979\sin(\frac{\pi}{12}x) - 4,1879\cos^2(\frac{\pi}{24}x)+\right.$$
$$\left.+0,7958\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right) + 2,0942 + 2,0939\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)x^6+$$

$$
\begin{gathered}
+\left(46,5314\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)-12,5638\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-\right.\\
\left.-23,2657\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+25,1276\cos^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)-13,4685\right)x^5+\\
+\left(-160,2757\cos(\frac{\pi}{12}x)+320,5514\cos^2\left(\frac{\pi}{12}x\right)-\right.\\
\left.-287,1459\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+143,5729\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)-160,2757\right)x^4+\\
+\left(436,2437\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+2820,7997+1087,2924\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-\right.\\
\left.-2174,5849\cos^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)-872,4874\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\right)x^3+\\
+\left(-4057,1707\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)-2016,4032\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-2016,4118+\right.\\
\left.+4032,8063\cos^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)+8114,3413\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)\right)x^2+\\
+\left(7702,0928\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)-120842,5048\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)+\right.\\
+966,8091\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-845764,3475-15404,1855\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\times\\
\left.\times\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)-2199,7125\cos^2\left(\frac{\pi}{24}x\right)\right)x+\\
+8402,283\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+0,7385\cdot10^7\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right),\ x\in[0;1];
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{2,2}(x)\ =\ -0,1139\cdot10^{-9}x^{12}+0,3142\cdot10^{-8}x^{11}-0,4359\cdot10^{-7}x^{10}+\\
+0,3579\cdot10^{-6}x^9+0,36399\cdot10^{-7}x^8+1,0435\cdot10^{-4}x^7+1,9163\cdot10^{-4}x^6-\\
-0,9038x^5-1,1286\cdot10^{-4}x^4+1733,7079x^3-7,4341\cdot10^{-3}x^2+\\
+(-120842,5048\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)-150,7867\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)-846917,43)x+\\
+0,7385\cdot10^7\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+4472,1829\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)+6,7783\cdot10^{-4},\ x\in[1;2];
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
v_{2,2}(x)=-0,1103\cdot10^{-9}x^{12}+0,3378\cdot10^{-8}x^{11}-0,5764\cdot10^{-7}x^{10}+\\
+0,7192\cdot10^{-6}x^9-0,6064\cdot10^{-5}x^8+1,6688\cdot10^{-4}x^7-\\
-1,3648\cdot10^{-4}x^6-0,9034x^5+0,0033x^4+1733,6899x^3+0,0295x^2+\\
+\left(-120842,5048\cos\left(\frac{\pi}{24}x\right)-846917,4622-150,7867\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)\right)x+\\
0,01503+0,7385\cdot10^7\sin\left(\frac{\pi}{24}x\right)+4472,1829\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right),\ x\in[2;3].
\end{gathered}
$$

Для кожного наближення отримано оцінку похибки і результат зведено в таблиці.

Таблиця 2.3

p	$\sup\limits_{[0;1]} \|w_{p,1}(x)\|$	$\sup\limits_{[1;2]} \|w_{p,1}(x)\|$	$\sup\limits_{[2;3]} \|w_{p,1}(x)\|$
0	$6,4506 \cdot 10^{-1}$	$3,6198 \cdot 10^{-1}$	$6,6399 \cdot 10^{-1}$
1	$1,4422 \cdot 10^{-1}$	$6,2730 \cdot 10^{-2}$	$8,7684 \cdot 10^{-2}$
2	$2,6726 \cdot 10^{-2}$	$1,3201 \cdot 10^{-2}$	$1,7120 \cdot 10^{-2}$

Таблиця 2.4

p	$\sup\limits_{[0;1]} \|w_{p,2}(x)\|$	$\sup\limits_{[1;2]} \|w_{p,2}(x)\|$	$\sup\limits_{[2;3]} \|w_{p,2}(x)\|$
0	$5,9014 \cdot 10^{-1}$	$3,2552 \cdot 10^{-1}$	$5,6174 \cdot 10^{-1}$
1	$5,8603 \cdot 10^{-3}$	$2,4132 \cdot 10^{-3}$	$3,2494 \cdot 10^{-3}$
2	$1,0499 \cdot 10^{-3}$	$7,4874 \cdot 10^{-4}$	$7,2102 \cdot 10^{-4}$

Отримані результати проілюстровано за допомогою графіків на Рис 2.3 та Рис. 2.4.

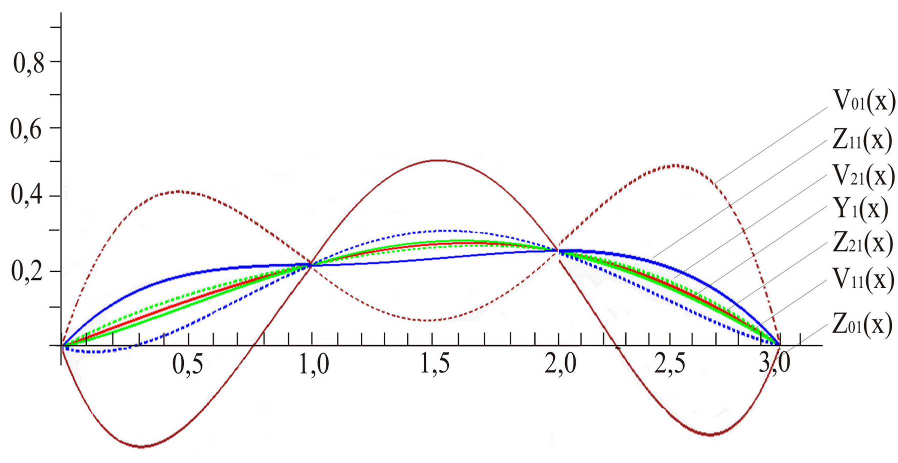


Рис. 2.3. Наближення до розв'язку $Y_1(x)$

Точним розв'язком заданої крайової задачі є функції

$$y_1(x) = \frac{x}{4}\cos(\frac{\pi}{6}x),\ y_2(x) = \frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{6}x).$$

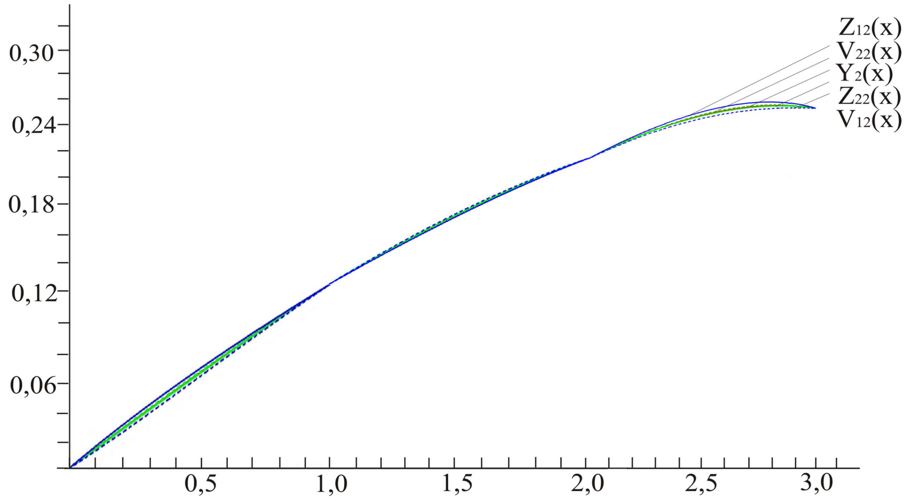


Рис. 2.4. Наближення до розв'язку $Y_2(x)$

За наближений розв'язок беремо функції

$$y_{p,i}(x) = \frac{1}{2}\left(z_{p,i}(x) + v_{p,i}(x)\right), i = 1, 2.$$

Тоді на кожному кроці ітераційного процесу визначаємо оцінки похибки наближених розв'язків.

Таблиця 2.5

p	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert y_{p,1}(x) - y_1(x)\rvert$	$\sup\limits_{[1;2]} \lvert y_{p,1}(x) - y_1(x)\rvert$	$\sup\limits_{[2;3]} \lvert y_{p,1}(x) - y_1(x)\rvert$
1	$2,2632 \cdot 10^{-3}$	$1,5343 \cdot 10^{-3}$	$2,6061 \cdot 10^{-3}$
2	$1,7801 \cdot 10^{-3}$	$3,9201 \cdot 10^{-4}$	$8,9310 \cdot 10^{-4}$

Таблиця 2.6

p	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert y_{p,2}(x) - y_2(x)\rvert$	$\sup\limits_{[1;2]} \lvert y_{p,2}(x) - y_2(x)\rvert$	$\sup\limits_{[2;3]} \lvert y_{p,2}(x) - y_2(x)\rvert$
1	$1,7729 \cdot 10^{-4}$	$7,6272 \cdot 10^{-5}$	$1,2469 \cdot 10^{-4}$
2	$1,14604 \cdot 10^{-4}$	$3,9100 \cdot 10^{-5}$	$6,2310 \cdot 10^{-5}$

Розділ 3

Двосторонні методи дослідження задач з параметрами в крайових умовах у випадку системи квазілінійних диференціальних рівнянь

У теорії диференціальних рівнянь значна увага приділяється дослідженню класу крайових задач, які містять параметри або в диференціальному рівнянні, або в крайових умовах.

Двоточкові задачі для диференціальних рівнянь з керуючим параметром у правій частині функціонально-аналітичним методом вивчалися в роботах А.В.Кібенко, А.І.Перова [32], А.В.Кібенко [31]. Багатоточкові крайові задачі з параметрами вивчалися в роботі М.С.Курпеля, А.Г.Марусяка [43].

Для розв'язування крайових задач з параметрами у випадку диференціальних та інтегро–диференціальних рівнянь використовуються також і добре відомі наближені методи: метод Ньютона [153], метод усереднення функціональних поправок [6].

Вивченню розв'язків крайових задач з параметрами чисельно-аналітичним методом послідовних періодичних наближень і його модифікаціями разом із двосторонніми та проекційно-ітеративними методами присвячені дослідження Р.І.Собковича [143], а проекційно–ітеративними методами — А.Ю.Лучки [52, 53]. У роботах А.М.Самойленко, М.Й.Ронто, В.А.Ронто [138], М.Й.Ронто, В.А.Ронто [115] чисельно–аналітичний метод послідовних наближень узагальнений для дослідження існування і побудови розв'язку крайових задач, у яких параметр входить у крайові умови лінійно і нелінійно. У монографії А.М.Самойленко, М.Й.Ронто [137] за допомогою побудованих модифікацій чисельно–аналітичного методу досліджено ряд задач терії звичайних диференціальних рівнянь з крайовими умовами, які залежать від параметрів.

Дослідження крайових задач з параметрами у крайових умовах для випадку системи квазілійних диференціальних рівнянь 2-го порядку за допомогою побудованих модифікацій двостороннього методу викладено у даному розділі. Також запропоновано один підхід побудови монотонного двостороннього методу прискореної збіжності і отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку досліджуваної задачі.

3.1 Постановка задачі, основні означення і позначення

Позначимо через $L_{2,\lambda}$ диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $l_2(Y(x)) \equiv Y''(x)$ та крайовими умовами

$$\begin{cases} A_1 \Lambda Y(0) + B_1 Y(1) = d_1, \\ A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1) = \Lambda d_2, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

де

$Y(x) = (y_i(x)), Y_0 = (y_{i,0}), d_k = (d_{i,k}),$

$i = \overline{1,n},\ k = 1,2$ — вектори–стовпці,

$A_k = (\delta_{ij}\alpha_{ij}^k),\ B_k = (\delta_{ij}\beta_{ij}^k),\ \Lambda = (\delta_{ij}\lambda_i),\ i,j = \overline{1,n}$ — матриці,

$y_{i,0}, d_{i,k}, \alpha_{ij}^k, \beta_{ij}^k$ — задані сталі, λ_i — шукані параметри,

δ_{ij} — символ Кронекера.

Розглянемо крайову задачу

$$L_{2,\lambda}(Y(x)) = F[Y(x), Y'(x)],\ x \in [0;1], \tag{3.2}$$

де

$F[Y(x), Y'(x)] = (f_i[Y(x), Y'(x)])$— вектор-стовпець,

$f_i[Y(x), Y'(x)] \equiv f_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),\ y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)).$

Вектор–функція $F[Y(x), Y'(x)]$ визначена і неперервна в замкнутій, обмеженій області $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ із значеннями в $\mathbb{R}^{2n}$ ($F[Y(x), Y'(x)] \in C(\overline{B})$).

Під розв'язком крайової задачі (3.2) розуміємо [137] пару векторів $(Y(x), \lambda)$, де $\lambda = (\lambda_i)$ — вектор-стовпець, $\lambda_i \in [\lambda_{i,1}; \lambda_{i,2}]$, $\lambda_{i,k}$ — задані сталі, $k = 1, 2$, вектор–функція $Y(x)$ належить просторові $C_1[0; 1] \equiv C^2(0; 1) \cap C^1[0; 1]$, є розв'язком рівняння

$$Y''(x) = F[Y(x), Y'(x)] \tag{3.3}$$

і разом із шуканим вектором λ задовольняють крайові умови (3.1).

Означення 3.1.1. *Будемо говорити, що права частина задачі (3.2) $F[Y(x),\ Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1. $F[Y(x), Y'(x)] \in C(\overline{B})$;

2. *існує така вектор-функція*

   $$H[Z(x); V(x)] \equiv (h_i[Z(x); V(x)]) \in C(\overline{B}_1),\ \overline{B}_1 \in R^{4n+1},$$

   що

   (a) $H[Y(x); Y(x)] \equiv F[Y(x), Y'(x)]$;

   (b) *для довільних з простору $C_1[0; 1]$ вектор–функцій $Z_0(x)$, $Z_1(x)$, $V_0(x)$, $V_1(x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови*

   $$Z_0^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x),\ V_0^{(s)}(x) \ge V_1^{(s)}(x),\ s = 0, 1, \tag{3.4}$$

   виконується нерівність

   $$H[Z_1(x); V_1(x)] - H[Z_0(x); V_0(x)] \ge 0,\ x \in [0; 1]; \tag{3.5}$$

   (c) *вектор-функція $H[Z(x); V(x)]$ задовольняє в області її визначення $\overline{B}_1$ умову Ліпшиця з матрицею $\frac{1}{4}L$, тобто для всяких вектор-функцій $Z_0(x)$, $Z_1(x)$, $V_0(x)$, $V_1(x)$, які належать області $\overline{B}_1$, виконується умова*

   $$\begin{aligned} &|H\,[Z_1(x); V_1(x)] - H\,[Z_0(x); V_0(x)]| \le \\ &\le \frac{1}{4}L\,(|Z_1(x) - Z_0(x)| + |Z_1'(x) - Z_0'(x)| + |V_1(x) - V_0(x)| \\ &\qquad + |V_1'(x) - V_0'(x)|)\,,\ L = (\delta_{ij}L_i),\quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Надалі будемо вважати, що матриця A_1 є невироджена, а елементи векторів d_2 та Y_0 відмінні від нуля (у супротивному випадку крайова задача (3.2) значно спрощується).

Із крайових умов (3.1) маємо

$$\lambda = \hat{d}_2 \left(A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1)\right) = A_1^{-1} \left(\overline{Y}_0^{-1} d_1 - B_1 \overline{Y}_0^{-1} Y(1)\right), \qquad (3.7)$$

де

$$\hat{d}_2 = \left(\delta_{ij} \frac{1}{d_{i,2}}\right), \ \overline{Y}_0^{-1} = \left(\delta_{ij} \ \frac{1}{y_{i,0}}\right) \text{ — матриці,}$$

$$A_1^{-1} \text{ — обернена до } A_1 \text{ матриця.}$$

Таким чином, крайова задача (3.2) зводиться до інтегрування системи (3.3) з крайовими умовами

$$\begin{cases} A_1 \overline{Y}_0 \hat{d}_2 \left(A_2 Y'(0) + B_2 Y'(1)\right) + B_1 Y(1) = d_1, \\ Y(0) = Y_0, \end{cases} \qquad (3.8)$$

$\overline{Y}_0 = (\delta_{ij}\ y_{i,0})$ – матриця, а вектор λ визначається з рівняння (3.7).

Із (3.3) маємо:

$$Y(x) = C_1 x + C_2 + \int\limits_0^x (x-\xi) F[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi, \qquad (3.9)$$

де

$$C_k = (c_{i,k}) \text{ — довільні вектори-стовпці}, k = 1, 2.$$

В силу крайових умов (3.8) одержуємо:

$$C_2 = Y_0,$$

$$\left\{A_1 \overline{Y}_0 \hat{d}_2 (A_2 + B_2) + B_1\right\} C_1 =$$

$$d_1 - B_1 Y_0 - \int\limits_0^1 \left\{B_1(1-\xi) + A_1 \overline{Y}_0 \hat{d}_2 B_2\right\} F[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi.$$

Нехай матриця $K = A_1 \overline{Y}_0 \hat{d}_2 (A_2 + B_2) + B_1$ – невироджена. Тоді

$$C_1 = K^{-1}(d_1 - B_1 Y_0) - \int\limits_0^1 K^{-1} \left\{B_1(1-\xi) + A_1 \overline{Y}_0 \hat{d}_2 B_2\right\} F[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi,$$

а, отже, згідно (3.9) маємо

$$Y(x) = K^{-1}(d_1 - B_1Y_0)x + Y_0 - \int_0^1 xK^{-1}\{B_1(1-\xi)+$$
$$+A_1\overline{Y}_0\hat{d}_2B_2\Big\} F[Y(\xi), Y'(\xi)]d\xi + \int_0^x (x-\xi)F[Y(\xi), Y'(\xi)]d\xi.$$

Оскільки

$$K^{-1}B_1 \equiv A = \left(\delta_{ij}\ \frac{\beta^1_{ij}d_{i,2}}{\rho_i}\right),\ \rho_i = \alpha^1_{ij}(\alpha^2_{ij} + \beta^2_{ij})y_{i,0} + \beta^1_{ij}d_{i,2} \neq 0,$$
$$K^{-1}A_1\overline{Y}_0\hat{d}_2A_2 \equiv B = \left(\delta_{ij}\frac{\alpha^1_{ij}\alpha^2_{ij}y_{i,0}}{\rho_i}\right),$$

$A,\ B$ – матриці, то попереднє рівняння можна подати у вигляді [64]

$$Y(x) = Y_0 + Cx + \int_0^1 G(x,\xi)F[Y(\xi), Y'(\xi)]d\xi, \tag{3.10}$$

де

$$C \equiv K^{-1}(d_1 - B_1Y_0) = \left(\frac{d_{i,1}d_{i,2} - \beta^1_{ij}y_{i,0}d_{i,2}}{\rho_i}\right) \text{ – вектор},$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} Bx + (Ax - E)\xi,\ \xi \in [0;x], \\ Bx + (A\xi - E)x,\ \xi \in (x;1], \end{cases}$$

а із (3.7) маємо

$$\lambda = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2)F[Y(\xi), Y'(\xi)]d\xi, \tag{3.11}$$

де

$$N_1 = A_1^{-1}\overline{Y}_0^{\,-1}d_1 - A_1^{-1}B_1\overline{Y}_0^{\,-1}(Y_0 + C) =$$
$$= \left(\frac{(\alpha^2_{ij} + \beta^2_{ij})(d_{i,1} - \beta^1_{ij}y_{i,0})}{\rho_i}\right) \text{ — вектор},$$

$$N_2 = -A_1^{-1}B_1\overline{Y}_0^{\,-1}B = \left(-\delta_{ij}\ \frac{\alpha^2_{ij}\beta^1_{ij}}{\rho_i}\right),$$

$$N_3 = -A_1^{-1} B_1 \overline{Y}_0^{\,-1}(A - E) = \left(\delta_{ij} \, \frac{\beta_{ij}^1(\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2)}{\rho_i} \right),$$

$$N_2, \ N_3 \text{ — матриці.}$$

Отже, інтегрування крайової задачі (3.2) звелося до розв'язання рівнянь (3.10), (3.11).

Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$.

Позначимо:

$$\begin{gathered} F^p(x) = H[Z_p(x); V_p(x)], \ F_p(x) = H[V_p(x); Z_p(x)], \\ \alpha_p(x) = Z_p(x) - Y_0 - Cx - \int\limits_0^1 G_1(x,\xi) F^p(\xi) d\xi - \\ - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi) F_p(\xi) d\xi, \\ \beta_p(x) = V_p(x) - Y_0 - Cx - \int\limits_0^1 G_1(x,\xi) F_p(\xi) d\xi - \\ - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi) F^p(\xi) d\xi, \\ W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x), \end{gathered} \tag{3.12}$$

де

$$\begin{gathered} G_1(x,\xi) = Ax\xi, \ \xi \in [0;1], \\ G_2(x,\xi) = \begin{cases} -E\xi + Bx, \ \xi \in [0;x], \\ -Ex + Bx, \ \xi \in (x;1], \end{cases} \\ G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi) = G(x,\xi). \end{gathered} \tag{3.13}$$

Не зменшуючи загальності подальших міркувань, покладемо:

$$d_2 = col(1, 1, \ldots, 1), \ A_1 = E, \ \det(A_2 \overline{Y}_0) \neq 0. \tag{3.14}$$

3.2 Монотонний двосторонній метод наближеного інтегрування задачі (3.2)

а) Нехай

$$E + B_2 A_2^{-1} \leq \Theta, \ B_1 (A_2 \overline{Y}_0)^{-1} \leq \Theta, \tag{3.15}$$

де Θ – нульова матриця.

Тоді очевидно $\rho_i < 0, \ A \geq \Theta, \ B \leq \Theta$, а, отже,

$$G_{1x}^{(s)}(x,\xi) \geq 0, \ G_{2x}^{(s)}(x,\xi) \leq 0, \ s = 0, 1 \tag{3.16}$$

при $(x,\xi)\in[0;1]\times[0;1]$.

Побудуємо спочатку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3.10).

Послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ будуємо згідно формул

$$\begin{aligned}
&Z_{p+1}(x)=Y_0+Cx+\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{F}^p(\xi)d\xi+\int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\overline{F}_p(\xi)d\xi,\\
&V_{p+1}(x)=Y_0+Cx+\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{F}_p(\xi)d\xi+\int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\overline{F}^p(\xi)d\xi,\\
&\overline{F}^p(x)=F^p(x)-C_p(x)(F^p(x)-F_p(x)),\ C_p(x)=(\delta_{ij}\,c_{ij}^p(x)),\\
&\overline{F}_p(x)=F_p(x)+Q_p(x)(F^p(x)-F_p(x)),\ Q_p(x)=(\delta_{ij}\,q_{ij}^p(x)),
\end{aligned}\tag{3.17}$$

$c_{ij}^p(x)$, $q_{ij}^p(x)$ — довільні невід'ємні з простору $C[0;1]$ функції для всіх $i,j=\overline{1,n}$ та $p=0,1,2,\ldots$, а нульове наближення в просторі вектор-функцій $C_1[0;1]$ вибираємо таким чином, щоб при $x\in[0;1]$ виконувались нерівності

$$W_0^{(s)}(x)\geq 0,\ \alpha_0^{(s)}(x)\geq 0,\ \beta_0^{(s)}(x)\leq 0,\ s=0,1.\tag{3.18}$$

Нехай

$$\begin{gathered}
\sup_{[0,1]} c_{ij}^p(x)\leq\frac{1}{2},\ \sup_{[0,1]} q_{ij}^p(x)\leq\frac{1}{2},\\
\forall\, i,j=\overline{1,n},\ p=0,1,\ldots
\end{gathered}\tag{3.19}$$

Із (3.12), (3.17) маємо

$$\begin{gathered}
Z_{p+1}(x)-Z_p(x)=-\alpha_p(x)+\\
+\int\limits_0^1\left\{G_2(x,\xi)Q_p(\xi)-G_1(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(F^p(\xi)-F_p(\xi)\right)d\xi,\\
V_{p+1}(x)-V_p(x)=-\beta_p(x)+\\
+\int\limits_0^1\left\{G_1(x,\xi)Q_p(\xi)-G_2(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(F^p(\xi)-F_p(\xi)\right)d\xi,
\end{gathered}\tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
W_{p+1}(x)=\int\limits_0^1\left[G_1(x,\xi)-G_2(x,\xi)\right]\left(E-C_p(\xi)-Q_p(\xi)\right)\times\\
\times\left(F^p(\xi)-F_p(\xi)\right)d\xi,
\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{p+1}(x) &= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi + \\ &+ \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi, \\ \beta_{p+1}(x) &= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{F}_p(\xi) - F_{p+1}(\xi)\right)d\xi + \\ &+ \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{F}^p(\xi) - F^{p+1}(\xi)\right)d\xi.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Із (3.20), (3.21) при $p = 0$, враховуючи (3.5), (3.16), (3.18) та (3.19), випливає

$$Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) \leq 0, \quad W_1^{(s)}(x) \geq 0, \quad s = 0, 1,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_1^{(s)}(x) \leq Z_1^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x), \quad x \in [0;1],\ s = 0, 1,$$

а це означає, що $Z_1(x),\ V_1(x) \in \overline{B}_1$.

Приймаючи останні нерівності до уваги, одержуємо

$$\overline{F}^0(x) - F^1(x) = F^0(x) - F^1(x) - C_0(x)(F^0(x) - F_0(x)),$$
$$\overline{F}_0(x) - F_1(x) = F_0(x) - F_1(x) + Q_0(x)(F^0(x) - F_0(x)),$$

де

$$F^0(x) - F^1(x) \geq 0, \quad F_0(x) - F_1(x) \leq 0, \quad F^0(x) - F_0(x) \geq 0,\ x \in [0;1].$$

Отже, вибираючи елементи матриць $C_0(x)$, $Q_0(x)$ таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$

$$\overline{F}^0(x) - F^1(x) \geq 0,\ \overline{F}_0(x) - F_1(x) \leq 0,$$

із (3.22) при $p = 0$ випливає справедливість при $x \in [0;1]$ нерівностей

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0, 1.$$

Беручи вектор–функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітерації (3.17) елементи матриць $C_p(x)$, $Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови

$$\begin{aligned}F^p(x) - F^{p+1}(x) - C_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) \geq 0, \\ F_p(x) - F_{p+1}(x) + Q_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) \leq 0,\end{aligned} \tag{3.23}$$

то при $x \in [0;1]$ для довільного $p \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності

$$\begin{gathered} V_p^{(s)}(x) \le V_{p+1}^{(s)}(x) \le Z_{p+1}^{(s)}(x) \le Z_p^{(s)}(x), \\ \alpha_{p+1}^{(s)}(x) \ge 0,\ \beta_{p+1}^{(s)}(x) \le 0,\ s = 0,1,\ x \in [0;1]. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Покажемо, що побудовані послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$, $\{V_p(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3.10) в просторі вектор–функцій $C_1[0;1]$.

Позначимо

$$q = \max_{k=\overline{0,p}} \left\{ \sup_{[0,1]} \|E - C_k(x) - Q_k(x)\| \right\},$$

$$d = \sup_{[0,1]} \{\|W_0(x)\|, \|W_0'(x)\|\},\ \|L\| \le M.$$

Тоді із (3.21) при $p = 0$ одержуємо

$$W_1(x) = \int_0^1 \{G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)\} (E - C_0(\xi) - Q_0(\xi)) \times$$
$$\times (F^0(\xi) - F_0(\xi))\, d\xi,$$

звідки

$$\|W_1(x)\| \le qdM \left\| \int_0^1 [G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)] d\xi \right\| =$$
$$= qdM \left\| \int_0^x [(Ax+E)\xi - Bx]\, d\xi + \int_x^1 [(A\xi + E)x - Bx]\, d\xi \right\| =$$
$$= qdM \left\| (0,5A + E - B)x - 0,5Ex^2 \right\|.$$

В силу умов (3.15)

$$\frac{3\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 y_{i,0}}{2\rho_i} \ \ge\ 0, \quad 1 - \frac{3\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 y_{i,0}}{2\rho_i} \ \le\ 0 \text{ для всіх} i,j \ =\ \overline{1,n}.$$

Отже,

$$\|W_1(x)\| \le qdM \left\| \frac{1}{2}(A+E) - B \right\| = qdM\tau_1,$$

де

$$\tau_1 = \left\| \left(\delta_{ij} \frac{2\beta_{ij}^1 + (\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\|.$$

Аналогічно

$$\|W_1'(x)\| \le qdM \left\| \int_0^x [A\xi - B] d\xi + \int_x^1 [A\xi + E - B] d\xi \right\| =$$
$$= qdM \left\| \left(\frac{1}{2}A + E - B \right) - Ex \right\| \le qdM\tau_2,$$

де

$$\tau_2 = \left\| \left(\delta_{ij} \frac{3\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\|.$$

Оскільки для всіх $i, j = \overline{1, n}$

$$\frac{3\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 y_{i,0}}{2\rho_i} - \frac{2\beta_{ij}^1 + (\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2) y_{i,0}}{2\rho_i} = 0,5 > 0,$$

то $\tau_1 < \tau_2$.

Тоді

$$\sup_{[0,1]} \{\|W_1(x)\|, \ \|W_1'(x)\|\} \le qdM\tau_2.$$

Таким чином, із (3.21) при $p = 1$ маємо

$$\sup_{[0,1]} \{\|W_2(x)\|, \ \|W_2'(x)\|\} \le (q\tau_2 M)^2 d.$$

Припустимо, що для деякого p виконується нерівність

$$\sup_{[0,1]} \left\{ \|W_p(x)\|, \ \left\|W_p'(x)\right\| \right\} \le (q\tau_2 M)^p d. \tag{3.25}$$

Тоді

$$\|W_{p+1}(x)\| \le (qM)^{p+1} \tau_2^p d \left\| \int_0^1 [G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)]\, d\xi \right\| \le$$

$$\le (qM)^{p+1} \tau_2^p d\tau_1 \le (q\tau_2 M)^{p+1} d,$$

$$\left\|W'_{p+1}(x)\right\| \leq (qM)^{p+1}\tau_2^p d \left\| \int\limits_0^x (A\xi - B)\, d\xi + \int\limits_x^1 (A\xi + E - B)\, d\xi \right\| \leq$$

$$\leq (qM)^{p+1}\tau_2^p d\tau_2 \leq (q\tau_2 M)^{p+1} d,$$

Таким чином, для $\forall\, p \in \mathbb{N}$ справедливі оцінки (3.25).

Якщо

$$q\tau_2 M < 1, \tag{3.26}$$

то з останніх оцінок та нерівностей (3.24) випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} Z_p^{(s)}(x) = \lim_{p\to\infty} V_p^{(s)}(x) = Y^{(s)}(x),\ s = 0, 1,\ x \in [0; 1],$$

де $Y(x)$ — розв'язок рівняння (3.10).

Доведемо єдиність розв'язку $Y(x)$.

Припустимо, що $\widetilde{Y}(x)$ також є розв'язком рівняння (3.10). Для різниці цих двох розв'язків із (3.10) можемо записати:

$$Y(x) - \widetilde{Y}(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi) \left[F[Y(\xi), Y'(\xi)] - F[\widetilde{Y}(\xi), \widetilde{Y}'(\xi)]\right] d\xi.$$

Покладемо

$$R(x) = Y(x) - \widetilde{Y}(x),\ \sup_{[0,1]} [\|R(x)\|, \|R'(x)\|] = l,$$

тоді, враховуючи умову Ліпшиця, одержуємо

$$\|R(x)\| \leq Ml \left\| \int_0^x [Bx + (Ax - E)\xi] d\xi + \int_x^1 [Bx + (A\xi - E)x] d\xi \right\| =$$

$$= Ml \left\| \frac{1}{2} Ex^2 + (B - E + \frac{1}{2} A)x \right\| =$$

$$= Ml \left\| \frac{1}{2} Ex^2 - \left(\delta_{ij}\ \frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2\ y_{i,0}}{2\rho_i} \right) x \right\|$$

В силу умов (3.15)

$$\frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2\ y_{i,0}}{2\rho_i} \geq 0 \text{ для} \forall\, i, j = \overline{1, n},\ \text{а } 1 - \frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2\ y_{i,0}}{\rho_i} \leq 0.$$

Отже,

$$\|R(x)\| \le \frac{1}{2}Ml \left\| \left(\delta_{ij} \left[\frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} \right]^2 \right) \right\|.$$

Аналогічно знаходимо наступну оцінку:

$$\|R'(x)\| \le Ml \left\| \int\limits_0^x [B + A\xi] d\xi + \int\limits_x^1 [B + A\xi - E] d\xi \right\| =$$

$$= Ml \left\| Ex + \frac{1}{2}A + B - E \right\| \le Ml \left\| \left(\delta_{ij} \, \frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\|$$

Позначимо

$$\mu_1^2 = \left\| \left(\delta_{ij} \left[\frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} \right]^2 \right) \right\|, \ \mu_1 = \left\| \left(\delta_{ij} \left[\frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} \right] \right) \right\|,$$

а $\mu = sup \left\{ \mu_1, \frac{1}{2}\mu_1^2 \right\}$. Тоді

$$\sup_{[0,1]} \{ \|R(x)\| \, , \ \|R'(x)\| \} \le M\mu l.$$

Повторюючи вище наведені міркування p разів, одержимо

$$\sup_{[0,1]} \{ \|R(x)\| \, , \ \|R'(x)\| \} \le (M\mu)^p \, l. \tag{3.27}$$

Оскільки $\forall i, j = \overline{1, n}$ справедлива нерівність

$$\frac{3\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} - \frac{\beta_{ij}^1 + 2\beta_{ij}^2 \, y_{i,0}}{2\rho_i} \ge 0,$$

то з умови (3.26) та оцінки (3.27) випливає, що

$$\sup_{[0,1]} \{ \|R(x)\| \, , \ \|R'(x)\| \} \le \varepsilon,$$

де $\varepsilon > 0$ – як завгодно мале число, тобто $R(x) \equiv 0$.

Отже, при виконанні умови (3.26) розв'язок рівняння (3.10) єдиний.

Покажемо, що збіжність ітераційного процесу (3.17)—(3.19), (3.23) не повільніша збіжності звичайного методу послідовних наближень Пікара.

Припустимо, що $Z_p(x)$ та $V_p(x)$ — двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3.10), для яких справедливим є виконання нерівностей (3.24).

Нехай

$$\begin{aligned} Z^*_{p+1}(x) &= Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi)F^p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)F_p(\xi)d\xi, \\ V^*_{p+1}(x) &= Y_0 + Cx + \int_0^1 G_1(x,\xi)F_p(\xi)d\xi + \int_0^1 G_2(x,\xi)F^p(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Тоді

$$Z_{p+1}(x) - Z^*_{p+1}(x) = -\int_0^1 G_1(x,\xi)C_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi +$$
$$+\int_0^1 G_2(x,\xi)Q_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi =$$
$$= \int_0^1 \left(G_2(x,\xi)Q_p(\xi) - G_1(x,\xi)C_p(\xi)\right)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\,d\xi \leq 0,$$
$$V_{p+1}(x) - V^*_{p+1}(x) = \int_0^1 G_1(x,\xi)Q_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi -$$
$$-\int_0^1 G_2(x,\xi)C_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi =$$
$$= \int_0^1 \left(G_1(x,\xi)Q_p(\xi) - G_2(x,\xi)C_p(\xi)\right)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\,d\xi \geq 0,$$

тобто при $x \in [0;1]$ справедливі нерівності

$$V^*_{p+1}(x) \leq V_{p+1}(x) \leq Z_{p+1}(x) \leq Z^*_{p+1}(x),\ p = 0, 1, 2, \ldots,$$

що і треба було показати.

Таким чином, справедливим є наступне твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$ і в області $\overline{B}_1$ існують вектор–функції нульового наближення $Z_0(x), V_0(x) \in C_1[0;1]$, які задовольняють умови (3.18).*

Якщо

$$E + B_2A_2^{-1} \leq \Theta,\ B_1(A_2\overline{Y}_0)^{-1} \leq \Theta,$$

то послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$, $\{V_p(x)\}$, побудовані згідно закону (3.17), (3.19), (3.23) при виконанні умови (3.26) збігаються *абсолютно і рівномірно в області* $\overline{B}_1$ *до єдиного в просторі* $C_1[0;1]$ *розв'язку рівняння (3.10) і мають місце нерівності:*

$$V_p^{(s)}(x) \le V_{p+1}^{(s)}(x) \le Y^{(s)}(x) \le Z_{p+1}^{(s)}(x) \le Z_p^{(s)}(x), \\ x \in [0;1], s = 0,1,\ p = 0,1,2,\ldots, \tag{3.29}$$

а збіжність методу (3.17)–(3.19), (3.23) не повільніша збіжності методу Пікара.

Для доведення справедливості нерівностей (3.29) достатньо повторити міркування, приведені при доведенні нерівностей (2.28).

Побудуємо двосторонні наближення до шуканого параметру λ, який визначається згідно формули (3.11).

При виконанні умов (3.15) маємо

$$N_2 \ge (\le)\ \Theta,\ \ N_3 \ge (\le)\ \Theta,$$

якщо

$$A_2 \le (\ge)\Theta. \tag{3.30}$$

Позначимо

$$\lambda_p^+ = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2)F^p(\xi)\,d\xi, \\ \lambda_p^- = N_1 + \int_0^1 (N_3\xi + N_2)F_p(\xi)\,d\xi, \tag{3.31}$$

Приймаючи до уваги нерівності (3.5), (3.29) та умову (3.30), одержимо

$$\lambda_p^+ - \lambda = \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)(F^p(\xi) - F[Y(\xi), Y'(\xi)])d\xi \ge (\le)0,$$
$$\lambda_p^- - \lambda = \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)(F_p(\xi) - F[Y(\xi), Y'(\xi)])d\xi \le (\ge)0,$$

тобто

$$\lambda_p^- \le (\ge)\lambda \le (\ge)\lambda_p^+,\ p = 0,1,2,\ldots \tag{3.32}$$

при виконанні умов (3.15) та (3.30).

Якщо $\lambda_p^-,\ \lambda_p^+ \in [\lambda_1;\ \lambda_2]$, то їх можна вважати p–вим двостороннім наближенням до параметру λ, який визначається згідно формули (3.11).

Теорема 3.2.2. *Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$ і виконуються умови (3.15) і $Z_p(x)$, $V_p(x)$— p–ве двостороннє наближення до розв'язку рівняння (3.10), яке визначається згідно закону (3.17)—(3.19), (3.23) і задовольняє нерівності (3.29).*

Тоді при виконанні умови (3.26) двосторонні наближення до шуканого параметру λ визначаються згідно формул (3.31) і мають місце нерівності (3.32).

Зауважимо, що вектор-функції $Z_{p+1}(x)$ та $V_{p+1}(x)$, побудовані згідно закону (3.17)—(3.19), (3.23), не задовольняють першу з крайових умов (3.8). Дійсно

$$\begin{gathered}
\overline{Y}_0 \left\{ A_2 \left(C + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}^p(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 (-E + B)\overline{F}_p(\xi)\,d\xi \right) + \right. \\
\left. + B_2 \left(C + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}^p(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 B\overline{F}_p(\xi)\,d\xi \right) \right\} + \\
+ B_1 \left(Y_0 + C + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}^p(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 (-E\xi + B)\overline{F}_p(\xi)\,d\xi \right) - d_1 = \\
= (\overline{Y}_0(A_2 + B_2) + B_1)C + B_1 Y_0 - d_1 + \\
+ \int\limits_0^1 (\overline{Y}_0(A_2 + B_2) + B_1) A\xi \overline{F}^p(\xi)\,d\xi + \\
+ \int\limits_0^1 (\overline{Y}_0(A_2 + B_2) + B_1) B\overline{F}_p(\xi)\,d\xi - \overline{Y}_0 A_2 \int\limits_0^1 \overline{F}_p(\xi)\,d\xi - \\
- B_1 \int\limits_0^1 \xi \overline{F}_p(\xi)\,d\xi = d_1 - B_1 Y_0 + B_1 Y_0 - d_1 + \\
+ B_1 \int\limits_0^1 \xi \overline{F}^p(\xi)\,d\xi + A_2 \overline{Y}_0 \int\limits_0^1 \overline{F}_p(\xi)\,d\xi - \\
- \overline{Y}_0 A_2 \int\limits_0^1 \overline{F}_p(\xi)\,d\xi - B_1 \int\limits_0^1 \xi \overline{F}_p(\xi)\,d\xi = B_1 \int\limits_0^1 \xi (\overline{F}^p(\xi) - \overline{F}_p(\xi))\,d\xi = \\
= B_1 \int\limits_0^1 \xi (1 - C_p(\xi) - Q_p(\xi))(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
Z_{p+1}(0) = Y_0, \\
\overline{Y}_0 \left\{ A_2 \left(C + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}_p(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 (-E + B)\overline{F}^p(\xi)\,d\xi \right) + B_2 \left(C + \right. \right. \\
\left. \left. + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}_p(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 B\overline{F}^p(\xi)\,d\xi \right) \right\} + B_1 \left(Y_0 + C + \int\limits_0^1 A\xi \overline{F}_p(\xi)\,d\xi + \right. \\
\left. + \int\limits_0^1 (-E\xi + B)\overline{F}^p(\xi)\,d\xi \right) - d_1 = (\overline{Y}_0(A_2 + B_2) + B_1)C +
\end{gathered}$$

$$+B_1Y_0 - d_1 + \int_0^1 (\overline{Y}_0(A_2+B_2)+B_1)A\xi\overline{F}_p(\xi)\,d\xi +$$
$$+\int_0^1 (\overline{Y}_0(A_2+B_2)+B_1)B\overline{F}^p(\xi)d\xi - \overline{Y}_0A_2\int_0^1 \overline{F}^p(\xi)\,d\xi -$$
$$-B_1\int_0^1 \xi\overline{F}^p(\xi)\,d\xi = d_1 - B_1Y_0 + B_1Y_0 - d_1 + B_1\int_0^1 \xi\overline{F}_p(\xi)\,d\xi +$$
$$+A_2\overline{Y}_0\int_0^1 \overline{F}^p(\xi)\,d\xi - \overline{Y}_0A_2\int_0^1 \overline{F}^p(\xi)\,d\xi -$$
$$-B_1\int_0^1 \xi\overline{F}^p(\xi)\,d\xi = B_1\int_0^1 \xi(\overline{F}_p(\xi) - \overline{F}^p(\xi))\,d\xi =$$
$$= -B_1\int_0^1 \xi(1 - C_p(\xi) - Q_p(\xi))(F^p(\xi) - F_p(\xi))\,d\xi,$$

$$V_{p+1}(0) = Y_0.$$

Розглянемо функцію $\widetilde{Y}_{p+1}(x) = \frac{1}{2}\left(Z_{p+1}(x) + V_{p+1}(x)\right)$.
Тоді маємо, що

$$\widetilde{Y}_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 G_1(x,\xi)(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi +$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^1 G_2(x,\xi)(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi,$$
$$\widetilde{Y}'_{p+1}(x) = C + \tfrac{1}{2}\int_0^1 A\xi(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi +$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^x B(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi + \tfrac{1}{2}\int_x^1 (-E+B)(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi.$$

Перевіримо, чи $\widetilde{Y}_{p+1}(x)$ задовольняє крайові умови (3.8):

$$\overline{Y}_0\left\{A_2\left(C + \tfrac{1}{2}\int_0^1 A\xi(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi +\right.\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\int_0^1 (-E+B)(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi\right) + B_2\left(C + \tfrac{1}{2}\int_0^1 A\xi(\overline{F}^p(\xi) +\right.$$
$$\left.\left.+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi + \tfrac{1}{2}\int_0^1 B(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi\right)\right\} + B_1\left(Y_0 + C +\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}\int_0^1 A\xi(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-E\xi+B)(\overline{F}^p(\xi) + \overline{F}_p(\xi))\,d\xi\right) -$$
$$-d_1 = \left(\overline{Y}_0(A_2+B_2) + B_1\right)C + \left(\overline{Y}_0(A_2+B_2) + B_1\right)\tfrac{1}{2}\int_0^1 A\xi(\overline{F}^p(\xi) +$$

$$+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi + \left(\overline{Y}_0(A_2+B_2)+B_1\right)\tfrac{1}{2}\int_0^1 B(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi -$$

$$-\tfrac{1}{2}\overline{Y}_0 A_2\int\limits_0^1(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi + B_1Y_0 - \tfrac{1}{2}B_1\int\limits_0^1 \xi(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi -$$

$$-d_1 = d_1 - B_1Y_0 + \tfrac{1}{2}B_1\int\limits_0^1\xi(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi +$$

$$+\tfrac{1}{2}\overline{Y}_0A_2\int_0^1(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi - \tfrac{1}{2}\overline{Y}_0A_2\int\limits_0^1(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi + B_1Y_0 -$$

$$-\tfrac{1}{2}B_1\int_0^1\xi(\overline{F}^p(\xi)+\overline{F}_p(\xi))\,d\xi - d_1 = 0,$$

$$\widetilde{Y}_{p+1}(0) = Y_0.$$

Отже, функція $\widetilde{Y}_{p+1}(x)$ задовольняє всі крайові умови (3.8). Тоді цю функцію та параметр $\lambda_{p+1} = \frac{1}{2}(\lambda^+_{p+1}+\lambda^-_{p+1})$ можна брати за p+1-ше наближення до розв'язку задачі (3.1)—(3.3).

