ПРО РІВНЯННЯ ТИПУ БАБА, ДІРАКА ТА ВЕЙЛЯ У ПРОСТОРАХ ДОВІЛЬНИХ РОЗМІРНОСТЕЙ*)

І.Ю. Кривський

Інститут електронної фізики НАН України, 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 21
E-mail: iep@iep.uzhgorod.ua

Наведене узагальнення рівнянь типу Баба – лінійних рівнянь першого порядку для полів – локальних коваріантів групи Пуанкаре P з довільним лоренцовим спіном $S_{\mu\nu}$. Узагальнення здійснено на випадок просторів Мінковського R^{1+N} з довільним N. Наведено конструктивний метод явної реалізації незвідних $2^n \times 2^n$-матриць γ_μ, через які виписуються $P(1,N)$-інваріантні рівняння типу Дірака у просторах Мінковського R^{2n} та R^{2n+1}, а також рівняння типу Вейля у просторах R^{2n} з довільним $n = 1,2,\ldots$.

Вступ

Виклад теорій найрізноманітніших релятивістських рівнянь та їх узагальнень на випадок простору-часу різних розмірностей міститься у великому числі оригінальних робіт минулого століття, а також у багато-чисельних підручниках і монографіях, при-чому – на різному рівні детальності і математичної коректності та з викладом різних аспектів використання цих рівнянь у конкретних фізичних задачах та моделях. Однак вживані при цьому означення різних понять далеко не уніфіковані, а часто – і не адекватні. Бо, наприклад, не завжди чітко розрізняється класична та квантова теорія поля, або класична теорія поля та теорія квантово-механічної хвильової функції частинки чи системи частинок, скажімо, на рівні вимог математично послідовної й фізично бездоганної монографії фон Неймана [1].

У даному викладі розглядаються деякі можливі узагальнення відомих релятивістських рівнянь *першого порядку* для класичних полів як *локальних коваріантів* групи Пуанкаре P *з довільним лоренцевим спіном* $S_{\mu\nu}$. Узагальнення торкається як випадку звичайного 4-вимірного простору-часу R^4 (коли $P = P(1,3) \equiv IO(1,3)$, де $O(1,3)$ - універсальна накриваюча групи власних ортохронних перетворень Лоренца в R^4), так і випадку довільно-вимірного простору-часу R^{1+N} (коли $P = P(1,N) \equiv IO(1,N)$). Згадується один цікавий випадок *"зв'язаності"* незвідних полів, які входять у поле як звідний локальний P-коваріант, що задовольняє виключно простій системі рівнянь першого порядку. Наводяться також рекутентні формули, які ефективно реалізують *незвідні зображення* алгебри Кліффорда-Дірака довільно можливих розмірностей і визначають незвідні рівняння типу Дірака та Вейля у просторах довільних розмірностей. Подібні дослідження можуть виявитись актуальними для побудови різних компаунд-моделей для полів (частинок) вищих спінів чи по-в'язаних з вищими групами симетрій, так і у підходах, які використовують у тій чи іншій формі поля у багатовимірних просторах (див., наприклад, [2,3] та посилання там).

*) Робота доповідалася на міжнародній конференції з актуальних проблем сучасної теоретичної фізики (Ужгород, 20-23 жовтня 1999 р.), присвяченій пам'яті Ломсадзе Ю.М. (14.12.1924-10.03.1988).

1. Про використовувані поняття та позначення

Нагадуємо добре відомі результати в основному для ідентифікації понять та позначень, що використовуються в даному викладі.

Полем як локальним коваріантом групи Пуанкаре $P(1,3) = IO(1,3)$ називають багатокомпонентну (дійсну чи комплексну) функцію

$$\varphi = (\varphi^A(x)); A = 1,2,\dots,M \equiv \overline{1,M}; x \in (x^\mu) \in R^4, \quad (1.1)$$

яка при перетвореннях

$$x \equiv (x^\mu) \to x' = \Lambda x + a \Leftrightarrow x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu; \quad x, x' \in R^4; \Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu) \in D(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}); \mu,\nu = \overline{0,3} \quad (1.2)$$

перетворюється за законом

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = F(\Lambda)\varphi(\Lambda^{-1}(x-a)), \quad (1.3)$$

де $F(\Lambda) \equiv \left((F(\Lambda)^A{}_B\right)$ - деяке M-мірне зображення групи Лоренца $O(1,3)$.