б) Нехай

$$E + B_2A_2^{-1} \geq \Theta,\ B_1\left(A_2\overline{Y}_0\right)^{-1} \geq \Theta \tag{3.33}$$

Тоді $A \geq \Theta,\ B \geq \Theta$ і

$$G_1(x,\xi) = (A\xi + B)x,\ \xi \in [0;1],$$
$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} -E\xi,\ \xi\in[0;x], \\ -Ex,\ \xi\in(x;1]. \end{cases} \tag{3.34}$$

Очевидно, що

$$G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi) = G(x,\xi)$$

і $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$ при $(x,\xi)\in[0;1]\times[0;1]$ задовольняють умови (3.16).

У даному випадку двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3.10) будуємо згідно закону (3.17), (3.19), де за нульове наближення будемо вибирати довільні з простору $C_1[0;1]$ вектор–функції $Z_0(x)$, $V_0(x)\in\overline{B}_1$, які задовольняють умови (3.18).

Маємо

$$Z_1^{(s)}(x) - Z_0^{(s)}(x) = -\alpha_0^{(s)}(x) + \int\limits_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}^0(\xi) - F^0(\xi))\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}_0(\xi) - F_0(\xi))\,d\xi = -\alpha_0^{(s)}(x) +$$

$$\int\limits_0^1(G_{2x}^{(s)}(x,\xi)Q_0(\xi) - G_{1x}^{(s)}(x,\xi)C_0(\xi))(F^0(\xi) - F_0(\xi))\,d\xi \leq 0,$$

$$V_1^{(s)}(x) - V_0^{(s)}(x) = -\beta_0^{(s)}(x) + \int\limits_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}_0(\xi) - F_0(\xi))\,d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}^0(\xi) - F^0(\xi))\,d\xi = -\beta_0^{(s)}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^1 (G_{1x}^{(s)}(x,\xi)Q_0(\xi) - G_{2x}^{(s)}(x,\xi)C_0(\xi))(F^0(\xi) - F_0(\xi))\,d\xi \geq 0,$$

$$W_1^{(s)}(x) = \int\limits_0^1 (G_{1x}^{(s)}(x,\xi) - G_{2x}^{(s)}(x,\xi))(E - C_0(\xi) -$$
$$-Q_0(\xi))(F^0(\xi) - F_0(\xi))\,d\xi \geq 0,\ s = 0,1,\quad x \in [0,1],$$

тобто, в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \leq V_1^{(s)}(x) \leq Z_1^{(s)}(x) \leq Z_0^{(s)}(x),\quad s = 0,1,\quad x \in [0;1],$$

а звідси випливає, що $V_1(x),\ Z_1(x) \in \overline{B}_1$.

Якщо елементи матриць $C_0(x)$ та $Q_0(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$

$$\overline{F}^0(x) - F^1(x) \geq 0,\ \overline{F}_0(x) - F_1(x) \leq 0,$$

то

$$\alpha_1^{(s)}(x) = \int_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}^0(\xi) - F^1(\xi))\,d\xi +$$
$$+ \int_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}_0(\xi) - F_1(\xi))\,d\xi \geq 0,$$
$$\beta_1^{(s)}(x) = \int_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}_0(\xi) - F_1(\xi))\,d\xi +$$
$$+ \int_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{F}^0(\xi) - F^1(\xi))\,d\xi \leq 0.$$

Беручи вектор-функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітерації (3.17) елементи матриць $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області B_1 виконувались нерівності (3.23), то при $x \in [0;1]$ для довільного $p \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності (3.24).

Покажемо, що побудовані послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного в просторі $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (3.10).

Використавши раніше введені позначення, одержимо

$$\|W_1(x)\| \leq qdM \left\| \int_0^x ((Ax + E)\xi + Bx)\ d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_x^1 (A\xi + (B + E))\,x\,d\xi \right\| = qdM \left\| (0,5A + B + E)x - \tfrac{1}{2}Ex^2 \right\|.$$

Згідно умови (3.33)

$$a_i = 1 + \frac{0,5\beta^1_{ij} + \alpha^2_{ij}\, y_{i,0}}{\rho_i} > 0,$$

тоді

$$1 - a_i = -\frac{0,5\beta^1_{ij} + \alpha^2_{ij}\, y_{i,0}}{\rho_i} \le 0.$$

Отже,

$$\|W_1(x)\| \le qdM \left\| \left(\delta_{ij} \frac{2\beta^1_{ij} + (3\alpha^2_{ij} + \beta^2_{ij}) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\| = qdM\tau_3,$$

де

$$\tau_3 = \left\| \left(\delta_{ij} \frac{2\beta^1_{ij} + (3\alpha^2_{ij} + \beta^2_{ij}) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\|.$$

Аналогічно

$$\|W_1'(x)\| \le qMd \left\| \int_0^x (A\xi + B)\, d\xi + \int_x^1 (A\xi + B + E)\, d\xi \right\| =$$

$$= qdM \, \|0,5A + B + E - Ex\| \le qdM\tau_4,$$

де

$$\tau_4 = \left\| \left(\delta_{ij} \left(1 + \frac{0,5\beta^1_{ij} + \alpha^2_{ij}\, y_{i,0}}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Оскільки $\tau_4 > \tau_3$, то

$$\sup_{[0,1]} \{ \|W_1(x)\| , \ \|W_1'(x)\| \} \le qdM\tau_4.$$

Аналогічно із (3.21) при $p = 1$ одержуємо

$$\sup_{[0,1]} \{ \|W_2(x)\| , \ \|W_2'(x)\| \} \le (qM\tau_4)^2 d.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\sup_{[0,1]} \left\{ \|W_p(x)\| , \ \left\|W_p'(x)\right\| \right\} \le (qM\tau_4)^p d. \tag{3.35}$$

Тоді

$$\|W_{p+1}(x)\| \le (qM)^{p+1} \tau_4^p d \left\| \int\limits_0^1 (G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi))\, d\xi \right\| \le$$

$$\le (qM)^{p+1} \tau_4^p d\tau_3 \le (qM\tau_4)^{p+1} d,$$

$$\left\|W_{p+1}'(x)\right\| \le (qM)^{p+1} \tau_4^p d \left\| \int\limits_0^1 (G_{1x}'(x,\xi) - G_{2x}'(x,\xi))\, d\xi \right\| \le$$

$$\le (qM)^{p+1} \tau_4^p d\tau_4 \le (qM\tau_4)^{p+1} d.$$

Таким чином ми показали, що $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [0;1]$ справедливі оцінки (3.35).

Якщо

$$qM\tau_4 < 1 \tag{3.36}$$

то, як і у попередньому випадку, побудовані згідно закону (3.17)—(3.19), (3.23) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$, абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3.10) і мають місце нерівності (3.29), оскільки $\tau_4 \geq \tau_3$.

Позначимо

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi F^p(\xi) + N_2 F_p(\xi)]\, d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi F_p(\xi) + N_2 F^p(\xi)]\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Тоді, якщо $A_2 \geq (\leq)\Theta$, то є справедливими нерівності (3.32).

Теорема 3.2.3. *Нехай права частина рівняння (3.3)* $F[Y(x),Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, *виконуються умови (3.23) і (3.36), а в області* $\overline{B}_1$ *існують вектор–функції нульового наближення* $Z_0(x), V_0(x) \in C_1[0;1]$, *які задовольняють нерівності (3.18) та в (3.17)* $G_1(x,\xi)$ *і* $G_2(x,\xi)$ *визначаються згідно (3.34).*

Тоді p-вим наближенням до розв'язку крайової задачі (3.1)—(3.3) є пара $\left(\widetilde{Y}_p(x), \lambda_p\right)$, $\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-)$, $\widetilde{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x))$, *де вектор–функції* $Z_p(x)$ *та* $V_p(x)$ *є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3.10), які визначаються згідно (3.17)—(3.19), (3.23), задовольняють нерівності (3.29), а* λ_p^-, λ_p^+ *— p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру* λ, *визначене згідно (3.37) і задовольняє умови (3.32).*

3.3 Ще один підхід до побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (3.2)

а) Приведемо одну швидкозбіжну модифікацію двостороннього методу наближеного інтегрування задачі (3.2), коли

$$B_1(A_2\overline{Y}_0)^{-1} \leq \Theta,\ K_1 = E + B_2A_2^{-1} + B_1(A_2\overline{Y}_0)^{-1} > \Theta. \tag{3.38}$$

Тоді очевидно $E + B_2A_2^{-1} > \Theta$ і $A \leq \Theta,\ B > \Theta$.

Введемо позначення

$$\Phi^p(x) = H[Z_p(x) - R_p W_p(x);\ V_p(x) + D_p W_p(x)],$$

$$\Phi_p(x) = H[V_p(x) + D_p W_p(x);\ Z_p(x) - R_p W_p(x)],$$

$$\alpha_p(x) = Z_p(x) - Y_0 - Cx-$$

$$-\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\Phi^p(\xi)d\xi - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\Phi_p(\xi)d\xi, \tag{3.39}$$

$$\beta_p(x) = V_p(x) - Y_0 - Cx-$$

$$\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\Phi_p(\xi)d\xi - \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\Phi^p(\xi)d\xi,$$

$$W_p(x) = Z_p(x) - V_p(x),$$

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ згідно закону

$$\begin{aligned}
&Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{\Phi}^p(\xi)d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\overline{\Phi}_p(\xi)d\xi,\\
&V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\overline{\Phi}_p(\xi)d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\overline{\Phi}^p(\xi)d\xi,\\
&\overline{\Phi}^p(x) = \Phi^p(x) - C_p(x)(\Phi^p(x) - \Phi_p(x)),\quad C_p(x) = (\delta_{ij}\ c^p_{ij}(x)),\\
&\overline{\Phi}_p(x) = \Phi_p(x) + Q_p(x)(\Phi^p(x) - \Phi_p(x)),\quad Q_p(x) = (\delta_{ij}\ q^p_{ij}(x)),
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$C_p(x)$, $Q_p(x)$ — матриці, визначені в підрозділі 3.2.; $R_p = (\delta_{ij}\ r^p_{ij})$, $D_p = (\delta_{ij}\ d^p_{ij})$ — матриці з довільними сталими невід'ємними елементами, які задовольняють умови

$$r^p_{ij} \le \frac{1}{2},\ d^p_{ij} \le \frac{1}{2},\ \forall\, i,j = \overline{1,n},\ p = 0,1,2,\dots, \tag{3.41}$$

а

$$G_1(x,\xi) = Bx,\ \xi \in [0;1],$$

$$G_2(x,\xi) = \begin{cases} (Ax - E)\xi,\ \xi \in [0;x],\\ (A\xi - E)x,\ \xi \in (x;1]. \end{cases} \tag{3.42}$$

Із (3.39), (3.40) одержуємо

$$
\begin{gathered}
Z_{p+1}(x)-Z_p(x)=-\alpha_p(x)+\\
+\int\limits_0^1\left\{G_2(x,\xi)Q_p(\xi)-G_1(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(\Phi^p(\xi)-\Phi_p(\xi)\right)d\xi,\\
V_{p+1}(x)-V_p(x)=-\beta_p(x)+\\
+\int\limits_0^1\left\{G_1(x,\xi)Q_p(\xi)-G_2(x,\xi)C_p(\xi)\right\}\left(\Phi^p(\xi)-\Phi_p(\xi)\right)d\xi,
\end{gathered}
\tag{3.43}
$$

$$
\begin{gathered}
W_{p+1}(x)=\int\limits_0^1\left[G_1(x,\xi)-G_2(x,\xi)\right]\times\\
\times\left(E-C_p(\xi)-Q_p(\xi)\right)\left(\Phi^p(\xi)-\Phi_p(\xi)\right)d\xi,
\end{gathered}
\tag{3.44}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha_{p+1}(x)=\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{\Phi}^p(\xi)-\Phi^{p+1}(\xi)\right)d\xi+\\
+\int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{\Phi}_p(\xi)-\Phi_{p+1}(\xi)\right)d\xi,\\
\beta_{p+1}(x)=\int\limits_0^1 G_1(x,\xi)\left(\overline{\Phi}_p(\xi)-\Phi_{p+1}(\xi)\right)d\xi+\\
+\int\limits_0^1 G_2(x,\xi)\left(\overline{\Phi}^p(\xi)-\Phi^{p+1}(\xi)\right)d\xi.
\end{gathered}
\tag{3.45}
$$

Вектор–функції нульового наближення в просторі $C_1[0;1]$ вибираємо таким чином, щоб при $x\in[0;1]$ і $R_0=\Theta,\ D_0=\Theta$ виконувались нерівності (3.18).

Очевидно, що функції $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$ визначені згідно формул (3.42), задовольняють умови (3.16) при $(x,\xi)\in[0;1]\times[0;1]$.

Зауважимо, що якщо вектор–функції нульового наближення $Z_0(x)$ та $V_0(x)$ належать області $\overline{B}_1$, то в силу умов (3.18), (3.41) при $x\in[0,1]$

$$
\begin{gathered}
V_0^{(s)}(x)\le V_0^{(s)}(x)+D_0W_0^{(s)}(x)\le Z_0^{(s)}(x)-R_0W_0^{(s)}(x)\le Z_0^{(s)}(x),\\
s=0,1,
\end{gathered}
$$

тобто $V_0(x)+D_0W_0(x),\ Z_0(x)-R_0W_0(x)\in\overline{B}_1$.

В силу останніх нерівностей та умови (3.5), враховуючи, що

$$
\alpha_0^{(s)}(x)\Big|_{\substack{R_0=\Theta\\ D_0=\Theta}}\ge 0,\quad \beta_0^{(s)}(x)\Big|_{\substack{R_0=\Theta\\ D_0=\Theta}}\le 0
$$

маємо

$$
\alpha_0^{(s)}(x)\ge 0,\ \beta_0^{(s)}(x)\le 0.
$$

Тоді із (3.43) при $p=0$ одержимо

$$Z_1^{(s)}(x)-Z_0^{(s)}(x)=-\alpha_0^{(s)}(x)+$$
$$+\int\limits_0^1\left[G_{2x}^{(s)}(x,\xi)Q_0(\xi)-G_{1x}^{(s)}(x,\xi)C_0(\xi)\right](\Phi^0(\xi)-\Phi_0(\xi))d\xi\le 0,$$
$$V_1^{(s)}(x)-V_0^{(s)}(x)=-\beta_0^{(s)}(x)+$$
$$+\int\limits_0^1\left[G_{1x}^{(s)}(x,\xi)Q_0(\xi)-G_{2x}^{(s)}(x,\xi)C_0(\xi)\right](\Phi^0(\xi)-\Phi_0(\xi))d\xi\ge 0,$$

а із (3.44) випливає, що $W_1^{(s)}(x)\ge 0,\ s=0,1,$ тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x)\le V_1^{(s)}(x)\le Z_1^{(s)}(x)\le Z_0^{(s)}(x),\ s=0,1,\ x\in[0;1].$$

Із (3.45) при $p=0$ маємо

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(s)}(x)&=\int\limits_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{\Phi}^0(\xi)-\Phi^1(\xi))\,d\xi+\\&+\int\limits_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{\Phi}_0(\xi)-\Phi_1(\xi))\,d\xi,\\\beta_1^{(s)}(x)&=\int\limits_0^1 G_{1x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{\Phi}_0(\xi)-\Phi_1(\xi))\,d\xi+\\&+\int\limits_0^1 G_{2x}^{(s)}(x,\xi)(\overline{\Phi}^0(\xi)-\Phi^1(\xi))\,d\xi.\end{aligned}\tag{3.46}$$

Якщо елементи матриць R_0, D_0, які задовольняють умови (3.41), вибирати таким чином, щоб при $x\in[0;1]$ виконувались нерівності

$$Z_0^{(s)}(x)-Z_1^{(s)}(x)-R_0W_0^{(s)}(x)\ge 0,$$
$$V_0^{(s)}(x)-V_1^{(s)}(x)+D_0W_0^{(s)}(x)\le 0,$$

то тоді

$$\Phi^0(x)-\Phi^1(x)=H\left[Z_0(x)-R_0W_0(x);\ V_0(x)+D_0W_0(x)\right]-$$
$$-H\left[Z_1(x)-R_1W_1(x);\ V_1(x)+D_1W_1(x)\right]\ge 0,$$
$$\Phi_0(x)-\Phi_1(x)=H\left[V_0(x)+D_0W_0(x);\ Z_0(x)-R_0W_0(x)\right]-$$
$$-H\left[V_1(x)+D_1W_1(x);\ Z_1(x)-R_1W_1(x)\right]\le 0.$$

Таким чином, вибираючи елементи матриць $C_0(x)$ та $Q_0(x)$ так, щоб в області $\overline{B}_1$

$$\overline{\Phi}^0(x)-\Phi^1(x)\ge 0,\ \overline{\Phi}_0(x)-\Phi_1(x)\le 0,$$

із (3.46) при $x \in [0;1]$ одержуємо

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0,1.$$

Повторюючи вище наведені міркування, легко переконатись, що якщо на кожному кроці ітерації (3.39)—(3.42) елементи матриць R_p, D_p, $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови

$$\begin{gathered} Z_p^{(s)}(x) - Z_{p+1}^{(s)}(x) - R_p W_p^{(s)}(x) \geq 0, \\ V_p^{(s)}(x) - V_{p+1}^{(s)}(x) + D_p W_p^{(s)}(x) \leq 0, \\ \Phi^p(x) - \Phi^{p+1}(x) - C_p(x)(\Phi^p(x) - \Phi_p(x)) \geq 0, \\ \Phi_p(x) - \Phi_{p+1}(x) + Q_p(x)(\Phi^p(x) - \Phi_p(x)) \leq 0, \end{gathered} \tag{3.47}$$

то при $x \in [0;1]$ для довільного $p \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності (3.24).

Доведемо, що побудовані згідно (3.39)—(3.42), (3.47) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ рівномірно і абсолютно в області $\overline{B}_1$ збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3.10).

Дійсно, користуючись позначеннями, введеними в підрозділі 3.2., та поклавши

$$\nu = \max_{k=\overline{0,p}} \|E - R_k - D_k\|,$$

із (3.44) при $p = 0$ маємо

$$\|W_1(x)\| \leq q\nu M d \left\| \int_0^x [(B - A\xi)x + E\xi]\, d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_0^1 [(B+E)x - A\xi x]\, d\xi \right\| = q\nu M d \left\| (B - 0,5A + E)x - \frac{1}{2}Ex^2 \right\|.$$

В силу умов (3.38) для всіх $i,j = \overline{1,n}$

$$c_i = 1 + \frac{\alpha_{ij}^2\, y_{i,0} - 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} > 0,\ 1 - c_i < 0,$$

а отже,

$$\|W_1(x)\| \leq q\nu M d \left\| \left(\delta_{ij} \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_{ij}^2\, y_{i,0} - 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} \right) \right) \right\| = q\nu M d \tau_5,$$

де

$$\tau_5 = \left\| \left(\delta_{ij} \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_{ij}^2 \, y_{i,0} - 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Аналогічно

$$\|W_1'(x)\| \leq q\nu M d \left\| \int\limits_0^x (B - A\xi) d\xi + \int\limits_x^1 (B + E - A\xi) d\xi \right\| =$$
$$= q\nu M d \, \|B + E - 0,5A - Ex\| \leq q\nu M d \, \|(\delta_{ij} \, (1+$$
$$+ \frac{\alpha_{ij}^2 \, y_{i,0} - 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i})) \| = q\nu M d \tau_6,$$

де

$$\tau_6 = \left\| \left(\delta_{ij} \left(1 + \frac{\alpha_{ij}^2 \, y_{i,0} - 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Очевидно, що $\tau_6 > \tau_5$, а отже,

$$\max_s \left\{ \sup_{[0;1]} \left\| W_1^{(s)}(x) \right\| \right\} \leq q\nu M d \tau_6, \; s = 0, 1.$$

Міркуючи аналогічно, методом математичної індукції переконуємось у справедливості оцінок

$$\max_s \left\{ \sup_{[0;1]} \left\| W_p^{(s)}(x) \right\| \right\} \leq (q\nu M \tau_6)^p \, d, \; s = 0, 1. \tag{3.48}$$

Отже, якщо $q\nu M \tau_6 < 1$, то побудовані згідно закону (3.39)—(3.42), (3.47) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного в просторі $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (3.10).

І в цьому випадку мають місце нерівності (3.29).

Розглянемо послідовності вектор–функцій $\left\{\overline{Z}_p^*(x)\right\}$ та $\left\{\overline{V}_p^*(x)\right\}$, побудовані згідно закону

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{p+1}^*(x) &= Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi) \Phi^p(\xi) d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi) \Phi_p(\xi) d\xi, \\ \overline{V}_{p+1}^*(x) &= Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G_1(x,\xi) \Phi_p(\xi) d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi) \Phi^p(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Покажемо, що збіжність такого методу не повільніша збіжності методу Пікара (3.28), а збіжність методу (3.39) — (3.42) краща збіжності побудованого ітераційного процесу (3.39), (3.49), (3.41) — (3.42).

Розглянемо

$$\overline{Z}^*_{p+1}(x) - Z^*_{p+1}(x) =$$
$$= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)(\Phi^p(\xi) - F^p(\xi))d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)(\Phi_p(\xi) - F_p(\xi))d\xi \leq 0,$$
$$\overline{V}^*_{p+1}(x) - V^*_{p+1}(x) =$$
$$= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)(\Phi_p(\xi) - F_p(\xi))d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)(\Phi^p(\xi) - F^p(\xi))d\xi \geq 0,$$
$$Z_{p+1}(x) - \overline{Z}^*_{p+1}(x) =$$
$$= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)(\overline{\Phi}^p(\xi) - \Phi^p(\xi))d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)(\overline{\Phi}_p(\xi) - \Phi_p(\xi))d\xi \leq 0,$$
$$V_{p+1}(x) - \overline{V}^*_{p+1}(x) =$$
$$= \int\limits_0^1 G_1(x,\xi)(\overline{\Phi}_p(\xi) - \Phi_p(\xi))d\xi + \int\limits_0^1 G_2(x,\xi)(\overline{\Phi}^p(\xi) - \Phi^p(\xi))d\xi \geq 0,$$

Таким чином, при $x \in [0;1]$ справедливими є нерівності

$$V^*_{p+1}(x) \leq \overline{V}^*_{p+1}(x) \leq V_{p+1}(x) \leq Z_{p+1}(x) \leq \overline{Z}^*_{p+1}(x) \leq Z^*_{p+1}(x),$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

що і потрібно було показати.

Оскільки $N_3 \geq (\leq)\Theta$, $N_2 \leq (\geq)\Theta$ при $A_2 \leq (\geq)\Theta$, то двосторонні наближення до шуканого параметру λ в цьому випадку будуємо наступним чином

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\Phi^p(\xi) + N_2\Phi_p(\xi)\right] d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\Phi_p(\xi) + N_2\Phi^p(\xi)\right] d\xi. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Тоді

$$\lambda_p^+ - \lambda = \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\left(\Phi^p(\xi) - F[Y(\xi)]\right) + N_2\left(\Phi_p(\xi) - F[Y(\xi)]\right)\right] d\xi \geq (\leq)0,$$
$$\lambda_p^- - \lambda = \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\left(\Phi_p(\xi) - F[Y(\xi)]\right) + N_2\left(\Phi^p(\xi) - F[Y(\xi)]\right)\right] d\xi \leq (\geq)0,$$

при $A_2 \leq (\geq)\Theta$, тобто виконуються нерівності (3.32).

Таким чином, справедливою є наступна

Теорема 3.3.1. *Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, виконуються умови (3.38) і $q\nu M\tau_6 < 1$, а в області $\overline{B}_1$ існують вектор–функції нульового наближення $Z_0(x), V_0(x)$, які задовольняють нерівності (3.18).*

Тоді p-вим наближенням до розв'язку кррайової задачі (3.1)—(3.3) є пара $\left(\widetilde{Y}_p(x), \lambda_p\right)$, де $\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-)$, $\widetilde{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x))$, а вектор–функції $Z_p(x)$ та $V_p(x)$ є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3.10), які визначаються згідно (3.39)—(3.42), (3.47) і задовольняють нерівності (3.29); λ_p^-, λ_p^+ — p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру λ, яке визначається згідно (3.50) і задовольняє нерівності (3.32).

б) Нехай

$$E + B_2 A_2^{-1} \le \Theta, \;\; K_1 > \Theta. \tag{3.51}$$

Тоді $B_1(A_2\overline{Y}_0)^{-1} > \Theta$ і $A > \Theta, \; B > \Theta$.

Функцію Гріна подамо у вигляді

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi),$$

де

$$\begin{gathered} G_1(x, \xi) = (A\xi + B)x, \;\; \xi \in [0; 1], \\ G_2(x, \xi) = \begin{cases} -E\xi, \;\; \xi \in [0; x], \\ -Ex, \;\; \xi \in (x; 1]. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.52}$$

Очевидно, що $G_1(x, \xi)$ та $G_2(x, \xi)$ задовольняють умови (3.16).

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ згідно (3.39)—(3.42). При цьому вектор–функції нульового наближення $Z_0(x)$, $V_0(x)$ вибираємо таким чином, щоб виконувались умови (3.18).

Із (3.43) та (3.44) при $p = 0$, враховуючи (3.5), маємо

$$\begin{gathered} Z_1^{(s)}(x) - Z_0^{(s)}(x) = -\alpha_0^{(s)}(x) + \\ + \int\limits_0^1 (G_{2x}^{(s)}(x, \xi) Q_0(\xi) - G_{1x}^{(s)}(x, \xi) C_0(\xi))(\Phi^0(\xi) - \Phi_0(\xi)) d\xi \le 0, \\ V_1^{(s)}(x) - V_0^{(s)}(x) = -\beta_0^{(s)}(x) + \\ + \int\limits_0^1 (G_{1x}^{(s)}(x, \xi) Q_0(\xi) - G_{2x}^{(s)}(x, \xi) C_0(\xi))(\Phi^0(\xi) - \Phi_0(\xi)) d\xi \ge 0, \\ W_1^{(s)}(x) \ge 0, \;\; s = 0, 1, \;\; x \in [0; 1], \end{gathered}$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \le V_1^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x) \le Z_0^{(s)}(x), \;\; s = 0, 1, \;\; x \in [0; 1].$$

Звідси випливає, що $Z_1(x), V_1(x) \in \overline{B}_1$.

Якщо елементи матриць R_0, D_0 вибирати таким чином, щоб виконувались умови (3.41) і нерівності

$$\Phi^0(x) - \Phi^1(x) \geq 0,\ \Phi_0(x) - \Phi_1(x) \leq 0,$$

а елементи матриць $C_0(x)$ та $Q_0(x)$ вибирати так, щоб виконувались умови

$$\overline{\Phi}^0(x) - \Phi^1(x) \geq 0,\ \overline{\Phi}_0(x) - \Phi_1(x) \leq 0,$$

то із (3.46) одержуємо

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0, 1,\ x \in [0; 1].$$

Беручи вектор-функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені міркування, методом математичної індукції легко показати, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (3.39)—(3.41), (3.52) елементи матриць R_p, D_p, $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови (3.47), то при $x \in [0; 1]$ для довільного $p \in \mathbb{N}$ є справедливими нерівності (3.24).

Покажемо, що побудовані послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного в просторі $C_1[0; 1]$ розв'язку рівняння (3.10).

Використавши раніше введені позначення, із (3.44) при $p = 0$ маємо:

$$\|W_1(x)\| \leq q\nu Md \left\| \int_0^x [(A\xi + B)x + E\xi]\ d\xi + \right.$$
$$\left. + \int_x^1 [(A\xi + B)x + Ex]\ d\xi \right\| = q\nu Md \left\| -\frac{1}{2}Ex^2 + (E + 0,5A + B)x \right\|.$$

В силу умов (3.51) для всіх $i, j = \overline{1, n}$

$$b_i = 1 + \frac{0,5\beta_{ij}^1 + \alpha_{ij}^2\, y_{i,0}}{\rho_i} > 0,\ 1 - b_i < 0,$$

тоді

$$\|W_1(x)\| \quad \leq \quad q\nu Md \left\| \left(\delta_{ij} \left(\frac{1}{2} + \frac{0,5\beta_{ij}^1 + \alpha_{ij}^2\, y_{i,0}}{\rho_i} \right) \right) \right\| \quad = \quad q\nu Md\tau_7,$$

де

$$\tau_7 = \left\| \left(\delta_{ij} \left(\frac{1}{2} + \frac{0,5\beta_{ij}^1 + \alpha_{ij}^2\, y_{i,0}}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Аналогічно

$$\|W_1'(x)\| \le q\nu M d \left\| \int_0^x (A\xi + B)\, d\xi + \int_x^1 (A\xi + B + E)\, d\xi \right\| \le$$

$$\le q\nu M d \left\| \delta_{ij} \left(1 + \frac{0,5\beta_{ij}^1 + \alpha_{ij}^2\, y_{i,0}}{\rho_i} \right) \right\| = q\nu M d \tau_8,$$

де

$$\tau_8 = \left\| \left(\delta_{ij} \left(1 + \frac{0,5\beta_{ij}^1 + \alpha_{ij}^2\, y_{i,0}}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Зауважимо, що $\tau_8 > \tau_7$.

Тоді є справедливими оцінки

$$\sup_{[0;1]} \{\|W_1(x)\|,\ \|W_1'(x)\|\} \le q\nu M d \tau_8.$$

Аналогічним чином із (3.44) при $p = 1$ одержуємо

$$\sup_{[0;1]} \{\|W_2(x)\|,\ \|W_2'(x)\|\} \le (q\nu M \tau_8)^2\, d.$$

Припустимо, що для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\sup_{[0;1]} \left\{\|W_p(x)\|,\ \left\|W_p'(x)\right\|\right\} \le (q\nu M \tau_8)^p\, d. \tag{3.53}$$

Тоді

$$\|W_{p+1}(x)\| \le (q\nu M)^{p+1} \tau_8^p d \left\| \int_0^1 \left(G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi) \right)\, d\xi \right\| \le$$

$$\le (q\nu M)^{p+1} \tau_8^p d \tau_7 \le (q\nu M \tau_8)^{p+1} d,$$

$$\left\|W_{p+1}'(x)\right\| \le (q\nu M)^{p+1} \tau_8^p d \left\| \int_0^1 \left(G_{1x}'(x,\xi) - G_{2x}'(x,\xi) \right)\, d\xi \right\| \le$$

$$\le (q\nu M \tau_8)^{p+1} d.$$

Таким чином, для будь-якого $p \in \mathbb{N}$ справедливими є оцінки (3.53).

Якщо
$$q\nu M\tau_8 < 1, \tag{3.54}$$
то побудовані згідно закону (3.39)—(3.41), (3.52) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ при виконанні умови (3.51) збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного в просторі $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (3.10).

Для побудованих послідовностей вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ також є справедливими нерівності (3.29).

Оскільки при виконанні умов (3.51) маємо: $N_2 \geq (\leq)\Theta$, $N_3 \geq (\leq)\Theta$, при $A_2 \leq (\geq)\Theta$, то двосторонні наближення до шуканого параметру λ, який визначається згідно (3.11), знаходимо за законом
$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\Phi^p(\xi)\,d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\Phi_p(\xi)\,d\xi, \end{aligned} \tag{3.55}$$
При цьому є справедливими нерівності (3.32).

Теорема 3.3.2. *Нехай права частина рівняння (3.3) $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, виконуються умови (3.51) і (3.54), а в області $\overline{B}_1$ існують вектор–функції нульового наближення $Z_0(x), V_0(x)$, які задовольняють нерівності (3.18).*

Тоді p-вим наближенням до розв'язку крайової задачі (3.1)—(3.3) є пара $\left(\widetilde{Y}_p(x), \lambda_p\right)$, де $\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-)$, $\widetilde{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x))$. При цьому вектор–функції $Z_p(x)$ та $V_p(x)$ є двосторонніми наближеннями до єдиного розв'язку рівняння (3.10), які визначаються згідно (3.39)—(3.41), (3.52) і задовольняють нерівності (3.29); λ_p^-, λ_p^+ — p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру λ, яке визначається згідно (3.55) і для нього виконуються умови (3.32).

в) Нехай
$$B_1(A_2\overline{Y}_0)^{-1} \geq \Theta, K_1 < \Theta. \tag{3.56}$$

Тоді очевидно, що
$$E + B_2A_2^{-1} < \Theta, \ A \leq \Theta, \ B < \Theta,$$

а, отже, функція Гріна
$$G(x,\xi) = \begin{cases} Bx + (Ax - E)\xi, \ \xi \in [0;x], \\ Bx + (A\xi - E)x, \ \xi(x;1] \end{cases} \tag{3.57}$$

для всіх $(x,\xi) \in [0;1] \times [0;1]$ задовольняє умови

$$G(x,\xi) \le \Theta,\ G'_x(x,\xi) \le \Theta. \tag{3.58}$$

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ згідно формул

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G(x,\xi)\overline{\Phi}_p(\xi)\, d\xi, \\ V_{p+1}(x) = Y_0 + Cx + \int\limits_0^1 G(x,\xi)\overline{\Phi}^p(\xi)\, d\xi, \end{gathered} \tag{3.59}$$

Вектор–функції нульового наближення вибираємо таким чином, щоб при $x \in [0;1]$ і $R_0 = \Theta$, $D_0 = \Theta$ виконувались нерівності (3.18).

Із (3.39) і (3.59) маємо

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x) - Z_p(x) = \\ = -\alpha_p(x) + \int\limits_0^1 G(x,\xi)Q_p(\xi)\left(\Phi^p(\xi) - \Phi_p(\xi)\right)\, d\xi, \\ V_{p+1}(x) - V_p(x) = \\ = -\beta_p(x) - \int\limits_0^1 G(x,\xi)C_p(\xi)\left(\Phi^p(\xi) - \Phi_p(\xi)\right)\, d\xi, \end{gathered} \tag{3.60}$$

$$\begin{gathered} W_{p+1}(x) = -\int\limits_0^1 G(x,\xi)\left(E - C_p(\xi) - \right. \\ \left. - Q_p(\xi)\right)\left(\Phi^p(\xi) - \Phi_p(\xi)\right)\, d\xi, \end{gathered} \tag{3.61}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{p+1}(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi)\left(\overline{\Phi}_p(\xi) - \Phi_{p+1}(\xi)\right)\, d\xi, \\ \beta_{p+1}(x) = \int\limits_0^1 G(x,\xi)\left(\overline{\Phi}^p(\xi) - \Phi^{p+1}(\xi)\right)\, d\xi. \end{gathered} \tag{3.62}$$

Із (3.60)—(3.61), враховуючи (3.5), (3.18), (3.41) та (3.58), випливає

$$\begin{gathered} Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) \ge 0,\ V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) \le 0, \\ W_1^{(s)}(x) \ge 0,\ s = 0, 1, \end{gathered}$$

тобто в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \le V_1^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x) \le Z_0^{(s)}(x),\ s = 0, 1,\ x \in [0;1].$$

А це означає, що $Z_1(x), V_1(x) \in \overline{B}_1$.

Із (3.62) при $p = 0$ будемо мати

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(s)}(x) &= \int_0^1 G_x^{(s)}(x,\xi)\left(\overline{\Phi}_0(\xi) - \Phi_1(\xi)\right) d\xi, \\ \beta_1^{(s)}(x) &= \int_0^1 G_x^{(s)}(x,\xi)\left(\overline{\Phi}^0(\xi) - \Phi^1(\xi)\right) d\xi. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Якщо вибирати елементи матриць $R_0,\ D_0$, які задовольняють умови (3.41), таким чином, щоб при $x \in [0;1]$ були справедливими нерівності

$$Z_0^{(s)}(x) - Z_1^{(s)}(x) - R_0 W_0(x) \geq 0,$$

$$V_0^{(s)}(x) - V_1^{(s)}(x) - D_0 W_0(x) \leq 0,$$

то

$$\Phi^0(x) - \Phi^1(x) \geq 0,\ \Phi_0(x) - \Phi_1(x) \leq 0.$$

Елементи матриць $Q_0(x)$ та $C_0(x)$ вибираємо так, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови

$$\overline{\Phi}^0(x) - \Phi^1(x) \geq 0,\ \overline{\Phi}_0(x) - \Phi_1(x) \leq 0.$$

Тоді із (3.63) одержуємо

$$\alpha_1^{(s)}(x) \geq 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \leq 0,\ s = 0,1.$$

Беручи вектор-функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, легко показати, що якщо на кожному кроці ітерації (3.39)—(3.41), (3.56), (3.57) та (3.59) елементи матриць $R_p,\ D_p$, $Q_p(x)$ та $C_p(x)$ вибирати таким чином, щоб виконувались умови (3.47), то при $x \in [0;1]$ і будь-якому $p \in \mathbb{N}$ справедливі нерівності (3.24).

Доведемо, що побудовані згідно закону (3.39)—(3.41), (3.56), (3.57) і (3.59) послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ збігаються абсолютно і рівномірно в області $\overline{B}_1$ до єдиного в просторі вектор–функцій $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (3.10).

Використавши вже введені позначення, із (3.61) при $p = 0$ маємо

$$\|W_1(x)\| \leq q\nu M d \left\| -\int_0^1 G(x,\xi)\, d\xi \right\| =$$

$$= q\nu M d \left\| -\int_0^x (Bx + (Ax - E)\xi)\, d\xi - \int_x^1 (Bx + (A\xi - E)x)\, d\xi \right\| =$$

$$= q\nu M d \left\| (E - B - 0,5A)x - \frac{1}{2}Ex^2 \right\|.$$

При виконанні умов (3.56) для всіх $i, j = \overline{1, n}$

$$d_i = 1 - \frac{\alpha_{ij}^2 y_{i,0} + 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} > 0, \;\; 1 - d_i \le 0,$$

тоді

$$\|W_1(x)\| \le q\nu M d \left\| \left(\delta_{ij} \frac{(\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\| = q\nu M d \tau_9,$$

де

$$\tau_9 = \left\| \left(\delta_{ij} \frac{(\beta_{ij}^2 - \alpha_{ij}^2) y_{i,0}}{2\rho_i} \right) \right\|,$$

$$\|W_1'(x)\| \le q\nu M d \left\| - \int\limits_0^x (B + A\xi)\, d\xi - \int\limits_x^1 (B + A\xi - E)\, d\xi \right\| =$$

$$= q\nu M d \, \|E - 0,5A - B - Ex\| \le \nu M d \, \Big\| \Big(\delta_{ij} \Big(1 -$$

$$- \frac{\alpha_{ij}^2 y_{i,0} + 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} \Big) \Big) \Big\| = q\nu M d \tau_{10},$$

де

$$\tau_{10} = \left\| \left(\delta_{ij} \left(1 - \frac{\alpha_{ij}^2 y_{i,0} + 0,5\beta_{ij}^1}{\rho_i} \right) \right) \right\|.$$

Очевидно, що $\tau_{10} > \tau_9$, а, отже,

$$\sup_{[0;1]} \{ \|W_1(x)\|, \; \|W_1'(x)\| \} \le q\nu M d \tau_{10}.$$

Проводячи аналогічні міркування, методом математичної індукції переконуємось у справедливості оцінок:

$$\sup_{[0;1]} \left\{ \|W_p(x)\|, \; \left\|W_p'(x)\right\| \right\} \le (q\nu M \tau_{10})^p \, d.$$

Якщо $q\nu M \tau_{10} < 1$, то побудовані згідно закону (3.39)—(3.41), (3.56), (3.57) і (3.59) послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного розв'язку рівняння (3.10). У даному випадку справедливими є нерівності (3.29).

Оскільки $N_2 \le (\ge)\Theta$ і $N_3 \le (\ge)\Theta$ при $A_2 \le (\ge)\Theta$, то до шуканого параметру λ двосторонні наближення будуємо за формулами

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi + N_2]\, \Phi_p(\xi)\, d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 [N_3\xi + N_2]\, \Phi^p(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Тоді

$$\lambda_p^+ - \lambda = \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\left(\Phi_p(\xi) - F[Y(\xi)]\right) d\xi \geq (\leq) 0,$$
$$\lambda_p^- - \lambda = \int\limits_0^1 (N_3\xi + N_2)\left(\Phi^p(\xi) - F[Y(\xi)]\right) d\xi \leq (\geq) 0,$$

при $A_2 \leq (\geq)\Theta$, тобто справедливими є нерівності (3.32).

Теорема 3.3.3. *Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, виконуються умови (3.56) і $q\nu M\tau_{10} < 1$, а в області $\overline{B}_1$ існують вектор–функції нульового наближення $Z_0(x), V_0(x)$, які задовольняють нерівності (3.18).*

Тоді пара $\left(\widetilde{Y}_p(x), \lambda_p\right)$ є p-вим наближенням до розв'язку задачі (3.1)—(3.3), де $\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-)$, $\widetilde{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x))$. $Z_p(x)$ та $V_p(x)$ — двосторонні наближення до єдиного розв'язку рівняння (3.10), які визначаються згідно (3.39)—(3.41), (3.56), (3.57) і (3.59), задовольняють нерівності (3.29); λ_p^-, λ_p^+ — p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру λ, яке визначається згідно (3.64) і задовольняє нерівності (3.32).

г) Нехай

$$E + B_2 A_2^{-1} \geq \Theta, \;\; K_1 < \Theta, \tag{3.65}$$

тоді $B_1 \left(A_2 \overline{Y}_0\right)^{-1} < \Theta, \; A > \Theta, \; B < \Theta.$

Функції $G_1(x,\xi)$ та $G_2(x,\xi)$ визначаємо згідно закону (3.13) і очевидно, що вони задовольняють нерівності (3.16) при $(x,\xi) \in [0;1]\times[0;1]$.

Двосторонні наближення до розв'язку рівняння (3.10) будуємо згідно закону (3.39)—(3.41), де за нульове наближення вибираємо довільні з простору $C_1[0;1]$ вектор–функції $Z_0(x), V_0(x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови (3.18).

Із (3.43) та (3.44) при $p = 0$ одержуємо

$$Z_1^{(s)}(x) - Z_0^{(s)}(x) = -\alpha_0^{(s)}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^1 (G_{2x}^{(s)}(x,\xi) Q_0(\xi) - G_{1x}^{(s)}(x,\xi) C_0(x))(\Phi^0(\xi) - \Phi_0(\xi))\, d\xi \leq 0,$$
$$V_1^{(s)}(x) - V_0^{(s)}(x) = -\beta_0^{(s)}(x) +$$
$$+ \int\limits_0^1 (G_{1x}^{(s)}(x,\xi) Q_0(\xi) - G_{2x}^{(s)}(x,\xi) C_0(x))(\Phi^0(\xi) - \Phi_0(\xi))\, d\xi \geq 0,$$
$$W_1^{(s)}(x) = \int\limits_0^1 (G_{1x}^{(s)}(x,\xi) - G_{2x}^{(s)}(x,\xi)) \times$$
$$\times \left(E - C_0(\xi) - Q_0(\xi)\right)\left(\Phi^0(\xi) - \Phi_0(\xi)\right) d\xi \geq 0,$$
$$s = 0, 1, \; x \in [0;1],$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$V_0^{(s)}(x) \le V_1^{(s)}(x) \le Z_1^{(s)}(x) \le Z_0^{(s)}(x),\ s=0,1,\ x\in[0;1],$$

а звідси випливає, що $Z_1(x), V_1(x) \in \overline{B}_1$.

Якщо елементи матриць $C_0(x)$, $Q_0(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови

$$\overline{\Phi}^0(x) - \Phi^1(x) \ge 0,\ \overline{\Phi}_0(x) - \Phi_1(x) \le 0,$$

то

$$\alpha_1^{(s)}(x) \ge 0,\ \beta_1^{(s)}(x) \le 0,\ s=0,1,\ x\in[0;1].$$

Беручи вектор-функції $Z_1(x)$ та $V_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, легко показати, що якщо на кожному кроці ітераційного процесу (3.39)—(3.41),(3.65), (3.13) елементи матриць R_p, D_p, $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались умови (3.47), то при $x\in[0;1]$ для довільного $p\in\mathbb{N}$ є справедливими нерівності (3.24).

Покажемо, що побудовані послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$ абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного в просторі $C_1[0;1]$ розв'язку рівняння (3.10).

Використавши вже введені позначення і враховуючи результати, одержані в підрозділі 3.2., маємо:

$$\sup_{[0;1]}\left\{\|W_p(x)\|,\ \left\|W_p'(x)\right\|\right\} \le (q\nu M\tau_2)^p\, d.$$

Якщо $q\nu M\tau_2 < 1$, то послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x)\}$ та $\{V_p(x)\}$, побудовані згідно закону (3.39)—(3.41),(3.65), (3.13), (3.47), абсолютно і рівномірно збігаються до єдиного розв'язку рівняння (3.10) і мають місце нерівності (3.29).

При виконанні умов (3.65) маємо: $N_2 \ge (\le)\Theta$ і $N_3 \le (\ge)\Theta$ при $A_2 \le (\ge)\Theta$. У цьому випадку двосторонні наближення до шуканого параметру λ, який визначається згідно (3.11), будуємо за формулами

$$\begin{aligned} \lambda_p^+ &= N_1 + \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\Phi_p(\xi) + N_2\Phi^p(\xi)\right] d\xi, \\ \lambda_p^- &= N_1 + \int\limits_0^1 \left[N_3\xi\Phi^p(\xi) + N_2\Phi_p(\xi)\right] d\xi. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Приймаючи до уваги (3.29), (3.65), при виконанні умов $A_2 \le (\ge)\Theta$ справедливими є нерівності (3.32).

Теорема 3.3.4. *Нехай $F[Y(x), Y'(x)] \in C_1(\overline{B})$, виконуються умови (3.65) і $q\nu M\tau_2 < 1$, а в області $\overline{B}_1$ існують вектор–функції нульового наближення $Z_0(x), V_0(x)$, які задовольняють нерівності (3.18).*

Тоді пара $\left(\widetilde{Y}_p(x), \lambda_p\right)$ є p-вим наближенням до розв'язку крайової задачі (3.1)—(3.3), де $\lambda_p = \frac{1}{2}(\lambda_p^+ + \lambda_p^-)$, $\widetilde{Y}_p(x) = \frac{1}{2}(Z_p(x) + V_p(x))$. $Z_p(x)$ та $V_p(x)$ — двосторонні наближення до єдиного розв'язку рівняння (3.10), які визначаються згідно (3.39)—(3.41),(3.65), (3.13) та (3.47), задовольняють нерівності (3.29); λ_p^-, λ_p^+ — p-ве двостороннє наближення до шуканого параметру λ, яке визначається згідно (3.66) і задовольняє нерівності (3.32).

3.3.1 Приклад

В просторі функцій $C^2(0;1) \cap C^1[0;1]$ дослідити розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y_1''(x) = x^2(y_1'(x))^3 - y_2(x) - 3, \\ y_2''(x) = xy_1(x) - \frac{1}{2}y_2'(x) - (x^2 - 2), \end{cases} \tag{3.67}$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(0) - 0,05y_1(1) = -0,6, \\ 0,05y_1'(0) - 0,55y_1'(1) = \lambda_1, \\ y_1(0) = 1, \\ \lambda_2 y_2(0) - 0,01y_2(1) = -1,18, \\ -0,01y_2'(0) + 0,2y_2'(1) = \lambda_2, \\ y_2(0) = -3, \end{cases} \tag{3.68}$$

та визначити параметри $\lambda_i, i = 1, 2,\ \lambda_i \in [-1; 1]$.

Зводимо задану задачу до еквівалентного інтегрального рівняння вигляду (3.10).

Функція Гріна

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + G_2(x, \xi),$$

де

$$g_{1,1}(x, \xi) = 0,091x\xi,\ g_{2,1}(x, \xi) = 0,017x\xi,\ \xi \in [0; 1],$$

$$g_{1,2}^1(x, \xi) = -\xi - 0,091x,\ g_{2,2}^1(x, \xi) = -\xi - 0,052x,\ \xi \in [0; x],$$

$$g_{1,2}^2(x, \xi) = -1,091x,\ g_{2,2}^2(x, \xi) = -1,052x,\ \xi \in (x; 1].$$

Тоді

$$y_1(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi) f_1[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^x g_{1,2}^1(x,\xi) f_1[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi + \int\limits_x^1 g_{1,2}^2(x,\xi) f_1[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi;$$
$$y_2(x) = -3 + 2,086x + \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi) f_2[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi +$$
$$+ \int\limits_0^x g_{2,2}^1(x,\xi) f_2[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi + \int\limits_x^1 g_{2,2}^2(x,\xi) f_2[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi,$$

а параметри $\lambda_i, i = 1, 2$ визначаємо з рівностей

$$\lambda_1 = -0,5 + \int\limits_0^1 (-0,045\xi - 4,545 \cdot 10^{-3}) f_1[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi,$$
$$\lambda_2 = 0,396 + \int\limits_0^1 (3,276 \cdot 10^{-3}\xi + 1,724 \cdot 10^{-4}) f_2[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi.$$

У нашому випадку маємо

$$E + B_2 A_2^{-1} \le \Theta, \; B_1 \left(A_2 \bar{Y}_0\right) \le \Theta.$$

За нульове наближення вибираємо функції

$$z_{0,1}(x) = 1 + 1,8737x - 0,35x^2, \; v_{0,1}(x) = 1 - 0,2101x + 0,55x^2,$$
$$z_{0,2}(x) = -3 + 0,8546x + 0,6x^2, \; v_{0,2}(x) = -3 - 0,547x + 1,25x^2,$$

які задовольняють наступні нерівності

$$w_{0,1}(x) = z_{0,1}(x) - v_{0,1}(x) \ge 0, \; w_{0,1}'(x) \ge 0,$$
$$w_{0,2}(x) = z_{0,2}(x) - v_{0,2}(x) \ge 0, \; w_{0,2}'(x) \ge 0,$$

$$\alpha_{0,1}(x) = z_{0,1}(x) - 1 - x - \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi) f^{0,1}(\xi) d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x g_{1,2}^1(x,\xi) f_{0,1}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g_{1,2}^2(x,\xi) f_{0,1}(\xi) d\xi \ge 0, \; \alpha_{0,1}'(x) \ge 0,$$
$$\alpha_{0,2}(x) = z_{0,2}(x) + 3 - 2,086x - \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi) f^{0,2}(\xi) d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x g_{2,2}^1(x,\xi) f_{0,2}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g_{2,2}^2(x,\xi) f_{0,2}(\xi) d\xi \ge 0, \; \alpha_{0,2}'(x) \ge 0,$$

$$\beta_{0,1}(x) = v_{0,1}(x) - 1 - x - \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi) f_{0,1}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x g_{1,2}^1(x,\xi) f^{0,1}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 g_{1,2}^2(x,\xi) f^{0,1}(\xi)d\xi \le 0,\ \beta_{0,1}^{'}(x) \le 0,$$
$$\beta_{0,2}(x) = v_{0,2}(x) + 3 - 2,086x - \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi) f_{0,2}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x g_{2,2}^1(x,\xi) f^{0,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 g_{2,2}^2(x,\xi) f^{0,2}(\xi)d\xi \le 0,\ \beta_{0,2}^{'}(x) \le 0,$$
$$x \in [0;1],$$

де

$$f^{0,1}(x) = x^2(z_{0,1}^{'}(x))^3 - v_{0,2}(x) - 3,$$
$$f^{0,2}(x) = xz_{0,1}(x) - 0,5v_{0,2}^{'}(x) - (x^2 - 2),$$
$$f_{0,1}(x) = x^2(v_{0,1}^{'}(x))^3 - z_{0,2}(x) - 3,$$
$$f_{0,2}(x) = xv_{0,1}(x) - 0,5z_{0,2}^{'}(x) - (x^2 - 2).$$

I. Нехай $C_p(x) \equiv \Theta$, $Q_p(x) \equiv \Theta$.

Ітераційний процес будуємо за формулами

$$z_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,091x\xi f^{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,091x) f_{p,1}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_x^1 1,091x f_{p,1}(\xi)d\xi,$$
$$v_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,091x\xi f_{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_0^x (\xi + 0,091x) f^{p,1}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_x^1 1,091x f^{p,1}(\xi)d\xi,$$
$$z_{p+1,2}(x) = -3 + 2,086x + \int\limits_0^1 0,017x\xi f^{p,2}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x (\xi + 0,05x) f_{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,052x f_{p,2}(\xi)d\xi,$$
$$v_{p+1,2}(x) = -3 + 2,086x + \int\limits_0^1 0,017x\xi f_{p,2}(\xi)d\xi -$$
$$- \int\limits_0^x (\xi + 0,05x) f^{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,052x f^{p,2}(\xi)d\xi,$$

$$\lambda_{p+1,1}^{+} = -0,5 + \int\limits_0^1 (-0,045\xi - 4,545 \cdot 10^{-3}) f_{p+1,1}(\xi)d\xi,$$
$$\lambda_{p+1,1}^{-} = -0,5 + \int\limits_0^1 (-0,045\xi - 4,545 \cdot 10^{-3}) f^{p+1,1}(\xi)d\xi,$$

$$\lambda^+_{p+1,2} = 0,396 + \int\limits_0^1 (3,276\cdot 10^{-3}\xi + 1,724\cdot 10^{-4}) f^{p+1,2}(\xi)d\xi,$$
$$\lambda^-_{p+1,2} = 0,396 + \int\limits_0^1 (3,276\cdot 10^{-3}\xi + 1,724\cdot 10^{-4}) f_{p+1,2}(\xi)d\xi.$$

де

$$f^{p,1}(x) = x^2(z'_{p,1}(x))^3 - v_{p,2}(x) - 3,$$
$$f^{p,2}(x) = xz_{p,1}(x) - 0,5v'_{p,2}(x) - (x^2-2),$$
$$f_{p,1}(x) = x^2(v'_{p,1}(x))^3 - z_{p,2}(x) - 3,$$
$$f_{p,2}(x) = xv_{p,1}(x) - 0,5z'_{p,2}(x) - (x^2-2).$$

В результаті проведених обчислень при $p = 4$ знайдено двосторонні наближення:

$$z_{5,1}(x) = 1 + 1,2422x - 3,8085\cdot 10^{-2}x^3 - 5,4652\cdot 10^{-2}x^4 -$$
$$-8,0458\cdot 10^{-4}x^5 + 6,402\cdot 10^{-3}x^6 + 1,5368\cdot 10^{-2}x^7 +$$
$$+5,6857\cdot 10^{-4}x^8 - 6,8256\cdot 10^{-4}x^9 + 2,2806\cdot 10^{-3}x^{10} -$$
$$-5,1628\cdot 10^{-4}x^{11} - 2,9464\cdot 10^{-3}x^{12} - 1,8216\cdot 10^{-3}x^{13} +$$
$$+3,6941\cdot 10^{-4}x^{14} + 5,8924\cdot 10^{-4}x^{15} + 6,0426\cdot 10^{-4}x^{16} +$$
$$+2,4368\cdot 10^{-4}x^{17} + 2,5544\cdot 10^{-4}x^{18} + 4,1709\cdot 10^{-4}x^{19} -$$
$$-3,31596\cdot 10^{-4}x^{20} - 7,7882\cdot 10^{-4}x^{21} - 9,7723\cdot 10^{-5}x^{22} +$$
$$+3,375\cdot 10^{-4}x^{23} + 2,4161\cdot 10^{-5}x^{24} - 1,8711\cdot 10^{-5}x^{25} +$$
$$+1,7918\cdot 10^{-4}x^{26} + 8,7096\cdot 10^{-5}x^{27} - 8,0656\cdot 10^{-5}x^{28} -$$
$$-1,0265\cdot 10^{-4}x^{29} - 6,3335\cdot 10^{-5}x^{30} + 8,0819\cdot 10^{-6}x^{31} +$$
$$+2,9195\cdot 10^{-5}x^{32} - 1,1203\cdot 10^{-5}x^{33},$$

$$v_{5,1}(x) = 1 + 0,7272x + 3,1855\cdot 10^{-2}x^3 + 9,7485\cdot 10^{-2}x^4 +$$
$$+6,2718\cdot 10^{-4}x^5 - 2,6659\cdot 10^{-2}x^6 - 3,0476\cdot 10^{-2}x^7 +$$
$$+1,0998\cdot 10^{-3}x^8 + 6,7254\cdot 10^{-3}x^9 + 8,4322\cdot 10^{-3}x^{10} -$$
$$-1,8483\cdot 10^{-4}x^{11} - 1,4765\cdot 10^{-3}x^{12} + 6,9064\cdot 10^{-4}x^{13} -$$
$$-2,4238\cdot 10^{-4}x^{14} - 1,5036\cdot 10^{-3}x^{15} - 6,6190\cdot 10^{-4}x^{16} +$$
$$+3,9273\cdot 10^{-4}x^{17} + 3,8676\cdot 10^{-4}x^{18} + 1,7530\cdot 10^{-4}x^{19} +$$
$$+1,5567\cdot 10^{-5}x^{20} + 4,2589\cdot 10^{-4}x^{21} + 9,4771\cdot 10^{-5}x^{22} -$$
$$-6,6794\cdot 10^{-4}x^{23} + 4,4897\cdot 10^{-5}x^{24} - 5,8703\cdot 10^{-5}x^{25} -$$

$$-7,4618\cdot 10^{-5}x^{26}+3,6349\cdot 10^{-4}x^{27}+1,4499\cdot 10^{-5}x^{28}-$$
$$-1,3721\cdot 10^{-4}x^{29}+1,1961\cdot 10^{-5}x^{30}+3,8294\cdot 10^{-5}x^{31}-$$
$$5,3919\cdot 10^{-5}x^{32}+1,7842\cdot 10^{-5}x^{33},$$

$$z_{5,2}(x)=-3+0,1733x+0,9429x^2+1,2467\cdot 10^{-2}x^3-$$
$$-3,1525\cdot 10^{-2}x^4+4,1669\cdot 10^{-3}x^5+8,6746\cdot 10^{-4}x^6+$$
$$+3,022\cdot 10^{-3}x^7-2,4468\cdot 10^{-4}x^8-5,1176\cdot 10^{-4}x^9-$$
$$-3,7089\cdot 10^{-4}x^{10}+3,4755\cdot 10^{-5}x^{11}+6,2442\cdot 10^{-5}x^{12}+$$
$$+4,8749\cdot 10^{-5}x^{13}-2,6182\cdot 10^{-6}x^{14}-4,2799\cdot 10^{-6}x^{15}+$$
$$+1,3002\cdot 10^{-5}x^{16}-2,3065\cdot 10^{-6}x^{17}-1,0652\cdot 10^{-5}x^{18}-$$
$$-6,5608\cdot 10^{-7}x^{19}+2,5283\cdot 10^{-6}x^{20}-3,1676\cdot 10^{-6}x^{21}-$$
$$-2,19297\cdot 10^{-6}x^{22}+5,5164\cdot 10^{-6}x^{23}+2,0365\cdot 10^{-6}x^{24}-$$
$$-8,1175\cdot 10^{-7}x^{25}-1,7369\cdot 10^{-6}x^{26}-1,266\cdot 10^{-6}x^{27}+$$
$$+6,9637\cdot 10^{-8}x^{28}+1,0164\cdot 10^{-6}x^{29}+1,4946\cdot 10^{-7}x^{30}-$$
$$-1,8007\cdot 10^{-7}x^{31}+3,3986\cdot 10^{-7}x^{32},$$

$$v_{5,2}(x)=-3-0,1526x+1,0478x^2-1,002\cdot 10^{-2}x^3+$$
$$+2,7106\cdot 10^{-2}x^4-3,3744\cdot 10^{-3}x^5-1,3069\cdot 10^{-3}x^6-$$
$$-1,3732\cdot 10^{-3}x^7+7,1458\cdot 10^{-5}x^8+8,2512\cdot 10^{-5}x^9+$$
$$+1,5434\cdot 10^{-4}x^{10}+1,4022\cdot 10^{-6}x^{11}+3,5806\cdot 10^{-6}x^{12}+$$
$$+4,0213\cdot 10^{-5}x^{13}-6,8476\cdot 10^{-6}x^{14}-2,2263\cdot 10^{-5}x^{15}-$$
$$-5,4321\cdot 10^{-6}x^{16}+6,8152\cdot 10^{-7}x^{17}-1,9665\cdot 10^{-6}x^{18}-$$
$$-2,0142\cdot 10^{-7}x^{19}+1,49\cdot 10^{-6}x^{20}+5,2898\cdot 10^{-6}x^{21}+$$
$$+1,1464\cdot 10^{-6}x^{22}-5,1828\cdot 10^{-6}x^{23}+2,6201\cdot 10^{-6}x^{24}-$$
$$-1,0094\cdot 10^{-6}x^{25}-2,1611\cdot 10^{-6}x^{26}+2,7256\cdot 10^{-6}x^{27}-$$
$$-4,1988\cdot 10^{-7}x^{28}-7,5179\cdot 10^{-7}x^{29}+4,9799\cdot 10^{-7}x^{30}+$$
$$+2,1832\cdot 10^{-7}x^{31}-1,1218\cdot 10^{-7}x^{32},$$

$$\lambda_{5,1}^{+}=-0,4944,\ \lambda_{5,1}^{-}=-0,5061,$$
$$\lambda_{5,2}^{+}=0,39986,\ \lambda_{5,2}^{-}=0,39936.$$

II. Для випадку, коли $C_p(x) \neq \Theta$ та $Q_p(x) \neq \Theta$ ітераційний процес будуємо за наступними формулами

$$z_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int_0^1 0,091x\xi\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^x (\xi + 0,091x)\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,091x\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi,$$
$$v_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int_0^1 0,091x\xi\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^x (\xi + 0,091x)\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,091x\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi,$$
$$z_{p+1,2}(x) = -3 + 2,086x + \int_0^1 0,017x\xi\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^x (\xi + 0,05x)\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,052x\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi,$$
$$v_{p+1,2}(x) = -3 + 2,086x + \int_0^1 0,017x\xi\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi -$$
$$-\int_0^x (\xi + 0,05x)\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi - \int_x^1 1,052x\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi,$$

де

$$\overline{f}^{p,i}(x) = f^{p,i}(x) - c_{ij}^p(x)(f^{p,i}(x) - f_{p,i}(x)),$$
$$\overline{f}_{p,i}(x) = f_{p,i}(x) + q_{ij}^p(x)(f^{p,i}(x) - f_{p,i}(x)).$$

При цьому елементи матриць $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ для $p = \overline{0,4}$ підібрано таким чином, що справедливими є нерівності (3.43).

Тоді при $p = 4$ одержано

$$z_{5,1}(x) = 1 + 1,14696x - 2,2085 \cdot 10^{-2}x^3 - 3,6232 \cdot 10^{-2}x^4 -$$
$$-1,4983 \cdot 10^{-3}x^5 + 5,5911 \cdot 10^{-3}x^6 + 1,2102 \cdot 10^{-2}x^7 +$$
$$+6,1825 \cdot 10^{-4}x^8 - 1,5596 \cdot 10^{-3}x^9 - 9,0308 \cdot 10^{-4}x^{10} -$$
$$-3,4182 \cdot 10^{-4}x^{11} - 1,0368 \cdot 10^{-3}x^{12} - 2,8049 \cdot 10^{-4}x^{13} +$$
$$+1,8951 \cdot 10^{-4}x^{14} + 3,041 \cdot 10^{-4}x^{15} + 5,9889 \cdot 10^{-4}x^{16} -$$
$$-5,6004 \cdot 10^{-5}x^{17} - 2,5318 \cdot 10^{-4}x^{18} + 9,93696 \cdot 10^{-5}x^{19} -$$
$$-9,9815 \cdot 10^{-5}x^{20} - 1,7105 \cdot 10^{-4}x^{21} + 7,4459 \cdot 10^{-5}x^{22} +$$
$$+2,786 \cdot 10^{-5}x^{23} + 3,5505 \cdot 10^{-5}x^{24} + 5,644 \cdot 10^{-5}x^{25} -$$
$$-1,9449 \cdot 10^{-5}x^{26} - 2,4191 \cdot 10^{-5}x^{27} + 8,0402 \cdot 10^{-6}x^{28},$$

$$v_{5,1}(x) = 1 + 0,84648x + 2,1904 \cdot 10^{-2}x^3 + 5,5622 \cdot 10^{-2}x^4-$$
$$-4,5604 \cdot 10^{-3}x^5 - 1,5015 \cdot 10^{-2}x^6 - 1,7632 \cdot 10^{-2}x^7+$$
$$+2,2262 \cdot 10^{-3}x^8 + 3,8882 \cdot 10^{-3}x^9 + 5,8999 \cdot 10^{-3}x^{10}-$$
$$-4,8546 \cdot 10^{-4}x^{11} - 1,4573 \cdot 10^{-3}x^{12} - 3,4067 \cdot 10^{-4}x^{13}-$$
$$-2,2681 \cdot 10^{-4}x^{14} - 4,0953 \cdot 10^{-4}x^{15} + 1,1583 \cdot 10^{-4}x^{16}+$$
$$+1,0012 \cdot 10^{-4}x^{17} + 1,6295 \cdot 10^{-4}x^{18} + 2,8139 \cdot 10^{-4}x^{19}-$$
$$-2,4945 \cdot 10^{-4}x^{20} + 7,6858 \cdot 10^{-5}x^{21} + 4,3136 \cdot 10^{-5}x^{22}-$$
$$-3,5111 \cdot 10^{-4}x^{23} + 2,5654 \cdot 10^{-4}x^{24} - 8,0747 \cdot 10^{-6}x^{25}-$$
$$-1,3602 \cdot 10^{-4}x^{26} + 1,5922 \cdot 10^{-4}x^{27} + 3,4566 \cdot 10^{-5}x^{28}-$$
$$-1,2417 \cdot 10^{-4}x^{29},$$

$$z_{5,2}(x) = -3 + 9,1577 \cdot 10^{-2}x + 0,9692x^2 + 7,1648 \cdot 10^{-3}x^3-$$
$$-1,6652 \cdot 10^{-2}x^4 + 2,1179 \cdot 10^{-3}x^5 + 4,6271 \cdot 10^{-4}x^6+$$
$$+1,4808 \cdot 10^{-3}x^7 - 1,1972 \cdot 10^{-4}x^8 - 2,3793 \cdot 10^{-4}x^9-$$
$$-1,8814 \cdot 10^{-4}x^{10} + 1,1354 \cdot 10^{-5}x^{11} + 2,3741 \cdot 10^{-5}x^{12}+$$
$$+3,9169 \cdot 10^{-5}x^{13} - 2,178 \cdot 10^{-6}x^{14} - 6,2096 \cdot 10^{-6}x^{15}+$$
$$+6,5645 \cdot 10^{-6}x^{16} - 3,1823 \cdot 10^{-6}x^{17} - 4,8129 \cdot 10^{-6}x^{18}+$$
$$+1,4675 \cdot 10^{-6}x^{19} - 5,9606 \cdot 10^{-7}x^{20} + 2,6401 \cdot 10^{-7}x^{21}+$$
$$+7,882 \cdot 10^{-7}x^{22},$$

$$v_{5,2}(x) = -3 - 9,217x + 1,0335x^2 - 1,0239 \cdot 10^{-2}x^3+$$
$$+1,1947 \cdot 10^{-2}x^4 - 4,5010 \cdot 10^{-3}x^5 - 3,7196 \cdot 10^{-4}x^6-$$
$$-9,8504 \cdot 10^{-4}x^7 + 2,2243 \cdot 10^{-4}x^8 + 5,6337 \cdot 10^{-5}x^9+$$
$$+1,3653 \cdot 10^{-4}x^{10} - 2,5711 \cdot 10^{-5}x^{11} - 1,0048 \cdot 10^{-5}x^{12}+$$
$$+1,6407 \cdot 10^{-5}x^{13} - 5,8051 \cdot 10^{-6}x^{14} - 1,1555 \cdot 10^{-5}x^{15}-$$
$$-7,0816 \cdot 10^{-8}x^{16} - 9,7412 \cdot 10^{-7}x^{17} + 1,0035 \cdot 10^{-6}x^{18}+$$
$$+3,5663 \cdot 10^{-6}x^{19} - 2,931 \cdot 10^{-6}x^{20} + 2,538 \cdot 10^{-6}x^{21}+$$
$$+1,1656 \cdot 10^{-6}x^{22} - 4,5342 \cdot 10^{-6}x^{23}.$$

$$\lambda^{+}_{5,1} = -0,49692,\ \lambda^{-}_{5,1} = -0,503528,$$
$$\lambda^{+}_{5,2} = 0,39976,\ \lambda^{-}_{5,2} = 0,39948.$$

Легко перевірити, що точним розв'язком заданої задачі є функції $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = -3 + x^2$, які виділяються уже на першому кроці ітераційного процесу, та значення параметрів $\lambda_1 = -0,5$, $\lambda_2 = 0,4$.

За наближений розв'язок беремо функції $y_{p,i}(x) = \frac{1}{2}(z_{p,i}(x) + v_{p,i}(x))$ та параметри $\lambda_{p,i} = \frac{1}{2}(\lambda^+_{p,i} + \lambda^-_{p,i})$, $i = 1, 2$.

Визначимо оцінки похибки одержаних на кожному кроці ітерації наближених розв'язків у всіх розглядуваних випадках і результати подамо у вигляді таблиці.

Таблиця 3.1

p	i	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert w_{p,i}(x)\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert y_{p,i}(x) - y_i(x)\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert\lambda^+_{p,i} - \lambda^-_{p,i}\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert\lambda_{p,i} - \lambda_i\rvert$
		$C_p(x) \equiv \Theta, Q_p(x) \equiv \Theta$			
1	1	$9,7871 \cdot 10^{-1}$	$5,5649 \cdot 10^{-2}$	$3,2075 \cdot 10^{-2}$	$1,9846 \cdot 10^{-3}$
	2	$5,2671 \cdot 10^{-1}$	$3,7561 \cdot 10^{-2}$	$1,3497 \cdot 10^{-3}$	$4,6212 \cdot 10^{-4}$
2	1	$7,5932 \cdot 10^{-1}$	$4,0033 \cdot 10^{-2}$	$2,4777 \cdot 10^{-2}$	$1,2099 \cdot 10^{-3}$
	2	$4,1802 \cdot 10^{-1}$	$2,3893 \cdot 10^{-2}$	$1,0593 \cdot 10^{-3}$	$4,3866 \cdot 10^{-4}$
3	1	$5,8653 \cdot 10^{-1}$	$2,4407 \cdot 10^{-2}$	$1,9260 \cdot 10^{-2}$	$6,5771 \cdot 10^{-4}$
	2	$3,2809 \cdot 10^{-1}$	$1,6849 \cdot 10^{-2}$	$8,2182 \cdot 10^{-4}$	$4,1689 \cdot 10^{-4}$
4	1	$4,5591 \cdot 10^{-1}$	$1,3267 \cdot 10^{-2}$	$1,5003 \cdot 10^{-2}$	$4,2388 \cdot 10^{-4}$
	2	$2,5452 \cdot 10^{-1}$	$1,0316 \cdot 10^{-2}$	$6,3835 \cdot 10^{-4}$	$4,0040 \cdot 10^{-4}$
5	1	$3,5515 \cdot 10^{-1}$	$8,5505 \cdot 10^{-3}$	$1,1672 \cdot 10^{-2}$	$2,6728 \cdot 10^{-4}$
	2	$1,9770 \cdot 10^{-1}$	$5,3630 \cdot 10^{-3}$	$4,9692 \cdot 10^{-4}$	$3,9186 \cdot 10^{-4}$
		$C_p(x) \neq \Theta,\ Q_p(x) \neq \Theta$			
1	1	$8,5369 \cdot 10^{-1}$	$3,9704 \cdot 10^{-2}$	$2,8869 \cdot 10^{-2}$	$1,7874 \cdot 10^{-3}$
	2	$4,8865 \cdot 10^{-1}$	$3,2953 \cdot 10^{-2}$	$1,1999 \cdot 10^{-3}$	$4,4637 \cdot 10^{-4}$
2	1	$5,8190 \cdot 10^{-1}$	$1,7954 \cdot 10^{-2}$	$1,9549 \cdot 10^{-2}$	$1,0932 \cdot 10^{-3}$
	2	$3,3444 \cdot 10^{-1}$	$6,2502 \cdot 10^{-3}$	$8,2052 \cdot 10^{-4}$	$4,0363 \cdot 10^{-4}$
3	1	$3,9584 \cdot 10^{-1}$	$9,0095 \cdot 10^{-3}$	$1,3521 \cdot 10^{-2}$	$4,7647 \cdot 10^{-4}$
	2	$2,4321 \cdot 10^{-1}$	$2,7880 \cdot 10^{-3}$	$5,6961 \cdot 10^{-4}$	$3,9114 \cdot 10^{-4}$
4	1	$2,8484 \cdot 10^{-1}$	$1,8647 \cdot 10^{-3}$	$9,5006 \cdot 10^{-3}$	$3,6555 \cdot 10^{-4}$
	2	$1,6109 \cdot 10^{-1}$	$1,1738 \cdot 10^{-3}$	$3,9921 \cdot 10^{-4}$	$3,7825 \cdot 10^{-4}$
5	1	$2,0236 \cdot 10^{-1}$	$1,1960 \cdot 10^{-3}$	$6,6063 \cdot 10^{-3}$	$2,2493 \cdot 10^{-4}$
	2	$1,1046 \cdot 10^{-1}$	$4,2623 \cdot 10^{-5}$	$2,8153 \cdot 10^{-4}$	$3,7821 \cdot 10^{-4}$

На Рис. 3.1 та Рис. 3.2 отримані результати проілюстровані геометрично.

Як випливає із одержаних результатів, найкраща точність наближеного розв'язку досягається при $C_p(x) \neq \Theta,\ Q_p(x) \neq \Theta$.

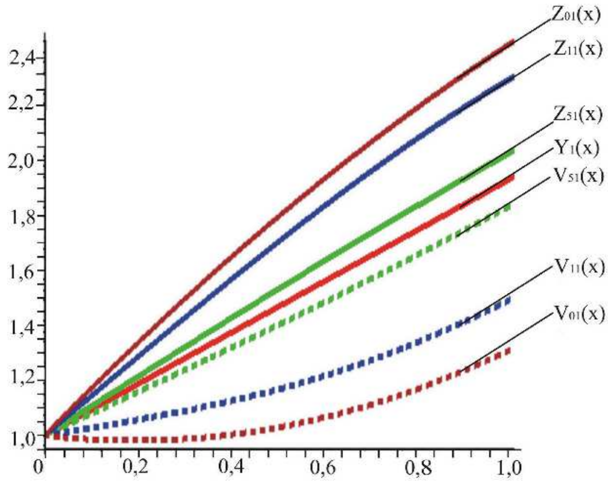


Рис. 3.1. Наближення до розв'язку $Y_1(x)$

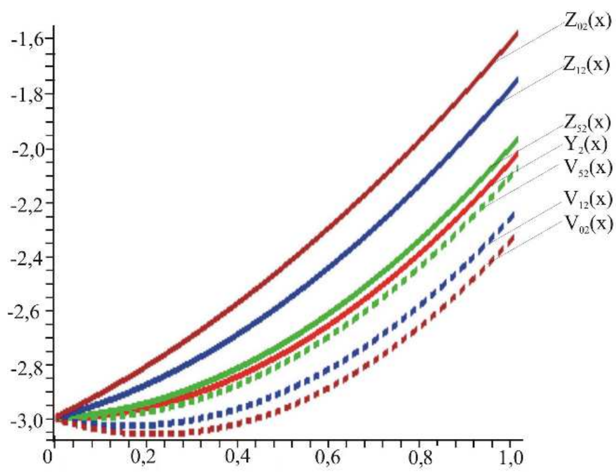


Рис. 3.2. Наближення до розв'язку $Y_2(x)$

3.3.2 Приклад

В просторі функцій $C^2(0;1)\cap C^1[0;1]$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1''(x) = \dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi}{6}\,x(y_1'(x))^3 - \dfrac{1}{3}\,y_2(x), \\ y_2''(x) = \dfrac{x}{5}\,y_1(x) - \left(\dfrac{\pi}{6}\right)^2 y_2(x) - \dfrac{x}{5}\,(1+x), \end{cases} \tag{3.69}$$

який задовольняє крайові умови:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(0) - 0,1y_1(1) = -0,6, \\ 0,1y_1'(0) - 0,5y_1'(1) = \lambda_1, \\ y_1(0) = 1, \\ \lambda_2 y_2(0) - 0,2y_2(1) = 0,227, \\ 0,3y_2'(0) - \frac{24}{5\pi}y_2'(1) = \lambda_2, \\ y_2(0) = 1, \end{cases} \tag{3.70}$$

та визначити параметри $\lambda_i, i = 1,2,\ \lambda_i \in [-0,5;0,5]$.

Зводимо задану задачу до еквівалентного інтегрального рівняння вигляду (3.10).

Функція Гріна має наступний вигляд:

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi),$$

де

$$\begin{gathered} g_{1,1}(x,\xi) = 0,2x\xi,\ g_{2,1}(x,\xi) = 0,14x\xi,\ \xi \in [0;1], \\ g_{1,2}^1(x,\xi) = -\xi - 0,2x,\ g_{2,2}^1(x,\xi) = -\xi - 0,21x,\ \xi \in [0;x], \\ g_{1,2}^2(x,\xi) = -1,2x,\ g_{2,2}^2(x,\xi) = -1,21x,\ \xi \in (x;1]. \end{gathered} \tag{3.71}$$

Тоді

$$\begin{gathered} y_1(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi)f_1[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi + \\ + \int\limits_0^x g_{1,2}^1(x,\xi)f_1[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi + \int\limits_x^1 g_{1,2}^2(x,\xi)f_1[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi; \\ y_2(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi)f_2[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi + \\ + \int\limits_0^x g_{2,2}^1(x,\xi)f_2[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi + \int\limits_x^1 g_{2,2}^2(x,\xi)f_2[Y(\xi),Y'(\xi)]d\xi, \end{gathered} \tag{3.72}$$

а параметри $\lambda_i, i = 1, 2$ визначаємо з рівностей:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0,4 + \int\limits_0^1 (-0,08\xi - 0,02) f_1[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi,\\ \lambda_2 &= 0,367 + \int\limits_0^1 (-0,172\xi - 0,042) f_2[Y(\xi), Y'(\xi)] d\xi.\end{aligned} \tag{3.73}$$

За нульове наближення вибираємо функції:

$$z_{0,1}(x) = 1 + 1,58x - 0,2x^2,\ v_{0,1}(x) = 1 - 0,16x + 0,5x^2,$$

$$z_{0,2}(x) = 1 + 0,22x - 0,2x^2,\ v_{0,2}(x) = 1 - 0,39x + 0,05x^2,$$

які задовольняють наступні нерівності:

$$w_{0,1}(x) = z_{0,1}(x) - v_{0,1}(x) \geq 0,\ w'_{0,1}(x) \geq 0,$$

$$w_{0,2}(x) = z_{0,2}(x) - v_{0,2}(x) \geq 0,\ w'_{0,2}(x) \geq 0,$$

$$\alpha_{0,1}(x) = z_{0,1}(x) - 1 - x - \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi) f^{0,1}(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x g^1_{1,2}(x,\xi) f_{0,1}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g^2_{1,2}(x,\xi) f_{0,1}(\xi) d\xi \geq 0,\ \alpha'_{0,1}(x) \geq 0,$$

$$\alpha_{0,2}(x) = z_{0,2}(x) - 1 + 0,299x - \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi) f^{0,2}(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x g^1_{2,2}(x,\xi) f_{0,2}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g^2_{2,2}(x,\xi) f_{0,2}(\xi) d\xi \geq 0,\ \alpha'_{0,2}(x) \geq 0,$$

$$\beta_{0,1}(x) = v_{0,1}(x) - 1 - x - \int\limits_0^1 g_{1,1}(x,\xi) f_{0,1}(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x g^1_{1,2}(x,\xi) f^{0,1}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g^2_{1,2}(x,\xi) f^{0,1}(\xi) d\xi \leq 0,\ \beta'_{0,1}(x) \leq 0,$$

$$\beta_{0,2}(x) = v_{0,2}(x) - 1 + 0,299x - \int\limits_0^1 g_{2,1}(x,\xi) f_{0,2}(\xi) d\xi -$$

$$- \int\limits_0^x g^1_{2,2}(x,\xi) f^{0,2}(\xi) d\xi - \int\limits_x^1 g^2_{2,2}(x,\xi) f^{0,2}(\xi) d\xi \leq 0,\ \beta'_{0,2}(x) \leq 0,$$

$$x \in [0; 1],$$

де

$$f^{0,1}(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6} x (z'_{0,1}(x))^3 - \frac{1}{3} v_{0,2}(x),$$

$$f^{0,2}(x) = \frac{x}{5} z_{0,1}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 v_{0,2}(x) - \frac{x}{5}(1 + x),$$

$$f_{0,1}(x) = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{6} x (v'_{0,1}(x))^3 - \frac{1}{3} z_{0,2}(x),$$

$$f_{0,2}(x) = \frac{x}{5}\, v_{0,1}(x) - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 z_{0,2}(x) - \frac{x}{5}\,(1+x).$$

I. Нехай $C_p(x) \equiv \Theta$, $Q_p(x) \equiv \Theta$.

Ітераційний процес будуємо згідно закону:

$$\begin{gathered}
z_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi f^{p,1}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,2x) f_{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x f_{p,1}(\xi)d\xi, \\
v_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi f_{p,1}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,2x) f^{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x f^{p,1}(\xi)d\xi, \\
z_{p+1,2}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi f^{p,2}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,21x) f_{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x f_{p,2}(\xi)d\xi, \\
v_{p+1,2}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi f_{p,2}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,21x) f^{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x f^{p,2}(\xi)d\xi,
\end{gathered} \tag{3.74}$$

$$\begin{gathered}
\lambda^+_{p+1,1} = -0,4 + \int\limits_0^1 (-0,08\xi - 0,02) f_{p+1,1}(\xi)d\xi, \\
\lambda^-_{p+1,1} = -0,4 + \int\limits_0^1 (-0,08\xi - 0,02) f^{p+1,1}(\xi)d\xi, \\
\lambda^+_{p+1,2} = 0,367 + \int\limits_0^1 (-0,172\xi - 0,042) f_{p+1,2}(\xi)d\xi, \\
\lambda^-_{p+1,2} = 0,367 + \int\limits_0^1 (-0,172\xi - 0,042) f^{p+1,2}(\xi)d\xi.
\end{gathered} \tag{3.75}$$

де

$$\begin{gathered}
f^{p,1}(x) = \frac{1}{3}\, \cos\tfrac{\pi}{6}x(z'_{p,1}(x))^3 - \frac{1}{3} v_{p,2}(x), \\
f^{p,2}(x) = \frac{x}{5}\, z_{p,1}(x) - \left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2 v_{p,2}(x) - \frac{x}{5}\,(1+x), \\
f_{p,1}(x) = \frac{1}{3}\, \cos\tfrac{\pi}{6}x(v'_{p,1}(x))^3 - \frac{1}{3}\, z_{p,2}(x), \\
f_{p,2}(x) = \frac{x}{5}\, v_{p,1}(x) - \left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2 z_{p,2}(x) - \frac{x}{5}\,(1+x).
\end{gathered} \tag{3.76}$$

При $p = 4$ одержуємо наступні двосторонні наближення до розв'язку розглядуваної крайової задачі:

$$z_{5,1}(x) = 1 + 1,0987x - 7,0922 \cdot 10^{-2}x^2 + 2,9571 \cdot 10^{-2}x^3 -$$
$$-4,7099 \cdot 10^{-3}x^4 - 3,0281 \cdot 10^{-3}x^5 + 2,2592 \cdot 10^{-3}x^6 -$$
$$-2,4118 \cdot 10^{-4}x^7 - 4,4369 \cdot 10^{-4}x^8 + 2,2048 \cdot 10^{-4}x^9 +$$
$$+2,8896 \cdot 10^{-5}x^{10} - 6,0575 \cdot 10^{-5}x^{11} + 1,4008 \cdot 10^{-5}x^{12} +$$
$$+8,6576 \cdot 10^{-6}x^{13} - 5,9884 \cdot 10^{-6}x^{14} + 1,1471 \cdot 10^{-8}x^{15} +$$
$$+1,3228 \cdot 10^{-6}x^{16} - 3,6469 \cdot 10^{-7}x^{17} - 1,9958 \cdot 10^{-7}x^{18} +$$
$$+1,2231 \cdot 10^{-7}x^{19} + 1,9109 \cdot 10^{-8}x^{20},$$

$$v_{5,1}(x) = 1 + 0,8908x + 8,6424 \cdot 10^{-2}x^2 - 4,4389 \cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+1,3935 \cdot 10^{-2}x^4 - 5,1934 \cdot 10^{-4}x^5 - 2,0932 \cdot 10^{-3}x^6 +$$
$$+9,331 \cdot 10^{-4}x^7 + 6,1673 \cdot 10^{-5}x^8 - 2,1669 \cdot 10^{-4}x^9 +$$
$$+6,1299 \cdot 10^{-5}x^{10} + 3,1813 \cdot 10^{-5}x^{11} - 2,8422 \cdot 10^{-5}x^{12} +$$
$$+1,7808 \cdot 10^{-6}x^{13} + 8,2806 \cdot 10^{-6}x^{14} - 4,2652 \cdot 10^{-6}x^{15} -$$
$$-8,1718 \cdot 10^{-7}x^{16} + 1,7656 \cdot 10^{-6}x^{17} - 4,7894 \cdot 10^{-7}x^{18} -$$
$$-4,0832 \cdot 10^{-7}x^{19},$$

$$z_{5,2}(x) = 1 + 1,1504 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 8,4730 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+3,1999 \cdot 10^{-4}x^4 + 1,3473 \cdot 10^{-3}x^5 - 4,1989 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+6,1567 \cdot 10^{-5}x^7 + 1,3563 \cdot 10^{-5}x^8 - 1,0475 \cdot 10^{-5}x^9 +$$
$$+9,4391 \cdot 10^{-7}x^{10} + 1,0901 \cdot 10^{-6}x^{11} - 3,6615 \cdot 10^{-7}x^{12} -$$
$$-2,8942 \cdot 10^{-8}x^{13} + 3,8333 \cdot 10^{-8}x^{14} + 1,7286 \cdot 10^{-10}x^{15} -$$
$$-7,2219 \cdot 10^{-9}x^{16} + 1,3428 \cdot 10^{-9}x^{17} + 1,3472 \cdot 10^{-9}x^{18},$$

$$v_{5,2}(x) = 1 - 1,0861 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 7,4385 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+5,6219 \cdot 10^{-3}x^4 - 1,0443 \cdot 10^{-3}x^5 + 1,7784 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+1,4876 \cdot 10^{-5}x^7 - 2,8493 \cdot 10^{-5}x^8 + 5,2025 \cdot 10^{-6}x^9 +$$
$$+3,6147 \cdot 10^{-6}x^{10} - 1,7753 \cdot 10^{-6}x^{11} - 3,4023 \cdot 10^{-7}x^{12} +$$
$$+4,7683 \cdot 10^{-7}x^{13} - 4,3011 \cdot 10^{-8}x^{14} - 1,0665 \cdot 10^{-7}x^{15} +$$
$$+4,3372 \cdot 10^{-8}x^{16} + 1,3408 \cdot 10^{-8}x^{17} - 1,4874 \cdot 10^{-8}x^{18},$$

$$\lambda_{5,1}^{+} = -0,39739,\ \lambda_{5,1}^{-} = -0,40272,$$
$$\lambda_{5,2}^{+} = 0,40092,\ \lambda_{5,2}^{-} = 0,399105.$$

II Нехай $C_p(x) \neq \Theta$ та $Q_p(x) \neq \Theta$.

Тоді двосторонні наближення до розв'язку інтегрального рівняння (3.72) визначаємо згідно закону:

$$\begin{gathered}
z_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,2x)\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi, \\
v_{p+1,1}(x) = 1 + x + \int\limits_0^1 0,2x\xi\overline{f}_{p,1}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,2x)\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,2x\overline{f}^{p,1}(\xi)d\xi, \\
z_{p+1,2}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,21x)\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi, \\
v_{p+1,2}(x) = 1 - 0,299x + \int\limits_0^1 0,14x\xi\overline{f}_{p,2}(\xi)d\xi - \\
- \int\limits_0^x (\xi + 0,21x)\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi - \int\limits_x^1 1,21x\overline{f}^{p,2}(\xi)d\xi,
\end{gathered} \tag{3.77}$$

де

$$\begin{gathered}
\overline{f}^{p,i}(x) = f^{p,i}(x) - c_{ij}^p(x)(f^{p,i}(x) - f_{p,i}(x)), \\
\overline{f}_{p,i}(x) = f_{p,i}(x) + q_{ij}^p(x)(f^{p,i}(x) - f_{p,i}(x)).
\end{gathered} \tag{3.78}$$

На кожному кроці ітераційного процесу елементи матриць $C_p(x)$ та $Q_p(x)$ вибираємо так, щоб виконувались умови (3.23).