<u>**Зауваження 1.1.**</u> Групи та їх алгебри Лі позначаємо однаковим символом. Під символом $O(1,3)$ тут розуміється універсальна накриваюча групи власних ортохрон-них перетворень Лоренца в R^4, а під сим-волом $P(1,3)$ - відповідна група перетво-рень (1.2) при умовах

$$\det \Lambda = +1, \ \Lambda^0{}_0 \geq 1. \quad (1.4)$$

Використовуємо *дійсні параметри* $\omega = (\omega^{\mu\nu})$ та $a = (a^\mu)$ групи $P(1,3) \supset O(1,3)$ з добре відомим фізичним змістом. Перетворення (1.3) *інфінітезимально* (тобто в околі одиниці групи $P(1,3)$) за-писуємо у вигляді

$$\varphi'(x) \stackrel{i}{=} \left(1 - a^\rho \partial_\rho - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma} j_{\rho\sigma}\right)\varphi(x), \quad (1.5)$$

а перетворення

$$x' = \Lambda x, \varphi'(x) = F(\Lambda)\varphi \quad (1.6)$$

- інфінітезимально у вигляді

$$x' \stackrel{i}{=} \left(1 - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma} s^0_{\rho\sigma}\right)x, \ \varphi' \stackrel{i}{=} \left(1 - \frac{1}{2}\omega^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma}\right)\varphi. \quad (1.7)$$

Тоді оператори $\left(s^0_{\rho\sigma}\right)$ та $\left(\partial_\rho, j_{\rho\sigma}\right)$ генератори *дійсних алгебр* груп $O(1,3)$ та $P(1,3)$ (дійсних внаслідок дійсних параметрів $\omega^{\rho\sigma}$ та a^ρ) задовольняють співвідношенням

$$\left[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}\right] = -g_{(\mu\rho}S_{\nu\sigma)} \equiv \equiv -g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}S_{\sigma\mu} - g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} - g_{\sigma\mu}S_{\rho\nu}, \quad (1.8)$$

$$\left[\partial_\mu, \partial_\nu\right] = 0, \left[\partial_\mu, j_{\rho\sigma}\right] = = g_{\mu\rho}\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\partial_\rho, \ \left[j_{\mu\nu}, j_{\rho\sigma}\right] = -g_{(\mu\rho}j_{\nu\sigma)}. \quad (1.9)$$

а оператори $\partial_\rho, j_{\rho\sigma}$ в (1.5) мають вигляд

$$\partial_\rho = \frac{\partial}{\partial x^\rho}, j_{\rho\sigma} = m_{\rho\sigma} + S_{\rho\sigma}; m_{\rho\sigma} \equiv x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho, \quad (1.10)$$

де $S_{\rho\sigma} = -S_{\sigma\rho}$ - це десять незалежних $M \times M$-матриць, які зі зрозумілих причин називаємо *лоренцовим спіном поля* $\varphi(x)$ *як локального* $P(1,3)$*-коваріанта;* матричні елементи 4×4-матриць $S^0_{\rho\sigma} = -S^0_{\sigma\rho}$ задаються формулою

$$\left(S^0_{\rho\sigma}\right)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\rho g_{\sigma\nu} - \delta^\mu{}_\sigma g_{\rho\nu}, \quad (1.11)$$

так що

$$S^0_{01} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S^0_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

$$S^0_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Нехай поле (1.1) задовольняє деякому рівнянню (точніше - системі рівнянь для компонент φ^A)

$$\hat{L}\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \hat{L}^A{}_B\varphi^B(x) = 0; \quad A, B = \overline{1,M}; \hat{L} \equiv \left(\hat{L}^A{}_B\right) \quad (1.13)$$

(іноді число рівнянь більше числа компонент функції φ - таку систему називають перевизначеною). Теорію такого поля називаємо *локально* $P(1,3)$*-інваріантною,* якщо оператор $\hat{L}$ рівняння (1.13) комутує з усіма $P(1,3)$-генераторами (1.10), тобто

$$\left[\hat{L}, \hat{q}\right] = 0, \hat{q} = \left(\partial_\rho, j_{\rho\sigma}\right). \quad (1.14)$$

Зауваження 1.2. У більш загальному визначенні P-інваріантності рівняння (1.13) (див., наприклад, [4]) вимагається виконання послаблених умов:

$$\left[\hat{L},\hat{q}\right]=\alpha\hat{L}+\beta L',\hat{q}=\left(\partial_{\rho},j_{\rho\sigma}\right),\qquad(1.15)$$

де α і β - деякі оператори-матриці, а $L'\varphi(x)\equiv 0$ для всіх $\varphi\in\Phi_0$ де Φ_0 - множина всіх розв'язків рівняння (1.13). Як умова (1.14), так і більш загальна умова (1.15) означає, що множина Φ_0 всіх розв'язків рівняння (1.13) $P(1,3)$-інваріантна, тобто

$$\varphi\in\Phi_0\Rightarrow\varphi'\in\Phi_0,\qquad(1.16)$$

де $\varphi'(x)$ визначається через $\varphi(x)$ за формулою (1.3) або, еквівалентно, за формулою (1.5).