При $p = 4$ було отримано наступні двосторонні наближення:

$$\begin{gathered}
z_{5,1}(x) = 1 + 1,0929x - 6,7015 \cdot 10^{-2}x^2 + 2,8151 \cdot 10^{-2}x^3 - \\
-4,7907 \cdot 10^{-3}x^4 - 2,5193 \cdot 10^{-3}x^5 + 2,00006 \cdot 10^{-3}x^6 - \\
-2,7188 \cdot 10^{-4}x^7 - 3,4246 \cdot 10^{-4}x^8 + 1,8245 \cdot 10^{-4}x^9 + \\
+1,3801 \cdot 10^{-5}x^{10} - 4,2785 \cdot 10^{-5}x^{11} + 1,1372 \cdot 10^{-5}x^{12} + \\
+4,5707 \cdot 10^{-6}x^{13} - 3,7266 \cdot 10^{-6}x^{14} + 3,3527 \cdot 10^{-7}x^{15} + \\
+5,9278 \cdot 10^{-7}x^{16} - 2,1587 \cdot 10^{-7}x^{17} - 4,8466 \cdot 10^{-8}x^{18} + \\
+3,7574 \cdot 10^{-8}x^{19} + 3,1131 \cdot 10^{-9}x^{20},
\end{gathered}$$

$$v_{5,1}(x) = 1 + 0,8988x + 7,9642 \cdot 10^{-2}x^2 - 4,0799 \cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+1,3008 \cdot 10^{-2}x^4 - 7,6324 \cdot 10^{-4}x^5 - 1,7226 \cdot 10^{-3}x^6 +$$
$$+8,1948 \cdot 10^{-4}x^7 + 9,2867 \cdot 10^{-6}x^8 - 1,6262 \cdot 10^{-4}x^9 +$$
$$+5,4066 \cdot 10^{-5}x^{10} + 1,87699 \cdot 10^{-5}x^{11} - 2,0859 \cdot 10^{-5}x^{12} +$$
$$+2,8828 \cdot 10^{-6}x^{13} + 5,1464 \cdot 10^{-6}x^{14} - 3,1742 \cdot 10^{-6}x^{15} -$$
$$-2,2668 \cdot 10^{-7}x^{16} + 1,1142 \cdot 10^{-6}x^{17} - 4,0674 \cdot 10^{-7}x^{18} -$$
$$-1,9549 \cdot 10^{-7}x^{19},$$

$$z_{5,2}(x) = 1 + 1,0567 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 - 7,7370 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+5,1325 \cdot 10^{-4}x^4 + 1,2746 \cdot 10^{-3}x^5 - 3,9969 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+5,97999 \cdot 10^{-5}x^7 + 1,1050 \cdot 10^{-5}x^8 - 9,2721 \cdot 10^{-6}x^9 +$$
$$+1,0656 \cdot 10^{-6}x^{10} + 7,9944 \cdot 10^{-7}x^{11} - 2,92598 \cdot 10^{-7}x^{12} -$$
$$-1,3235 \cdot 10^{-9}x^{13} + 1,9673 \cdot 10^{-8}x^{14} - 1,3189 \cdot 10^{-9}x^{15} -$$
$$-2,7563 \cdot 10^{-9}x^{16} + 5,2501 \cdot 10^{-10}x^{17} + 5,6770 \cdot 10^{-10}x^{18},$$

$$v_{5,2}(x) = 1 - 1,0094 \cdot 10^{-2}x - 0,1371x^2 + 6,6689 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+5,4023 \cdot 10^{-3}x^4 - 8,9578 \cdot 10^{-4}x^5 + 1,3958 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+1,5365 \cdot 10^{-5}x^7 - 2,4962 \cdot 10^{-5}x^8 + 4,6433 \cdot 10^{-6}x^9 +$$
$$+2,9517 \cdot 10^{-6}x^{10} - 1,5172 \cdot 10^{-6}x^{11} - 2,1930 \cdot 10^{-7}x^{12} +$$
$$+3,7752 \cdot 10^{-7}x^{13} - 5,2042 \cdot 10^{-8}x^{14} - 7,4876 \cdot 10^{-8}x^{15} +$$
$$+3,5479 \cdot 10^{-8}x^{16} + 7,4147 \cdot 10^{-9}x^{17} - 1,0952 \cdot 10^{-8}x^{18},$$

$$\lambda^+_{5,1} = -0,397566,\ \lambda^-_{5,1} = -0,402548,$$
$$\lambda^+_{5,2} = 0,400849,\ \lambda^-_{5,2} = 0,399159.$$

III Нехай $C_p(x) \neq \Theta$ та $Q_p(x) \neq \Theta$, $R_p \neq \Theta$ та $D_p \neq \Theta$.

Тоді ітераційний процес будуємо за законом (3.77)-(3.78), де $\phi_{p,i}(x)$ та $\phi^{p,i}(x)$ визначаємо згідно (3.39). На кожному кроці даного ітераційного процесу елементи матриць $C_p(x)$ та $Q_p(x)$, R_p та D_p вибираємо таким чином, щоб виконувались умови (3.47).

При $p = 4$ отримано наступні двосторонні наближення:

$$z_{5,1}(x) = 1 + 1,0615x - 4,5967 \cdot 10^{-2}x^2 + 2,0798 \cdot 10^{-2}x^3 -$$
$$-4,8716 \cdot 10^{-3}x^4 - 7,6461 \cdot 10^{-4}x^5 + 1,1251 \cdot 10^{-3}x^6 -$$
$$-3,0309 \cdot 10^{-4}x^7 - 9,8735 \cdot 10^{-5}x^8 + 8,2385 \cdot 10^{-5}x^9 -$$
$$-4,6903 \cdot 10^{-6}x^{10} - 1,1442 \cdot 10^{-5}x^{11} + 3,2109 \cdot 10^{-6}x^{12} +$$
$$+8,1136 \cdot 10^{-7}x^{13} - 6,0345 \cdot 10^{-7}x^{14} + 1,3480 \cdot 10^{-8}x^{15} +$$
$$+9,2103 \cdot 10^{-8}x^{16} - 1,4770 \cdot 10^{-8}x^{17} - 1,8018 \cdot 10^{-8}x^{18} +$$
$$+4,7315 \cdot 10^{-9}x^{19} + 4,2092 \cdot 10^{-9}x^{20},$$

$$v_{5,1}(x) = 1 + 0,9416x + 4,4705 \cdot 10^{-2}x^2 - 2,2337 \cdot 10^{-2}x^3 +$$
$$+7,1707 \cdot 10^{-3}x^4 - 6,9818 \cdot 10^{-4}x^5 - 6,7677 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+3,6896 \cdot 10^{-4}x^7 - 4,3874 \cdot 10^{-5}x^8 - 3,74522 \cdot 10^{-5}x^9 +$$
$$+2,0346 \cdot 10^{-5}x^{10} - 1,5128 \cdot 10^{-6}x^{11} - 3,0067 \cdot 10^{-6}x^{12} +$$
$$+1,5145 \cdot 10^{-6}x^{13} - 3,3781 \cdot 10^{-8}x^{14} - 3,0645 \cdot 10^{-7}x^{15} +$$
$$+1,4249 \cdot 10^{-7}x^{16} + 6,8602 \cdot 10^{-9}x^{17} - 3,6862 \cdot 10^{-8}x^{18},$$

$$z_{5,2}(x) = 1 + 6,5232 \cdot 10^{-3}x - 0,1371x^2 - 4,2042 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+1,4365 \cdot 10^{-3}x^4 + 8,1969 \cdot 10^{-4}x^5 - 2,7395 \cdot 10^{-4}x^6 +$$
$$+4,4431 \cdot 10^{-5}x^7 + 3,6805 \cdot 10^{-6}x^8 - 4,7970 \cdot 10^{-6}x^9 +$$
$$+6,8583 \cdot 10^{-7}x^{10} + 2,6682 \cdot 10^{-7}x^{11} - 6,0131 \cdot 10^{-8}x^{12} -$$
$$-1,6781 \cdot 10^{-8}x^{13} + 3,2299 \cdot 10^{-9}x^{14} + 1,6627 \cdot 10^{-9}x^{15} -$$
$$-6,8034 \cdot 10^{-10}x^{16} + 8,4665 \cdot 10^{-12}x^{17} + 1,8651 \cdot 10^{-10}x^{18},$$

$$v_{5,2}(x) = 1 - 6,2171 \cdot 10^{-3}x - 0,1371x^2 + 4,4918 \cdot 10^{-4}x^3 +$$
$$+4,4784 \cdot 10^{-3}x^4 - 5,4752 \cdot 10^{-4}x^5 + 8,8738 \cdot 10^{-5}x^6 -$$
$$-3,2083 \cdot 10^{-6}x^7 - 1,0941 \cdot 10^{-5}x^8 + 3,7621 \cdot 10^{-6}x^9 +$$
$$+3,4267 \cdot 10^{-7}x^{10} - 5,9214 \cdot 10^{-7}x^{11} + 1,1469 \cdot 10^{-7}x^{12} +$$
$$+5,9669 \cdot 10^{-8}x^{13} - 3,6643 \cdot 10^{-8}x^{14} + 4,6589 \cdot 10^{-10}x^{15} +$$
$$+6,4629 \cdot 10^{-9}x^{16} - 1,9973 \cdot 10^{-9}x^{17} - 6,1817 \cdot 10^{-10}x^{18},$$

$$\lambda_{5,1}^{+} = -0,398651, \;\; \lambda_{5,1}^{-} = -0,401441,$$
$$\lambda_{5,2}^{+} = 0,4004556, \;\; \lambda_{5,2}^{-} = 0,39953998$$

Визначимо оцінки похибки одержаних на кожному кроці ітерації наближених розв'язків задачі (3.69)-(3.70) у всіх розглянутих випадках і результати подамо у вигляді таблиці.

Таблиця 3.2

p	i	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert w_{p,i}(x)\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert y_{p,i}(x)-y_i(x)\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert \lambda_{p,i}^{+}-\lambda_{p,i}^{-}\rvert$	$\sup\limits_{[0;1]} \lvert \lambda_{p,i}-\lambda_i\rvert$
$C_p(x)\equiv\Theta, Q_p(x)\equiv\Theta,\ R_p\equiv\Theta,\ D_p\equiv\Theta$					
1	1	$6,3177\cdot10^{-1}$	$6,3779\cdot10^{-2}$	$2,9906\cdot10^{-2}$	$1,7782\cdot10^{-3}$
	2	$1,4105\cdot10^{-1}$	$5,2477\cdot10^{-3}$	$1,1704\cdot10^{-2}$	$9,7656\cdot10^{-4}$
2	1	$3,9077\cdot10^{-1}$	$1,7782\cdot10^{-2}$	$1,9410\cdot10^{-2}$	$1,0034\cdot10^{-3}$
	2	$7,2653\cdot10^{-2}$	$4,8630\cdot10^{-3}$	$6,8811\cdot10^{-3}$	$3,4791\cdot10^{-4}$
3	1	$2,5279\cdot10^{-1}$	$1,0034\cdot10^{-2}$	$1,2551\cdot10^{-2}$	$3,1366\cdot10^{-4}$
	2	$4,2724\cdot10^{-2}$	$1,7198\cdot10^{-3}$	$4,3463\cdot10^{-3}$	$1,6264\cdot10^{-4}$
4	1	$1,6334\cdot10^{-1}$	$3,1366\cdot10^{-3}$	$8,1808\cdot10^{-3}$	$1,7742\cdot10^{-4}$
	2	$2,6987\cdot10^{-2}$	$7,9340\cdot10^{-4}$	$2,7923\cdot10^{-3}$	$4,4707\cdot10^{-5}$
5	1	$1,0641\cdot10^{-1}$	$1,7742\cdot10^{-3}$	$5,3317\cdot10^{-3}$	$5,7429\cdot10^{-5}$
	2	$1,7338\cdot10^{-2}$	$2,0374\cdot10^{-4}$	$1,8130\cdot10^{-3}$	$1,1129\cdot10^{-5}$
$C_p(x)\neq\Theta,\ Q_p(x)\neq\Theta,\ R_p\equiv\Theta,\ D_p\equiv\Theta$					
1	1	$6,1628\cdot10^{-1}$	$6,0402\cdot10^{-2}$	$2,9309\cdot10^{-2}$	$1,7129\cdot10^{-3}$
	2	$1,3787\cdot10^{-1}$	$4,8421\cdot10^{-3}$	$1,1423\cdot10^{-2}$	$9,2116\cdot10^{-4}$
2	1	$3,7728\cdot10^{-1}$	$1,6443\cdot10^{-2}$	$1,8740\cdot10^{-2}$	$9,4116\cdot10^{-4}$
	2	$6,8071\cdot10^{-2}$	$4,4402\cdot10^{-3}$	$6,5927\cdot10^{-3}$	$3,1938\cdot10^{-4}$
3	1	$2,4104\cdot10^{-1}$	$8,7055\cdot10^{-3}$	$1,1975\cdot10^{-2}$	$3,0775\cdot10^{-4}$
	2	$3,9396\cdot10^{-2}$	$1,2017\cdot10^{-3}$	$4,1113\cdot10^{-3}$	$1,3176\cdot10^{-4}$
4	1	$1,5349\cdot10^{-1}$	$2,7716\cdot10^{-3}$	$7,6854\cdot10^{-3}$	$1,5714\cdot10^{-4}$
	2	$2,4957\cdot10^{-2}$	$5,5944\cdot10^{-4}$	$2,6139\cdot10^{-3}$	$3,3898\cdot10^{-5}$
5	1	$9,9422\cdot10^{-2}$	$1,3965\cdot10^{-3}$	$4,9820\cdot10^{-3}$	$5,7\cdot10^{-5}$
	2	$1,6030\cdot10^{-2}$	$1,3240\cdot10^{-4}$	$1,6897\cdot10^{-3}$	$4,2002\cdot10^{-6}$
$C_p(x)\neq\Theta,\ Q_p(x)\neq\Theta,\ R_p\neq\Theta,\ D_p\neq\Theta$					
1	1	$5,4850\cdot10^{-1}$	$3,9991\cdot10^{-2}$	$2,2412\cdot10^{-2}$	$7,7945\cdot10^{-4}$
	2	$1,2768\cdot10^{-1}$	$4,5231\cdot10^{-3}$	$8,6941\cdot10^{-3}$	$5,6607\cdot10^{-4}$
2	1	$2,8836\cdot10^{-1}$	$7,2635\cdot10^{-3}$	$1,3075\cdot10^{-2}$	$2,8592\cdot10^{-4}$
	2	$5,1806\cdot10^{-2}$	$2,7010\cdot10^{-3}$	$4,6193\cdot10^{-3}$	$1,9390\cdot10^{-4}$
3	1	$1,6813\cdot10^{-1}$	$2,3658\cdot10^{-3}$	$7,9968\cdot10^{-3}$	$1,6165\cdot10^{-4}$
	2	$2,7603\cdot10^{-2}$	$6,8698\cdot10^{-4}$	$2,7270\cdot10^{-3}$	$3,9592\cdot10^{-5}$
4	1	$1,0247\cdot10^{-1}$	$1,4109\cdot10^{-3}$	$4,7472\cdot10^{-3}$	$6,7831\cdot10^{-5}$
	2	$1,6554\cdot10^{-2}$	$1,2541\cdot10^{-4}$	$1,6123\cdot10^{-3}$	$2,3613\cdot10^{-5}$
5	1	$6,1414\cdot10^{-2}$	$7,8632\cdot10^{-4}$	$2,7900\cdot10^{-3}$	$4,6\cdot10^{-5}$
	2	$9,8880\cdot10^{-3}$	$8,7569\cdot10^{-5}$	$9,1564\cdot10^{-4}$	$2,1978\cdot10^{-6}$

Отримані результати проілюстровано геометрично на Рис. 3.3 та Рис. 3.4.

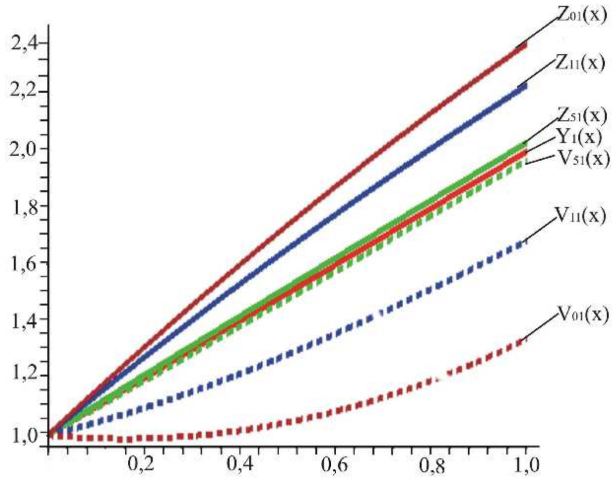


Рис. 3.3. Наближення до розв'язку $Y_1(x)$

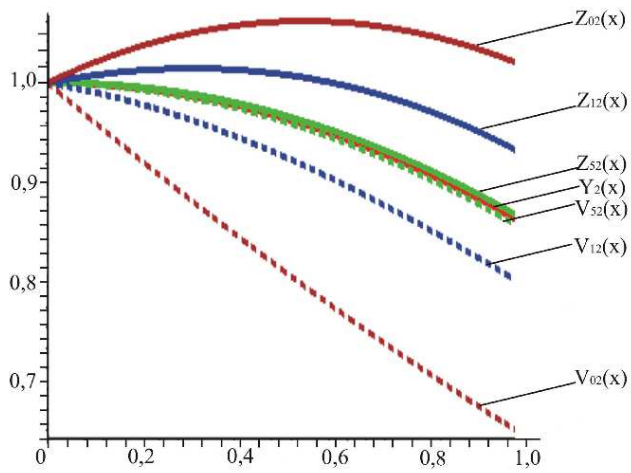


Рис. 3.4. Наближення до розв'язку $Y_2(x)$

Проводячи аналіз одержаних результатів, можна відмітити покращення оцінок похибки наближених розв'язків у випадку відмінності від нуля елементів матриць $C_p(x)$, $Q_p(x)$, R_p, D_p.

Розділ 4

Крайові задачі теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП) на площині

В теорії ДРЧП гіперболічного типу на площині достатньо глибоко досліджені так звані класичні задачі, до яких відносяться задачі Коші, Гурса (характеристична задача Коші), перша та друга задачі Дарбу, мішані задачі з різними локальними та нелокальними крайовими умовами тощо [9, 47, 57–63, 65, 66, 68, 74, 85, 86, 92, 102, 142, 146, 169, 176, 177, 184, 203].

У всіх цих задачах структура краю області зміни незалежних змінних є достатньо простою, оскільки область є або прямокутною (задача Гурса та мішані задачі), або обмежена парою характеристик заданого ДРЧП, які мають спільну точку перетину, та "вільною" кривою (задачі Дарбу, Коші), де під "вільною" кривою розуміють довільну неперервно диференційовну функцію, яка перетинається із кожною з характеристик заданого диференціального рівняння не більше, ніж в одній точці [57, 176].

У випадку, коли контур області відшукання розв'язку розглядуваного рівняння є більш складним, проблеми постановки крайових задач та їх дослідження значно ускладнюються. Адже у цьому випадку потрібно таким чином задати умови на краю заданої області, щоб задача не була недовизначеною або перевизначеною, ускладнюються підходи до дослідження існування, єдиності, регулярності шуканого розв'язку та побудови методів його відшукання (знаходження).

Один із підходів дослідження таких крайових задач полягає у розбитті розглядуваної області характеристиками заданого рівняння на більш прості підобласті таким чином, щоб знаходження розв'язку поставленої задачі звелось до послідовного інтегрування (розв'язання) в підобластях однієї із класичних задач, тобто досліджувана крайова задача замінюється еквівалентною системою класичних задач.

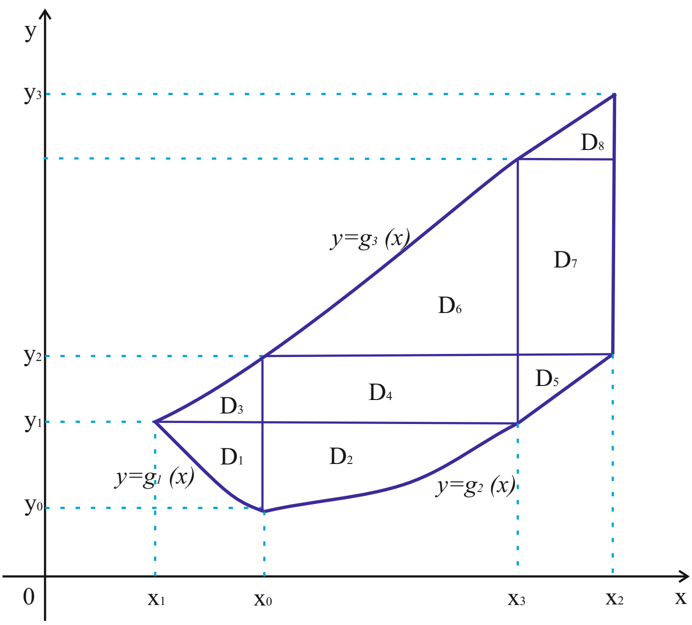


Рис. 4.1

Наприклад, нехай в області

$$D = \{(x,y)|x \in [x_1, x_0], y \in (g_1(x), g_3(x))\} \cup \{(x,y)|x \in [x_0, x_2], \\ y \in (g_2(x), g_3(x))\},$$

(див. Рис. 4.1), $x_1 < x_0 < x_2$, $y = g_r(x)$, $r = 1, 2, 3$ — "вільні" криві, $g_1'(x) < 0$, $g_2'(x) > 0$, $g_3'(x) > 0$, $g_1(x_1) = g_3(x_1) = y_1$, $g_1(x_0) = g_2(x_0) = y_0$, $g_2(x_2) = y_2$, $g_3(x_2) = y_3$, $y_0 < y_1 < y_2 < y_3$, потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$U_{xy} = f(x, y, U(x,y), U_x(x,y), U_y(x,y)),$$

який задовольняє умови

$$U(x, g_r(x)) = \varphi_r(x), \quad \begin{matrix} x \in [x_1, x_2], & r = 3, \\ x \in [x_1, x_0], & r = 1, \\ x \in [x_0, x_2], & r = 2, \end{matrix}$$

$$U_y(x, g_1(x)) = \psi(x), \quad x \in [x_1, x_0],$$
$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0), \quad \varphi_1(x_1) = \varphi_3(x_1).$$

Очевидно, що розв'язок поставленої крайової задачі $U(x, y) = U_k(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}_k$, $k = \overline{1, 8}$, де $U_1(x, y)$ — розв'язок задачі Коші при $(x, y) \in \overline{D}_1$, $U_2(x, y)$ — задачі Дарбу: знайти розв'язок заданого рівняння при умовах $U_2(x, g_2(x)) = \varphi_2(x)$, $x \in [x_0, x_3]$, $U_2(x_0, y) = U_1(x_0, y)$, $(x, y) \in \overline{D}_2$ і т.д.

Таким чином, необхідно досліджувати послідовно три основні задачі: Коші-Дарбу, Дарбу-Гурса, Гурса-Дарбу. Деякі підходи дослідження вказаних крайових задач в областях зі складною структурою краю та методи побудови їх наближених розв'язків викладено в даному розділі.

4.1 Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для систем нелінійних ДРЧП гіперболічного типу

4.1.1 Постановка задачі та зведення її до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

В $\mathbb{R}^2$ розглянемо область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де

$$D_1 = \{(x, y) | x \in (x_0, x_1), y \in (y_0, y_1]\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | x \in [x_0, x_1], y \in (y_1, g_1(x))\},$$
$$D_3 = \{(x, y) | x \in (x_1, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\},$$

(див. Рис. 4.2), а $x_0 < x_1 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, $y = g_r(x)$ $(x = k_r(y))$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2$ — "вільні" криві, причому $g_r'(x) > 0$, $g_1(x_{r-1}) = y_r$, $g_2(x_r) = y_{r-1}$.

Дослідимо задачу [69, 70, 204]: в просторі вектор–функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$L_2 U(x, y) = f(x, y, U(x, y)) := f[U(x, y)], \tag{4.1}$$

де

$$L_2 U(x, y) := D^{(1.1)} U(x, y) + A_1(x, y) D^{(1.0)} U(x, y) +$$
$$+ A_2(x, y) D^{(0.1)} U(x, y),$$
$$U(x, y) := (u_i(x, y)), \quad f[U(x, y)] := (f_i[U(x, y)]),$$

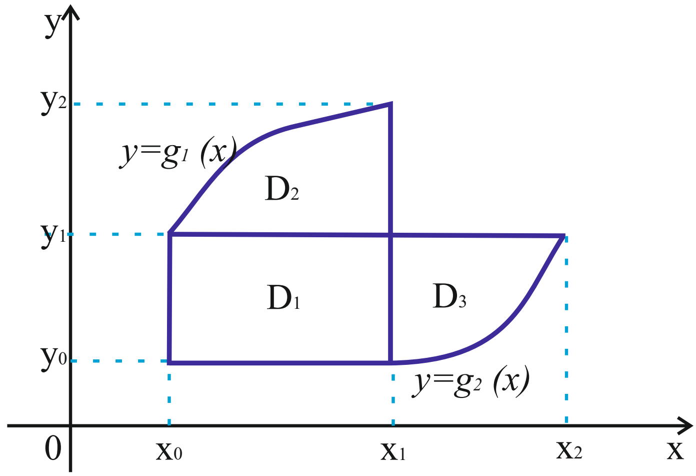


Рис. 4.2

$i = \overline{1,n}$ — вектор-функції, $A_r(x,y) := (\delta_{ij} a_{ij}^{(r)}(x,y))$, $r = 1,2$, $j = \overline{1,n}$ — задані матриці, δ_{ij} — символ Кронекера, який задовольняє крайові умови

$$\begin{gathered} U(x_0,y) = \Psi(y),\ \Psi(y) \in C^1[y_0,y_1], \\ U(x,y_0) = \Phi(x),\ \Phi(x) \in C^1[x_0,x_1], \\ \Psi(y_0) = \Phi(x_0), \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$U(x, g_r(x)) = \Omega_r(x), \quad x \in [x_{r-1}, x_r], \quad \Omega_r(x) \in C^1[x_{r-1}, x_r], \tag{4.3}$$

$\Omega_1(x_0) = \Psi(y_1)$, $\Omega_2(x_1) = \Phi(x_1)$, $r = 1,2$, $\Psi(y) := (\psi_i(y))$, $\Phi(x) := (\varphi_i(x))$, $\Omega_r(x) := (\omega_{i,r}(x))$, $i = \overline{1,n}$, $r = 1,2$ — задані вектор–функції.

Очевидно, розв'язок крайової задачі (4.1)–(4.3)

$$U(x,y) = \begin{cases} U_1(x,y), (x,y) \in \overline{D}_1, \\ U_2(x,y), (x,y) \in \overline{D}_2, \\ U_3(x,y), (x,y) \in \overline{D}_3, \end{cases}$$

де $U_1(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (4.1), (4.2) при $(x,y) \in \overline{D}_1$, а $U_s(x,y), s = 2,3$ — розв'язки задач Дарбу (4.1), (4.3) відповідно при $(x,y) \in \overline{D}_s$, причому $U_2(x,y_1) = U_1(x,y_1)$, а $U_3(x_1,y) = U_1(x_1,y)$, $U_s(x,y) := (u_{s,i}(x,y))$ — шукані вектор–функції.

Надалі вважаємо, що $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Лема 4.1.1. *Якщо* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, *то крайова задача* (4.1) – (4.3) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь*

$$\begin{gathered} U_s(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} F[U_1(\xi,\eta)] + T_s F[U_s(\xi,\eta)], \\ (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \end{gathered} \tag{4.4}$$

де

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 0, s = 1, \\ 1, s = 2,3, \end{cases} \qquad F[U(x,y)] := \begin{cases} F^*[U(x,y)], (x,y) \in \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2, \\ F^{**}[U(x,y)], (x,y) \in \overline{D}_3, \end{cases}$$

$$F^*[U(x,y)] := f[U(x,y)] + [A_{2y}(x,y) + A_1(x,y)A_2(x,y)]U(x,y),$$

$$F^{**}[U(x,y)] := F^*[U(x,y)] + [A_{1x}(x,y) - A_{2y}(x,y)]U(x,y),$$

$$T_1 F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F[U_1(\xi,\eta)] d\eta d\xi, \ (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$T_2 F[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x} \int\limits_{y_1}^{y} K(x,y;\xi,\eta) F[U_2(\xi,\eta)] d\eta d\xi, \ (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$T_3 F[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y} \int\limits_{x_1}^{x} K^{-1}(\xi,\eta;x,y) F[U_3(\xi,\eta)] d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$K(x,y;\xi,\eta) := (\delta_{ij} k_{ij}(x,y;\xi,\eta)),$$

$$K^{-1}(\xi,\eta;x,y) := (\delta_{ij} k_{ij}^{-1}(\xi,\eta;x,y)) \text{ — \textit{матриці}},$$

$$k_{ii}(x,y;\xi,\eta) := \exp\left(\int\limits_{x}^{\xi} a_{ii}^{(2)}(\tau,y) d\tau + \int\limits_{y}^{\eta} a_{ii}^{(1)}(\xi,\tau) d\tau \right),$$

$\Gamma_s(x,y) = (\gamma_{s,i}(x,y))$, $\quad (x,y) \in \overline{D}_s$, $\quad s = 1,2,3$ — *вектор-функції*,

$$\gamma_{1,i}(x,y) := \psi_i(y) \exp\left(\int\limits_{x}^{x_0} a_{ii}^{(2)}(\xi,y) d\xi \right) +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} k_{ii}(x,y;\xi,y_0)[\varphi_i'(\xi) + a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0)\varphi_i(\xi)] d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\gamma_{2,i}(x,y) := \omega_{i,1}(k_1(y)) \exp\left(\int\limits_x^{k_1(y)} a_{ii}^{(2)}(\xi,y)d\xi\right) +$$

$$+\int\limits_{k_1(y)}^{x} k_{ii}(x,y;\xi,y_0)[\varphi_i'(\xi) + a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0)\varphi_i(\xi)]d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$\gamma_{3,i}(x,y) := \omega_{i,2}(x) \exp\left(\int\limits_y^{g_2(x)} a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) +$$

$$+\int\limits_{g_2(x)}^{y} k_{ii}^{-1}(x_0,\eta;x,y)[\psi_i'(\eta) + a_{ii}^{(1)}(x_0,\eta)\psi_i(\eta)]d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$T_{1,2}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{k_1(y)}^{x}\int\limits_{y_0}^{y_1} K(x,y;\xi,\eta)F[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$T_{1,3}F[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{x_0}^{x_1} K^{-1}(\xi,\eta;x,y)F[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_3.$$

Доведення. Покажемо, що всякий розв'язок задачі (4.1) – (4.3) є розв'язком системи (4.4). Дійсно, нехай $(x,y) \in \overline{D}_1$. Тоді, інтегруючи (4.1) по y від y_0 до y і по x від x_0 до x та враховуючи крайові умови (4.2), матимемо [57]:

$$D^{(1.1)}u_{1,i}(x,y) + a_{ii}^{(1)}(x,y)D^{(1.0)}u_{1,i}(x,y) = f_i[U_1(x,y)] -$$

$$-D^{(0.1)}u_{1,i}(x,y)a_{ii}^{(2)}(x,y) \Rightarrow$$

$$D^{(1.0)}u_{1,i}(x,y) = f_{1,i}(x)\exp\left(-\int\limits_{y_0}^{y} a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) +$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y} \exp\left(\int\limits_y^{\eta} a_{ii}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)\{f_i[U_1(x,\eta)] - D^{(0.1)}u_{1,i}(x,\eta)a_{ii}^{(2)}(x,\eta)\}d\eta =$$

$$= [\varphi_i'(x) + a_{ii}^{(2)}(x,y_0)\varphi_i(x)]\exp\left(-\int\limits_{y_0}^{y} a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right) -$$

$$-a_{ii}^{(2)}(x,y)u_{1,i}(x,y)+\int\limits_{y_0}^{y}\exp\left(\int\limits_{y}^{\eta}a_{ii}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)\{f_i[U_1(x,\eta)]+$$

$$+[a_{ii_\eta}^{(2)}(x,\eta)+a_{ii}^{(1)}(x,\eta)a_{ii_x}^{(2)}(x,\eta)]u_{1,i}(x,\eta)\}d\eta\Rightarrow$$

$$u_{1,i}(x,y)=\psi_i(x)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x}a_{ii}^{(2)}(\xi,y)d\xi\right)+\int\limits_{x_0}^{x}k_{ii}(x,y;\xi,y_0)[\varphi_i'(\xi)+$$

$$+a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0)\varphi_i(\xi)]d\xi+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}k_{ii}(x,y;\xi,\eta)F_i^*[U_1(\xi,\eta)]d\eta d\xi,$$

$$F^*[U(x,y)]:=(F_i^*(x,y)),\quad i=\overline{1,n},$$

тобто ми отримали перше інтегральне рівняння системи (4.4).

У випадку, коли $(x,y)\in\overline{D}_2$, інтегруємо (4.1) по y від "вільної" кривої $y=g_1(x)$ до y, а одержаний результат інтегруємо по x від x_1 до x і враховуємо умови $U_2(x,g_1(x))=\Omega_1(x),\quad U_2(x,y_1)=U_1(x,y_1)$.

Зауважимо, що з останньої умови випливає, що $D^{(1,0)}U_2(x,y_1)=D^{(1,0)}U_1(x,y_1)$. Таким чином:

$$D^{(1,0)}u_{2,i}(x,y)=f_{2,i}(x)\exp\left(\int\limits_{y}^{g_1(x)}a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)+$$

$$+a_{ii}^{(2)}(x,g_1(x))\omega_{1,i}(x)\exp\left(\int\limits_{y}^{g_1(x)}a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)-a_{ii}^{(2)}(x,y)u_{2,i}(x,y)+$$

$$+\int\limits_{g_1(x)}^{y}\exp\left(\int\limits_{y}^{\eta}a_{ii}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)F_i^*[U_2(\xi,\eta)]d\eta\Rightarrow$$

$$\Big\{D^{(1,0)}u_{1,i}(x,y_1)+a_{ii}^{(2)}(x,y_1)u_{1,i}(x,y_1)-a_{ii}^{(2)}(x,g_1(x))\omega_{1,i}(x)\times$$

$$\left.\times exp\left(\int\limits_{y_1}^{g_1(x)}a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)-\int\limits_{g_1(x)}^{y_1}\exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta}a_{ii}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)F_i^*[U_2(\xi,\eta)]d\eta\right\}\times$$

$$\times\exp\left(\int\limits_{g_1(x)}^{y_1}a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)=f_{2,i}(x)\Rightarrow$$

$$D^{(1,0)}u_{2,i}(x,y)+a_{ii}^{(2)}(x,y)u_{2,i}(x,y)=\big[D^{(1,0)}u_{1,i}(x,y_1)+$$

$$+a_{ii}^{(2)}(x,y_1)u_{1,i}(x,y_1)\big]\exp\left(\int\limits_{y}^{y_1}a_{ii}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)+$$

$$+\int\limits_{y_1}^{y}\exp\left(\int\limits_{y}^{\eta}a_{ii}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)F_i^*[U_2(x,\eta)]d\eta\Rightarrow$$

$$u_{2,1}(x,y)=f_{3,i}(y)exp\left(\int\limits_{x}^{x_1}a_{ii}^{(2)}(\xi,y)d\xi\right)+\int\limits_{x_1}^{x}[D^{(1.0)}u_{1,i}(\xi,y_1)+$$

$$+a_{ii}^{(2)}(\xi,y_1)u_{1,i}(\xi,y_1)]\exp\left(\int\limits_{y}^{y_1}a_{ii}^{(1)}(\xi,\eta)d\eta+\int\limits_{x}^{\xi}a_{ii}^{(2)}(\tau,y)d\tau\right)d\xi+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x}\int\limits_{y_1}^{y}k_{ii}(x,y;\xi,\eta)F_i^*[U_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi.$$

Із умови $U_2(x,g_1(x))=\Omega_1(x)$ випливає, що $U_2(k_1(y),y)=\Omega_1(k_1(y))$. Отже,

$$f_{3,i}(y)=\left\{\omega_{1,i}(k_1(y))-\int\limits_{x_1}^{k_1(y)}[D^{(1.0)}u_{1,i}(\xi,y_1)+a_{ii}^{(2)}(\xi,y_1)u_{1,i}(\xi,y_1)]\times\right.$$

$$\times\exp\left(\int\limits_{y}^{y_1}a_{ii}^{(1)}(\xi,\eta)d\eta+\int\limits_{k_1(y)}^{\xi}a_{ii}^{(2)}(\tau,y)d\tau\right)d\xi-$$

$$\left.-\int\limits_{x_1}^{k_1(y)}\int\limits_{y_1}^{y}k_{ii}(k_1(y),y;\xi,\eta)F_i^*[U_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi\right\}\exp\left(\int\limits_{x_1}^{k_1(y)}a_{ii}^{(2)}(\xi,y)d\xi\right).$$

Врахувавши, що

$$D^{(1,0)}u_{1,i}(\xi,y_1)+a_{ii}^{(2)}(\xi,y_1)u_{1,i}(\xi,y_1)=[\varphi_i'(\xi)+a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0)\varphi(\xi)]\times$$

$$\times\exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0}a_{ii}^{(1)}(\xi,\tau)d\tau\right)+\int\limits_{y_0}^{y_1}F_i^*[U_1(\xi,\eta)]\exp\int\limits_{y_1}^{\eta}a_{ii}^{(1)}(\xi,\tau)d\tau,$$

кінцево отримуємо друге інтегральне рівняння системи (4.4).

Міркуючи аналогічно, як і в попередньому випадку, легко переконатись, що задача Дарбу при $(x, y) \in \overline{D}_3$ зводиться до третього інтегрального рівняння системи (4.4). Отже, всякий роз'язок крайової задачі (4.1) – (4.3) є розв'язком системи інтегральних рівнянь (4.4). Шляхом диференціювання системи (4.4) легко переконатись, що і всякий розв'язок системи (4.4) є розв'язком крайової задачі (4.1) – (4.3) і лему доведено.

Зауважимо, якщо

$$A_{1x}(x, y) = A_{2y}(x, y),\ (x, y) \in D,$$

то

$$F^*[U(x, y)] \equiv F^{**}[U(x, y)] \ \ i \ \ K(x, y; \xi, \eta) \equiv K^{-1}(\xi, \eta; x, y).$$

□

Як уже відмічалось, згідно постановки задачі

$$D^{(1.0)}[U_1(x, y_1) - U_2(x, y_1)] = 0, \quad x \in [x_0, x_1] \ \text{ і}$$

$$D^{(0.1)}[U_1(x_1, y) - U_3(x_1, y)] = 0, \quad y \in [y_0, y_1], \ \text{ а}$$

$$\begin{aligned} D^{(0.1)}[u_{1,i}(x, y_1) - u_{2,i}(x, y_1)] &= \rho_{1,i} \exp\left(\int\limits_x^{x_0} a_{ii}^{(2)}(\xi, y_1) d\xi\right), \\ &\qquad x \in [x_0, x_1], \\ D^{(1.0)}[u_{1,i}(x_1, y) - u_{3,i}(x_1, y)] &= \rho_{2,i} \exp\left(\int\limits_y^{y_0} a_{ii}^{(1)}(x_1, \eta) d\eta\right), \\ &\qquad y \in [y_0, y_1], \end{aligned} \tag{4.5}$$

де

$$\begin{aligned} \rho_{1,i} := \psi_i'(y_1) - k_1'(y_1) \Big\{ & \omega_{1,i}'(x_0) + a_{ii}^{(2)}(x_0, y_1)\omega_{1,i}(x_0) - [\varphi_i'(x_0) + \\ & + a_{ii}^{(2)}(x_0, y_0)\varphi_i(x_0)] \exp\left(\int\limits_{y_1}^{y_0} a_{ii}^{(1)}(x_0, \eta) d\eta\right) - \\ & - \int\limits_{y_0}^{y_1} \Big[f_i(x_0, \eta, \psi_1(\eta), \ldots, \psi_n(\eta)) + (a_{ii_\eta}^{(2)}(x_0, \eta) + \\ & + a_{ii}^{(1)}(x_0, \eta) a_{ii}^{(2)}(x_0, \eta))\psi_i(\eta) \Big] \exp\left(\int\limits_{y_1}^{\eta} a_{ii}^{(1)}(x_0, \tau) d\tau\right) d\eta \Big\}, \end{aligned}$$

$$\rho_{2,i} := \varphi_i'(x_1) - \omega_{i,2}'(x_1) - g_2'(x_1)\Bigg\{a_{ii}^{(1)}(x_1,y_0)\omega_{2,i}(x_1) - [\psi_i'(y_0)+ \\ +a_{ii}^{(1)}(x_0,y_0)\psi_i(y_0)]\exp\left(\int\limits_{x_1}^{x_0} a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0)d\xi\right) - \\ -\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[f_i(\xi,y_0,\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)) + (a_{ii_\xi}^{(1)}(\xi,y_0)+ \\ +a_{ii}^{(1)}(\xi,y_0)a_{ii}^{(2)}(\xi,y_0))\varphi_i(\xi)\Big]\exp\left(\int\limits_{x_1}^{\xi} a_{ii}^{(2)}(\tau,y_0)d\tau\right)d\xi\Bigg\}.$$

Таким чином, справедлива наступна

Лема 4.1.2. *Нехай* $f\,[\,U(x,y)\,] \in C\,(\overline{B})$, $A_1\,(x,y) \in C^{(1.0)}\,(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}\,(D)$ *і крайова задача* (4.1) – (4.3) *має розв'язок.*

Тоді для регулярності розв'язку крайової задачі (4.1) – (4.3) *(тобто, щоб* $U(x,y) \in C^*(\overline{D})$*) необхідно і досить виконання умов* $\rho_{r,i} = 0$ *для всіх* $r = 1,2$ *та* $i = \overline{1,n}$.

У супротивному випадку мають місце рівності (4.5) *і розв'язок задачі* (4.1) – (4.3) *буде іррегулярним.*

4.1.2 Побудова модифікації монотонного двостороннього методу наближеного розв'язання крайової задачі (4.1) – (4.3). Навідні міркування.

Означення 4.1.1. *Будемо вважати, що вектор–функція* $F[U(x,y)]$ *належить просторові* $C_1(\overline{B})$, $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *якщо вона задовольняє наступні умови:*

1. $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$;
2. *в просторі вектор-функцій* $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $Пр_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$ *існує така вектор–функція*

$$H(x,y,U(x,y);V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)],$$

що

   (a) $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$,

   (b) *для довільної із простору* $C(\overline{D})$ *пари вектор–функцій* $U(x,y)$, $V(x,y) \in \overline{B}_1$, *які задовольняють умови*

$$U(x,y) \geq V(x,y),\ (x,y) \in \overline{D},$$

в області $\overline{B}_1$ *виконується нерівність*

$$H[U(x,y);V(x,y)] \geq H[V(x,y);U(x,y)], \qquad (4.6)$$

3. *вектор–функція* $H[U(x,y);V(x,y)]$ *задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору* $C(\overline{D})$ *вектор–функцій* $U_r(x,y)$, $V_r(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2$, *виконується умова*

$$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leq$$
$$\leq L(|W_1(x,y)| + |W_2(x,y)|),$$

де $W_r(x,y) := U_r(x,y) - V_r(x,y)$, $r = 1,2$, *а* L *– матриця Ліпшиця.*

Очевидно, якщо вектор-функція $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $F[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_1(\overline{B})$.

Дійсно, якщо $F[U(x,y)] := (F_i[U(x,y)])$ та існують такі сталі $0 \leq M_{ij} < +\infty$, що $\left|\dfrac{\partial F_i[U(x,y)]}{\partial u_j(x,y)}\right| \leq M_{ij}$, то тоді за компоненти вектор–функції $H[U(x,y);V(x,y)] := (h_i[U(x,y);V(x,y)])$ можна вибрати функції вигляду

$$h_i[U(x,y);V(x,y)] = F_i[U(x,y)] + \sum_{j=1}^{n} M_{ij}u_j(x,y) - \sum_{j=1}^{n} M_{ij}v_j(x,y).$$

Оскільки

$$\frac{\partial h_i[U(x,y);V(x,y)]}{\partial u_j(x,y)} \geq 0, \quad \frac{\partial h_i[U(x,y);V(x,y)]}{\partial v_j(x,y)} \leq 0$$

і є обмеженими, то всі умови Означення 4.1.1 виконуються. Обернене твердження несправедливе.

Нехай $Z_{s,p}(x,y)$, $V_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_1$, $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s \quad s = 1,2,3,$$

$$f_s^p(x,y) := H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)],$$

$$f_{s,p}(x,y) := H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)],$$

$$\begin{aligned}\alpha_{s,p}(x,y) &:= Z_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) - T_s f_s^p(\xi,\eta),\\ \beta_{s,p}(x,y) &:= V_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_{1,p}(\xi,\eta) - T_s f_{s,p}(\xi,\eta)\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$R_s^p(x,y) := \Gamma_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} f_1^p(\xi,\eta) + T_s f_s^p(\xi,\eta),$$

$$R_{s,p}(x,y) := \Gamma_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} f_{1,p}(\xi,\eta) + T_s f_{s,p}(\xi,\eta),$$

$$\alpha_{s,p}(x,y) := (\alpha_{s,i,p}(x,y)), \quad \beta_{s,p}(x,y) := (\beta_{s,i,p}(x,y)),$$

$R_s^p(x,y) := (r_{s,i}^p(x,y)), \quad R_{s,p}(x,y) := (r_{s,i,p}(x,y))$ — вектор–функції.

Побудуємо послідовності вектор-функцій $Z_{s,p}(x,y), V_{s,p}(x,y)$ згідно формул [70]

$$\begin{aligned} Z_{s,p+1}(x,y) &= R_s^p(x,y),\\ V_{s,p+1}(x,y) &= R_{s,p}(x,y), \quad (x,y)\in\overline{D_s},\end{aligned} \tag{4.8}$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні з простору $C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, вектор–функції, які задовольняють умови відповідно (4.2), (4.3) та нерівності

$$\begin{gathered} W_{s,0}(x,y) \geq 0, \quad \alpha_{s,0}(x,y) \geq 0, \quad \beta_{s,0}(x,y) \leq 0,\\ (x,y)\in\overline{D}_s, \quad s=1,2,3.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Надалі вектор–функції $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, які належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють відповідно умови (4.2), (4.3) та нерівності (4.9), будемо називати функціями порівняння задачі (4.1)–(4.3).

Зауважимо, що, якщо $M_i = \sup\limits_{\overline{B}_1} F_i[U(x,y)], \quad m_i = \inf\limits_{\overline{B}_1} F_i[U(x,y)]$, то функції $z_{s,i,0}(x,y)$ та $v_{s,i,0}(x,y)$, визначені згідно формул

$$\begin{gathered} z_{s,i,0}(x,y) = \gamma_{s,i}(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} M_i + T_s M_i,\\ v_{s,i,0}(x,y) = \gamma_{s,i}(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} m_i + T_s m_i,\\ s=1,2,3, \quad i=\overline{1,n},\end{gathered} \tag{4.10}$$

є функціями порівняння задачі (4.1)–(4.3), якщо вони належать області $\overline{B}_1$.

Дійсно, вектор–функції $Z_{s,0}(x,y) := (z_{s,i,0}(x,y))$, $V_{s,0}(x,y) := (v_{s,i,0}(x,y))$, визначені згідно (4.10), задовольняють відповідні крайові умови (4.2), (4.3), $W_{s,0}(x,y) \geq 0$, а

$$\alpha_{s,0}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(M - f_1^0(\xi,\eta)) + T_s(M - f_s^0(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$\beta_{s,0}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(m - f_{1,0}(\xi,\eta)) + T_s(m - f_{s,0}(\xi,\eta)) \leq 0,$$

$m = (m_i)$, $M = (M_i)$, $i = \overline{1,n}$ — вектори, тобто умови (4.9) виконуються.

Із (4.7), (4.8) при $(x,y) \in \overline{D_s}$, $s = 1,2,3$, випливає справедливість формул:

$$\begin{aligned} Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) &= \alpha_{s,p}(x,y), \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) &= \beta_{s,p}(x,y), \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered} W_{s,p+1}(x,y) = R_s^p(x,y) - R_{s,p}(x,y) = \\ = \varepsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta) - f_{1,p}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_{s,p}(\xi,\eta)), \end{gathered} \tag{4.12}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta) - f_1^{p+1}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - f_s^{p+1}(\xi,\eta)), \\ \beta_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(f_{1,p}(\xi,\eta) - f_{1,p+1}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_{s,p}(\xi,\eta) - f_{s,p+1}(\xi,\eta)), \\ (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad p \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{4.13}$$

4.1.3 Достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі (4.1) — (4.3)

Нехай $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$ є вектор–функціями порівняння задачі (4.1) – (4.3).

Із (4.11) при $p = 0$ маємо

$$Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) \geq 0, \quad V_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) \leq 0.$$

В силу (4.6) та (4.9) $f_s^0(x,y) - f_{s,0}(x,y) \geq 0$, отже із (4.12) при $p = 0$ одержуємо $W_{s,1}(x,y) \geq 0$, тобто для всіх $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, мають місце нерівності

$$V_{s,0}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D_s}, \ \ s = 1,2,3,$$

а, отже, $Z_{s,1}(x,y), V_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$.

Враховуючи останні нерівності та умову (4.6),

$$f_s^0(x,y) - f_s^1(x,y) \geq \ 0, \ f_{s,0}(x,y) - f_{s,1}(x,y) \leq \ 0,$$

а, отже, із (4.13) при $p = 0$ випливає, що

$$\alpha_{s,1}(x,y) \geq 0, \ \beta_{s,1}(x,y) \leq 0,$$

тобто $Z_{s,1}(x,y)$, $V_{s,1}(x,y)$ також є функціями порівняння задачі (4.1)–(4.3).

Приймаючи вектор-функції $Z_{s,1}(x,y)$ та $V_{s,1}(x,y)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції переконуємось в справедливості в області $\overline{B}_1$ нерівностей

$$\begin{gathered} V_{s,p}(x,y) \leq V_{s,p+1}(x,y) \leq Z_{s,p+1}(x,y) \leq Z_{s,p}(x,y) \\ \alpha_{s,p}(x,y) \geq 0, \quad \beta_{s,p}(x,y) \leq 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \end{gathered} \tag{4.14}$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$.

Таким чином, має місце наступна

Теорема 4.1.1. *Нехай вектор-функція* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$*, матриці* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$*,* $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$*, а в області* $\overline{B}_1$ *існують вектор–функції порівняння* $Z_{s,0}(x,y)$*,* $V_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$*,* $s = 1,2,3$*, задачі* (4.1)–(4.3).

Тоді для всіх $(x,y) \in \overline{D}_s$*,* $s = 1,2,3$*, і для* $\forall p \in \mathbb{N}$ *в області* $\overline{B}_1$ *виконуються нерівності* (4.14).

Доведемо, що побудовані таким чином послідовності вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$ збігаються рівномірно в областях $\overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння із системи (4.4). Внаслідок виконання в $\overline{B}_1$ нерівностей (4.14) для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} W_{s,p}(x,y) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$.

Позначимо:

$$\max_{s,i} \sup_{\overline{D}_s} |W_{s,i,0}(x,y)| = d, \quad \|L\| = l,$$

$$\max_{i} \sup_{\overline{D}} \{k_{i,i}(x,y;\xi,\eta), k_{i,i}^{-1}(\xi,\eta;x,y)\} \leq 0,5K, i = \overline{1,n},$$

$$\max\left\{1, \sup_{\overline{D}}(y - y_0 + x - x_0)\right\} = \gamma.$$

Тоді із (4.12) методом математичної індукції одержимо оцінки [57]

$$\max_{s,i} \sup_{\overline{D}_s} |W_{s,i,p}(x,y)| := \|W_{s,p}(x,y)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{p!}[lK\gamma n(y - y_0 + x - x_0)]^p d, \tag{4.15}$$

тобто $\lim\limits_{p\to\infty} W_{s,p}(x,y)=0$, а отже

$$\lim_{p\to\infty} Z_{s,p}(x,y)=\lim_{p\to\infty} V_{s,p}(x,y)=U_s(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3.$$

Переходячи в (4.8) до границі, коли $p\to\infty$ переконуємось, що гранична вектор–функція $U_s(x,y)$ є розв'язком ситеми інтегральних рівнянь (4.4) при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$.

Теорема 4.1.2. *Нехай виконуються умови Теореми 4.1.1. Тоді послідовності вектор-функцій* $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ *та* $\{V_{s,p}(x,y)\}$, *побудовані згідно ітераційного процесу* (4.8), *де за нульове наближення вибираються функції порівняння задачі* (4.1)—(4.3):

1) *збігаються рівномірно до єдиного розв'язку системи інтегральних рівнянь* (4.4) *при* $(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3$,

2) *мають місце оцінки* (4.15),

3) *в області* $\overline{B}_1$ *мають місце нерівності*

$$V_{s,p}(x,y)\le V_{s,p+1}(x,y)\le U_s(x,y)\le Z_{s,p+1}(x,y)\le Z_{s,p}(x,y), \tag{4.16}$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3, p\in\mathbb{N},$$

де $U_s(x,y)$ — *єдиний розв'язок відповідного інтегрального рівняння* (4.4) *при* $(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3$.

Доведення. Єдиність розв'язку системи інтегральних рівнянь (4.4) при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$ доводиться методом від супротивного (див. [57]).

Доведемо слушність нерівностей (4.16). Для цього припустимо, що в деякій точці $(x,y)\in\overline{D}_s$ для деякого номера p, наприклад, $U_s(x,y)>Z_{s,p}(x,y)$.

Тоді, внаслідок (4.16), для всіх $q\in\mathbb{N}$ у розглядуваній точці $(x,y)\in\overline{D}_s$: $U_s(x,y)>Z_{s,p}(x,y)\ge Z_{s,p+q}(x,y)$, а отже, в даній точці послідовність вектор–функцій $\{Z_{s,p+q}(x,y)\}$ при $q\to\infty$ не збігається до розв'язку $U_s(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності (4.16) і теорема доведена. □

Наслідок 4.1.1. *Нехай виконуються умови Теореми 4.1.1. Тоді розв'язок крайової задачі* (4.1) — (4.3) *в області* $\overline{D}$ *існує і він єдиний, причому, при виконанні умов* $\rho_{r,i}=0$, $\forall r=1,2$ *та* $i=\overline{1,n}$ *він буде регулярним, у супротивному випадку — іррегулярним.*

Наслідок 4.1.2. *Нехай* $\Psi(y) = \Phi(x) = 0$, $(x,y) \in \overline{D}_1$, $\Omega_r(x) = 0$, $x \in [x_{r-1}, x_r]$, $r = 1,2$, $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *причому* $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$.

Тоді, якщо $F[0] \leq (\geq) 0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок задачі* (4.1) – (4.3) *при* $(x,y) \in \overline{D}$, *задовольняє нерівність*

$$U(x,y) \leq (\geq) 0.$$

Справедливість Наслідку 4.1.2 випливає із нерівностей (4.16).

Розглянемо поряд із системою диференціальних рівнянь (4.1) систему вигляду

$$L_2 Z(x,y) = f_1(x,y,Z(x,y)) := f_1[Z(x,y)], \tag{4.17}$$

$Z(x,y) := (z_i(x,y))$, $f_1 : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Надалі будемо вважати, що праві частини систем (4.1) та (4.17) задовольняють наступні умови:

1) $f[U(x,y)] \in C_1\overline{B}$;

2) вектор–функція $f_1[Z(x,y)] \in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має обмежені частинні похідні першого порядку по $z_i(x,y)$

$$\frac{\partial f_{1i}[Z(x,y)]}{\partial z_j(x,y)} := b_{i,j}(x,y) < \infty,$$

які задовольняють умови:

$$\begin{aligned} b_{ij}(x,y) + \delta_{ij}\left[a^{(2)}_{ij_y}(x,y) + a^{(1)}_{ij}(x,y)a^{(2)}_{ij}(x,y)\right] \geq 0, \\ (x,y) \in D_1 \cup D_2, \\ b_{ij}(x,y) + \delta_{ij}\left[a^{(1)}_{ij_x}(x,y) + a^{(1)}_{ij}(x,y) + a^{(2)}_{ij}(x,y)\right] \geq 0, \\ (x,y) \in D_1 \cup D_3, \end{aligned} \tag{4.18}$$

3) для всякої з простору $C(\overline{D})$ вектор–функції $V(x,y) \in \overline{B}$

$$f_1[V(x,y)] \geq (\leq) f[V(x,y)]. \tag{4.19}$$

Теорема 4.1.3. *Нехай* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, *а праві частини систем* (4.1), (4.17) $f[U(x,y)]$ *та* $f_1[Z(x,y)]$ *задовольняють вище наведені умови* 1) – 3) *і в області* $\overline{B}_1$ *існують функції порівняння задач* (4.1) — (4.3), (4.17), (4.2), (4.3).

Тоді для розв'язків цих задач при $(x,y) \in \overline{D}$ *виконуєтьcя нерівність*

$$U(x,y) \leq (\geq) Z(x,y). \tag{4.20}$$

Доведення. Згідно з Теоремою 4.1.2 і Наслідком 4.1.1, розв'язки задач (4.1) – (4.3), (4.17), (4.2), (4.3) існують і вони єдині (регулярні або іррегулярні), а отже, позначивши

$$W(x,y) := Z(x,y) - U(x,y)$$

і використавши теорему Лагранжа про скінчені прирости, матимемо

$$L_2W(x,y) = f_1[Z(x,y)] - f[U(x,y)] =$$
$$f_1[Z(x,y)] - f_1[U(x,y)] + f_1[U(x,y)] - f[U(x,y)] \Rightarrow$$

$$L_2W(x,y) = A_3(x,y)W(x,y) + A_4(x,y), \tag{4.21}$$

де $A_3(x,y) := (\tilde{b}_{ij}(x,y))$, $i,j = \overline{1,n}$ матриця, $\tilde{b}_{ij}(x,y)$ є похідна $b_{ij}(x,y)$ при деякому фіксованому значенні $Z(x,y) \in \overline{B}$, а згідно (4.19)

$$A_4(x,y) := f_1[U(x,y)] - f[U(x,y)] \geq (\leq) 0. \tag{4.22}$$

Очевидно вектор–функція $W(x,y)$ задовольняє однорідні крайові умови (4.2), (4.3), а

$$F^*[W(x,y)] := [A_3(x,y) + A_{2y}(x,y) +$$
$$+ A_1(x,y)A_2(x,y)]W(x,y) + A_4(x,y),$$

$$F^{**}[W(x,y)] := [A_3(x,y) + A_{1x}(x,y) +$$
$$+ A_1(x,y)A_2(x,y)]W(x,y) + A_4(x,y) \equiv F^*[W(x,y)] +$$
$$+ [A_{1x}(x,y) - A_{2y}(x,y)]W(x,y), \tag{4.23}$$

тобто згідно (4.18) $F[W(x,y)] \equiv H[W(x,y);0]$ і

$$F[0] \geq (\leq) 0. \tag{4.24}$$

Враховуючи (4.22) – (4.24), в силу Наслідку 4.1.2, розв'язок систем (4.21) з однорідними крайовими умовами (4.2), (4.3) задовольняє нерівності

$$W(x,y) \geq (\leq) 0, \quad (x,y) \in \overline{D},$$

що і потрібно було довести. □

4.1.4 Прискорення збіжності монотонного двостороннього методу

Основним недоліком більшості алгоритмів двосторонніх наближень, які мають квадратичну швидкість збіжності, є складність їх практичної реалізації та досить жорсткі умови, які накладаються на розглядувані диференціальні рівняння, а отже клас задач, до яких можна застосувати вказані методи, є досить вузьким.

В цьому розумінні двосторонні ітераційні процеси, в тому числі і розглянутий метод (4.8), (4.9), побудовані на базі звичайного методу послідовних наближень, володіють такими позитивними якостями, як простота їх обчислювальної схеми, показникова швидкість збіжності [145], затухання похибок заокруглення. Однак, останні модифікації двосторонього методу не володіють квадратичною збіжністю. Це і було стимулом побудови двосторонніх ітераційних процесів прискореної збіжності [40, 67, 179].

Приведемо один підхід прискорення збіжності двосторонього ітераційного процесу (4.8), (4.9).

Нехай $C_{s,p}(x,y) := (\delta_{ij} c_{s,i,p}(x,y))$, $Q_{s,p}(x,y) := (\delta_{ij} q_{s,i,p}(x,y))$ — довільні функціональні матриці з невід'ємними елементами $c_{s,i,p}(x,y)$, $q_{s,i,p}(x,y) \in C(\overline{D_s})$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} 0 \le c_{s,i,p}(x,y) \le 0,5, \quad 0 \le q_{s,i,p}(x,y) \le 0,5, \\ (x,y) \in \overline{D_s}, \quad s = 1,2,3. \end{gathered} \tag{4.25}$$

Позначимо:

$$Z^*_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - C_{s,p}(x,y) W_{s,p}(x,y),$$

$$V^*_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) + Q_{s,p}(x,y) W_{s,p}(x,y),$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3,$$

$$F^p_s(x,y) := H[Z^*_{s,p}(x,y); V^*_{s,p}(x,y)],$$

$$F_{s,p}(x,y) := H[V^*_{s,p}(x,y); Z^*_{s,p}(x,y)], \quad p \in \mathbb{N},$$

$$\begin{gathered} \alpha^*_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} F^p_1(\xi,\eta) - \\ -T_s F^p_s(\xi,\eta) := Z_{s,p}(x,y) - \overline{R}^p_s(x,y) \\ \beta^*_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} F_{1,p}(\xi,\eta) - \\ -T_s F_{s,p}(\xi,\eta) := V_{s,p}(x,y) - \overline{R}_{s,p}(x,y). \end{gathered} \tag{4.26}$$

Побудуємо послідовності вектор–функцій згідно закону [204]

$$Z_{s,p+1}(x,y) = \overline{R}_s^p(x,y), \quad V_{s,p+1}(x,y) = \overline{R}_{s,p}(x,y), \tag{4.27}$$

де за нульове наближення вибираємо функції порівняння задачі (4.1) — (4.3).

Внаслідок (4.25), (4.9) маємо

$$V_{s,0}(x,y) \le V_{s,0}^*(x,y) \le Z_{s,0}^*(x,y) \le Z_{s,0}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}_s,$$

а, отже, $V_{s,0}^*(x,y), Z_{s,0}^*(x,y) \in \overline{B}_1$.

Відмітимо, що якщо

$$\alpha_{s,0}(x,y) \ge 0, \ \beta_{s,0}(x,y) \le 0,$$

то

$$\begin{gathered}\alpha_{s,0}^*(x,y) = \alpha_{s,0}(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta) - F_1^0(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - F_s^0(\xi,\eta)) \ge 0, \\ \beta_{s,0}^*(x,y) = \beta_{s,0}(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(f_{1,0}(\xi,\eta) - F_{1,0}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_{s,0}(\xi,\eta) - F_{s,0}(\xi,\eta)) \le 0,\end{gathered}$$

Із (4.26) та (4.27) одержимо

$$\begin{gathered}Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \alpha_{s,p}^*(x,y), \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \beta_{s,p}^*(x,y), \\ W_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(F_1^p(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(F_s^p(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)),\end{gathered} \tag{4.28}$$

а, отже, в силу умов (4.25) та попередніх нерівностей із (4.28) при $p = 0$ випливає справедливість нерівностей

$$Z_{s,0}(x,y) \ge Z_{s,1}(x,y), \quad V_{s,0}(x,y) \le V_{s,1}(x,y), \quad W_{s,1}(x,y) \ge 0,$$

тобто

$$V_{s,0}(x,y) \le V_{s,1}(x,y) \le Z_{s,1}(x,y) \le Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3.$$

Отже,$Z_{s,1}(x,y), \quad V_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$.

Вибираємо елементи матриць $C_{s,0}(x,y)$ та $Q_{s,0}(x,y)$ таким чином, щоб виконувались нерівності

$$Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) - C_{s,0}(x,y)W_{s,0}(x,y) \ge 0,$$

$$V_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) + Q_{s,0}(x,y)W_{s,0}(x,y) \le 0,$$
$$(x,y) \in \overline{D_s}, s = 1,2,3.$$

Тоді, приймаючи до уваги, що

$$\begin{gathered} \alpha^*_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(F_1^p(\xi,\eta) - F_1^{p+1}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(F_s^p(\xi,\eta) - F_s^{p+1}(\xi,\eta)), \\ \beta^*_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(F_{1,p}(\xi,\eta) - F_{1,p+1}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(F_{s,p}(\xi,\eta) - F_{s,p+1}(\xi,\eta)), \\ (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3 \end{gathered} \tag{4.29}$$

та, враховуючи попередні нерівності, одержимо

$$0 \le \alpha^*_{s,1}(x,y) = Z_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y),$$

$$0 \ge \beta^*_{s,1}(x,y) = V_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y),$$

а із (4.28) при $p = 1$ випливає, що $W_{s,2}(x,y) \ge 0$ для довільних матриць $C_{s,1}(x,y)$, $Q_{s,1}(x,y)$, елементи яких задовольняють умови (4.25).

Отже, для $\forall (x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ справедливі нерівності

$$V_{s,0}(x,y) \le V_{s,1}(x,y) \le V_{s,2}(x,y) \le Z_{s,2}(x,y) \le Z_{s,1}(x,y) \le Z_{s,0}(x,y).$$

Вибравши елементи матриць $C_{s,1}(x,y)$ та $Q_{s,1}(x,y)$ таким чином, щоб виконувались нерівності

$$Z_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y) - C_{s,1}(x,y)W_{s,1}(x,y) \ge 0,$$

$$V_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y) + Q_{s,1}(x,y)W_{s,1}(x,y) \le 0,$$
$$(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$$

матимемо $\alpha^*_{s,2}(x,y) \ge 0$, $\beta^*_{s,2}(x,y) \le 0$.

Приймаючи вектор-функції $Z_{s,2}(x,y)$, $V_{s,2}(x,y)$ за вихідні і повторюючи здійснені вище міркування, методом математичної індукції переконуємось, що якщо елементи матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$ на кожному кроці ітерації (4.27) вибирати таким чином, щоб виконувались умови

$$\begin{gathered} Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) - C_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \ge 0, \\ V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) + Q_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \le 0, \\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{4.30}$$

то в області $\overline{B}_1$ матимуть місце нерівності

$$\begin{gathered} V_{s,p}(x,y) \leq V_{s,p+1}(x,y) \leq Z_{s,p+1}(x,y) \leq Z_{s,p}(x,y) \\ \alpha^*_{s,p}(x,y) \geq 0, \beta^*_{s,p}(x,y) \leq 0, (x,y) \in \overline{D_s}, s = 1,2,3,\ p \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{4.31}$$

Зауважимо, що $\forall p \in \mathbb{N}$ і $s = 1,2,3$

$$\alpha^*_{s,p}(x,y) \geq \alpha_{s,p}(x,y), \quad \beta^*_{s,p}(x,y) \leq \beta_{s,p}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s.$$

Покажемо, що множина матриць $C_{s,p}(x,y)$ та $Q_{s,p}(x,y)$, які задовольняють умовам (4.25) – (4.30), не порожня.

Лема 4.1.3. *Якщо вектор–функція* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *матриці* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(\overline{D})$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(\overline{D})$ *і в області* $\overline{B}_1$ *існують функції порівняння* $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$ *задачі* (4.1) — (4.3), *тоді множина матриць* $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, *які задовольняють умови* (4.25), (4.30), *не порожня.*

Дійсно, вибиратимемо на кожному кроці ітерації (4.27), (4.30) елементи матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$ у вигляді

$$c_{s,i,p}(x,y) = \begin{cases} \alpha_{s,i,p}(x,y)\rho^{-1}_{s,i,p}(x,y), & w_{s,i,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, & w_{s,i,p}(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$q_{s,i,p}(x,y) = \begin{cases} -\beta_{s,i,p}(x,y)\rho^{-1}_{s,i,p}(x,y), & w_{s,i,p}(x,y) \neq 0, \\ \ 0, & w_{s,i,p}(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$\rho_{s,i,p}(x,y) := \alpha_{s,i,p}(x,y) - \beta_{s,i,p}(x,y) + w_{s,i,p}(x,y),$$

$$(x,y) \in \overline{D_s}, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, вибрані таким чином невід’ємні функції $c_{s,i,p}(x,y)$, $q_{s,i,p}(x,y)$ задовольняють умови (4.25), а внаслідок (4.28)

$$Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) - C_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) = \alpha^*_{s,p}(x,y) -$$

$$-C_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \geq (E - P_{s,p}(x,y))\alpha_{s,p}(x,y) \geq 0,$$

$$V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) + Q_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y) \leq$$

$$\leq (E - P_{s,p}(x,y))\beta_{s,p}(x,y) \leq 0,$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N},$$

де $P_{s,p}(x,y) := (\delta_{ij}(x,y)w_{s,i,p}(x,y)\rho^{-1}_{s,i,p}(x,y)), i,j = \overline{1,n}$ — матриця і лема 4.1.3 доведена.

Якщо позначити

$$\max_{s,i} \sup_{\overline{D}_s} (1 - c_{s,i,p}(x,y) - q_{s,i,p}(x,y)) = \nu,$$

то із (4.28) легко одержати оцінку

$$\|W_{s,p}(x,y)\| \leq \frac{1}{p!} [l\nu k\gamma n(x - x_0 + y - y_0)]^p \, d, \\ (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}, \tag{4.32}$$

звідки випливає, що

$$\lim_{p\to\infty} Z_{s,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_{s,p}(x,y) = U_s(x,y),$$

де $U_s(x,y)$ — єдиний розв'язок відповідного інтегрального рівняння із системи (4.4) при $(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3$.

Покажемо, що ітераційний процес (4.27), (4.9), (4.30) збігається не повільніше збіжності методу (4.8), (4.9). Дійсно, нехай вектор–функції $Z_{s,p}(x,y), V_{s,p}(x,y)$ є функціями порівняння задачі (4.1) – (4.3). Наступне наближення до розв'язку задачі (4.1) – (4.3), побудоване методом (4.8), (4.9), позначимо через

$$\overline{Z}_{s,p+1}(x,y), \ \overline{V}_{s,p+1}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3.$$

Тоді, враховуючи (4.6), (4.25), матимемо

$$\overline{Z}_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta) - F_1^p(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_s^p(\xi,\eta) - F_s^p(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$\overline{V}_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(f_{1,p}(\xi,\eta) - F_{1,p}(\xi,\eta)) + \\ + T_s(f_{s,p}(\xi,\eta) - F_{s,p}(\xi,\eta)) \leq 0, \ (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$$

тобто збіжність методу (4.27), (4.9), (4.30) не повільніша від збіжності ітераційного процесу (4.8), (4.9).

Таким чином справедлива

Теорема 4.1.4. *Нехай виконуються умови Теореми 4.1.1. Тоді послідовності вектор–функцій* $\{Z_{s,p}(x,y)\}, \{V_{s,p}(x,y)\}$, *побудовані згідно закону* (4.27), (4.9), (4.30), *збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння із системи* (4.4) *при* $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, *справджуються оцінки* (4.32), *в області* $\overline{B}_1$ *виконуються нерівності* (4.16), *причому збіжність ітераційного методу* (4.27), (4.9), (4.30) *не повільніша збіжності двосторонього методу* (4.8), (4.9).

Зазначимо, що залежно від вибору елементів матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$, в алгоритмі (4.27), (4.9), (4.30) отримаємо різні модифікації двосторонього методу.

Надалі метод (4.8), (4.9) називатимемо двостороннім методом Пікара.

4.2 Альтернуючий двосторонній метод дослідження крайової задачі

Основним недоліком модифікацій двосторонього методу, розглянутих в попередніх параграфах, є відсутність практичного методу побудови функцій порівняння задачі (4.1), (4.3). У зв'язку із цим розглянемо ще один підхід до дослідження крайових задач в областях із складною структурою краю, для чого введемо до розгляду простір вектор–функцій $C_1^*(\overline{B})$.

Означення 4.2.1. *Будемо говорити, що $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, якщо вектор-функція $F[U(x,y)]$ задовольняє наступні умови [72]:*

1. $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$;
2. *у просторі вектор–функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $Пр_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існує така вектор–функція*
$$H(x,y,U(x,y);V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)],$$
що
   (a) $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$,
   (b) *для довільної з простору $C(\overline{D})$ пари вектор–функцій $U(x,y), V(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умову $U(x,y) \geq \geq V(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність*
$$H[U(x,y);V(x,y)] - H[V(x,y);U(x,y)] \leq 0, \qquad (4.33)$$
3. *вектор–функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$, задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для $\forall$ з простору $C(\overline{D})$ вектор–функцій $U_r(x,y), V_r(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2$, виконується умова*
$$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leq$$
$$L(|W_1(x,y)| + |W_2(x,y)|),$$
де $L = (l_{ii})$ — матриця Ліпшиця, $l_{ii} \geq 0, i = \overline{1,n}$.

Як бачимо, означення просторів $C_1(\overline{B})$ і $C_1^*(\overline{B})$ відрізняються тільки нерівностями (4.6) та (4.33), але вони суттєво впливають на поведінку двосторонніх наближень $Zs, p(x,y)$ та $Vs, p(x,y)$ до розв'язку інтегральних рівнянь (4.4) при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}$.

Надалі ми будемо користуватись тими ж позначеннями, які введені у підрозділі 4.1., і будуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно закону (4.8), (4.9).

Лема 4.2.1. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, *матриці* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, *а інтегральні рівняння* (4.4) *в просторі функцій* $C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2,3$, *мають розв'язки, які при* $(x,y) \in \overline{D}_s$ *задовольняють умови*

$$V_{s,0}(x,y) \le U_s(x,y) \le Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, \tag{4.34}$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності* (4.9).

Дійсно, враховуючи (4.33) та (4.34) маємо

$$W_{s,0}(x,y) \ge 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$$

$$\alpha_{s,0}(x,y) = Z_{s,0}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_1^0(\xi,\eta) - T_s f_s^0(\xi,\eta) =$$
$$= Z_{s,0}(x,y) - U_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(H[U_1(\xi,\eta); U_1(\xi,\eta)] - f_1^0(\xi,\eta)) +$$
$$+ T_s(H[U_s(\xi,\eta); U_s(\xi,\eta)] - f_s^0(\xi,\eta)) \ge 0,$$
$$\beta_{s,0}(x,y) = V_{s,0}(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f_{1,0}(\xi,\eta) - T_s f_{s,0}(\xi,\eta) =$$
$$= V_{s,0}(x,y) - U_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(H[U_1(\xi,\eta); U_1(\xi,\eta)] - f_{1,0}(\xi,\eta)) +$$
$$+ T_s(H[U_s(\xi,\eta); U_s(\xi,\eta)] - f_{s,0}(\xi,\eta)) \le 0, \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3,$$

тобто умови (4.9) виконуються.

Приведемо один практичний метод побудови функцій порівняння задачі (4.1) – (4.3).

Лема 4.2.2. *Якщо* $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, *матриці* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, *то множина функцій порівняння крайової задачі* (4.1) – (4.3) *непорожня.*

Доведення. Нехай $U_s^*(x,y) = \Gamma_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} F[U_1^*(\xi,\eta)] + T_s F[h(\xi,\eta)]$, де $h(\xi,\eta) \in C(\overline{D})$ — довільна в області $\overline{B}$ функція. Вважаючи, що $U_s^*(x,y) \in \overline{B}_1$, позначимо

$$\alpha_s^*(x,y) = U_s^*(x,y) - \Gamma_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} F[U_1^*(\xi,\eta)] - T_s F[U_s^*(\xi,\eta)].$$

Тоді вектор-функції

$$Z_{s,0}(x,y) = U_s^*(x,y) + |\alpha_s^*(x,y)|\,,$$

$$V_{s,0}(x,y) = U_s^*(x,y) - |\alpha_s^*(x,y)|\,, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$$

при умові, що $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$ є функціями порівняння крайової задачі (4.1) — (4.3).

Дійсно, $W_{s,0}(x,y) \geq 0$, а оскільки $K(x,y;\xi,\eta) > 0$ то, приймаючи до уваги умову (4.33), маємо:

$$\alpha_{s,0}(x,y) = |\alpha_s^*(x,y)| + \alpha_s^*(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(F[U_1^*(\xi,\eta)] - f_1^0(\xi,\eta)) +$$

$$+ T_s(F[U_s^*(\xi,\eta)] - f_s^0(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$\beta_{s,0}(x,y) = -\,|\alpha_s^*(x,y)| + \alpha_s^*(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(F[U_1^*(\xi,\eta)] - f_{1,0}(\xi,\eta)) +$$

$$+ T_s(F[U_s^*(\xi,\eta)] - f_{s,0}(\xi,\eta)) \leq 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3.$$

Із (4.12), враховуючи (4.9), (4.33) при $p = 0$, одержимо

$$Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) = \alpha_{s,0}(x,y) \geq 0,$$

$$V_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) = \beta_{s,0}(x,y) \leq 0,$$

$$W_{s,1}(x,y) = \varepsilon_s T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta) - f_{1,0}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - f_{s,0}(\xi,\eta)) \leq 0,$$

$(x,y) \in \overline{D_s}, s = 1,2,3.$

Нехай при $(x,y) \in \overline{D}_s$ справедливі нерівності

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y), Z_{s,0}(x,y) \geq V_{s,1}(x,y). \tag{4.35}$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, маємо

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y),$$

тобто, якщо функції порівняння належать області $\overline{B}_1$, то і $Z_{s,1}(x,y)$, $V_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$, $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$. Але тоді із (4.13), враховуючи (4.33), при $p = 0$ одержуємо, що $\beta_{s,1}(x,y) \geq 0$, $\alpha_{s,1}(x,y) \leq 0$ для $\forall (x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, а отже із (4.12) при $p = 1$ і $(x,y) \in \overline{D}_s$ матимемо

$$Z_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y) \leq 0,\ V_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y) \geq 0,\ W_{s,2}(x,y) \geq 0.$$

Оскільки в силу умов (4.33), (4.35) при $(x,y) \in \overline{D}_s$

$$\alpha_{s,0}(x,y) + \alpha_{s,1}(x,y) = Z_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) +$$

$$+\varepsilon_s T_{1,s}(f_{1,0}(\xi,\eta)-f_1^1(\xi,\eta))+T_s(f_{s,0}(\xi,\eta)-f_s^1(\xi,\eta))\geq 0,$$
$$\beta_{s,0}(x,y)+\beta_{s,1}(x,y)=V_{s,0}(x,y)-Z_{s,1}(x,y)+$$
$$+\varepsilon_s T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta)-f_{1,1}(\xi,\eta))+T_s(f_s^0(\xi,\eta)-f_{s,1}(\xi,\eta))\leq 0,$$

то, приймаючи до уваги, що

$$\begin{gathered}\alpha_{s,p}(x,y)+\alpha_{s,p+1}(x,y)=Z_{s,p}(x,y)+Z_{s,p+2}(x,y),\\ \beta_{s,p}(x,y)+\beta_{s,p+1}(x,y)=V_{s,p}(x,y)+V_{s,p+2}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{D}_s\end{gathered}\tag{4.36}$$

при $p=0$ і $(x,y)\in\overline{D}_s$ маємо

$$Z_{s,0}(x,y)-Z_{s,2}(x,y)\geq 0,\quad V_{s,0}(x,y)-V_{s,2}(x,y)\leq 0.$$

Але

$$\begin{gathered}Z_{s,p+1}(x,y)-V_{s,p+2}(x,y)=\varepsilon_s T_{1,s}(f_1^p(\xi,\eta)-f_{1,p+1}(\xi,\eta))+\\ +T_s(f_s^p(\xi,\eta)-f_{s,p+1}(\xi,\eta)),\\ V_{s,p+1}(x,y)-Z_{s,p+2}(x,y)=\varepsilon_s T_{1,s}(f_{1,p}(\xi,\eta)-f_1^{p+1}(\xi,\eta))+\\ +T_s(f_{s,p}(\xi,\eta)-f_s^{p+1}(\xi,\eta)),\quad (x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3,\end{gathered}\tag{4.37}$$

для $\forall p\in\mathbb{N}$, отже, враховуючи попередні нерівності, із (4.37) при $p=0$ одержимо

$$Z_{s,1}(x,y)\leq V_{s,2}(x,y),\quad V_{s,1}(x,y)\geq Z_{s,2}(x,y),$$

тобто мають місце нерівності

$$V_{s,0}(x,y)\leq Z_{s,1}(x,y)\leq V_{s,2}(x,y)\leq Z_{s,2}(x,y)\leq V_{s,1}(x,y)\leq Z_{s,0}(x,y)$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3.$$

Із (4.13), враховуючи (4.33) та попередні нерівності, при $p=1$ маємо

$$\alpha_{s,2}(x,y)\geq 0,\beta_{s,2}(x,y)\leq 0,(x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2,3.$$

Таким чином, вектор–функції $Z_{s,2}(x,y),V_{s,2}(x,y)\in\overline{B}_1$ і є функціями порівняння крайової задачі (4.1) – (4.3).

Повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємось у справедливості нерівностей

$$\begin{gathered}V_{s,2p}(x,y)\leq Z_{s,2p+1}(x,y)\leq V_{s,2p+2}(x,y)\leq Z_{s,2p+3}(x,y)\leq\\ V_{s,2p+3}(x,y)\leq Z_{s,2p+2}(x,y)\leq V_{s,2p+1}(x,y)\leq Z_{s,2p}(x,y),\\ \alpha_{s,2p}(x,y)\geq 0,\ \alpha_{s,2p+1}(x,y)\leq 0,\ \beta_{s,2p}(x,y)\leq 0,\\ \beta_{s,2p+1}(x,y)\geq 0,\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ p=0,1,2,\ldots.\end{gathered}\tag{4.38}$$

□

Як і в п.4.1.3. легко переконатись в справедливості оцінок (4.15), а отже справедлива

Теорема 4.2.1. *Нехай вектор-функція* $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, *матриці* $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(\overline{D})$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(\overline{D})$, *а в області* $\overline{B}_1$ *виконуються умови* (4.35).

Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$, *побудовані згідно формул* (4.8), (4.9):

1. *збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння системи* (4.4) *при* $(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3,$
2. *мають місце оцінки* (4.15),
3. *в області* $\overline{B}_1$, *виконуються нерівності:*

$$\begin{gathered} V_{s,2p}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq U_s(x,y) \leq \\ \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y), \\ Z_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq U_s(x,y) \leq \\ \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y) \\ (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, p = 0,1,2,\dots . \end{gathered} \tag{4.39}$$

Щоб переконатись в справедливості нерівностей (4.39), потрібно використати (4.38) та повторити міркування, викладені в доведенні Теореми 4.1.2.

В силу Леми 4.2.1 та Теореми 4.2.1 випливає справедливість наступного наслідку.

Наслідок 4.2.1. *Якщо виконуються умови Теореми 4.2.1, то нерівності* (4.9) *є необхідною та достатньою умовою справедливості нерівностей* (4.34).

Приклад 4.2.1. *В області* $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, *де*

$$D_1 = \{(x,y) | x \in (0,2], y \in (0,1]\},$$

$$D_2 = \{(x,y) | x \in [0,2], y \in [y_1, g_1(x))\},$$

$$D_3 = \{(x,y) | x \in [2,3], y \in (g_2(x), 1]\},$$

$$g_1(x) = \sqrt{1,5x+1}, \quad g_2(x) = x - 2, \ (\textit{Рис. 4.3}),$$

знайти розв'язок системи ДРЧП

$$
\begin{cases}
D^{1.1}U_1(x,y) - \dfrac{1}{1+y} D^{1.0}U_1(x,y) = \\
= 0,5(y+1)\left[\dfrac{1}{3}(U_2(x,y))^3 - (1+y)^{-2}\right], \\
D^{1.1}U_2(x,y) = 0,25(y+1)\left[\dfrac{1}{3}(U_1(x,y))^3 + \right. \\
\left. +(x+0,5)(1+y)^{-1}\right],
\end{cases}
$$

який задовольняє умови:

$$U_i(0,y) = U_i(x,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$U_i(x, x-2) = 0, \quad x \in [2,3],$$

$$U_i(x, \sqrt{1,5x+1}) = 0, \quad x \in [0,2], \ \ i = 1,2.$$

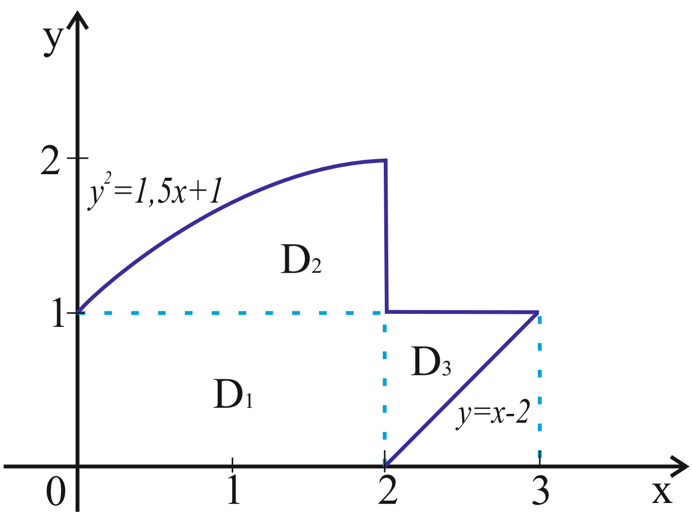


Рис. 4.3

У даному випадку $k_{11}(x,y;\xi,\eta) = \dfrac{y+1}{\eta+1}$, $k_{22}(x,y;\xi,\eta) = 1$, $\gamma_{s,i}(x,y) = 0$, $s = 1,2,3$, $i = 1,2$.

На підставі Теореми 4.2.1 розв'язок поставленої задачі існує, і він єдиний, а

$$D^{1.0}[U_{3,1}(x,y) - U_{1,1}(x,y)]|_{x=2} = 1+y, \ D^{1.0}[U_{1,2}(x,y) - U_{3,2}(x,y)]|_{x=2} = \frac{3}{4},$$

$$D^{0.1}[U_{2,1}(x,y)-U_{1,1}(x,y)]|_{y=1}=\frac{2}{3},\ D^{0.1}[U_{1,2}(x,y)-U_{2,2}(x,y)]|_{y=1}=\frac{1}{6},$$

тобто розв'язок поставленої задачі буде іррегулярним.