Поле $\varphi(x)$ називаємо *полем маси* $m\geq 0$ *і лоренцового спіна* $S_{\mu\nu}$, якщо, крім рів-няння (1.13) та умов (1.16), воно задоволь-няє також додатковій умові – рівнянню Клейна-Гордона-Фока (тобто кожна його компонента задовільняє цьому рівнянню):

$$\begin{aligned}&\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^2\right)\varphi(x)=0\Leftrightarrow\\&\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^2\right)\varphi^{A}(x)=0;\ A=\overline{1,M};\end{aligned}\qquad(1.17)$$

2. Деякі приклади рівнянь типу Баба та їх узагальнень

Нехай $O(1,5)$ - універсальна накриваюча власної ортохронної групи Лоренца у 6-вимірному псевдоевклідовому просторі R^6. Враховуючи, що $O(1,5)\supset O(1,4)\supset O(1,3)$, записуємо множину $\{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$ генераторів $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}=-S_{\hat{\nu}\hat{\mu}}$ дійсної алгебри групи $O(1,5)$ у вигляді об'єднання відповідних множин, а саме:

$$\begin{aligned}&\left\{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\right\}=\left\{S_{\mu\nu},S_{\mu4}=-S_{4\mu},S_{\tilde{\mu}5}=-S_{5\tilde{\mu}}\right\};\\&\mu,\nu=\overline{0,3};\ \tilde{\mu}=\overline{0,4};\ \hat{\mu},\hat{\nu}=\overline{0,5}\end{aligned}\qquad(2.1)$$

Для унаочнення множину незалежних матриць $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ у (2.1) запишемо також у вигляді таблиці 1.

Як відомо [5] (див. також монографію [6], у якій міститься майже вичерпна інформація про відомі релятивістські рівняння), рівняння типу Баба записують через чотири перші матриці $S_{\mu5}$ останнього стовпчика з таблиці 1 у вигляді

$$\left(2iS_{\mu5}\partial^{\mu}-m\right)\varphi(x)=0,x\subset R^4,\qquad(2.2)$$

де $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ - генератори деякого скінченовимірного зображення групи $O(1,5)$. Рівняння (2.2) локально $P(1,3)$-інваріантне, оскільки

$$\begin{aligned}&\left[\left(2iS_{\mu5}\partial^{\mu}-m\right),\partial_{\rho}\right]=\\&\left[\left(2iS_{\mu5}\partial^{\mu}-m\right),j_{\rho\sigma}\right]\equiv 0;\quad\mu,\rho,\sigma=\overline{0,3}\end{aligned}\qquad(2.3)$$

де ∂_{ρ} та $j_{\rho\sigma}$ мають вигляд (1.10) з матрицями $\{S_{\mu\nu}\}\subset\{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$. Якщо, додатково, поле φ задовольняє також рівнянню (1.17), то рівняння (2.2) є рівнянням для поля маси m і лоренцевого спіну $S_{\mu\nu}\in\{S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\}$. Позаяк різні зображення групи $O(1,5)$ містять всі зображення групи $O(1,3)\subset O(1,5)$, то рівняння типу Баба визначають поля довільного лоренцевого спіну $S_{\mu\nu}$.

Таблиця 1. Перелік індексів $\hat{\mu}\hat{\nu}$ набору незалежних генераторів $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ групи $O(1,5)$ та їх підмножин

$S_{\mu\nu}$			$S_{\mu4}$	$S_{\tilde{\mu}5}$
01	02	03	04	05
	12	13	14	15
$S_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$		23	24	25
			34	35
				45

Випишемо дещо більш загальний випадок, коли поле φ задовольняє системі рівнянь – рівнянню типу Баба

$$\left(i\lambda S_{\mu5}\partial^{\mu}-Cm\right)\varphi(x)=0,x\in R^4,\qquad(2.4)$$

доповненому умовою

$$\left(\lambda^2\partial^{\mu}\partial_{\mu}+|C|^2m^2\right)\varphi(x)=0,\qquad(2.5)$$

де λ - деякий числовий параметр, а C - деякий оператор Казіміра групи $O(1,5)$.

Враховуючи, що для довільних матриць $\{S_{\mu\nu}\}\subset\{S_{\tilde\mu\tilde\nu}\}\in D(O(1,5))$ і параметрів λ та Cm мають місце рівності

$$\begin{aligned}&\left[\left(i\lambda S_{\mu 5}\partial^{\mu}-Cm\right),\partial_{\rho}\right]=\\&\left[\left(i\lambda S_{\mu 5}\partial^{\mu}-Cm\right),j_{\rho\sigma}\right]\equiv 0\end{aligned},\qquad(2.6)$$

робимо висновок, що система рівнянь (2.4), (2.5) визначає *локально* $P(1,3)$-*інваріантну теорію полів довільних мас та лоренцових спінів* $S_{\mu\nu}$.

Серед усіх можливих рівнянь (2.4) 1-го порядку виокремленими є рівняння з найпростішими матрицями $S_{\mu 5}$ (зокрема, мат-рицями мінімально дозволеної розмірно-сті), а таке рівняння співпадає з рівнянням Дірака з незвідними матрицями γ_μ. Дійс-но, через 4×4-матриці γ_μ, які задоволь-няють співвідношенням

$$\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu};\\&g=diag(1,-1,-1,-1);\mu,\nu=\overline{0,3}\end{aligned};\qquad(2.7)$$

визначимо множину матриць $\{S_{\tilde\mu\tilde\nu}\}$ (2.1) за формулами

$$\begin{aligned}&S_{\tilde\mu\tilde\nu}=\frac{1}{4}\left[\gamma_{\tilde\mu},\gamma_{\tilde\nu}\right],S_{\tilde\mu 5}=-S_{5\tilde\mu}=\frac{1}{2}\gamma_{\tilde\mu};\\&\gamma_4=\gamma_{0123}\equiv\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3;\tilde\mu,\tilde\nu=\overline{0,4}\end{aligned}.\qquad(2.8)$$

Легко переконатись, що 4×4-матриці $S_{\tilde\mu\tilde\nu}$ (2.8) внаслідок (2.7) задовольняють співвідношенням

$$\left[S_{\tilde\mu\tilde\nu},S_{\tilde\rho\tilde\sigma}\right]=-g_{(\hat\mu\hat\rho}S_{\hat\nu\hat\sigma)};\hat\mu,\hat\nu,\hat\rho,\hat\sigma=\overline{0,5},\qquad(2.9)$$

для генераторів групи $O(1,5)$. До речі, 15 лінійно незалежних матриць $S_{\tilde\mu\tilde\nu}$ з (2.8), доповнених одиничною, можна обрати генераторами *дійсної алгебри* Кліффорда-Дірака (АКД), точніше, незвідного зображення цієї алгебри.

Підставляючи у (2.4) $\lambda=2$, $S_{\mu 5}=\dfrac{\gamma_\mu}{2}$, $C=1$, дійсно переконуємось, що рівняння Дірака

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi(x)=0,x\in R^4,\psi=\left(\psi^A\right),A=\overline{1,4},\qquad(2.10)$$

є найпростішим серед рівнянь типу Баба. При цьому, як випливає з (2.7),

$$\left(-i\gamma\partial-m\right)\left(i\gamma\partial+m\right)=\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^2,\ \gamma\partial\equiv\gamma^{\mu}\partial_{\mu},$$

так що рівняння (2.5) у даному випадку, тобто для поля лоренцового спіна

$$S_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{4}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right),\qquad(2.11)$$

виконується тотожньо, воно не є додатковою умовою для спінорного поля ψ (для всіх інших випадків $S'_{\mu\nu}$, крім тривіально звідних, коли $S'_{\mu\nu}=diag\left(S_{\mu\nu},S_{\mu\nu},\ldots\right)$, рівняння (2.5), як правило є змістовною додатковою умовою). У цьому зв'язку кажуть, що діракіан $(i\gamma\partial-m)$ є свого роду "коренем квадратним" з оператора КГФ $\Box+m^2$.