Згідно Леми 4.2.2 одержимо:

$$Z_{1,1,0}(x,y)=-V_{1,1,0}(x,y)=xy,$$

$$Z_{1,2,0}(x,y)=-V_{1,2,0}(x,y)=\frac{1}{4}xy(x+1),(x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$Z_{2,1,0}(x,y)=-V_{2,1,0}(x,y)=y\left[x-\frac{2}{3}(y^2-1)\right],$$

$$Z_{2,2,0}(x,y)=-V_{2,2,0}(x,y)=$$

$$=\frac{1}{4}y\left[x(x+1)-\frac{2}{9}(y^2-1)(2y^2+1)\right],(x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$Z_{3,1,0}(x,y)=-V_{3,1,0}(x,y)=x[(1+y)(x-1)^{-1}-1],$$

$$Z_{3,2,0}(x,y)=-V_{3,2,0}(x,y)=0,25x(x+1)(y+2-x),(x,y)\in\overline{D}_3.$$

Оскільки в нашому випадку $F[U(x,y)]\in C_1^*(\overline{D})$, то на підставі ітераційного процесу (4.8), (4.9), використовуючи програмний пакет MAPLE, одержимо:

$$Z_{1,1,1}(x,y)=-0,5xy-\rho_{11}(x,y),\quad V_{1,1,1}(x,y)=-0,5xy+\rho_{11}(x,y),$$

$$\rho_{11}(x,y):=10^{-4}x^4y^4(y+1)(0,10334x^3+0,3617x^2+0,43404x+0,18084),$$

$$Z_{1,2,1}(x,y)=\frac{1}{4}xy(x+1)-\rho_{12}(x,y),\quad V_{1,2,1}(x,y)=\frac{1}{4}xy(x+1)+\rho_{12}(x,y),$$

$$\rho_{12}(x,y):=10^{-3}x^4y^4(0,46296y+0,5787),$$

$$Z_{2,1,1}(x,y)=-0,5y\left[x-\frac{2}{3}(y^2-1)\right]+\rho_{21}(x,y),$$

$$V_{2,1,1}(x,y)=-0,5y\left[x-\frac{2}{3}(y^2-1)\right]-\rho_{21}(x,y),$$

$$\rho_{21}(x,y):=10^{-5}(1+y)\left[y^4\left(0,1497y^{12}-0,2027y^{10}+0,07395y^8-\right.\right.$$

$$-0,0631y^7+0,11405y^4+0,031755y^2-0,065915-0,031255y^{14})+$$

$$+y^4x^4(1,0334x^3+3,617x^2+5,305x+4,2198)+x^3(0,64305x^2+$$

$$+1,6076x+1,2742)+y^4x^3(0,9645y^4x^2-0,643x^2y^2+2,1433y^4+$$

$$+0,57155y^6-1,548y^2)+y^6x(0,1198y^2+0,15876y^{10}-0,27217y^8-$$

$$-0,15876y^6+0,34928y^4-0,15876)+x^2y(0,80375y^7-$$

$$-0,7144y^{11}+0,8573y^9-0,53585y^3-0,71445y^5)+0,30365x^2]+$$

$$+10^{-5}x(0,04196-0,79785y^5)-10^{-5}x^3y^4(2,412y^4x-1,6075y^2x-$$
$$-0,47628y^8-1,9648)+0,37674\cdot 10^{-6},\quad (x,y)\in\overline{D}_2,$$
$$Z_{2,2,1}(x,y)=0,5Z_{2,2,0}(x,y)+\rho_{22}(x,y),$$
$$V_{2,2,1}(x,y)=0,5Z_{2,2,0}(x,y)-\rho_{22}(x,y),$$
$$\rho_{22}(x,y):=10^{-4}y\left[-0,3049y^{10}-0,1326y^{11}+1,663y^9+1,828y^8-\right.$$
$$\left.-3,048y^7-3,4287y^6+2,614y^5+0,48y^4+4,7254y^2-4,7389\right]+$$
$$+10^{-3}x\left\{0,86717x^2+0,41398x+0,10659+y^4[x(-0,68588y^5-\right.$$
$$-0,77162y^4+1,7636y^3+2,0576y^2-1,2346y-1,5432)+$$
$$+x^2(0,88185y^3-1,2346y-1,5432)+0,24941y^7+0,27435y^6-$$
$$-0,91448y^5+1,1758y^3+1,3717y^2-0,5487y-0,68588-$$
$$\left.-x^3(0,46296y+0,5787)]\right\}+0,14401\cdot 10^{-3}+$$
$$+0,10288\cdot 10^{-2}y^6x(x^2-y^2),$$
$$(x-1)^2Z_{3,2,1}(x,y)=x(0,15278y+0,1809)-x^2[0,17346x^3-0,4899x^2+$$
$$+0,28x+0,2459-(0,14583x^2-0,11574x-0,16667)y]+\rho_{32}(x,y),$$
$$(x-1)^2V_{3,2,1}(x,y)=10^{-1}[x(0,97221y+3,191)-x^2(0,76533x^3-2,601x^2-$$
$$-0,3x+5,0409-1,0417x^2y+1,3426xy+0,83332y)]-\rho_{32}(x,y),$$
$$\rho_{32}(x,y):=10^{-2}y^4[0,34722x^4-0,23148x^3-6,3655x^2+14,121x-7,4077]+$$
$$+y^3[10^{-1}\cdot 0,15432x^4-10^{-2}\cdot 0,30864x^5+10^{-2}\cdot 0,61727x^3-0,15123x^2+$$
$$+0,26543x-0,12346]+y^2[-10^{-1}\cdot 0,11574x^5+10^{-2}\cdot 0,11574x^6+$$
$$+10^{-1}\cdot 0,2662x^4+10^{-1}\cdot 0,13889x^3-0,13657x^2+0,18981x-$$
$$-10^{-1}\cdot 0,74071]-10^{-2}y^5[0,18518x^3+0,64816x^2+2,4074x-1,4815]+$$
$$+10^{-2}y[0,23148x-1,3889]x^5+10^{-2}(-0,2005x^7+0,03086x^8+$$
$$+1,1423x^6+1,976)+\ln(x-1)\{0,25092x^5-0,55324x^4+0,70377x^3-$$
$$-10^{-2}[0,55554y^5+0,69444y^4-1,8518y^3-4,1666y^2-2,7778y+2,963]+$$
$$+10^{-2}x^6(0,55554x-5,9722)+0,19815x-0,51576x^2+10^{-2}xy(1,3883y^3-$$
$$-0,55554xy^4-0,69444xy^3+1,1111y^4-5,5554+2,7778x+4,1666xy-$$
$$-3,7037y^2+1,8518xy^2-8,3332y)\},(x,y)\in\overline{D}_3,$$
$$Z_{3,1,1,}(x,y)(x-1)=-0,40451xy-0,40921x^2+0,90679x-\rho_{31}(x,y),$$

$$V_{3,1,1,}(x,y)(x-1) = -0,5955xy + 0,5908x^2 - 1,0932x + \rho_{31}(x,y),$$

$$\rho_{31}(x,y) := 0,3(1+y)x^3(10^{-4}\cdot 0,2181x^9 - 0,13021)+$$

$$+10^{-4}x^7\{-x^4(0,2893y^2 + 0,71829y + 0,42895) + x^3(0,48226y^3+$$

$$+1,7362y^2 + 1,8551y + 0,60112) - x^2(0,36169y^4 + 1,3865y^3 + 0,90424y^2-$$

$$-1,4175y - 1,297) + 10^{-1}x(1,0334y^5 + 0,51657y^4 - 26,095y^3-$$

$$-81,899y^2 - 88,2y - 31,875) + 0,25837y^5 + 2,1186y^4 + 5,6842y^3 + 5,4771y^2+$$

$$+0,4130y - 1,2406\} + 10^{-4}x^4\{x^2(10^{-1}\cdot 0,72326y^5 + 1,519y^4+$$

$$+7,6684y^3 + 16,06y^2 + 15,048y + 5,2097) - x(0,25319y^5 + 1,6999y^4+$$

$$+4,0506y^3 + 3,7616y^2 + 0,58002y - 0,57752) - (0,18086y^5 + 1,6276y^4+$$

$$+5,7877y^3 + 10,129y^2 - 54,142y - 59,927)\} + 10^{-1}\cdot 0,9081yx^2+$$

$$+10^{-2}[3,7477y + 3,5186 + (1-x)(10^{-4}\cdot 0,10561y^5+$$

$$+0,62832y^4 + 1,1198y^3 + 0,72065y^2)].$$

Із одержаних наближень бачимо, що умова (4.35) виконується.

Не виписуючи наступні наближення (у зв'язку з громіздкими виразами), наведемо апостеріорні оцінки трьох наближень $\max\limits_{\overline{D}_s}|W_{s,i,p}(x,y)|$

	$\boldsymbol{p}$		
$\boldsymbol{i}$	0	1	2
1,1,p	$4\cdot 10^0$	$2\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-5}$
1,2,p	$3\cdot 10^0$	$3\cdot 10^{-2}$	$3\cdot 10^{-5}$
2,1,p	$4\cdot 10^0$	$1\cdot 10^{-1}$	$12\cdot 10^{-4}$
2,2,p	$6\cdot 10^0$	$1\cdot 10^{-1}$	$5\cdot 10^{-4}$
3,1,p	$4\cdot 10^0$	$4\cdot 10^{-2}$	$3\cdot 10^{-4}$
3,2,p	$2,5\cdot 10^0$	$4\cdot 10^{-2}$	$8\cdot 10^{-5}$

Як випливає із наведеної таблиці, уже на третьому кроці двостороннього методу (4.8), (4.9), коли $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, ми отримуємо наближений розв'язок поставленої задачі $\tilde{U}_s(x,y) = 0,5[Z_{s,p}(x,y) + V_{s,p}(x,y)]$ з точністю не гіршою, ніж 10^{-4}.

4.3 Прискорення збіжності альтернуючого двостороннього методу

Надалі користуватимемося позначеннями п.4.1.4 і вважатимемо, що вектор–функція $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$. Дослідимо в цьому випадку ітераційний метод (4.27), (4.9).

Позначимо:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{s,p} &= Z_{s,p}^*(x,y) - \overline{R}_s^p(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \\ \overline{\beta}_{s,p} &= V_{s,p}^*(x,y) - \overline{R}_{s,p}(x,y), \quad s = 1,2,3, \quad p \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Із (4.27) та (4.40) маємо

$$\begin{gathered} Z_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p}^*(x,y) = \\ = \overline{R}_s^p(x,y) - \overline{R}_{s,p-1}(x,y) - Q_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y), \\ V_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p}^*(x,y) = \\ = \overline{R}_{s,p}(x,y) - \overline{R}_s^{p-1}(x,y) + C_{s,p}(x,y)W_{s,p}(x,y), \end{gathered} \tag{4.41}$$

$$\begin{gathered} \overline{\alpha}_{s,p+1}(x,y) = \overline{R}_s^p(x,y) - \overline{R}_s^{p+1}(x,y) - \\ -C_{s,p+1}(x,y)W_{s,p+1}(x,y) = Z_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y) - \\ -C_{s,p+1}(x,y)W_{s,p+1}(x,y), \\ \overline{\beta}_{s,p+1}(x,y) = \overline{R}_{s,p}(x,y) - \overline{R}_{s,p+1}(x,y) + \\ +Q_{s,p+1}(x,y)W_{s,p+1}(x,y) = V_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y) + \\ +Q_{s,p+1}(x,y)W_{s,p+1}(x,y), \ \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{4.42}$$

Вважаємо, що $C_{s,0}(x,y) = Q_{s,0}(x,y) = 0$, так що вектор–функції $Z_{s,1}(x,y)$ та $V_{s,1}(x,y)$, побудовані згідно алгоритму, розглянутому в п.4.2.

В п.4.2. [72] показано, що для того, щоб вектор–функції $Z_{s,p}^*(x,y)$, $V_{s,p}^*(x,y) \in \overline{B}_1$ були функціями порівняння задачі (4.1)-(4.3) необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$W_{s,p}^*(x,y) \geq (\leq) 0, \quad \overline{\alpha}_{s,p}(x,y) \geq (\leq) 0, \quad \overline{\beta}_{s,p}(x,y) \leq (\geq) 0,$$

при p-парних (непарних), $(x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,3, p \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що в силу (4.25)

$$Z_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,1}^*(x,y) \leq V_{s,1}^*(x,y) \leq V_{s,1}(x,y),$$

тобто $Z^*_{s,1}(x,y)$, $V^*_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$. Але тоді із (4.27) в силу (4.33) при $p=1$ маємо, що $W_{s,2}(x,y) \geq 0$.

Вибираємо елементи матриць $C_{s,1}(x,y)$, $Q_{s,1}(x,y)$ таким чином, щоб при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s=1,2,3$, виконувались умови

$$\overline{R}^1_s(x,y) - \overline{R}_{s,0}(x,y) - Q_{s,1}W_{s,1}(x,y) \leq 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s,$$

$$\overline{R}_{s,1}(x,y) - \overline{R}^0_s(x,y) + C_{s,1}W_{s,1}(x,y) \geq 0, \quad s=1,2,3.$$

Тоді, згідно (4.41), при $p=1$

$$Z_{s,2}(x,y) \leq V^*_{s,1}(x,y), \quad V_{s,2}(x,y) \geq Z^*_{s,1}(x,y),$$

$$Z_{s,2}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) + C_{s,1}W_{s,1}(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s,$$
$$V_{s,2}(x,y) - V_{s,1}(x,y) - Q_{s,1}W_{s,1}(x,y) \leq 0, \quad s=1,2,3,$$

а отже із (4.42) при $p=0$

$$\overline{\alpha}_{s,1}(x,y) \leq 0, \quad \overline{\beta}_{s,1}(x,y) \geq 0.$$

Таким чином,

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq \overline{Z}_{s,1}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y) \leq Z_{s,2}(x,y) \leq \overline{V}_{s,1}(x,y) \leq$$

$$\leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s=1,2,3,$$
$$\alpha_{s,2}(x,y) \geq 0, \quad \beta_{s,2}(x,y) \leq 0.$$

Але тоді, вибираючи елементи матриць $C_{s,2}(x,y)$, $Q_{s,2}(x,y)$ таким чином, щоб

$$\overline{R}^2_s(x,y) - \overline{R}_{s,1}(x,y) - Q_{s,2}W_{s,2}(x,y) \geq 0,$$

$$\overline{R}_{s,2}(x,y) - \overline{R}^1_s(x,y) + C_{s,2}W_{s,2}(x,y) \leq 0,$$

із (4.41), (4.28) при $p=2$ одержимо

$$Z_{s,3}(x,y) \geq V^*_{s,2}(x,y), \quad V_{s,3}(x,y) \leq Z^*_{s,2}(x,y), \quad W_{s,3}(x,y) \leq 0,$$

$$\alpha_{s,2}(x,y) \geq 0, \quad \beta_{s,2}(x,y) \leq 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s=1,2,3,$$

тобто справедливі нерівності

$$V_{s,0}(x,y) \leq Z_{s,1}(x,y) \leq Z^*_{s,1}(x,y) \leq V_{s,2}(x,y) \leq V^*_{s,2}(x,y) \leq Z_{s,3}(x,y) \leq$$

$$\leq Z^*_{s,3}(x,y) \leq V^*_{s,3}(x,y) \leq V_{s,3}(x,y) \leq Z^*_{s,2}(x,y) \leq V^*_{s,1}(x,y) \leq$$

$$\leq V_{s,1}(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3, \text{ і}$$
$$\alpha_{s,3}(x,y) \leq 0,\ \beta_{s,3}(x,y) \geq 0.$$

Повторяючи вище наведені міркування і вибираючи на кожному кроці ітерації (4.27) елементи матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$ таким чином, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} &\overline{R}_s^p(x,y) - \overline{R}_{s,p-1}(x,y) - Q_{s,p}W_{s,p}(x,y) \geq (\leq) 0, \\ &\overline{R}_{s,p}(x,y) - \overline{R}_s^{p-1}(x,y) + C_{s,p}W_{s,p}(x,y) \leq (\geq) 0, \end{aligned} \tag{4.43}$$

$(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad p$-парні (непарні), методом математичної індукції переконуємось, що, побудовані згідно закону (4.27), (4.9), (4.25), (4.43), члени послідовностей $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$, задовольняють нерівності

$$\begin{gathered} V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq \\ \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \\ \alpha_{s,2p}(x,y) \geq 0, \quad \alpha_{s,2p+1}(x,y) \leq 0, \quad \beta_{s,2p}(x,y) \leq 0, \\ \beta_{s,2p+1}(x,y) \geq 0, (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad p = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{4.44}$$

Справедлива наступна

Лема 4.3.1. *Якщо $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, то множина функціональних матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$, елементи яких задовольняють умови* (4.25), (4.43) *непорожня.*

Доведення. Дійсно, покладемо

$$\begin{gathered} c_{s,i,p}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{w_{s,i,p}(x,y) + \beta_{s,i,p}(x,y)}{\rho_{s,i,p}(x,y)}, & w_{s,i,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, \quad w_{s,i,p}(x,y) = 0, \end{cases} \\ q_{s,i,p}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{w_{s,i,p}(x,y) - \alpha_{s,i,p}(x,y)}{\rho_{s,i,p}(x,y)}, & w_{s,i,p}(x,y) \neq 0, \\ 0, \quad w_{s,i,p}(x,y) = 0, \end{cases} \\ (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad i = \overline{1,n}, \quad p \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{4.45}$$

$\rho_{s,p}(x,y) := (\rho_{s,i,p}(x,y)), \quad W_{s,p}(x,y) := (w_{s,i,p}(x,y))$ — вектор–функції.

Оскільки

$$W_{s,p}(x,y) + \beta_{s,p}(x,y) = \overline{R}_s^{p-1}(x,y) - R_{s,p}(x,y),$$

$$W_{s,p}(x,y) - \alpha_{s,p}(x,y) = R_s^p(x,y) - \overline{R}_{s,p-1}(x,y),$$

то елементи матриць $C_{s,p}(x,y)$, $Q_{s,p}(x,y)$, які задаються формулами (4.45), задовольняють умови (4.25) при всіх $(x,y) \in \overline{D}_s$, $s = 1,2,3$, і для всіх $i = \overline{1,n}$ та $p \in \mathbb{N}$, а підстановка їх в (4.43) дає

$$\overline{r}^p_{s,i}(x,y) - \overline{r}_{s,i,p-1}(x,y) - q_{s,i,p}(x,y)W_{s,i,p}(x,y) = \overline{r}^p_{s,i}(x,y) - r^p_{s,i}(x,y) +$$

$$+ (r^p_{s,i}(x,y) - \overline{r}_{s,i,p-1}(x,y)) \left(1 - \frac{W_{s,i,p}(x,y)}{\rho_{s,i,p}(x,y)}\right) \geq (\leq) 0,$$

$$\overline{r}_{s,i,p}(x,y) - \overline{r}^{p-1}_{s,i}(x,y) + c_{s,i,p}(x,y)W_{s,i,p}(x,y) = \overline{r}_{s,i,p}(x,y) - r_{s,i,p}(x,y) +$$

$$+ (r_{s,i,p}(x,y) - \overline{r}^{p-1}_{s,i}(x,y)) \left(1 - \frac{W_{s,i,p}(x,y)}{\rho_{s,i,p}(x,y)}\right) \leq (\geq) 0,$$

для p-парних (непарних), $(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad i = \overline{1,n}, \quad p \in \mathbb{N}$.

Дотримуючись тих же позначень, що і в п.4.1.4, легко переконатись, що і в даному випадку справедливі оцінки (4.32). □

Враховуючи нерівності (4.44) та оцінки (4.32), переконуємось в справедливості наступної

Теорема 4.3.1. *Якщо вектор-функція $F[U(x,y)] \in C_1^*(\overline{B})$, матриці $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, то послідовності вектор–функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно закону (4.27), (4.9), (4.25), (4.35), (4.43):*

1. *збігаються рівномірно до єдиного розв'язку системи інтегральних рівнянь (4.4) при $(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3$,*

2. *мають місце оцінки (4.32),*

3. *в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності*

$$V_{s,2p}(x,y) \leq Z_{s,2p+1}(x,y) \leq V_{s,2p+2}(x,y) \leq Z_{s,2p+3}(x,y) \leq$$

$$\leq U_s(x,y) \leq V_{s,2p+3}(x,y) \leq Z_{s,2p+2}(x,y) \leq$$

$$\leq V_{s,2p+1}(x,y) \leq Z_{s,2p}(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}_s, \ s = 1,2,3, \ p \in \mathbb{N},$$

4. *збіжність ітераційного методу (4.27), (4.9), (4.25), (4.43) не повільніша збіжності двостороннього методу, коли $C_{s,p}(x,y) = 0$, $Q_{s,p}(x,y) = 0$ (метод розглянутий в п.4.2)*

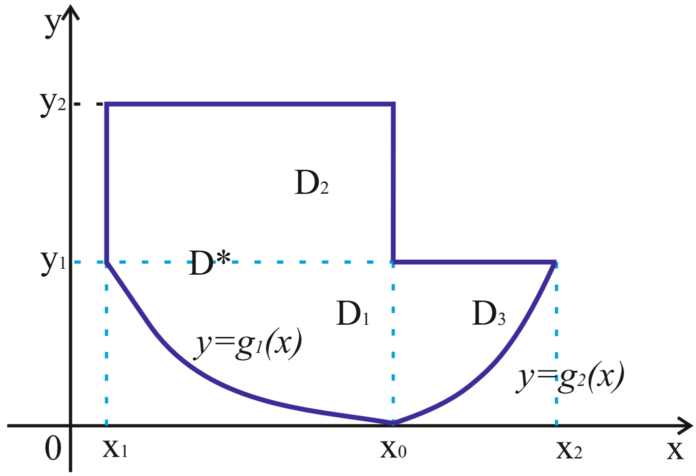


Рис. 4.4

Для завершення доведення Теореми 4.3.1 достатньо повторити міркування, приведені в попередніх параграфах (див. роботи [57, 69, 72]).

Вправа 4.3.1. Дослідити крайову задачу: в області $D = D^* \cup D_3$,

$$D^* = \{(x,y)|x \in [x_1, x_0], y \in (g_1(x), y_2]\},$$

$$D_3 = \{(x,y)|x \in [x_0, x_2], y \in (g_2(x), y_1]\}, \text{ (Рис. 4.4)}$$

$y = g_r(x) \Leftrightarrow x = k_r(y), r = 1,2$ — "вільні"криві, $g_1'(x) < 0, g_2'(x) > 0$, $x_1 < x_0 < x_2$, $0 < y_1 < y_2$, $g_1(x_k) = y_k$, $k = 0,1$ $(y_0 = 0)$, $g_2(x_0) = 0$, $g_2(x_2) = y_1$ знайти розв'язок системи рівнянь (4.1), який задовольняє умови

$$U(x, g_1(x)) = \Phi_1(x), \quad U_y(x, g_1(x)) = \Psi(x), \quad x \in [x_1, x_0],$$

$$\Phi_1(x) \in C^1[x_1, x_0], \quad \Psi(x) \in C[x_1, x_0],$$

$$U(x, g_2(x)) = \Phi_2(x), \quad x \in [x_0, x_2], \quad \Phi_2(x) \in C^1[x_0, x_2],$$

$$U(x,y) = \Phi(y), \quad y \in [y_1, y_2], \quad \Phi(y) \in C^1[y_1, y_2],$$

$$\Phi_1(x_0) = \Phi_2(x_0), \quad \Phi_1(x_1) = \Phi(y_1), \quad \Phi'(y_1) = \Psi(x_1).$$

Розділ 5

Крайові задачі для ДРЧП вищого порядку

Питанням існування та єдиності розв'язку крайових задач у випадку різних локальних і нелокальних крайових умов для скалярного гіперболічного рівняння вигляду

$$m(x,t)D^{(2.1)}U(x,t) + \alpha(x,t)D^{(1.1)}U(x,t) + d(x,t)D^{(0.1)}U(x,t)+ \\ + \eta(x,t)D^{(2.0)}U(x,t) + a(x,t)D^{(1.0)}U(x,t) + b(x,t)U(x,t) = g(x,t),$$

яке описує процеси фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі [157], переносу вологи в грунтах [97], присвячені ряд робіт [17, 160] та інші.

В даному розділі досліджуються крайові задачі з нелокальними крайовими умовами у випадку систем визначених гіперболічних рівнянь третього порядку [61].

5.1 Крайова задача з нелокальною крайовою умовою А.М.Нахушева. Постановка задачі та основні позначення

Розглянемо крайову задачу: в області $D_0 = \{ (x,y) \mid x \in (0,a), y \in (0,b)\}$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$D^{(2.1)}U(x,y) = F(x,y,U(x,y),D^{(1.0)}U(x,y),D^{(0.1)}U(x,y), \\ D^{(1.1)}U(x,y),D^{(2.0)}U(x,y)) := F[U(x,y)], \quad (5.1)$$

який задовольняє умови

$$
\begin{gathered}
U(x,0)=T(x), \quad x\in[0,a],\\
D^{(1.0)}U(a,y)=\Psi(y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{a}U(\xi,y)d\xi=\Omega(y), \quad y\in[0,b],\ 0\le x_0\le x\le a,
\end{gathered}
\tag{5.2}
$$

де

$$
\begin{gathered}
D^kU: D_0\to D_k\subset\mathbb{R}^n,\ F: B\to\mathbb{R}^n,\ B=D_0\times\prod_{k_1,k_2}D_{(k_1,k_2)}\subset\mathbb{R}^{5n+2},\\
D^kU(x,y):=(D^kU_i(x,y)),\ T(x):=(\tau_i(x)),\ \Psi(y):=(\psi_i(y)),\\
\Omega(y):=(\omega_i(y)),\ F[U(x,y)]:=(F_i[U(x,y)]),\\
i=1,n \text{ — вектор–функції.}
\end{gathered}
$$

Надалі будемо вважати, що $T(x)\in C^2[0,a]$, $\Psi(y)=C^1[a,b]$, $\Omega(y)\in C[0,b]$, виконуються умови узгодженості

$$
T'(a)=\Psi(0), \tag{5.3}
$$

а $F[U(x,y)]\in C(\overline{B})$.

Розв'язок крайової задачі (5.1)—(5.3) будемо шукати в просторі вектор–функцій $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0):=C^{(2.1)}(D_0)\cap C^{(1.1)}(\overline{D}_0)$ (регулярний розв'язок).

Подамо крайову задачу (5.1)–(5.3) в еквівалентній інтегральній формі. З цією метою проінтегруємо систему (5.1) два рази по x від x до a, по y від нуля до y і врахуємо умови (5.2), (5.3). Матимемо:

$$
U(x,y)=S(x,y)+H_1F[U(\xi,\eta)]-H_2F[U(\xi,\eta)], \quad (x,y)\in\overline{D}_0, \tag{5.4}
$$

де

$$
S(x,y):=T(x)+\frac{1}{a-x_0}\int\limits_0^y\Omega(\eta)d\eta+\left(\frac{a-x_0}{2}-a+x\right)(\Psi(y)-\Psi(0)),
$$

$$
H_1F[U(\xi,\eta)]:=\int\limits_0^y\int\limits_x^a(\xi-x)F[U(\xi,\eta)]d\xi d\eta,
$$

$$
H_2F[U(\xi,\eta)]:=\frac{1}{a-x_0}\int\limits_0^y\int\limits_{x_0}^a\int\limits_t^a(\xi-t)F[U(\xi,\eta)]d\xi dt d\eta.
$$

Означення 5.1.1. *Будемо говорити, що вектор – функція $F[\,U(x,y)\,] \in C_2(\,\overline{B}\,)$, якщо вона задовольняє наступні умови:*

1. $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$;

2. *в просторі вектор–функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(5n+1)}$, $Пp_{xOy}\overline{B}_1 = D_0$ існує така вектор–функція $H[x,\ y,\ U(x,y),\ D^{(1.0)}U(x,y),$ $D^{(0.1)}U(x,y),\ D^{(1.1)}U(x,y),\ D^{(2.0)}U(x,y);\ V(x,y),\ D^{(1.0)}V(x,y),$ $D^{(0.1)}V(x,y),\ D^{(1.1)}V(x,y),\ D^{(2.0)}V(x,y)] := H[U(x,y);V(x,y)]$, що*

   (a) $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$,

   (b) *для довільної з простору $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ пари вектор–функцій $U(x,y)$, $V(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови*

   $$D^{(k_1,k_2)}[U(x,y) - V(x,y)] \geq (\leq) 0,$$

   $$k_1 = 0,2\ (k_1 = 1),\ k_2 = 0,1,\ (x,y) \in \overline{D}_0,$$

   в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

   $$H[U(x,y);V(x,y)] \geq H[V(x,y);U(x,y)], \tag{5.5}$$

3. *вектор–функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ вектор–функцій $U_r(x,y)$, $V_r(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2$, виконується умова*

   $$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leq$$
   $$\leq L_1 \sum_{r=1}^{2}(|W_r(x,y)| + |D^{(1.0)}W_r(x,y)| + |D^{(0.1)}W_r(x,y)| +$$
   $$+ |D^{(1.1)}W_r(x,y)| + |D^{(2.0)}W_r(x,y)|),$$

   де $W_r(x,y) := U_r(x,y) - V_r(x,y)$, $r = 1,2$, а L_1 – матриця Ліпшиця.

Очевидно, якщо вектор–функція $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $F[U(x,y)] \in C_2(\overline{B})$ (доведення аналогічне як і в п.4.1.2).

Очевидно, що вектор–функція $S(x,y) \in C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ і задовольняє крайові умови (5.2), а отже підстановкою $U^*(x,y) = U(x,y) - S(x,y)$

умови (5.2) зводяться до однорідних крайових умов. У зв'язку з цим, не зменшуючи загальності майбутніх міркувань, будемо вважати, що $T(x) = \Psi(y) = \Omega(y) = 0$.

Введемо позначення:

$$Z_p(x,y) = (z_{i,p}(x,y)), \quad V_p(x,y) = (v_{i,p}(x,y))$$

$$f^p(x,y) := H[Z_p(x,y); V_p(x,y)],$$

$$f_p(x,y) := H[V_p(x,y); Z_p(x,y)],$$

$$\begin{aligned} A_p(x,y) &:= D^{(2.1)} Z_p(x,y) - f^p(x,y), \\ B_p(x,y) &:= D^{(2.1)} V_p(x,y) - f_p(x,y), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_p(x,y) &:= Z_p(x,y) - H_1 f^p(\xi,\eta) + H_2 f_p(\xi,\eta), \\ \Omega_p(x,y) &:= V_p(x,y) - H_1 f_p(\xi,\eta) + H_2 f^p(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$F^p(x,y) := (F_i^p(x,y)), \quad F_p(x,y) := (F_{i,p}(x,y)),$$

$$i = \overline{1,n}, \quad p = 0,1,2,\ldots,$$

$$\begin{gathered} F_i^p(x,y) := F_i\left[z_{1,p+1}(x,y),\ldots,z_{i-1,p+1}(x,y), z_{i,p}(x,y),\ldots,\right. \\ \left. z_{n,p}(x,y); v_{1,p+1}(x,y),\ldots,v_{i-1,p+1}(x,y), v_{i,p}(x,y),\ldots,v_{n,p}(x,y)\right], \\ F_{i,p}(x,y) := F_i\left[v_{1,p+1}(x,y),\ldots,v_{i-1,p+1}(x,y), v_{i,p}(x,y),\ldots,\right. \\ \left. v_{n,p}(x,y); z_{1,p+1}(x,y),\ldots,z_{i-1,p+1}(x,y), z_{i,p}(x,y),\ldots,z_{n,p}(x,y)\right] \end{gathered} \tag{5.8}$$

Означення 5.1.2. *Дві довільні з простору $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ вектор–функції $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$, які в області $\overline{B}_1$ задовольняють нерівності*

$$\begin{gathered} D^k \textstyle\sum_0(x,y) \geq (\leq) 0, \quad D^k \Omega_0(x,y) \leq (\geq) 0, \\ D^k W_0(x,y) \geq (\leq) 0, \quad k_1 = 0,2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0,1 \end{gathered} \tag{5.9}$$

та крайові умови (5.2)*, називаються функціями порівняння крайової задачі* (5.1)*,* (5.2)*.*

5.2 Побудова апроксимуючих послідовностей вектор–функцій монотонної поведінки

Побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$ згідно формул

$$\begin{aligned} Z_{p+1}(x,y) &= H_1 F^p(\xi,\eta) - H_2 F_p(\xi,\eta), \\ V_{p+1}(x,y) &= H_1 F_p(\xi,\eta) - H_2 F^p(\xi,\eta), \quad (x,y) \in \overline{D}_0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

де за нульове наближення беруться функції порівняння крайової задачі (5.1), (5.2).

Із (5.6), (5.7) та (5.9) маємо:

$$W_{p+1}(x,y) = (H_1 + H_2)(F^p(\xi,\eta) - F_p(\xi,\eta)) \tag{5.11}$$

$$\begin{gathered} Z_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = \textstyle\sum_p(x,y) + H_1(f^p(\xi,\eta) - F^p(\xi,\eta)) - \\ -H_2(f_p(\xi,\eta) - F_p(\xi,\eta)), \\ V_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) = \Omega_p(x,y) + H_1(f_p(\xi,\eta) - F_p(\xi,\eta)) - \\ -H_2(f^p(\xi,\eta) - F^p(\xi,\eta)), \end{gathered} \tag{5.12}$$

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{p+1}(x,y) = H_1 A_{p+1}(\xi,\eta) - H_2 B_{p+1}(\xi,\eta), \\ \Omega_{p+1}(x,y) = H_1 B_{p+1}(\xi,\eta) - H_2 A_{p+1}(\xi,\eta), \end{gathered} \tag{5.13}$$

$$\begin{gathered} A_{p+1}(\xi,\eta) = F^p(x,y) - f^p(x,y), \\ B_{p+1}(\xi,\eta) = F_p(x,y) - f_p(x,y), \end{gathered} \tag{5.14}$$

Із (5.11), (5.12), приймаючи до уваги (5.5) при $p = 0$ і $(x,y) \in \overline{D}_0$, маємо

$$D^k W_1(x,y) \geq (\leq) 0, \quad D^k(Z_0(x,y) - Z_1(x,y)) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k(V_0(x,y) - V_1(x,y)) \leq (\geq) 0,$$

а значить із (5.13), (5.14) при $p = 0$ одержимо

$$A_1(x,y) \geq 0, \quad B_1(x,y) \leq 0, \quad D^k\Sigma_1(x,y) \geq (\leq)0, \quad D^k\Omega_1(x,y) \leq (\geq)0,$$

тобто при $(x,y) \in \overline{D}_0$ справедливі нерівності

$$D^k V_0(x,y) \leq (\geq) D^k V_1(x,y) \leq (\geq) D^k Z_1(x,y) \leq (\geq) D^k Z_0(x,y),$$

$$k_1 = 0,2\ (k_1 = 1),\ k_2 = 0,1.$$

Приймаючи вектор-функції $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ за вихідні і повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємось в справедливості в області $\overline{B}_1$ нерівностей

$$\begin{gathered} D^k V_p(x,y) \leq (\geq) D^k V_{p+1}(x,y) \leq (\geq) \\ \leq (\geq) D^k Z_{p+1}(x,y) \leq (\geq) D^k Z_p(x,y), \\ D^k\Sigma_p(x,y) \geq (\leq)0, \quad D^k\Omega_p(x,y) \leq (\geq)0, \\ k_1 = 0,2\ (k_1 = 1), \quad k_2 = 0,1, \end{gathered} \tag{5.15}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}$, тобто, якщо функції порівняння задачі (5.1), (5.2) $Z_0(x, y)$, $V_0(x, y) \in \overline{B}_1$, то і $\forall p \in \mathbb{N}$, $Z_p(x, y), V_p(x, y) \in \overline{B}_1$.

Покажемо, що послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x, y)\}$, $\{V_p(x, y)\}$, побудовані згідно закону (5.9), (5.10), рівномірно в області $\overline{D}_0$ збігаються до єдиного регулярного розв'язку задачі (5.1), (5.2).

Нехай

$$\|W_0(x, y)\|_{C^k(\overline{D}_0)} = \sum_{k_1, k_2} \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{\overline{D}_0} |D^k W_{i,0}(x, y)| \leq d,$$

$$R = \sup\left\{a, b, \frac{2}{3}a^2, ab, \frac{2}{3}a^2 b, 1\right\}, \quad \|L_1\| = \frac{1}{2}P.$$

Тоді із (5.11), враховуючи, що $F[U(x, y)] \in C_2(\overline{B})$, методом математичної індукції легко отримати оцінки

$$\|D^k W_p(x, y)\|_{C^k(\overline{D}_0)} \leq (PRn)^p d, \ k_1 = 0, 1, 2, \ k_2 = 0, 1, \ |k| \leq 2. \quad (5.16)$$

Із оцінок (5.16) та нерівностей (5.15) випливає, що якщо $nPR < 1$, то

$$\lim_{p\to\infty} D^k Z_p(x, y) = \lim_{p\to\infty} D^k V_p(x, y) = D^k U(x, y),$$

де вектор–функція $U(x, y) \in C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ є єдиним регулярним розв'язком крайової задачі (5.1), (5.2). Для того, щоб переконатись в тому, що гранична вектор–функція $U(x, y)$ є розв'язком (5.1), (5.2) достатньо в (5.10) перейти до границі, коли $p \to \infty$ і врахувати оцінки (5.16).

Для доведення єдиності регулярного розв'язку досліджуваної крайової задачі (5.1), (5.2) при виконанні умов, що $F[U(x, y)] \in C_2(\overline{B})$ і $nPR < 1$, припустимо супротивне, а саме, нехай існують два регулярні розв'язки $U_1(x, y)$ та $U_2(x, y)$ і $U_1(x, y) \neq U_2(x, y)$. Зауважимо, що вектор–функції $U_1(x, y)$ та $U_2(x, y)$ задовольняють всім умовам визначення функцій порівняння задачі (5.1), (5.2), а, отже, поклавши $Z_0(x, y) = U_1(x, y)$, $\quad V_0(x, y) = U_2(x, y)$ на підставі (5.16), одержимо оцінки

$$\|D^k(U_1(x, y) - U_2(x, y))\| \leq (PRn)^p d_1,$$

де

$$\|U_1(x, y) - U_2(x, y)\|_{C^k(\overline{D}_0)} \leq d_1, \ p \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $nPR < 1$, то з останньої оцінки випливає, що $U_1(x, y) = U_2(x, y)$.

Теорема 5.2.1. *Нехай права частина розглядуваної системи* (5.1) $F[U(x,y)] \in C_2(\overline{B})$ *і існують вектор-функції* $Z_0(x,y), V_0(x,y)$, *які є функціями порівняння крайової задачі* (5.1), (5.2).

Тоді послідовності $\{Z_p(x,y)\}$, $\{V_p(x,y)\}$, *побудовані згідно формули* (5.10), *при* $nPR < 1$ *збігаються абсолютно і рівномірно в області* $\overline{D}_0$ *до єдиного регулярного розв'язку задачі* (5.1), (5.2), *а в області* $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності*

$$D^k V_p(x,y) \le (\ge) D^k U(x,y) \le (\ge) D^k Z_p(x,y), \\ k_1 = 0,2 \; (k_1 = 1), \; k_2 = 0,1, \tag{5.17}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}$. *Збіжність модифікації двосторонього методу* (5.10), (5.9) *не повільніша збіжності ітераційного двосторонього методу Пікара.*

Доведення. Щоб показати справедливість нерівностей (5.17) достатньо повторити міркування, наведені в доведенні Теореми 4.1.2.

Нехай $Z_p(x,y), V_p(x,y)$ — функції порівняння крайової задачі (5.1), (5.2). Позначимо через $Z^*_{p+1}(x,y)$ та $V^*_{p+1}(x,y)\}$ $p+1$-е наближення, побудоване за двостороннім методом Пікара. Маємо:

$$Z_{p+1}(x,y) - Z^*_{p+1}(x,y) =$$

$$H_1(F^p(\xi,\eta) - f^p(\xi,\eta)) - H_2(F_p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta)) \le 0,$$

$$V_{p+1}(x,y) - V^*_{p+1}(x,y) =$$

$$H_1(F_p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta)) - H_2(F^p(\xi,\eta) - f^p(\xi,\eta)) \ge 0,$$

таким чином

$$V^*_{p+1}(x,y) \le V_{p+1}(x,y) \le Z_{p+1}(x,y) \le Z^*_{p+1}(x,y), \quad (x,y)\overline{D}_0,$$

що і потрібно було довести. □

Надалі метод (5.9), (5.10) називатимемо двостороннім методом Зейделя.

Зауваження 5.2.1. *Вектор–функції* $Z_p(x,y)$ *та* $V_p(x,y)$ *задовольняють перші дві умови із* (5.2), *а*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{a} Z_p(\xi,y)d\xi = \int\limits_{x_0}^{a}\int\limits_{t}^{a}(\xi - t)(F^{p-1}(\xi,y) - F_{p-1}(\xi,y))d\xi dt,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{a} V_p(\xi,y)d\xi = -\int\limits_{x_0}^{a}\int\limits_{t}^{a}(\xi-t)(F^{p-1}(\xi,y)-F_{p-1}(\xi,y))d\xi dt,$$

тобто вектор-функція $U_p(x,y)=\frac{1}{2}[Z_p(x,y)+V_p(x,y)]$ *задовольняє всі умови* (5.2) *і її приймаємо за p-е наближення.*

Наслідок 5.2.1. *Нехай права частина розглядуваної системи* (5.1) $F[U(x,y)]\in C_2(\overline{B})$ *і існує в просторі* $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0)$ *така вектор–функція* $V_0(x,y)(Z_0(x,y))\in\overline{B}_1$*, що*

$$D^k(-H_1H[0;V_0(\xi,\eta)]+H_2H[V_0(\xi,\eta);0])\geq(\leq)0,\quad D^kV_0(x,y)\leq(\geq)0,$$

$$D^k(V_0(x,y)-H_1H[V_0(\xi,\eta);0]+H_2H[0;V_0(\xi,\eta)])\leq(\geq)0,$$
$$k_1=0,2\quad(k_1=1),\quad k_2=0,1.$$

$$\left(\begin{array}{c} D^k(Z_0(x,y)-H_1H[Z_0(\xi,\eta);0]+H_2H[0;Z_0(\xi,\eta)])\geq(\leq)0,\\ D^kZ_0(x,y)\geq(\leq)0,\\ D^k(-H_1H[0;Z_0(\xi,\eta)]+H_2H[Z_0(\xi,\eta);0])\leq(\geq)0,\\ k_1=0,2\ (k_1=1), k_2=0,1. \end{array}\right)$$

Тоді розв'язок системи (5.1) *з однорідними крайовими умовами* (5.2) *задовольняє в області* $\overline{B}_1$ *нерівності*

$$\begin{gathered} D^kU(x,y)\leq(\geq)0\quad(D^kU(x,y)\geq(\leq)0),\\ k_1=0,2\quad(k_1=1),\quad k_2=0,1. \end{gathered}\tag{5.18}$$

5.3 Альтернуючий двостороній метод Зейделя

Дослідимо ітераційний метод (5.9), (5.10) при умові, що

$$\begin{gathered} f_i^p(x,y):=f_i\left[z_{1,p+1}(x,y),\dots,z_{i-1,p+1}(x,y),v_{1,p}(x,y),\dots,\right.\\ v_{n,p}(x,y);v_{1,p+1}(x,y),\dots,v_{i-1,p+1}(x,y),\\ \left.z_{i,p}(x,y),\dots,z_{n,p}(x,y)\right],\\ f_{i,p}(x,y):=f_i\left[v_{1,p+1}(x,y),\dots,v_{i-1,p+1}(x,y),z_{i,p}(x,y),\dots,\right.\\ z_{n,p}(x,y);z_{1,p+1}(x,y),\dots,z_{i-1,p+1}(x,y),\\ \left.v_{1,p}(x,y),\dots,v_{n,p}(x,y)\right]. \end{gathered}\tag{5.19}$$

Із (5.7), (5.10) маємо

$$\begin{gathered}
V_p(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = \Omega_p(x,y) + H_1(f_p(\xi,\eta) - F^p(\xi,\eta)) + \\
+ H_2(F_p(\xi,\eta) - f^p(\xi,\eta)), \\
Z_p(x,y) - V_{p+1}(x,y) = \Sigma_p(x,y) + H_1(f^p(\xi,\eta) - F_p(\xi,\eta)) + \\
+ H_2(F^p(\xi,\eta) - f_p(\xi,\eta)), \quad (x,y) \in \overline{D}_0.
\end{gathered} \tag{5.20}$$

Із (5.11), (5.20), враховуючи (5.5), (5.9), при $p = 0$ одержимо

$$D^k W_1(x,y) \le (\ge) 0, \quad D^k[V_0(x,y) - Z_1(x,y)] \le (\ge) 0,$$

$$D^k[Z_0(x,y) - V_1(x,y)] \ge (\le) 0,$$

тобто

$$D^k V_0(x,y) \le (\ge) D^k Z_1(x,y) \le (\ge) D^k V_1(x,y) \le (\ge) D^k Z_0(x,y),$$

звідки випливає, що $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y) \in \overline{B}_1$, а значить із (5.13), (5.14) при $(x,y) \in \overline{D}_0$ маємо $\Sigma_1(x,y) \le 0$, $\Omega_1(x,y) \ge 0$, тобто із (5.11), (5.20), (5.13), (5.14) при $p = 1$ випливає виконання нерівностей

$$D^k W_2(x,y) \ge (\le) 0, \quad D^k[V_1(x,y) - Z_2(x,y)] \ge (\le) 0,$$

$$D^k[Z_1(x,y) - V_2(x,y)] \le (\ge) 0, \ \Sigma_2(x,y) \ge 0, \quad \Omega_2(x,y) \le 0,$$

$$k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1, \quad (x,y) \in \overline{D}_0,$$

або в $\overline{B}_1$, маємо

$$\begin{gathered}
D^k V_0(x,y) \le (\ge) D^k Z_1(x,y) \le (\ge) D^k V_2(x,y) \le (\ge) D^k Z_2(x,y) \le (\ge) \\
\le (\ge) D^k V_1(x,y) \le (\ge) D^k Z_0(x,y), \quad k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1.
\end{gathered}$$

Приймаючи вектор-функції $Z_2(x,y)$ та $V_2(x,y)$ за вихідні і повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості в області $\overline{B}_1$, нерівностей

$$\begin{gathered}
D^k V_{2p}(x,y) \le (\ge) D^k Z_{2p+1}(x,y) \le (\ge) D^k V_{2p+2}(x,y) \le (\ge) \\
\le (\ge) D^k Z_{2p+3}(x,y) \le (\ge) D^k U(x,y) \le (\ge) \\
\le (\ge) D^k V_{2p+3}(x,y) \le (\ge) D^k Z_{2p+2}(x,y) \le (\ge) \\
\le (\ge) D^k V_{2p+1}(x,y) \le (\ge) D^k Z_{2p}(x,y), \\
k_1 = 0, 2 \quad (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1, \quad p \in \mathbb{N}, \text{ при } PRn < 1.
\end{gathered} \tag{5.21}$$

Таким чином, нами доведена.