Підкреслимо, що у $P(1,3)$-інваріантних рівняннях (2.4) типу Баба використані лише 4 матриці $S_{\mu 5}$ із стовпця $S_{\tilde\mu 5}$ у наведеній таблиці 1. З міркувань, наведених вище, стає зрозумілим, як на базі різних зображень групи $O(1,5)$ виписати рівняння 1-го порядку, інваріантні відносно довільних локальних зображень неоднорідної группи де Сіттера $P(1,4)=IO(1,4)$. Такі рівняння типу Баба мають вигляд

$$\begin{aligned}&\left(i\lambda S_{\tilde\mu 5}\partial^{\tilde\mu}-C\kappa\right)\tilde\varphi(\tilde x)=0,\\&\tilde x\equiv\left(x^{\tilde\mu}\right)\equiv\left(x^{\mu},x^{4}\right)\in R^5\end{aligned}.\qquad(2.12)$$

Зокрема, найпростіше серед таких $P(1,4)$-інваріантних рівнянь є рівняння Дірака у 5-вимірному просторі-часі R^5,

$$\left(i\gamma^{\tilde\mu}\partial_{\tilde\mu}-\kappa\right)\Psi(\tilde x)=0,\tilde x\in R^5,\tilde\mu=\overline{0,4},\qquad(2.13)$$

яке було виписане й проаналізоване у роботах [7-9].

До речі, рівність

$$\left(\partial_{\tilde\mu}\partial^{\tilde\mu}+\kappa^2\right)\Psi(\tilde x)=0\qquad(2.14)$$

для поля Ψ з (2.12) виконується тотожньо, тобто вона не є додатковою умомою для поля Ψ як локального $P(1,4)$-коваріанта "маси" κ та спіна де Сіттера $S_{\tilde\mu\tilde\nu}$ з (2.8).

Наголосимо на тому, що визначений у (2.10) лоренцовий спін $S_{\mu\nu}\in\{S_{\tilde\mu\tilde\nu}$ (тобто лоренцовий спін загальновідомого поля ψ, що задовольняє $P(1,3)$-інваріантному рівнянню (2.9)) визначає вказане у (2.10) *звідне* зображення групи $O(1,3)$ (і, отже, звідне зображення групи $P(1,3)$). В той же час визначений у (2.8) спін $S_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \in \{S_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ де Сіттера визначає *незвідне* зображення групи $O(1,4)$ (і, отже, незвідне зображення групи $P(1,4)$). Внаслідок цих фактів має місце

<u>Твердження</u>. Рівняння Дірака (2.9) лише з $m = 0$ розщеплюється лінійним перетворенням на дві незалежні $P(1,3)$-інваріантні рівняння – рівняння Вейля

$$\left(i\partial_0 \pm \vec{\sigma}\vec{p}\right)\varphi_{\pm}(x) = 0, \varphi_{\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{vmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{vmatrix} \mp \begin{vmatrix}\psi^3\\ \psi^4\end{vmatrix}\right), \quad (2.15)$$

тоді як $P(1,4)$-інваріантне рівняння (2.13) ні з яким значенням параметра κ не розщіплюється на незалежні рівняння.

Детальне доведення цього твердження міститься у доведенні теореми 2 в розд.3. Тут лише зауважимо, що при $m \neq 0$ незвідні поля $\varphi_{\mp}$ лоренцевих спінів $S^{-}{}_{\mu\nu} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ та $S^{+}{}_{\mu\nu} \in \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, які входять до спінора ψ - локального $P(1,3)$-коваріанта, що задовільняє *вільному* рівнянню Дірака (2.9), виявляються певним чином *"зв'язаними"* у цьому рівнянні, причому маса m відіграє роль "константи цієї зв'язаності".

Не тільки незвідні, але й звідні P-коваріанти, що задовольняють рівнянню типу Баба, виявляються фізично змістовними: незважаючи на виключну простоту рівнянь типу Баба (як системи лінійних однорідних рівнянь першого порядку), вони можуть описувати певним чином "зв'я-зану" систему незвідних полів, які входять у зв'язаний P-коваріант. Нагадаємо тут коротко найпростіший такий приклад, розглянутий детально у роботах [10-13]. Мова йде про систему рівнянь

$$Q_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \varepsilon_\nu - \partial_\nu \varepsilon_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho \varepsilon^\nu = 0, \partial_\mu \varepsilon^\mu = 0 \quad (2.16)$$

для 4-компонентної комплексної функції $\varepsilon = \left(\varepsilon^\mu\right)$. З явного вигляду цієї системи зрозуміло, що вона інваріантна відносно незвідного векторного $P(1,3)$-зображення. Розписуючи її у векторно-скалярній формі, переконуємось, що (2.16) – це система рівнянь Максвелла для електромагнітного поля $\vec{\varepsilon} = \vec{E} - i\vec{H}$ (тобто поля напруженостей $\vec{E}, \vec{H}$), зв'язаного з комплексним скалярним полем $\varepsilon^0 = E^0 - iH^0$ тим, що останнє "породжує" 4-струм. У матричній формі ця система має вигляд безмасового рівняння Дірака. Звідси зрозуміло, що, по-перше, таке рівняння – це рівняння типу Баба і, по-друге, воно інваріантне й відносно стандартного спінорного $P(1,3)$-зображення. Крім цього ці рівняння інваріантні відносно локального $P(1,3)$-зображення, що задається генераторами звідного зображення $D(0,1) \oplus (0,0)$ групи Лоренца $SL(2,C)$. Врахуємо також, що кожна з компонент поля $\varepsilon = \left(\vec{\varepsilon}, \varepsilon^0\right)$ задово-льняє рівнянню Даламбера, $\partial^\mu \partial_\mu \varepsilon^\nu = 0$. Таким чином, поле $\varepsilon = \left(\vec{\varepsilon}, \varepsilon^0\right)$, що задово-льняє системі рівнянь (2.16), як детально розглянуто в [10-13], дійсно є системою зв'язаних безмасового поля $\vec{\varepsilon}$ спіна 1 (тобто фотонного поля) та безмасового поля ε^0 нульового спіна. Але найбільш цікавим є твердження про те, що бозонні стани – стани поля $\varepsilon = \left(\vec{\varepsilon}, \varepsilon^0\right)$ повністю репродукують ферміонні стани – стани поля $\psi = \left(\psi^\alpha\right)$. Останнє означає, що ферміонні стани можна вважати вторинними – їх можна одержати як лінійні комбінації [10-13] відповідних станів фотона і мезона. Більш складний випадок розглянуто в роботах [14-16] - там показано, що квантовомеханічні стаціонарні стани в теорії релятивістського атому водню (в основі якої – рівняння Дірака з масою електрона m_0 і з зовнішнім полем $\phi(\vec{x}) = -\frac{Ze^2}{r}$) повністю репродукуються станами зв'язаної системи електромагнітного $\vec{\varepsilon}$ і скалярного ε^0 полів, які задовольняють (узагальненим) класичним рівнянням Максвела в певному середовищі. Цю класично-електродинамічну модель атома водню можна розглядати [15,16] як специфічне втілення (на базі конкретного рівняння) давньої ідеї корифеїв сучасної фізики про електромагнітну природу матерії, уточненої тим, що в рамках даного підходу стани масивної частинки репродукуються станами більш складної бозонної системи, ніж окремо електромагнітне поле.

З наведеного прикладу зрозуміло, що більш складні моделі складових частинок потребують у першу чергу розгляд більш складних звідних $P(1,3)$-коваріантів, що задовольняють рівнянням (2.4) типу Баба в 4-вимірному просторі-часі, а також $P(1,4)$-коваріантів, що задовольняють рівнянням (2.12) типу Баба у 5-вимірному просторі-часі R^5. Результати таких досліджень будуть предметом наступних публікацій.

У зв'язку з інтересом до рівнянь у багатовимірних просторах (див., наприклад, [2]) вкажемо тут на природнє і очевидне узагальнення рівнянь (2.4), (2.12) на випадок простору-часу довільних розмірностей. Такі рівняння мають вигляд

$$\begin{gathered}\left(\lambda S_{\mu(2n+1)}\partial^{\mu} - Cm\right)\varphi(x) = 0;\\ x = \left(x^{\mu}\right)\in R^{2n}, \mu = \overline{0,(2n-1)}\end{gathered}, \qquad (2.17)$$

для локальних $P(1,2n-1)$-коваріантів φ та

$$\begin{gathered}\left(\lambda S_{\tilde{\mu}(2n+1)}\partial^{\tilde{\mu}} - C\kappa\right)\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = 0;\\ \tilde{x} = \left(\tilde{x}^{\tilde{\mu}}\right)\in R^{2n+1}, \tilde{\mu} = \overline{0,2n}\end{gathered}, \qquad (2.18)$$

для локальних $P(1,2n)$-коваріантів $\tilde{\varphi}$.

Оскільки рівняня типу Дірака, як згадувалось вище, є у деякому сенсі виділеними, у наступному розділі наводиться *конструктивний метод* явного написання рівнянь Дірака у псевдоевклідових просторах довільних розмірностей, а також рівнянь Вейля у псевдоевклідових просторах R^{2n} з довільним натуральним n.