Теорема 5.3.1. *Нехай в області* $\overline{B}$ *права частина системи* (5.1) *задовольняє умови Теореми 5.2.1 і існують функції порівняння крайової задачі* (5.1), (5.2).

Тоді послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x,y)\}$ *та* $\{V_p(x,y)\}$, *побудовані згідно закону* (5.9), (5.10), (5.18), *при* $PRn < 1$ *збігаються абсолютно і рівномірно в області* $\overline{D}_0$ *до єдиного регулярного розв'язку задачі* (5.1), (5.3), *причому справедливі нерівності* (5.21).

Збіжність ітераційного процесу (5.9), (5.10), (5.18) в області $\overline{D}_0$ доводиться аналогічно як і збіжність алгоритму (5.8), (5.9), (5.10)

Зауваження 5.3.1. *У випадку скалярного рівняння метод, який збігався б швидше двосторонього методу Пікара, можна побудувати за формулами*

$$Z_{p+1}(x,y) = H_1 h[z_p(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)] - H_2 h[v_p(\xi,\eta); z_p(\xi,\eta)],$$

$$V_{p+1}(x,y) = H_1 h[v_p(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)] - H_2 h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)],$$

де нульові наближення задовольняють умови (5.9). *В даному випадку формули* (5.11)–(5.13) *набувають вигляду:*

$$w_{p+1}(x,y) = H_1(h[z_p(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)] - h[v_p(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)])+$$

$$+H_2(h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)] - h[v_p(\xi,\eta); z_p(\xi,\eta)]),$$

$$z_p(x,y) - z_{p+1}(x,y) = \sigma_p(x,y),$$

$$v_p(x,y) - v_{p+1}(x,y) = w_p(x,y) + H_1(h[v_p(\xi,\eta); z_p(\xi,\eta)]-$$

$$-h[v_p(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)]) + H_2(h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)]-$$

$$-h[z_p(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)]), \quad (x,y) \in \overline{D}_0,$$

$$\sigma_{p+1}(x,y) = H_1(h[z_p(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)] - h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_{p+1}(\xi,\eta)])-$$

$$-H_2(h[v_p(\xi,\eta); z_p(\xi,\eta)] - h[v_{p+1}(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)]),$$

$$\omega_{p+1}(x,y) = H_1(h[v_p(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)] - h[v_{p+1}(\xi,\eta); z_{p+1}(\xi,\eta)])-$$

$$-H_2(h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_p(\xi,\eta)] - h[z_{p+1}(\xi,\eta); v_{p+1}(\xi,\eta)]).$$

Доведення справедливості нерівностей (5.17) проводиться аналогічно, як і у випадку Теореми 5.2.1.

5.3.1 Прискорення збіжності двосторонього методу Зейделя

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\{Z_p(x,y)\}$ та $\{V_p(x,y)\}$ згідно формул

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x,y)=H_1(F^p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)A_p(\xi,\eta))- \\ -H_2(F_p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi,\eta)B_p(\xi,\eta)), \\ V_{p+1}(x,y)=H_1(F_p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)B_p(\xi,\eta))- \\ -H_2(F^p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)A_p(\xi,\eta)),\ (x,y)\in\overline{D}_0, \end{gathered} \tag{5.22}$$

де нульове наближення $Z_0(x,y)$ та $V_0(x,y)$ є функціями порівняння задачі (5.1), (5.2), $F_i^p(x,y)$ і $F_{i,p}(x,y)$ визначаються згідно (5.8), а $\overline{C}_p(x,y)=(\delta_{ij}c_{ij}^p(x,y))$ — матриці з довільними невід'ємними із простору $C(\overline{D}_0)$ елементами, які задовольняють умови

$$0\le\sup c_{ii}^p(x,y)<1,\quad i=\overline{1,n},\quad p=0,1,2,\ldots. \tag{5.23}$$

Із (5.22) і (5.23) маємо:

$$\begin{gathered} Z_{p+1}(x,y)-Z_p(x,y)= \\ =H_1(F^p(\xi,\eta)-f^p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)A_p(\xi,\eta))- \\ -H_2(F_p(\xi,\eta)-f_p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)B_p(\xi,\eta))-\Sigma_p(x,y), \\ V_{p+1}(x,y)-V_p(x,y)= \\ =H_1(F_p(\xi,\eta)-f_p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)B_p(\xi,\eta))- \\ -H_2(F^p(\xi,\eta)-f^p(\xi,\eta)-\overline{C}_p(\xi;\eta)A_p(\xi,\eta))-\Omega_p(\xi,\eta), \end{gathered} \tag{5.24}$$

$$\begin{gathered} A_{p+1}(x,y)=F^p(x,y)-f^{p+1}(x,y)-\overline{C}_p(x,y)A_p(x,y), \\ B_{p+1}(x,y)=F_p(x,y)-f_{p+1}(x,y)-\overline{C}_p(x,y)B_p(x,y), \end{gathered} \tag{5.25}$$

$$\begin{gathered} \Sigma_{p+1}(x,y)=H_1A_{p+1}(\xi,\eta)-H_2B_{p+1}(\xi,\eta), \\ \Omega_{p+1}(x,y)=H_1B_{p+1}(\xi,\eta)-H_2A_{p+1}(\xi,\eta), \end{gathered} \tag{5.26}$$

$$\begin{gathered} W_{p+1}(x,y)=(H_1+H_2)[F^p(\xi,\eta)-F_p(\xi,\eta)- \\ -\overline{C}_p(\xi,\eta)(A_p(\xi,\eta)-B_p(\xi,\eta))]. \end{gathered} \tag{5.27}$$

Зауважимо, що вектор–функції порівняння задачі (5.1), (5.2) $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$ задовольняють умови $A_0(x,y)\ge 0$, $B_0(x,y)\le 0$. Враховуючи умови (5.9), (5.5) із (5.24) при $p=0$ і $(x,y)\in\overline{D}_0$, одержимо

$$D^k[Z_1(x,y)-Z_0(x,y)]\le(\ge)0,$$

$$D^k[V_1(x,y)-V_0(x,y)] \geq (\leq) 0,$$
$$k_1=0,2\ (k_1=1), \quad k_2=0,1.$$

Нехай елементи матриці $\overline{C}_0(x,y)$ задовольняють умови

$$F^0(x,y)-F_0(x,y)-\overline{C}_0(x,y)(A_0(x,y)-B_0(x,y)) \geq 0.$$

Тоді із (5.26) при $p=0$ маємо

$$W_1^k(x,y) \geq (\leq)0,\ k_1=0,2(k_1=1),\ k_2=0,1,$$

тобто

$$D^kV_0(x,y) \leq D^kV_1(x,y) \leq D^kZ_1(x,y) \leq D^kZ_0(x,y) \quad (x,y)\in\overline{D}_0.$$

Вибираємо елементи матриці $\overline{C}_0(x,y)$ таким чином, щоб виконувались нерівності

$$F^0(x,y)-f^1(x,y)-\overline{C}_0(x,y)A_0(x,y) \geq 0,$$

$$F_0(x,y)-f_1(x,y)-\overline{C}_0(x,y)B_0(x,y) \leq 0.$$

Тоді із (5.25) при $p=0$ одержимо, що $A_1(x,y)\geq 0, \quad B_1(x,y)\leq 0$, а, отже, із (5.26) випливають нерівності

$$D^k\Sigma_1(x,y) \geq (\leq)0,\ D^k\Omega_1(x,y) \leq (\geq)0,\ k_1=0,2(k_1=1),\ k_2=0,1.$$

Отже, при такому виборі елементів матриці $\overline{C}_0(x,y)$ вектор–функції $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ є також функціями порівняння крайової задачі (5.1), (5.2).

Повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємось, що якщо на кожному кроці ітерації (5.22) елементи матриці $\overline{C}_0(x,y)$ вибирати таким чином, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} &F^p(x,y)-f^{p+1}(x,y)-\overline{C}_p(x,y)A_p(x,y) \geq 0,\\ &F_p(x,y)-f_{p+1}(x,y)-\overline{C}_p(x,y)B_p(x,y) \leq 0, \end{aligned} \tag{5.28}$$

то тоді вектор–функції $Z_p(x,y)$ та $V_p(x,y)$, побудовані згідно закону (5.22), (5.9), (5.28), $\forall p\in\mathbb{N}$ в області $\overline{B}_1$ задовольняють нерівності (5.15).

Зауважимо, що якщо елементи матриці $\overline{C}_0(x,y)$ задовольняють умови (5.28), то справедлива і нерівність

$$F^p(x,y)-F_p(x,y)-\overline{C}_p(x,y)(A_p(x,y)-B_p(x,y)) \geq 0. \tag{5.29}$$

Дійсно, на підставі (5.28) та (5.15)

$$\underline{F^p(x,y)} - f^{p+1}(x,y) - \underline{\overline{C}_p(x,y)A_p(x,y)} - \underline{F^p(x,y)} + F_p(x,y) +$$

$$+\overline{C}_p(x,y)(\underline{A_p(x,y)} - B_p(x,y)) = f_{p+1}(x,y) - f^{p+1}(x,y) + F_p(x,y) -$$

$$-f_{p+1}(x,y) - \overline{C}_p(x,y)B_p(x,y) \le 0,$$

$$F^p(x,y) - \underline{F_p(x,y)} - \overline{C}_p(x,y)(A_p(x,y) - \underline{B_p(x,y)}) + \underline{F_p(x,y)} -$$

$$-f_{p+1}(x,y) - \underline{\overline{C}_p(x,y)B_p(x,y)} = F^p(x,y) - f^{p+1}(x,y) -$$

$$-\overline{C}_p(x,y)A_p(x,y) + f^{p+1}(x,y) - f_{p+1}(x,y) \ge 0,$$

що і доводить наше твердження.

В силу (5.29) та нерівностей (5.15) маємо

$$W_{p+1}(x,y) \le (H_1 + H_2)(F^p(\xi,\eta) - F_p(\xi,\eta)),$$

звідки випливає, що якщо $PRn < 1$, то $\lim\limits_{p\to\infty} W_{p+1}(x,y) = 0$, отже,

$$\lim_{p\to\infty} Z_p(x,y) = \lim_{p\to\infty} V_p(x,y).$$

Оскільки $A_p(x,y) \ge 0, \quad B_p(x,y) \le 0$, то

$$A_p(x,y) \le A_p(x,y) - B_p(x,y) = D^{(2.1)}W_p(x,y) - (f^p(x,y) - f_p(x,y)),$$

а,отже, при $PRn < 1$ $\lim\limits_{p\to\infty} A_p(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} B_p(x,y) = 0$.

Таким чином, переходячи в (5.22) до границі, коли $p \to \infty$ переконуємося, що гранична функція $U(x,y) = \lim\limits_{p\to\infty} Z_p(x,y)$ є розв'язком задачі (5.1), (5.2).

Покажемо, що збіжність алгоритму (5.9), (5.22), (5.23), (5.28) не повільніша збіжності ітераційного двостороннього методу Зейделя (5.8)–(5.10).

З цією метою припускаємо, що вектор–функції $Z_p\ (x,y)$ та $V_p\ (x,y)$ є функціями порівняння задачі (5.1), (5.2). Нехай $\overline{Z}_{p+1}\ (x,y)$, $\overline{V}_{p+1}\ (x,y)$ — двосторонні наближення до розв'язку задачі (5.1), (5.2), одержані за допомогою методу Зейделя. Тоді при $(x,y) \in \overline{D}_0$ маємо

$$\overline{Z}_{p+1}(x,y) - Z_{p+1}(x,y) = H_1\overline{C}_p(\xi,\eta)A_p(\xi,\eta) - T_2\overline{C}_p(\xi,\eta)B_p(\xi,\eta) \ge 0,$$

$$\overline{V}_{p+1}(x,y) - V_{p+1}(x,y) = H_1\overline{C}_p(\xi,\eta)B_p(\xi,\eta) - T_2\overline{C}_p(\xi,\eta)A_p(\xi,\eta) \le 0,$$

а значить

$$D^k\overline{V}_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^k V_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^k Z_{p+1}(x,y) \le (\ge) D^k \overline{Z}_{p+1}(x,y),$$
$$k_1 = 0,2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0,1, \quad (x,y) \in \overline{B}_0,$$

що і потрібно було показати.

Теорема 5.3.2. *Нехай права частина заданої системи* (5.1) $F[\ U(x,y)\ ] \in C_2(\ \overline{B}\ )$ *і в області* $\overline{B}_1$ *існують функції порівняння крайової задачі* (5.1), (5.2).

Тоді послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x,y)\}$ *та* $\{V_p(x,y)\}$, *побудовані за законом* (5.9), (5.22), (5.23), (5.28) *при* $(x,y) \in \overline{D}_0$ *та* $PRn < 1$ *збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв'язку крайової задачі* (5.1), (5.2), *мають місце нерівності* (5.17), *а збіжність двосторонього методу* (5.9), (5.22), (5.23), (5.28) *не повільніша збіжності методу Зейделя* (5.8) – (5.10).

Для подальшого прискорення збіжності розглянутих модифікацій монотонного двостороннього методу наближеного розв'язання крайової задачі (5.1), (5.2) можна на кожному кроці відповідних алгоритмів уточнювати одержані двосторонні наближення.

Нехай $Z_p(x,y)$, $V_p(x,y)$ — знайдені двосторонні наближення чи то за методом Зейделя (5.8) — (5.10), чи за алгоритмом (5.9), (5.22), (5.23), (5.28) який називатимемо методом Зейделя-Манна [207]. Уточнення одержаних наближень при $(x,y) \in \overline{D}_0$ можна провести за формулами

$$\begin{aligned} Z_{p+1}(x,y) &= Z_p(x,y) - R_0(x,y)W_p(x,y), \\ V_{p+1}(x,y) &= V_p(x,y) + R_0(x,y)W_p(x,y), \end{aligned} \tag{5.30}$$

де $R_0(x,y) = (\delta_{ij} r_{i,0}(x,y)) \quad i,j = \overline{1,n}$ — функціональні матриці з невід'ємними елементами $r_{i,0}(x,y) \in C^k(\overline{D}_0)$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} D^k r_{i,0}(x,y) \ge (\le) 0, \quad k_1 = 0,2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0,1, \\ \sup_{\overline{D}_0} |D^k r_{i,0}(x,y)| < 0,5 \quad i, = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{5.31}$$

Вибираємо елементи матриці $R_0(x,y)$ таким чином, щоб в області $\overline{D}_0$ виконувались нерівності

$$\begin{aligned} &D^k W_p(x,y) - 2D^k[R_0(x,y)W_p(x,y)] \ge (\le) 0, \\ &A_{p+1}(x,y) = D^{(2.1)} Z_{p+1}(x,y) - f^{p+1}(x,y) \ge 0, \\ &B_{p+1}(x,y) = D^{(2.1)} V_{p+1}(x,y) - f_{p+1}(x,y) \le 0. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Можливість вибору елементів матриці $R_0(x,y)$, які б задовольняли умови (5.31), (5.32), випливає із наступних міркувань. Із (5.32), (5.30), маємо

$$A_{p+1}(x,y) = D^{(2.1)}Z_p(x,y) - D^{(2.1)}[R_0(x,y)W_p(x,y)] - f^{p+1}(x,y) =$$

$$= A_p(x,y) + f^p(x,y) - f^{p+1}(x,y) - D^{(2.1)}[R_0(x,y)W_p(x,y)],$$

$$B_{p+1}(x,y) = B_p(x,y) + f_p(x,y) - f_{p+1}(x,y) + D^{(2.1)}[R_0(x,y)W_p(x,y)].$$

Оскільки $A_p(x,y) \geq 0$, $B_p(x,y) \leq 0$ при $(x,y) \in \overline{D}_0$, а внаслідок (5.31), (5.17), (5.5)

$$f^p(x,y) - f^{p+1}(x,y) \geq 0, \quad f_p(x,y) - f_{p+1}(x,y) \leq 0,$$

то за $R_0(x,y)$ достатньо вибрати матрицю, яка б задовольняла при $(x,y) \in \overline{D}_0$ нерівності

$$A_p(x,y) - D^{(2.1)}[R_0(x,y)W_p(x,y)] \geq 0,$$

$$B_p(x,y) + D^{(2.1)}[R_0(x,y)W_p(x,y)] \leq 0,$$

$$D^k[(E - 2R_0(x,y))W_p(x,y)] \geq (\leq)0,$$

$$k_1 = 0, 2 (k_1 = 1),\ k_2 = 0, 1.$$

Але тоді на підставі Теореми 5.2.1 маємо

$$D^kV_p(x,y) \leq (\geq) D^kV_{p+1}(x,y) \leq (\geq) D^kZ_{p+1}(x,y) \leq (\geq) D^kZ_p(x,y),$$

$$k_1 = 0, 2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0, 1,\ (x,y) \in \overline{D}_0,$$

тобто вектор–функції $Z_p(x,y)$, $V_p(x,y)$ є функціями порівняння. Дану процедуру можна повторити кілька разів. В цьому випадку вище приведені формули (5.30), (5.31) матимуть вигляд:

$$Z_{p+q+1}(x,y) = Z_{p+q}(x,y) - R_q(x,y)W_{p+q}(x,y),$$

$$V_{p+q+1}(x,y) = V_{p+q}(x,y) + R_q(x,y)W_{p+q}(x,y),$$

$$r_{i,q}(x,y) \in C^{(2.1)}(\overline{D}_0),$$

$$D^k r_{i,q}(x,y) \geq (\leq)0,\ k_1 = 0, 2 (k_1 = 1),\ k_2 = 0, 1,$$

$$\sup_{\overline{D}_0} |D^k r_{i,q}(x,y)| < 0,5 \quad i, = \overline{1,n} \quad q = 0, 1, 2, \ldots,$$

матриці $R_q(x,y)$ повинні задовольняти умови

$$A_{p+q}(x,y) - D^{(2.1)}[R_q(x,y)W_{p+q}(x,y)] \geq 0,$$

$$B_{p+q}(x,y) + D^{(2.1)}[R_q(x,y)W_{p+q}(x,y)] \leq 0,$$

$$D^k[(E-2R_q(x,y))W_{p+q}(x,y)] \geq (\leq) 0,$$

$$k_1 = 0,2 (k_1 = 1), \quad k_2 = 0,1.$$

Приклад 5.3.1. *Дослідити крайову задачу: в області D_0 знайти регулярний розв'язок системи ДРЧП (5.1), який задовольняє умови*

$$U(x,0) = T(x), \quad x \in [0,a],$$

$$D^{(1.0)}U(0,y) = M^{(1)}(y)U(0,y) - M^{(2)}(y)U(a,y) + M_1(y),$$

$$M^{(3)}(y)D^{(1.0)}U(a,y) + M^{(4)}(y)D^{(1.1)}U(a,y) = M_2(y), \quad y \in [0,b],$$

де $M_r(y) := (\ \mu_{r,i}(y)\ ),\quad r = 1,2,\quad i = \overline{1,n}$ *— задані вектори,* $M^{(s)}(y) := (\delta_{ij}\mu_i^{(s)}(y)),\quad i,j = \overline{1,n},\quad s = \overline{1,4}$ *— відомі матриці,* δ_{ij} *— символ Кронекера.*

Для відповідних векторів $T(x) \in C^2(\ [0,a]\ ),\ M_1\ (y) \in C^1(\ [0,b]\ ),$ $M_2(y) \in C(\ [0,b]\ )$ і матриць $M^{(r)}(y) \in C^1([0,b]),\ M^{(3)}(y),\ M^{(4)}(y) \in C[0,b]$ виконуються умови:

$$M^{(r)}(y) \geq 0, \quad M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y) \neq 0, \quad r = 3,4, \quad y \in [0,b],$$

$$D^{(1.0)}T(0) = M^{(1)}(0)T(0) - M^{(2)}(0)T(a) + M_1(0).$$

Вказівка. Поставлена крайова задача може бути подана в еквівалентній інтегральній формі вигляду

$$U(x,y) = S(x,y) + HF[U(\xi,\eta)],$$

де

$$S(x,y) := T(x) - T(0) - xT'(0) + (M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))_{-1}\{[E + aM^{(2)}(y) +$$

$$+ x(M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))]\Omega(y) - T'(a) + T'(0) - M^{(2)}(y)[aT'(a) - T(a) + T(0)] -$$

$-M_1(y)\},\ (M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))_{-1} := (\delta_{ij}(\mu_i^{(1)}(y) - \mu_i^{(2)}(y))^{-1})$ — матриця,

$$\Omega(y) := \left(exp\left(-\int\limits_0^y \frac{\mu_i^{(3)}(\eta)d\eta}{\mu_i^{(4)}(\eta)} \right) [\tau_i'(a) + \right.$$

$$
+\int\limits_0^y exp\left(\int\limits_0^\eta \frac{\mu_i^{(3)}(\zeta)}{\mu_i^{(4)}(\zeta)}d\zeta\right)\frac{\mu_{2,i}(\eta)}{\mu_i^{(4)}(\eta)}d\eta\Bigg]\Bigg),
$$

$$
i=\overline{1,n} \text{ — вектор},
$$

$$
TF[U(\xi,\eta)] := \int\limits_0^y\int\limits_0^a G(y,x,\eta)F[U(\xi,\eta)]d\xi d\eta,
$$

$$
G(y,x,\eta) := (\delta_{ij}g_j(y,x,\eta)),\ i,j=\overline{1,n}\text{— матриця},
$$

$$
g_j(y,x,\eta) := \begin{cases} \eta + \dfrac{1+\eta\mu_j^{(2)}(y)}{\mu_j^{(1)}(y)-\mu_j^{(2)}(y)}, & \eta=[0,x), \\ x + \dfrac{1+\eta\mu_j^{(2)}(y)}{\mu_j^{(1)}(y)-\mu_j^{(2)}(y)}, & \eta=[x,a]. \end{cases}
$$

5.4 Дослідження крайової задачі для ДРЧП вищого порядку в області із складною структурою краю

5.4.1 Постановка задачі

Нехай в $\mathbb{R}^2$ задана область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, (Рис. 5.1) де

$$
D_1 = \{(x,y)|x\in[x_0,x_1], y\in(g(x),y_1]\},
$$

$$
D_2 = \{(x,y)|x\in(x_0,x_1], y\in(y_1,y_2]\},
$$

$$
D_3 = \{(x,y)|x\in(x_1,x_2], y\in(y_0,y_1]\}, \quad x_0<x_1<x_2, \quad y_0<y_1<y_2,
$$

$y = g(x)(x = k(y))$ — "вільна"крива, $g'(x) < 0,\ dg(x_0) = y_1,\ g(x_1) = y_0$.

Дослідимо задачу: при $(x, y) \in D$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$
\begin{gathered} D^{(2.1)}U(x,y) = f(x,y,U(x,y),D^{(1.0)}U(x,y), \\ D^{(2.0)}U(x,y)) := f[U(x,y)], \end{gathered} \tag{5.33}
$$

$f : \overline{B} \to \mathbb{R}, \quad \overline{B} \subset \mathbb{R}^5$, який задовольняє крайові умови

$$
\begin{gathered} U(x,g(x)) = \varphi_1(x), \quad D^{(0.1)}U(x,g(x)) = \varphi_2(x), \\ D^{(1.1)}U(x,g(x)) = \varphi_3(x), \quad x\in[x_0,x_1], \end{gathered} \tag{5.34}
$$

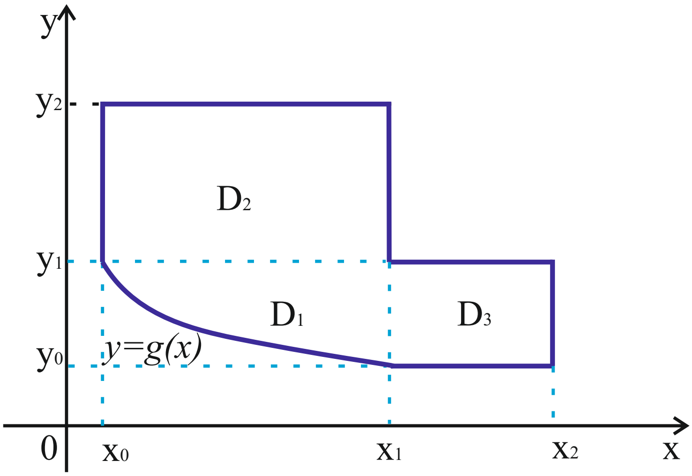


Рис. 5.1

$$U(x_0,y)=\omega_1(y),\quad D^{(1.0)}U(x_0,y)=\omega_2(y),\quad y\in[y_1,y_2], \tag{5.35}$$

$$U(x,y_0)=\psi(x),\quad x\in[x_1,x_2], \tag{5.36}$$

та умови узгодженості

$$\begin{gathered}\omega_1(y_1)=\varphi_1(x_0),\quad \omega_1'(y_1)=\varphi_2(x_0),\quad \omega_2(y_1)=\varphi_1'(x_0),\\ \omega_2'(y_1)=\varphi_3(x_0),\quad \varphi_1(x_1)=\psi(x_1),\\ \psi_2'(x_1)=\varphi_1'(x_1)-g'(x_1)\varphi_2(x_1),\end{gathered} \tag{5.37}$$

де $\varphi_1(x)\in C^2([x_0,x_1])$, $\psi(x)\in C^2([x_1,x_2])$, $\varphi_2(x),\varphi_3(x)\in C^1([x_0,x_1])$, $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)\in C^1([y_1,y_2])$ — задані функції.

Очевидно [72], шуканий розв'язок задачі (5.33), (5.37)

$$U(x,y)=U_s(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,$$

де $U_1(x,y)$ — розв'язок в $\overline{D}_1$ задачі Коші (5.33), (5.34), (5.37), $U_2(x,y)$ — розв'язок задачі Гурса (5.33), (5.35) і $U_2(x,y_1)=U_1(x,y_1)$ при $(x,y)\in\overline{D}_2$, а $U_3(x,y)$ — розв'язок при $(x,y)\in\overline{D}_3$ задачі Гурса (5.33), (5.36) і $U_3(x_1,y)=U_1(x_1,y)$, $D^{(1.0)}U_3(x_1,y)=D^{(1.0)}U_1(x_1,y)$.

Позначимо:

$$\Phi_1(x,y):=\varphi_1(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[\varphi_2(k(\eta))+(x-k(\eta))\varphi_3(k(\eta))]d\eta,\quad (x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$\Phi_2(x,y):=\Phi_1(x,y)+\omega_1(y)-\omega_1(y_1)+(x-x_0)[\omega_2(y)-\omega_2(y_1)],\quad (x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$\Phi_3(x,y) := \psi(x) + \int\limits_{y_0}^{y} [\varphi_2(k(\eta)) + (x - k(\eta))\varphi_3(k(\eta))]d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$T_1 f[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g(x)}^{y} \int\limits_{k(\eta)}^{x} (x-\xi) f[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$T_2 f[U_2(\xi,\eta)] := \int\limits_{y_1}^{y} \int\limits_{x_0}^{x} (x-\xi) f[U_2(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$T_{2,1} f[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{g(x)}^{y_1} \int\limits_{k(\eta)}^{x} (x-\xi) f[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta,$$

$$T_3 f[U_3(\xi,\eta)] := \int\limits_{y_0}^{y} \int\limits_{x_1}^{x} (x-\xi) f[U_3(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_3,$$

$$T_{3,1} f[U_1(\xi,\eta)] := \int\limits_{y_0}^{y} \int\limits_{k(\eta)}^{x} (x-\xi) f[U_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta.$$

Як і в п.4.1 можна показати, що має місце наступна

Лема 5.4.1. *Нехай* $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$. *Тоді крайова задача* (5.33)–(5.37) *є еквівалентною системі рівнянь*

$$\begin{gathered} U_s(x,y) = \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{s,1} f[U_1(\xi,\eta)] + T_s f[U_s(\xi,\eta)], \\ (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad \varepsilon_s = \begin{cases} 0, & s = 1, \\ 1, & s = 2,3, \end{cases} \end{gathered} \tag{5.38}$$

причому, якщо існує обмежена частинна похідна $\dfrac{\partial f[U(x,y)]}{\partial D^{(2.0)}[U(x,y)]}$ *в області* $\overline{B}$ *і крайова задача* (5.33)–(5.37) *має розв'язок, то він буде регулярним.*

Встановимо достатні умови існування єдиного розв'язку задачі (5.33)—(5.37).

З цією метою надалі будемо вважати, що функція $f[U(x,y)] \in C_2^*(\overline{B})$, тобто, що вона задовольняє наступні умови [72]:

1. $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має обмежену частинну похідну $\dfrac{\partial f[U(x,y)]}{\partial D^{(2.0)}[U(x,y)]}$,

2. у просторі $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$ існує така функція

$$H(x,y,U(x,y),D^{(1.0)}U(x,y),D^{(2.0)}U(x,y);V(x,y),$$

$$D^{(1.0)}V(x,y),D^{(2.0)}V(x,y)) := H[U(x,y);V(x,y)],$$

що

   (a) $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv f[U(x,y)]$,

   (b) для довільної із простору $C^{(2.0)}(\overline{D})$ пари функцій $U(x,y)$, $V(x,y) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умови

$$D^{(k.0)}U(x,y) \geq D^{(k.0)}V(x,y),\ (x,y) \in \overline{D},\ k = 0,1,2,$$

   в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U(x,y);V(x,y)] - H[V(x,y);U(x,y)] \leq 0, \qquad (5.39)$$

3. функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умови Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C^{(2.0)}(\overline{D})$ функцій $U_r(x,y)$, $V_r(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2$ виконується умова

$$|H[U_1(x,y);U_2(x,y)] - H[V_1(x,y);V_2(x,y)]| \leq$$

$$\leq 0,5L\sum_r(|W_r(x,y)| + |D^{(1.0)}W_r(x,y)| + |D^{(2.0)}W_r(x,y)|),$$

$$W_r(x,y) := U_r(x,y) - V_r(x,y),\ r = 1,2,\ 0,5L\ \text{— стала Ліпшиця.}$$

Очевидно, якщо функція $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $f[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_2^*(\overline{B})$. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_{s,p}(x,y)$, $V_{s,p}(x,y) \in C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_1$, $s = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s \quad s = 1,2,3,$$

$$f_s^p(x,y) := H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)], \quad f_{s,p}(x,y) := H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)],$$

$$\begin{gathered}\Omega_s^p(x,y) := \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{s,1} f_1^p(\xi,\eta) + T_s f_s^p(\xi,\eta),\\ \Omega_{s,p}(x,y) := \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{s,1} f_{1,p}(\xi,\eta) + T_s f_{s,p}(\xi,\eta),\\ \alpha_{s,p}(x,y) := Z_{s,p}(x,y) - \Omega_s^p(x,y),\\ \beta_{s,p}(x,y) := V_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_s.\end{gathered} \tag{5.40}$$

5.4.2 Побудова наближеного розв'язку крайової задачі

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул [205]

$$Z_{s,p+1}(x,y) = \Omega_s^p(x,y), \quad V_{s,p+1}(x,y) = \Omega_{s,p}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \tag{5.41}$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні функції з простору $C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$, які задовольняють відповідно умови (5.34)–(5.37) та нерівності

$$\begin{gathered}D^{(k.0)} W_{s,0}(x,y) \geq 0,\ D^{(k.0)} \alpha_{s,0}(x,y) \geq 0,\\ D^{(k.0)} \beta_{s,0}(x,y) \leq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_s,\ s = 1,2,3,\ k = 0,1,2.\end{gathered} \tag{5.42}$$

Надалі функції $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y) \in C^{(2.1)}(\overline{D}_s)$, які задовольняють відповідно умови (5.34)–(5.37), нерівності (5.42) і належать області $\overline{B}_1$ будемо називати функціями порівняння крайової задачі (5.33)–(5.37).

Має місце наступна

Лема 5.4.2. *Нехай $f[U(x,y)] \in C_2^*(\overline{B})$ і рівняння* (5.38) *в просторі функцій $C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$ мають розв'язки, які при $(x,y) \in \overline{D}_s$, $\quad s = 1,2,3$, задовольняють умови*

$$D^{(k.0)} V_{s,0}(x,y) \leq D^{(k.0)} U_s(x,y) \leq D^{(k.0)} Z_{s,0}(x,y).$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (5.42).

Дамо практичний метод побудови функцій порівняння крайової задачі (5.33)–(5.37), коли $f[U(x,y)] \in C_2^*(\overline{B})$.

Нехай

$$U_s^*(x,y) = \Phi_s(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s} f[U_1^*(\xi,\eta)] + T_s f_s[h(\xi,\eta)],$$

де $h(x,y) \in C^{(2.0)}(\overline{D})$ — довільна в області $\overline{B}$ функція. Вважаючи, що $U_s^*(x,y) \in \overline{B}_1$, позначимо

$$\alpha_s^*(x,y) := U_s^*(x,y) - \Phi_s(x,y) - \varepsilon_s T_{1,s} f[U_1^*(\xi,\eta)] - T_s f_s[U_s^*(\xi,\eta)].$$

Тоді функції

$$D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y) = D^{(k.0)}U_s^*(x,y) + |D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)|,\ (x,y) \in \overline{D}_s,$$

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y) = D^{(k.0)}U_s^*(x,y) - |D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)|,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2,$$

при умові, що $D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y),\ D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, є функціями порівняння крайової задачі (5.33)–(5.37). Дійсно

$$D^{(k.0)}W_{s,0}(x,y) = 2|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)| \geq 0,$$

а приймаючи до уваги умову (5.39), маємо

$$D^{(k.0)}\alpha_{s,0}(x,y) = |D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)| + D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y) + \varepsilon_s D^{(k.0)}T_{1,s}(f[U_1^*(\xi,\eta)] -$$

$$-f_1^0(\xi,\eta)) + D^{(k.0)}T_s(f[U_s^*(\xi,\eta)] - f_s^0(\xi,\eta)) \geq 0,$$

$$D^{(k.0)}\beta_{s,0}(x,y) = -|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)| + D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y) + \varepsilon_s T_{1,s}(f[U_1^*(\xi,\eta)] -$$

$$-f_{1,0}(\xi,\eta)) + D^{(k.0)}T_s(f[U_s^*(\xi,\eta)] - f_{s,0}(\xi,\eta)) \leq 0,$$

$(x,y) \in \overline{D}_s,\quad s=1,2,3,\quad k=0,1,2$, тобто множина функцій порівняння задачі (5.33)–(5.37) не порожня.

Із (5.40), (5.41) одержимо

$$\begin{aligned} D^{(k.0)}[Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+1}(x,y)] &= D^{(k.0)}\alpha_{s,p}(x,y), \\ D^{(k.0)}[V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+1}(x,y)] &= D^{(k.0)}\beta_{s,p}(x,y), \end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\begin{gathered} D^{(k.0)}[\alpha_{s,p}(x,y) + \alpha_{s,p+1}(x,y)] = \\ = D^{(k.0)}[Z_{s,p}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y)], \\ D^{(k.0)}[\beta_{s,p}(x,y) + \beta_{s,p+1}(x,y)] = \\ = D^{(k.0)}[V_{s,p}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y)], \end{gathered} \tag{5.44}$$

$$D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y) = D^{(k.0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y)], \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} D^{(k.0)}\alpha_{s,p+1}(x,y) &= D^{(k.0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_s^{p+1}(x,y)], \\ D^{(k.0)}\beta_{s,p+1}(x,y) &= D^{(k.0)}[\Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p+1}(x,y)], \end{aligned} \tag{5.46}$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s,\quad s=1,2,3,\quad k=0,1,2,\quad p=0,1,2,\ldots.$$

Враховуючи (5.39), (5.42), із (5.43), (5.45), при $p=0$ одержимо

$$D^{(k.0)}[Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y)] \geq 0,\quad D^{(k.0)}[V_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y)] \leq 0,$$

$$D^{(k.0)}[W_1(x,y)] \le 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s=1,2,3, \quad k=0,1,2.$$

Нехай при $(x,y) \in \overline{D}_s$ справедливі нерівності

$$\begin{gathered} D^{(k.0)}[V_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y)] \le 0, \\ D^{(k.0)}[Z_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y)] \ge 0, \\ (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s=1,2,3. \end{gathered} \tag{5.47}$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності, маємо

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,1}(x,y) \le D^{(k.0)}V_{s,1}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y),$$

тобто, якщо $Z_{s,0}(x,y),\ V_{s,0}(x,y) \in \overline{B}_1$, то $Z_{s,1}(x,y),\ V_{s,1}(x,y) \in \overline{B}_1$.

Із (5.46) при $p=0$ одержимо

$$D^{(k.0)}\alpha_{s,1}(x,y) \le 0,\ D^{(k.0)}\beta_{s,1}(x,y) \ge 0,$$

для всіх $(x,y) \in \overline{D}_s$, а, отже, із (5.43), (5.45) при $p=1$ і $(x,y) \in \overline{D}_s$, випливає

$$D^{(k.0)}[Z_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \le 0, \quad D^{(k.0)}[V_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \ge 0,$$

$$D^{(k.0)}[W_2(x,y)] \ge 0, \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s=1,2,3, \quad k=0,1,2.$$

Оскільки в силу умов (5.39), (5.47) при $(x,y) \in \overline{D}_s$

$$\begin{gathered} D^{(k.0)}[\alpha_{s,0}(x,y) + \alpha_{s,1}(x,y)] = D^{(k.0)}[Z_{s,0}(x,y) - V_{s,1}(x,y) + \\ + T_{1,s}(f_{1,0}(\xi,\eta) - f_1^1(\xi,\eta)) + T_s(f_{s,0}(\xi,\eta) - f_s^1(\xi,\eta))] \ge 0, \\ D^{(k.0)}[\beta_{s,0}(x,y) + \beta_{s,1}(x,y)] = D^{(k.0)}[V_{s,0}(x,y) - Z_{s,1}(x,y) + \\ + T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta) - f_{1,1}(\xi,\eta)) + T_s(f_s^0(\xi,\eta) - f_{s,1}(\xi,\eta))] \le 0, \end{gathered}$$

то із (5.44) при $p=0$, $k=0,1,2$, $(x,y) \in \overline{D}_s$ маємо

$$D^{(k.0)}[Z_{s,0}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \ge 0,$$

$$D^{(k.0)}[V_{s,0}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \le 0, \quad s=1,2,3.$$

Але

$$\begin{gathered} D^{(k.0)}[Z_{s,p+1}(x,y) - V_{s,p+2}(x,y)] = \\ = D^{(k.0)}[\Omega_s^p(x,y) - \Omega_{s,p+1}(x,y)], \\ D^{(k.0)}[V_{s,p+1}(x,y) - Z_{s,p+2}(x,y)] = \\ = D^{(k.0)}[\Omega_{s,p}(x,y) - \Omega_s^{p+1}(x,y)], \end{gathered} \tag{5.48}$$

для $p \in \mathbb{N}$, а, отже, враховуючи попередні нерівності, із (5.48) при $p = 0$ одержимо

$$D^{(k.0)}[Z_{s,1}(x,y) - V_{s,2}(x,y)] \le 0, \quad D^{(k.0)}[V_{s,1}(x,y) - Z_{s,2}(x,y)] \ge 0,$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2,$$

тобто мають місце нерівності

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,1}(x,y) \le D^{(k.0)}V_{s,2}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,2}(x,y) \le$$

$$\le D^{(k.0)}V_{s,1}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}_s.$$

Із (5.46) при $p = 1$ маємо

$$D^{(k.0)}\alpha_{s,2}(x,y) \ge 0, \; D^{(k.0)}\beta_{s,2}(x,y) \le 0,$$

а, отже, функції $Z_{s,2}(x,y), \; V_{s,2}(x,y) \in \overline{B}_1$ і є функціями порівняння задачі (5.33) – (5.37).

Повторюючи вище наведені міркування методом математичної індукції переконуємось у справедливості нерівностей

$$\begin{gathered} D^{(k.0)}V_{s,2p}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,2p+1}(x,y) \le D^{(k.0)}V_{s,2p+2}(x,y) \le \\ \le D^{(k.0)}Z_{s,2p+3}(x,y) \le D^{(k.0)}V_{s,2p+3}(x,y) \le \\ \le D^{(k.0)}Z_{s,2p+2}(x,y) \le D^{(k.0)}V_{s,2p+1}(x,y) \le D^{(k.0)}Z_{s,2p}(x,y), \end{gathered} \tag{5.49}$$

для $\forall \quad (x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2, p = 0,1,2,\ldots.$

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 5.4.1. *Нехай функція* $f[U(x,y)] \in C_2^*(\overline{B})$, *а в області* $\overline{B}_1$ *виконуються умови* (5.47). *Тоді для послідовностей функцій* $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$, *які побудовані згідно закону* (5.41), *де за нульове наближення* $D^{(k.0)}\,Z_{s,0}\,(x,y)$, $\;D^{(k.0)}\,V_{s,0}\,(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2,3,\; k = 0,1,2,$ *вибираються функції порівняння задачі* (5.33)—(5.37), *в області* $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності* (5.49).

Покажемо, що побудовані послідовності функцій $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$ збігаються рівномірно при $(x,y) \in \overline{D}_s$ і

$$\lim_{p\to\infty} D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y) = \lim_{p\to\infty} D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y) = D^{(k.0)}U_s(x,y), \tag{5.50}$$

$$(x,y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1,2,3, \quad k = 0,1,2.$$

В силу нерівностей (5.49) для цього достатньо показати, що

$$\lim_{p\to\infty} D^{(k.0)}W_{s,p}(x,y)=0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,3,\quad k=0,1,2.$$

З цією метою позначимо:

$$\max_{s,k}\sup_{\overline{D}_s}|D^{(k.0)}W_{s,0}(x,y)|=d,$$

$$\max\{1,\sup_{\overline{D}}(x-x_0+y-y_0)\}=\gamma.$$

Із (5.45) маємо

$$D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y)=D^{(k.0)}\{\varepsilon_s T_{s,1}[f_1^p(\xi,\eta)-f_{1,p}(\xi,\eta)]+$$

$$+T_s[f_s^p(\xi,\eta)-f_{s,p}(\xi,\eta)]\},$$

а, отже, в силу умови Ліпшиця

$$|D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y)|\le L\left\{\varepsilon_s T_{s,1}\left[\sum_{k=0}^{2}|D^{(k.0)}W_{1,p}(\xi,\eta)|\right]+\right.$$

$$\left.+T_s\left[\sum_{k=0}^{2}|D^{(k.0)}W_{s,p}(\xi,\eta)|\right]\right\},$$

звідки методом математичної індукції переконуємось в справедливості оцінок

$$|D^{(k.0)}W_{s,p}(x,y)|\le (p!)^{-1}[3L\gamma(x-x_0+y-y_0)]^p d, \tag{5.51}$$

$(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,3,\quad k=0,1,2,\quad p\in\mathbb{N}.$

Із оцінок (5.51) випливає виконання умов (5.50).

Перейшовши у (5.41) до границі, коли $p\to\infty$ переконуємось, що граничні функції $U_s(x,y)$ є розв'язками відповідних рівнянь (5.38) при $(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,3.$

Теорема 5.4.2. *Нехай виконуються умови Теореми 5.4.1. Тоді послідовності функцій $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$ та $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно формул (5.41), де за нульове наближення $D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y)$ та $D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$ вибираємо функції порівняння крайової задачі (5.33)–(5.37):*

1. *збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв'язку крайової задачі* (5.33)–(5.37) *при* $(x, y) \in \overline{D}$;

2. *мають місце оцінки* (5.51)*;*

3. *в області* $\overline{B}_1$ *виконуються нерівності*

$$D^{(k.0)}V_{s,p}(x, y) \leq (\geq) D^{(k.0)}U_s(x, y) \leq (\geq) D^{(k.0)}Z_{s,p}(x, y) \qquad (5.52)$$

для p–парних (непарних), $(x, y) \in \overline{D}_s, \quad s = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2.$

Для доведення єдиності розв'язку задачі (5.33) — (5.37) достатньо провести аналогічні міркування, приведені [57].

Доведемо справедливість нерівностей (5.52). З цією метою припустимо супротивне, що в деякій точці $(x, y) \in D_s$ та номера, наприклад, $p = 2k$ виконується нерівність $V_{s,2n}(x, y) > U_s(x, y)$. Тоді для всякого $\nu \in \mathbb{N}$ в силу нерівностей (5.49) в даній точці

$$U_s(x, y) < V_{s,2n}(x, y) \leq V_{s,2(n+\nu)}(x, y),$$

тобто послідовність функцій $\{V_{s,2(n+\nu)}(x, y)\}$ в цій точці не збігається до розв'язку $U_s(x, y)$, що суперечить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності в (5.52).

Наслідок 5.4.1. *Нехай права частина рівняння* (5.33) $f[U(x, y)] \equiv f[U(x, y); 0]$, *а* $f[0] \geq (\leq) 0$.