3. Явний вигляд незвідних рівнянь Дірака та Вейля у просторах довільних розмірностей

Оскільки параметри перетворень (1.2) у 4-вимірному просторі-часі R^4, які мають *безпосередній фізичний зміст,* завжди можуть бути вибрані дійсними, то у релятивістській теорії довільного поля як $P(1,3)$-коваріанта цілком достатньо обмежитися *дійсними алгебрами* груп Пуанкаре $P(1,3)\supset O(1,3)$ і Лоренца $O(1,3)$ (тобто відповідними *алгебрами над полем дійсних чисел*). Далі, оскільки для спінорного поля (яке задовольняє рівнянню Дірака (2.10)) генератори $S_{\mu\nu}$ групи $O(1,3)$ виражаються через частину генераторів алгебри Кліффорда-Дірака (АКД), то і в теорії цього поля цілком достатньо мати справу з дійсною АКД.

Екстраполюючи такий розгляд на випадок псевдоевклідових просторів R^{1+N} довільних розмірностей, наведемо зручний рецепт перерахунку характеристик незвідної (дійсної) АКД, пов*язаної з простором R^{1+N}, а саме.

Відмітимо, насамперед, що число матриць γ_{μ}, що задовольняють співвідношенням КД і *породжують всю* АКД (як дійсну алгебру), є завжди парним, тобто

$$\begin{gathered}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu};\\ g = diag(1,\underbrace{-1,-1,\ldots,-1}_{(2n-1)\text{ раз}});\\ \mu,\nu = \overline{0,(2n-1)}.\end{gathered} \qquad (3.1)$$

При цьому розмірність r-матриць γ_{μ} незвідного зображення АКД (тобто мінімальна розмірність матриць, що задовольняють співвідношенням (3.1) при даному, фіксованому $n\in(1,2,\ldots)$, рівна $r=2^n$, а число h генераторів АКД (число лінійно незалежних елементів АКД) задається формулою

$$h=(2n+1)(n+1)+1. \qquad (3.2)$$

Це число співпадає із числом генераторів дійсної алгебри $O(1,2n+1)$, тобто зі збільшеним на одиницю числом незалежних компонент антисиметричного тен-зора $S_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -S_{\hat{\nu}\hat{\mu}}, \hat{\mu},\hat{\nu} = \overline{0,(2n+1)}$. Нижче наводиться наочний конструктивний спосіб побудови як породжуючих незвідне зображення АКД $2^n\times 2^n$-матриць $\gamma_{\mu}^{(n)}$, що задовольняють співвідношенням (3.1) при даному n, так і генераторів $S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ дійсної алгебри $O(1,2n+1)$, які можна взя-ти в якості генераторів АКД. Це дозволяє виписати у явному вигляді рівняння Дірака і Вейля як системи мінімального числа $P(1,N)$-інваріантних рівнянь 1-го порядку у просторі довільної фіксованої розмірності.

Почнемо з $n=1$. Породжуючі 2×2-матриці $\gamma_{0,1}$ виберемо у вигляді

$$\gamma_0=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}, \gamma_1=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}, \qquad (3.3)$$

а допоміжну матрицю γ_2, яка задовольняє тим самим співвідношенням (3.1) при $n=1$, яким задовольняють породжуючі матриці (3.3), визначимо як

$$\gamma_2 \overset{def}{=} i\prod_{\mu=0}^{1}\gamma_\mu \equiv i\gamma_{01}=i\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}. \qquad (3.4)$$

Легко бачити, що добуток всіх матриць (3.3), (3.4) кратний одиниці:

$$\prod_{\tilde{\mu}=0}^{2}\gamma_{\tilde{\mu}} \equiv \gamma_{012}=i. \qquad (3.5)$$

При $n=2$ породжуючі 4×4-матриці γ_μ виберемо у вигляді

$$\gamma_0=\begin{vmatrix}I' & 0\\ 0 & -I'\end{vmatrix},$$

$$\gamma_{1,2}=i\begin{vmatrix}0 & \gamma'_{1,2}\\ -\gamma'_{1,2} & 0\end{vmatrix}, \qquad (3.6)$$

$$\gamma_3=\begin{vmatrix}0 & \gamma'_0\\ -\gamma'_0 & 0\end{vmatrix}$$

де $1'$ та $\gamma'_{0,1,2}$ - це 2×2-одинична матриця і матриці (3.3), (3.4). Відповідну додаткову матрицю γ_4 тепер визначимо як

$$\gamma_4 \overset{def}{=} \prod_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu \equiv \gamma_{0123}=i\begin{vmatrix}0 & I'\\ I' & 0\end{vmatrix} \Rightarrow \prod_{\tilde{\mu}=0}^{4}\gamma_{\tilde{\mu}}=-I. \qquad (3.7)$$