Тоді розв'язок крайової задачі (5.33)–(5.37) *з однорідними крайовими умовами* (5.34)–(5.36) *задовольняє нерівності*

$$D^{(k.0)}U_s(x, y) \geq (\leq) 0, \quad s = 1, 2, 3, \quad k = 0, 1, 2, \quad (x, y) \in \overline{D}_s.$$

Приклад 5.4.1. *Дослідити крайову задачу Гурса-Дарбу: в області*

$$D = \{(x, y) | x \in (x_0, x_1], y \in (y_0, g(x))\},$$

$y = g(x)$ — *"вільна" крива,* $g(x_{i-1}) = y_i$, $i = 1, 2$, $g'(x) > 0$ *(Рис.5.2), знайти розв'язок ДРЧП*

$$L_{(1.2)}U(x, y) := f(x, y, U_x, U_y) := f[U(x, y)],$$

$$L_{(1.2)}U(x, y) := D^{(1.2)}U(x, y) + a_1(x, y)D^{(1.0)}U(x, y) + D^{(0.1)}U(x, y),$$

який задовольняє крайові умови:

$$U(x_0, y) = \varphi(y), \quad y \in [y_0, y_1],$$

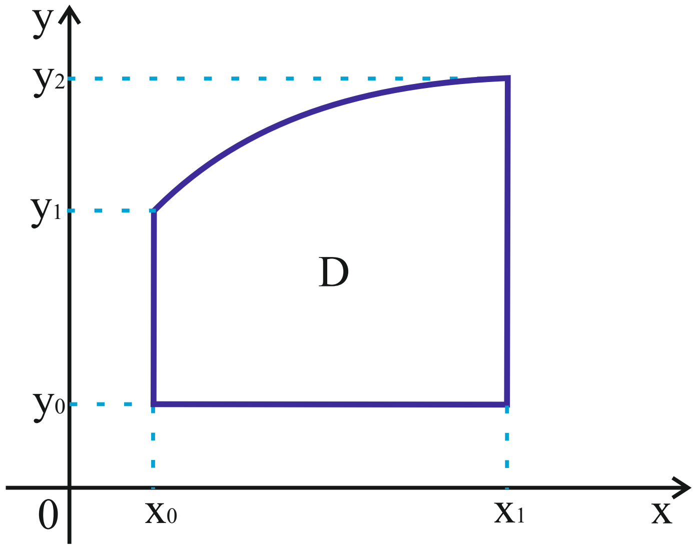


Рис. 5.2

$$U(x, y_0) = \psi_1(x), \quad U_y(x, y_0) = \psi_2(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$
$$U(x, g(x)) = \omega(x), \quad x \in [x_0, x_1],$$

де задані неперервно диференційовні функції $\varphi(y), \omega(x), \psi_i(x), i = 1, 2,$ *задовольняють умови узгодженості*

$$\varphi(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi'(y_0) = \psi_2(x_0), \quad \omega(x_0) = \varphi(y_1).$$

Література

[1] *Азбелев Н.В., Цалюк З.Б.* Об интегральных неравенствах // Мат.сб. — 1962. — 56, №3.— С. 325–342.

[2] *Азбелев Н.В., Цалюк З.Б.* О задаче Чаплыгина // Укр.мат.журн. — 1958. — 10, №1.— С. 3–12.

[3] *Азбелев Н.В., Хохряков А.Я., Цалюк З.Б.* Теоремы о дифференциальном неравенстве для краевых задач // Мат.сб. — 1962. — 59,(101), дополнит.— С. 125–144.

[4] *Алиев Г.Ф., Мамедов Я.Д.* О сходимости некоторых итерационных процессов к решению краевой задачи // Дифференц. уравнения. — 1972. — 8, №5. — С. 871–880.

[5] *Атдаев С.* О применении двух модификаций метода С.А.Чаплыгина к краевой задаче // Исслед. по теории дифференц. уравнений. —Ашхабад: Минвуз Туркм.ССР. — 1987. — С. 17–22.

[6] *Ахмедов К.Т., Сваричевская Н.А., Ягубов М.А.* Приближенное решение двухточечной краевой задачи с параметром методом осреднения функциональных поправок // Докл. АН АзССР. — 1973.— 29, №8. — С. 3–7.

[7] *Бабкин Б.Н.* Решение одной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом Чаплыгина // Прикл.математика и механика. — 1954. — 18, вып.2.— С. 239–242.

[8] *Безвершенко И.И.* Об одном методе построения приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. — 1971. — 7, №7. — С. 1315–1319.

[9] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.— М.: Наука, 1981. — 448 с.

[10] *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. — К. : Наук. думка, 1990. — 96 с.

[11] *Бойчук А. А.* Нелинейные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. — 1998. — Т. 50, №2. — С. 162–171.

[12] *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно–обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К.: Ін-т матем. НАН України, 1995. — 318 с.

[13] *Букжалев Е.Е.* О построении верхних и нижних решений по методу Нагумо // Дифференциальные уравнения — 2004. — Т.40, №6. — С. 723–730.

[14] *Буницкий Е.Л.* К теории функции Грина для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Одесса: Сапожников, 1913. — 335 с.

[15] *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1978. — 189 с.

[16] *Васильев Н. И., Клоков Ю. А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. — 222 с.

[17] *Водахова В.А.* Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. — 1982. — 18, № 2 — С.280–285.

[18] *Гаврилюк І., Кравець І., Макаров В.* Двосторонній метод розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом // Проблеми математики. — 2005. — С. 285–286.

[19] *Гома И.А.* Метод последовательных приближений в двухточечной краевой задаче с параметром // Укр.мат. журн. — 1977. — 29, №6. — С. 800–806.

[20] *Гомонай В.В.* Про один метод наближеного інтегрування задачі Коші для нелінійного диференціального рівняння з відхиляючим аргументом // Доп. АН УРСР. — 1979.—№5, Сер.А. — С. 597–600.

[21] *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

[22] *Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д.* Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. — Рига: Зинатне, 1973. — 135 с.

[23] *Дерр В.Я.* К обобщенной задаче Валле–Пуссена // Дифференц. уравнения. — 1987. — 23, №11 — С. 1861–1872.

[24] *Дикарева Л. Ю.* О методе последовательных приближений А. М. Самойленко // Труды молодых ученых: Сборник науч. трудов, ВГУ: Воронеж. — 1999. — 1. — С. 28–32.

[25] *Евхута Н. А.,Забрейко П. П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 1985. — Т. 37, №2. — С. 162–168.

[26] *Евхута Н. А., Забрейко П. П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений // Доклады АН БССР. — 1985. — Т. 29, №1. — С. 15–18.

[27] *Ешуков Л.Н., Веков А.А., Степанов А.Н.* Проблемы и библиография теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Тр. Рязан. радиотехн. ин-та. — 1972. — Вып.42. — С. 164–192.

[28] *Жданов Г.М.* О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // УМН.— 1961. —Т.16, вып 1./97/.— С. 143–148.

[29] *Задирака К.В.* Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами методом С.А.Чаплыгина // Укр.мат.журн. — 1952. — Т.4, №3.— С. 299–311.

[30] *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 777с.

[31] *Кибенко А.В.* Функция Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром // Докл.АН УССР. Сер.А. — 1963. — №3. — С. 309-314.

[32] *Кибенко А.В., Перов А.И.* О двухточечной краевой задаче с параметром. — Учен.зап.Азерб.ун-та. — 1961. — 28, №3. — С. 21-30.

[33] *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: Наука. — 1987, 30. — С. 3–103.

[34] *Клямко Э.И.* Некоторые приложения метода Чаплыгина к приближенному решению дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // УМН.—1957. —Т.12, вып 4./76/.— С. 305–312.

[35] *Ковач Ю.И.* Итерационный метод интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом /конспект лекций/. — Ужгород: Ужгород.ун-т, 1974. — 66 с.

[36] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. — М.: Наука, 1968. – 500 с.

[37] *Король І. І., Перестюк М. О.* Ще раз про чисельно–аналітичний метод послідовних наближень А .М. Самойленка. // Укр. мат. журн. — 2006. — 58, №4. — С. 472–488.

[38] *Король І. І.* Дослідження існування і побудова розв'язків крайових задач: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.–мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / І. І. Король. — Київ, 2010. — 36 с.

[39] *Король І.І., Перестюк М.О.*Існування і наближена побудова розв'язків крайових задач // Доповіді НАН України. — 2007. — №11.— С. 17–22.

[40] *Красносельський М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений.— М.:Наука, 1969. — 456 с.

[41] *Курпель М.С.* Про деякі модифікації методу С.О.Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп.АН УРСР. Сер.А. — 1969. — №4. — С. 305–306.

[42] *Курпель Н.С., Курченко Т.С.* Двусторонние методы решения систем уравнений. — К.: Наук. думка, 1975. — 184 с.

[43] *Курпель Н.С., Марусяк А.Г.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения с параметрами // Укр.мат.журн. — 1980. — 32, №2.— С. 223-226.

[44] *Курпель Н.С., Охрончук В.И.* Двусторонние оценки решений интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // В кн.: Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977. — С. 50–56.

[45] *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения.— Киев : Наук.думка, 1980. — 268 с.

[46] К условию сходимости метода А. М. Самойленко / А. И. Перов, Л. Ю. Дикарева, С. А. Олейникова, М. М. Портнов // Вестник ВГУ. Серия физика, математика. — 2001. — №1. — С. 111–119.

[47] *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1988. — 304 с.

[48] *Лазурчак И.И., Макаров В.Л.* Двусторонний функционально–дискретный метод для дифференциальных уравнений второго порядка с общими краевыми условиями // Дифф.уравнения. — 2004. — Т.40, №7. — С. 964–977.

[49] *Лепин А.Я., Лепин Л.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. — Рига : Зинатне, 1988. — 211 с.

[50] *Лепин А.Я., Мышкис А.Д.* Об одном подходе к нелинейным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1967. — 3, №11. — С. 1884–1888.

[51] *Лузин Н.Н.* О методе приближенного интегрирования академика С.А.Чаплыгина // Тр.ЦАГИ, вып.141 — 1932.—С. 1–32.

[52] *Лучка А.Ю.* Краевая задача для дифференциальных уравнений с параметрами и ее решение проекционным методом // Докл.АН УССР. Сер.А. — 1989. — №9. — С. 12–15.

[53] *Лучка А.Ю.* Применение итерационных процессов к краевым задачам для дифференциальных уравнений с параметрами // Докл.АН УССР. Сер.А. — 1989. — №10. — С. 22–27.

[54] *Лучка А. Ю.* Проекционно–итеративные методы. — К.: Наукова думка, 1993. — 295 с.

[55] *Лучка А. Ю.* Проекционно–итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — К.: Наукова думка, 1980. — 264 с.

[56] *Мамедов Я.Д.* Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — Баку: МААРИФ, 1974. — 176 с.

[57] *Маринець В.В.* Аналітичні методи в теорії ДРЧП гіперболічного типу.— Ужгород: УжНУ ”Говерла”, 2006. — 136 с.

[58] *Маринець В.В.* Двосторонні методи наближеного інтегрування задачі Коші для диференціально-функціональних рівнянь, заданих в неявному вигляді // Науковий вісник УжДУ. Серія математика.– Ужгород, 1997. — Вип. 2 — С. 63–70.

[59] *Маринець В.В.* Деякі підходи побудови наближеного розв'язку узагальненої задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // УМЖ. — 1995. — Т.47, № 12. — С. 1667–1675.

[60] *Маринець В.В.* Модифікація двостороннього наближення методу наближеного інтегрування узагальненої задачі Гурса //Доп. НАН України. — 1995. — № 10. — С. 18–20.

[61] *Маринец В.В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения.– 1988. — Т.24, №8. — С. 1393–1397.

[62] *Маринецъ В.В.* Об одной краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Вычислительная и прикладная математика.— К., 1986. — №59. — С. 24–31.

[63] *Маринецъ В.В.* Об одной смешаной задаче с нелокальными краевыми условиями для систем нелинейных псевдопараболических уравнений // Нелинейные эволюционные уравнения в прикладных задачах. — К.: ИМ АНУССР. — 1991. — С. 78–80.

[64] *Маринец В.В.* Об одном подходе построения итерационных методов приближенного интегрирования краевых задач теории пластин и оболочек // Материалы VIII Всесоюзной конф. "Численные методы решения задач теории упругости и пластичности". — Новосибирск, 1984.— С. 194–198.

[65] *Маринецъ В.В.* Об одном подходе построения приближенных решений для дифференциальных уравнений, заданных в неявном виде // Аналитические методы исследования нелинейных дифференциальных систем. — К.: ИМ АН Украины. — 1992. — С. 36–44.

[66] *Маринецъ В.В.* Один підхід побудови двосторонніх наближень до розв'язку узагальненої задачі Гурса для диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом, заданих в неявному вигляді //Доп. НАН України. — 1994. — № 5. — С. 12–14.

[67] *Маринецъ В.В.* Один підхід побудови швидкозбіжних ітераційних процесів наближеного інтегрування задачі Коші для систем хвильових рівнянь на площині // Доп. НАН України. — 1993. — № 7. — С. 15–18.

[68] *Маринецъ В.В.* Про одну мішану задачу для системи визначених квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних з відхиляючим аргументом // УМЖ. — 1994. — Т.46, № 11.— С. 1581–1585.

[69] *Маринецъ В.В., Маринецъ К.В.* Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу // ДАН України. — 2013. — № 10. — С. 23–28.

[70] *Маринецъ В.В., Маринецъ К.В.* Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу //

Збірник наук. праць ”Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій”// Львів, НАНУ фіз.-мех.інститут ім. Г.В. Карпенка. — 2013. — Випуск 10. — С. 56–68.

[71] *Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю.* Двосторонній метод наближеного інтегрування крайових задач з параметром // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2004. — Вип. 9. — С. 32–44.

[72] *Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю.* Про одну крайову задачу теорії ДРЧП гіперболічного типу в області із складною структурою краю // Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла». — 2014. — Вип.26, № 2. — С. 110—117.

[73] *Маринец В.В., Маринец Т.И.* Об одном методе приближенного интегрирования краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Краевые задачи в теории фильтрации: Тез.докл.Всесоюзн.совещания-семинара. — Ужгород, 1976. — С. 142–143 .

[74] *Маринецъ В.В., Маринецъ Т.И.* Построение итерационных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений неявного вида // Аналитические методы нелинейной механики. — К.:ИМ АН УССР — 1981. — С. 86—98.

[75] *Маринец В.В., Маринец Т.И.* О краевой задаче для нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Тр.сем. по дифференц.уравнениям каф.дифф.уравнений УжГУ. — Ужгород, 1978.— С.1–143. — Деп.в ВИНИТИ, №2840–78 Деп.

[76] *Маринец В.В., Маринец Т.И.* Об одном подходе построения итерационных процесов приближенного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Ужгород, 1978. — 32 с. — Деп.в ВИНИТИ, №1153–78 Деп.

[77] *Маринец В.В., Маринец Т.И.* Дифференциальные неравенства.— Ужгород, 1982.— 102 с. — Деп.в ВИНИТИ, №5897–82.

[78] *Маринецъ В.В., Питьовка О.Ю.* Двосторонній метод дослідження задач з параметрами у крайових умовах // Міжнар. наук.

конф. ”Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування”, Ужгород, 18–23 вересня 2006 р. Тези доповідей. — Ін-т математики НАН України, 2006 — С. 68–69.

[79] *Маринець В.В., Питьовка О.Ю.* Прискорення збіжності альтернуючого двостороннього методу // Міжнар. наук. конф. ”Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, Мелітополь, 16–21 червня 2008 р. Тези доповідей.— Мелітополь, 2008 — С.78–79.

[80] *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про один підхід дослідження двоточкових крайових задач // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2002. — Вип. 7. — С. 69–75.

[81] *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про один підхід до дослідження задач з параметрами у крайових умовах // Нелінійні коливання — 2008. — Т.11, №3. — С. 348–364.

[82] *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про одну задачу з параметрами в крайових умовах // Міжнар. конф. ”Питання оптимізації обчислень (ПОО —XXXII)”, присвяч. пам’яті академіка В.С.Михалевича, смт. Кацивелі (Крим), 19–23 вересня 2005 р. Праці конф.— К., 2005. — С. 139.

[83] *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про одну задачу з параметром в крайових умовах // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2005. — Вип. 10-11. — С. 70–76.

[84] *Маринець В. В., Питьовка О.Ю.* Про одну задачу з параметром в крайових умовах // Міжнар. конф., присвячена 60-річчю кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету ім.Тараса Шевченка, Київ, 6-9 червня 2005 р. Тези доповідей.— К., 2005 — С.67.

[85] *Маринець В.В., Рего В.Л.* Крайова задача для систем хвильових рівнянь // Нелінійні коливання — 1999. — Т.2, № 1. — С. 36–41.

[86] *Маринець В.В., Трошина А.В.* Узагальнена задача Дарбу // Науковий вісник УжНУ. Сер. матем. - Ужгород. — Патент, 1999. — Вип.4. – С. 79–84.

[87] *Маринец В. В., Шомоди О.О.* Двусторонние методы интегрирования краевых задач // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2000. — Вип. 5. — С. 63–74.

[88] *Маринець К. В.* Дослідження розв'язків триточкових задач типу Коші–Ніколетті та зведення їх до двоточкових // Науковий вісник КНУ: Фізико–математичні науки. — 2009. — №. 3. — С. 85–90.

[89] *Маринець К. В.* Дослідження розв'язків триточкових задач типу Коші-Ніколетті та зведення їх до двоточкових // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV): міжнар. симп., 24-29 вер. 2009 р. : праці допов. — К., 2009. — Т. 2. — С. 85–90.

[90] *Маринець К. В.* Про дослідження крайових задач з нелінійними граничними умовами // Наук. вісн. Ужгор. універ.: Математика і інформатика. — 2011. — 22, №1. — С. 79–92.

[91] *Маринець К. В.* Про одну нелінійну триточкову задачу типу Коші–Ніколетті // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. — 2009. — №. 19. — С. 53–63.

[92] *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Диффренциальные уравнения математической физики.— М.: Изд-ство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 368 с.

[93] *Мартынюк А.А., Гутовски Р.* Интегральные неравенства и устойчивость движения. — Киев: Наук.думка, 1979. — 272 с.

[94] *Митропольский Ю.А., Молчанов А.А.* Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. — К.: Наукова думка, 1981. — 238 с.

[95] *Мосягин В.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве // Учен. зап. Ленинград. пед. ин-т. —1968. —387. —С. 198–206.

[96] *Мышкис А.Д.* Замечание к статье Г.М. Жданова "О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом" // Успехи.мат.наук. — 1961. — 16, вып.2/98/. — С.131-133.

[97] *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегродиффенциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. — 1979. — 15, № 1 — С. 96–105.

[98] *Неймарк Ю.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[99] *Охрончук В.И.* О дифференциальных неравенствах для нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Укр.мат.журн. — 1975. — 27, №2.— С. 256–262.

[100] *Перестюк Н. А., Ронто А. Н.* Об одном методе построения последовательных приближений для исследования многоточечных краевых задач // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, №9. — С. 1243–1253.

[101] *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики: Навч. посібник.// 2-е вид., перероб. й доп. — К.: Либідь, 2001. — 336 с.

[102] *Перестюк М.О., Маринець В.В.* Теорія рівнянь математичної фізики.— Київ: Либідь, 2006. — 424 с.

[103] *Питьовка О.Ю.* Двосторонній метод дослідження задач з параметрами у крайових умовах // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2006. — Вип. 12–13. — С. 92–98.

[104] *Питьовка О.Ю.* Двосторонній метод наближеного інтегрування крайових задач з параметрами у крайових умовах // Наук. вісн. МТІ. — 2006. — №2. — С. 23–31.

[105] *Питьовка О.Ю.* Двосторонній метод дослідження задач з параметрами у крайових умовах // XII Міжнар. науково-практ. конф. "XXI століття: Наука. Технологія. Освіта", м.Мукачево, 31 травня-1 червня 2007. Тези доповідей.—Мукачево, 2007. — С. 389–390.

[106] *Питьовка О.Ю.* Про один підхід прискорення збіжності альтернуючого двостороннього методу // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2008. — Вип.16 — С. 135–145.

[107] *Пухов Г.Е.* Дифференциальный анализ электрических цепей. — К.: Наукова думка, 1982. — 496 с.

[108] *Ронто А. Н., Ronto M., Щобак Н.М.* О параметризации трехточечных нелинейных краевых задач // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, №3. — С. 395–413.

[109] *Ронто А. М.* Чисельно–аналітичні методи дослідження багатоточкових крайових задач: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.–мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / А. М. Ронто. — Київ, 1997. — 16 с.

[110] *Ронто М., Маринець К. В.* Про дослідження крайової задачі з двоточковими нелінійними граничними умовами // Інформаційні проблеми комп'ютерних систем, юриспруденції, енергетики, економіки, моделювання та управління (ПНМК-2011): міжнар. проблемно-наук. міжгалуз. конф., 17-20 трав. 2011 р.: матер. конф. — Бучач, 2011. — С. 140–143.

[111] *Ронто М., Маринець К. В.* Про дослідження розв'язків деяких крайових задач з нелінійними граничними умовами // Диференціальні рівняння та їх застосування: міжнар. наук. конф., присв. 65-річчю каф. інт. та диф. рів. Київ. нац. унів. ім. Т. Шевченка, 8–10 черв. 2011 р. : матер. конф. — К., 2011. — С. 143.

[112] *Ронто М. Й., Маринець К. В.* Про параметризацію крайових задач з нелінійними граничними умовами // Нелінійні коливання. — 2011. — Т.14, №3 — С. 359–391.

[113] *Ронто М., Месарош Й.* Некоторые замечания о сходимости численно–аналитического метода последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 1996. — 48, №1. — С. 90–95.

[114] *Ронто М. Й., Щобак Н. М., Маринець К. В.* Про параметризацію крайових задач типу Коші–Ніколетті // Науковий Вісник УжНУ: Математика і інформатика. —№16. — 2008. — С. 163–173.

[115] *Ронто Н.И., Ронто В.А.* Об одном методе исследования краевых задач с параметрами // Краевые задачи математической физики. — Киев: Наук.думка, 1990. — С. 3–10.

[116] *Ронто Н. И., Маринец Е. В.* Исследование решений некоторых краевых задач с нелинейными граничными условиями // Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXVII): міжнар. молод. матем. школа, 22–29 вер. 2011 р.: матер. конф. — К., 2011. — С. 163.

[117] *Ронто Н. И., Маринец Е. В.* Применение параметризации при численно-аналитическом исследовании решений нелиней-

ных краевых задач // Доповіді НАН України. — 2012. — №4. — С. 34–38.

[118] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №1. — С. 102—107.

[119] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №2. — С. 225–243.

[120] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №7. — С. 960–979.

[121] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №12. — С. 1656–1672.

[122] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. V // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №5. — С. 663–673.

[123] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. VI // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №7. — С. 960–971.

[124] *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно–аналитического метода: достижения и новые направления развития. VII // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №9. — С. 1244–1261.

[125] *Самойленко А. М.* Об одной последовательности полиномов и радиусе сходимости ее суммы Пуассона–Абеля // УМЖ. — 2003. — 65, №7. — С. 1119–1130.

[126] *Самойленко А. М.* Численно–аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. — 1965. — Т. 17, №4. — С. 82–93.

[127] *Самойленко А. М.* Численно–аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Укр. мат. журн. — 1966. — Т. 18, №2. — С. 50–59.

[128] *Самойленко А. М., Лаптинский В. Н.* Об оценках периодических решений дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1982. — №1. — С. 30–32.

[129] *Самойленко А. М., Лаптинськиий В. Н., Кенжебаев К. К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных задач // Труды Института математики НАН Украины. Т. 29. — К.: Ин-т матем. НАН Украины, 1999. — 220 с.

[130] *Самойленко А.М., Лаптинский В.Н., Кенжебаев К.* Конструктивные методы исследования периодических и многоточечных краевых задач. — К.: Институт математики, 1999. — 209 с.

[131] *Самойленко А. М., Ле Лыонг Тай* Об одном методе исследования краевых задач с нелинейными краевыми условиями // УМЖ, 1990. — Т. 42, №7. — С. 951–957.

[132] *Самойленко А. М., Мартынюк С. В.* Обоснование численно–аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями // УМЖ. — 1991. — Т. 43, № 9. — С. 1231–1239.

[133] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1974. — Т. 24, №3. — С. 411–418.

[134] *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наукова думка, 1992. — 279 с.

[135] *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно–аналитический метод исследования периодических решений. — К.: Вища школа, 1976. — 180 с.

[136] *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно–аналитический метод исследования решений краевых задач. — К.: Наукова думка, 1985. — 224 с.

[137] *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Наукова думка, 1992. — 280 с.

[138] *Самойленко А.М., Ронто Н.И., Ронто В.А.* Двухточечная краевая задача с параметром в граничных условиях // Докл.АН УССР. Сер.А. — 1985. — №7. — С. 23–26.

[139] *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.

[140] *Сеидов З.Б.* Краевая задача с управляющими параметрами для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // Укр.мат.журн. — 1976. — 28, №5. — С. 690–695.

[141] *Скоробогатько В.Я.* Разложимость дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах // Укр.мат.журн. — 1960. — 12, №2. — С. 215–219.

[142] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. IV, часть вторая. — М.: Наука, 1981. — 550 с.

[143] *Собкович Р.И.* Численно-аналитический метод исследования краевых задач с управлениями: Дис.канд.физ-мат.наук. — Киев, 1983. — 161 с. —Машинопись.

[144] *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: Изд-во иностр. лит., 1953. — 256 с.

[145] *Страхов В.Н.* К вопросу о скорости сходимости в методе простой итерации // Журн.вычисл. математика и матем.физика. — 1973. — 13, №6. — С. 1602–1606.

[146] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977. — 724 с.

[147] *Тондл А.* Нелинейные колебания механических систем. — М.: Мир, 1973. — 344 с.

[148] *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Математическая физика и нелинейная механика. — 1990. — Вып. 13. — С. 31–36 .

[149] *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Минск: Наука и техника, 1986. — 199 с.

[150] *Філіпчук М. П., Бігун Я. Й.* Чисельно–аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. 50, №1. — С. 1581–1585.

[151] *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в физических системах. — М.: Мир, 1968. — 432 с.

[152] *Хейл Дж. К.* Теория функционально–дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 422 с.

[153] *Хосабеков О.* Достаточные условия сходимости метода Ньютона–Канторовича для краевой задачи с параметром // Докл.АН ТаджССР. — 1973. — №8. — С. 14–17.

[154] *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избр. тр. по механике и математике.— М.–Л.: ГИТ.–Т., 1948. — С. 347–444.

[155] *Черевко І. М., Бабюк О.К.* Наближення періодичних розв'язків лінійних диференціально–різницевих рівнянь нейтрального типу методом сплайн-колокацій // Нелінійні коливання. — 2006. — Т.9, № 2. — С. 147–154.

[156] *Черевко І. М., Матвій О.В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. — 2004. — Т.7, № 2. — С. 208 – 216.

[157] *Чудновський А.Ф.* Теплофизика почв. М: Наука. – 1976. – 352 с.

[158] *Шремр И.* Некоторые замечания о линейных функционально-дифференциальных неравенствах гиперболического типа // Укр.мат.журн., — 2008. —Т.60, №2. — С. 283–292.

[159] *Шувар Б.А.* Применение некоторых модификаций метода Чаплыгина к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом // В кн.: Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — К.: Киев.пед.ин-т, 1973. — С. 283–292.

[160] *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений // Дифференц. уравнения. — 1983. — 19, № 1 — С. 145–152.

[161] *Щобак Н.М.* Дослідження деяких нелінійних крайових задач з параметрами // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. та інформ. — 2004. — Вип. 9. — С. 85–99.

[162] *Эйдельман Ю.С.* Краевая задача для дифференциального уравнения с параметром // Дифф. уравнения. — 1978. — 4, №7. — С. 1335–1337.

[163] *A.Qi, Y. Liu* Monotone iterative techniques and a periodic boundary value problem for first order differential equations with a functional argument // Georgian Mathematical Journal — 2000 — Vol.7, №2 — P. 373–378.

[164] *Agarwal R.P.,Regan D. O.* A survey of recent results for initial and boundary value problems singular in the dependent variable: Handbook of differential. — North-Holland, Amsterdam: Elsevier. — 2004. — P. 1–68.

[165] *Ascher U.M., Mattheij R.M.M., Russell R.D.* Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Classics in Applied Mathematics. — Philadelphia: SIAM. — 1995. — Vol. 13. — 621 p.

[166] *Augustynowicz A.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional-differential equation of neutral type / Augustynowicz A., Kwapisz M. // Math. Nachr. — 1990. — 145. — P. 255–269.

[167] *Bainov D. D., Sarafova G.H.* An application of the numerical-analytic method of A.M. Samoilenko for investigation of periodic systems of integro-differential equations // Arch. Math.: Brno. — 1979. — 15, №2. — P. 67–80.

[168] *Bashir Ahmad, Rahmat Ali Khan, Paul W.Eloe* Generalized quasilinearization method for a second order three point boundary–value problem with nonlinear boundary conditions // Electronic Journal of Differential Equations — 2002. — №90 — P. 1–12 — http://ejde.math.swt.edu. or http://ejde.math.unt.edu

[169] *Bers L., Yohn F., Schechter M.* Partial differential equations. NEW YORK — LONDON — SYDNEY: 1964.

[170] *Bognar G., Ronto M.* Numerical-Analytic Investigation of the Radially Symmetric Solutions for Some Nonlinear PDEs // Computers & Mathematics with Applications. — 2005. — 50. — PP. 117–123, 983–991.

[171] *BoichukA.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems // VSP Utrecht, Boston — 2004.

[172] *Cabada A., Habets P., Lois S.* Monotone method of the Neumann problem with lower and upper solutions in the reverse order // Appl.Math.Comput.— 2001. —117. — P. 1–14.

[173] *Cabada A.,Lomtatidze A., Tvrdý M.* Periodic problem involving quasilinear differential operator and weak singularity // Adv. Nonlinear Stud., 2007.— 7, №4. — P. 629-649.

[174] *Cesari L.* Functional Analysis And Periodic Solutions Of Non-Linear Differential Equations / L. Cesari // Interscience Publishers: John Wiley & Sons, Inc., New York. — 1963. — Vol. I. — P. 149–167.

[175] *Cherpion M., Coster C., Habets P.* A constructive monotone iterative method for second order BVP in the presence of lower and upper solutions // Appl.Math.Comput. — 2001. —123. — P. 75–91.

[176] *Collatz L.* Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin — Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1964 — P. 446–450.

[177] *Courant R.* Partial differential equations. NEW YORK — LONDON: 1962.

[178] *Doddaballapur V., Eloe P.W.* Monotone and quadratic convergence of approximate solutions of ordinary differential equations with impulse // Communications in Applied Analysis. — 1998. — 2. — P. 373–382.

[179] *Dotson W.G.* On the Mann iteration process. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — 149. — P. 65–73.

[180] *Eloe P.W., Zhand Y.* A quadratic monotone iteration scheme for two-point boundary value problems for ordinary differential equations // Nonlinear Analysis. — 1998. — 33. — P. 443–453.

[181] *Farkas M.* Periodic Motions / M. Farcas // Applied Mathematical Sciences. — Springler–Verlag: New York–London. — 1994. — Vol. 104. — P. 577.

[182] *Feckan M.* Parametrized singular boundary value problems / M. Fechkan // J. Math. Anal. Appl. — 1994. — 188, №2. — P. 417—425.

[183] *Floquet G.* Sur les equation differentielles lineqres a' coefficients periodiques // Ann. Ecole Norm.Sup. — 1883. — 12. — P. 47-89.

[184] *Forsythe G.V., Wasow W.R.* Finit-difference methods for partial differential equations. John WILEY. Sons, INC. NEW YORK — LONDON: 1959. — 482 p.

[185] *Gaines R. E., Mawhin J. L.* Coincidence degree, and nonlinear differential equations — Lecture Notes in Mathematics 56. — Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 1977. — 262 p.

[186] *I.P.Gavrilyuk, V.L.Makarov* Explicit and approximate solution of second order evolution differential equations in Hilbert space. // Preprint,Universitet Leipzig NTZ — 1997.— 21.— P. 23.

[187] *Hale J.K.* Oscillations in Nonlinear Systems. — McGraw-Hill: New York, 1963 . — 180 p.

[188] *Jankowski T.* An extension of the method of equasilinearization // Archivum mathematicum (Brno).—2003 — Vol.39. — P. 201-208.

[189] *Jankowski T.* Monotone and numerical-analytic methods for differential equations // Comput. Math. Appl. — 2003. — 45, №12. — P. 1823–1828.

[190] *Jankowski T.* Numerical-analytic methods for differential-algebraic systems // Acta Math. Hungar. — 2001. — 95, № 3. — P. 243–252.

[191] *Jankowski T.* The application of numerical-analytic method for systems of differential equations with a parameter // Ukrain. Math. J. — 2002. — 54, №4. — P. 671–683.

[192] *Jankowski T., Lakshmikantham V.* Monotone iterations for differential equations with parameter // J.Appl.Math.Stoch.Anal. — 1997. — 10. — P. 273–278.

[193] *Jinxiu Mao.,Zengqin Zhao, Naiwei Xu* On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems // Electron. J. Qual.Theory Differ. Equ. — 2010. — №16. — P. 1–8.

[194] *Keller H. B.* Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems. — Dover Publications, Inc.: New York, 1992. — 397 p.

[195] *Khan R. A.* The generalized method of quasilinearization and nonlinear boundary value problem with integral boundary conditoins // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2003. — No 10. — P. 1-15.

[196] *Kiguradze I., Mukhigulasvili S.* On periodic solutions of two-dimensional nonautonomous differential systems // Nonlinear Analysis. — 2005. — 60. — P. 241–256.

[197] *Krasnoselsky M.A.* Functional-analytic methods in the theory of nonlinear oscillations, in : Proceedings of the Fifth International Conference on Nonlinear Oscillations,— 1970. — Vol. 1 — P. 323 – 331.

[198] *Kurpel N. S.,Marusjak A. G.* A multipoint boundary value problem for differential equations with parameters // Ukrain. Math. J. — 1980. — 32, №2. — P. 223–226.

[199] *Kwapisz M.* On modification of the integral equation of A.M.Samoilenko's numerical-analytic method // Math.Nachr.— 1992. — 157.— P. 125–135.

[200] *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Ukrain. Math. J. — 1992. — 44, №1. — P. 115–119.

[201] *Ladde G., Lakshmikantham V., Vatsala A.S.* Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations // Pitman — 1985.

[202] *Lakshmikantham V., Leela S.* Differential and integral inequalities: Theory and applications // New York: Acad.press. —1969. — Vol.1. — P. 390.

[203] *Marynets V.V., Dobryden A.V.* About one characteristic initial value problem // Nonlinear oscillations. — 2001. — V.4, №4. — P. 487–499.

[204] *Marynets V.V. and Marynets K.V.* On Gursat-Darboux boundary-value problem for systems of non-linear differential equations of hyperbolic type //Miskolce Mathematical Notes. – 2013. – V. 14, №3. – P. 1009–1020.

[205] *Marynets V.V., Marynets K.V. Pytovka O.Yu.* On one constuctive method of the differential equations of the hyperbolic typ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту — 2015. — Вип. № 2 (27). — С. 76–85.

[206] *Marynets K.* On the parametrization of nonlinear boundary value problems with nonlinear boundary conditions // Miskolc Mathematical Notes. — 2011. — Vol.12, №. 2. — P. 209–223.

[207] *Neudorf W. and Schönefeld R.* Konvergenzbeschleunigung dureh modifiziertes Picard-Verfahrev. // Zast.mat. — 1972. — V17, №2. — P. 335–349.

[208] *Ntouyas S. K.* Nonlocal initial and boundary value problems: a survey, Handbook of Differential Equations // Ordinary Differential Equations. — Elsevier B.V.: Amsterdam. — 2005. — Vol. II. — P. 461–557.

[209] Numerical-analytic technique for investigation of solutions of some nonlinear equations with Dirichlet conditions / Ronto A., Ronto M., Holubova G., Necesal P. // Boundary value problems, doi:10.1186/1687–2770–2011–58. — 2011. — 20 p.

[210] On periodic solutions of autonomous difference equations / A.N. Ronto, M. Ronto, A.M. Samoilenko and S.I. Trofimchuk // Georgian Math. J. — 2001. — 8, №1. — P. 135–164.

[211] *Pachpatte B.G.* A note on the order differential inequalities // Bol.Acad.scienc.fis., mat.y natur. — 1982. — 42. — P. 127–128.

[212] *Pytovka O.* A modified two–sided approximation method for a four–point Vallee–Poussin type problem // Miskolc Mathematical Notes — 2008. — Vol.9, №2. — P. 137–146.

[213] *Rabczuk R.* Elementy nierownosci rozniczkowych. — Warczawa: Panstwowe wydawnictwo naukove. — 1976. — 270 p.

[214] *Rachunkova I.* Strong singularities in mixed boundary value problems // Math. Bohem. — 131, № 4. — 2006. — P. 393–409.

[215] *Rachunkova I., Stanek S.* Solvability of nonlinear singular problem for ordinary differential equations. — Hindawi Publ. Corporation: New York, 2009. — 279 p.

[216] *Rachunkova I., Stanek S., Tvrdy M.* Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations// Handbook of Differential Equations: Elsevier/North-Holland, Amsterdam. — 2006. — P. 607–723.

[217] *Rahmat Ali Khan* The generalized method of quasilinearization and nonlinear boundary value problems with integral boundary conditions // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations — 2006 — №3. — P. 1-12 —http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[218] *Ronto A.N.* On some boundary value problems for Lipschitz differential equations // Nonlinear Oscilations. — 1998. — 1. — P. 74 – 94.

[219] *Ronto A., Ronto M.* A note on the numerical-analytic method for nonlinear two-point boundary-value problems // Nonlinear Oscilations. — 2001. — 4, №1. — P. 112—128.

[220] *Ronto A., Ronto M.* Existence results for three-point boundary value problems for systems of linear functional differential equations // Carpathian Journal of Mathematics. — 2012. — 28, №1. — P. 163-182.

[221] *Ronto A., Ronto M.* On a Cauchy –Nicoletty type three-point boundary value problem for linear differential equations with argument deviations // Miskolc MathematicalNotes. — 2009. — Vol. 10, №2. — P. 173–205.

[222] *Ronto A. N., Ronto M., Shchobak N.M.* On the parametrization of three-point nonlinear boundary value problems // Nonlinear Oscillations. — 2004. — 7, №3. — P. 384–402.

[223] *Ronto A., Ronto M.* On the investigation of some boundary value problems with non-linear conditions // Math. Notes.—2000.—1, №1.—P. 43–55.

[224] *Ronto A., Ronto M.* On Nonseparated Three-Point Boundary Value Problems for Linear Functional Differential Equations // Abstract and Applied Analysis: Hindawi Publishing Corporation. — 2011. — 22 p.

[225] *Ronto A., Ronto M.* Periodic successive approximations and interval halving // Miskolc Math. Notes. — 2012. — Vol. 13, №2. — P. 459–482.

[226] *Ronto A., Ronto M.* Successive approximation method for some linear boundary value problems for differential equations with a special type of argument deviations // Miskolc Mathematical Notes. — 2009. — Vol. 10, №1. — P. 69–95.

[227] *Ronto A., Ronto M.* Successive approximation technique for investigation of solutions of some boundary value problems for functional-differential equations with special deviation of argument // Special Issue of International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications. — 2009. — Vol.3, №1. — P. 127–139.

[228] *Ronto A., Ronto M.* Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations: Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations — 2008. — Vol. IV. — P. 441–592.

[229] *Ronto M.* Numerical–analytic successive approximation method for non–linear boundary value problems // Nonlin. Analysis: Theory, Methods, and Applications. — 1997. — 30, №. 5. — P. 3179–3188.

[230] *Ronto M.* On numerical–analytic method for BVPs with parameters // Publ. Univ. Miskolc Ser. D Nat. Sci. Math. — 1996. — Vol.36, №2. — P. 125–132.

[231] *Ronto M.* On some existence results for parametrized boundary value problems // Publ. Univ. Miskolc Ser. D Nat. Sci. Math. — 1997. — Vol.37. — P. 95–103.

[232] *Ronto M.* On non-linear boundary value problems containing parameters // Arch. Math. (Brno) — 2000. — Vol.36. — P. 585–593.

[233] *Ronto M.* On the investigation of parametrized non–linear boundary value problems // Nonlinear Analysis — 2001. — Vol.47. — P. 4409–4420.

[234] *Ronto M.* On two numerical-analytic methods for the investigation of periodic solutionso // Periodica Mathematica Hungarica. — 2008. — Vol. 56, №1. — P. 121–135.

[235] *Ronto M.,Galantai A.* A computational modification of the numerical-analytic method for periodic BVPs // Nonlinear Oscillations. — 1999. — 2, № 1. — P. 109–114.

[236] *Ronto M., Marynets K.* On numerical–analytic investigation of nonlinear boundary–value problems with integral boundary conditions // Differential equations and their applications: intern. scient. conf., 27–29 September 2012.: conf. materials. — Uzhhorod, 2012. — P. 10.

[237] *Ronto M., Marynets K.* On numerical–analytic method for boundary–value problems with four–point nonlinear boundary conditions // Information problems of computer systems, jurisprudence, energetics, economics, modeling and management (SPIC-2012): intern. scient. and problem inter-branch conf., 07-10 June 2012. — Buchach, 2012. — P. 9–14.

[238] *Ronto M., Marynets K.* On the parametrization of boundary-value problems with three-point non-linear restrictions // Miskolc Mathematical Notes. — 2012. — Vol.13, №. 1. — P. 91–106.

[239] *Ronto M. I., Marynets'K. V.* On the parametrization of boundary-value problems with two-point nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. — 2012. — Vol.14, №3. — P. 379–413.

[240] *Ronto M., Marynets K.* Parametrization for non–linear problems with integral boundary conditions // Electronic Journal of Quallitative Theory of differential Equations, QTDE. — 2012. — No.99. — P. 1–23, http.//www.math. u-szeged.hu/ejqtde/

[241] *Ronto M., Natalija Shchobak, Kateryna Marinets* On Cauchy-Nicoletti type boundary-value problems // Differential Equations

And Their Applications: intern, scient. conf., 16-21 June 2008. — Melitopol, 2007. — P. 96.

[242] *Ronto M., Samoilenko A.M.* Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems // World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000. — 468 p.

[243] *Ronto M., Savina T. V.* Numerical-analytic method for three-point boundary-value problems // Math. Zh. — 1994. — № 3. — P. 393–403.

[244] *Ronto M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical–analytic method for differential and difference equations in partially ordered Banach space, and some applications — Miskolc, 1996. — P. 60. (Preprint / Univ. Miskolc. Inst. Math., 96–02).

[245] *Ronto M., Shchobak N.* On parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2004. — P. 1–24.

[246] *Ronto M., Shchobak N., Marinets K.* On the numerical–analytic investigation of Cauchy–Nicoletti type boundary–value problems // Ljapynov Functions Method: The 9th Crimea International Mathematical School , September 15-20, 2008, Aluzhta, 2008. — P. 210.

[247] *Ronto M., Shchobak N.* On the numerical–analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations — 2003. — Vol.6, №4. — P. 482–510.

[248] *Ronto M., Tegen R.M.* Successive approximation method for three point boundary- value problem with singular matrixes // Mathematica Pannonica. 1994.— 5, №1. — P. 15–29.

[249] *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Scientific, 1995. — 462 p.

[250] *Schechter E.* Some remarks concerning the Tchaplygin method for systems ordinary differential equations // Mathematica (Cluj). — 1965. — 70, №1. — P. 139–143.

[251] *Simon L.* Application of monotone type operators to parabolic and functional parabolic PDE's: Handbook of differential equations:

evolutionary equations.— Elsevier, North-Holland: Amsterdam. — 2008. — Vol.IV. — P. 267–321.

[252] *Smitalova K.* On bilateral solutions of linear differential equations with lags // Acta Fac rerum natur. Univ Comen Math. — 1975. — 31.— P. 121–126.

Предметний покажчик

Міністерство освіти і науки України
ДВНЗ Ужгородський національний університет
Мукачівський державний університет

Маринець В.В., Маринець К.В., Питьовка О.Ю.

Аналітичні методи дослідження крайових задач

Наукове видання

Редактор	PPPPP
Художньо-технічна редакція	PPPPP
Виробничий супровід	PPPPP

Підписано до друку
Формат
Папір
Замовлення

Свідоцтво про державну реєстрацію
Адреса, тел./факс