При $n=3$ відповідний вибір і означення наступні:

$$\gamma_0=\begin{vmatrix}I' & 0\\ 0 & -I'\end{vmatrix},$$

$$\gamma_{\tilde{k}'}=i\begin{vmatrix}0 & \gamma'_{\tilde{k}'}\\ -\gamma'_{\tilde{k}'} & 0\end{vmatrix}, \qquad (3.8)$$

$$\gamma_5=\begin{vmatrix}0 & \gamma'_0\\ -\gamma'_0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\gamma_6 \overset{def}{=} i\prod_{\mu=0}^{5}\gamma_\mu \equiv \gamma_{012345}=i\begin{vmatrix}0 & I'\\ I' & 0\end{vmatrix} \Rightarrow \prod_{\tilde{\mu}=0}^{6}\gamma_{\tilde{\mu}}=-i, \qquad (3.9)$$

де $\tilde{k}'=\overline{1,4}$, а штрих у матриць означає, що вони належать попередньому випадку, тобто $n=2$. Звідси зрозуміло, що справедлива

<u>**Теорема 1.**</u> Породжуючі АКД $2^n\times2^n$-матриці $\gamma_\mu^{(n)}$, $\mu=\overline{0,(2n-1)}$, які задовольняють співвідношенням (3.1) із заданим n, і додаткову матрицю $\gamma_{2n}^{(n)}$, яка задовольняє тим самим співвідношенням (3.1), можна вибрати у вигляді

$$\gamma_0^{(n)}=\begin{vmatrix}I^{(n-1)} & 0\\ 0 & -I^{(n-1)}\end{vmatrix},$$

$$\gamma_{\tilde{k}'}^{(n)}=i\begin{vmatrix}0 & \gamma_{\tilde{k}'}^{(n-1)}\\ -\gamma_{\tilde{k}'}^{(n-1)} & 0\end{vmatrix}, \quad \tilde{k}'=\overline{1,(2n-2)}; \qquad (3.10)$$

$$\gamma_{2n-1}^{(n)}=\begin{vmatrix}0 & \gamma_0^{(n-1)}\\ -\gamma_0^{(n-1)} & 0\end{vmatrix}$$

$$\gamma_{2n}^{(n)} \overset{def}{=} i^{2-n}\prod_{\mu=0}^{2n-1}\gamma_\mu^{(n)}=i\begin{vmatrix}0 & I^{(n-1)}\\ I^{(n-1)} & 0\end{vmatrix}, \qquad (3.11)$$

причому добуток всіх матриць $\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)}, \tilde{\mu}=\overline{0,2n}$, що задовольняють співвідношенням (3.1), кратний одиниці:

$$\prod_{\tilde{\mu}=0}^{2n}\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)}=i^n. \qquad (3.12)$$

У якості $h-1=(2n+1)(n+1)$ лінійно незалежних генераторів незвідного зображення АКД можна вибрати наступні генератори $S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}$ незвідного зображення групи $O(1,2n+1)$:

$$S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}=\frac{1}{4}\left[\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)},\gamma_{\tilde{\nu}}^{(n)}\right]$$

$$S_{\tilde{\mu}(2n+1)}^{(2n)}=\frac{1}{2}\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)}=-S_{(2n+1)\tilde{\mu}}^{(2n)}; \tilde{\mu},\tilde{\nu}=\overline{0,2n} \qquad (3.13)$$

Доведення цієї теореми проводиться безпосередньою перевіркою відповідних комутаційних співвідношень із застосуванням метода індукції. QED.

Зображення (3.10) матриць $\gamma_\mu^{(n)}$ є аналогом PD-зображення для 4×4-матриць γ_μ (див., наприклад, [17]).

Це наочно видно, якщо ввести позначення

$$\Sigma_{\tilde{k}'} \equiv i\gamma_{\tilde{k}'}^{(n-1)}, \tilde{k}' = \overline{1,(2n-2)}, \quad \Sigma_{2n-1} \equiv \gamma_0^{(n-1)}, \Sigma_0 \equiv I^{(n-1)} \qquad (3.14)$$

У цих позначенях матриці (3.10),(3.11) мають вигляд

$$\gamma_0^{(n)} = \begin{vmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & -\Sigma_0 \end{vmatrix}, \gamma_k^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_k \\ -\Sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad (k = \overline{1,(2n-1)}), \gamma_{2n}^{(n)} = i\begin{vmatrix} 0 & \Sigma_0 \\ \Sigma_0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3.15)$$

Використовуючи позначення (3.14), випишемо також матриці $S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}$:

$$S_{0k}^{(n)} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \Sigma_k \\ \Sigma_k & 0 \end{vmatrix} = -S_{k0}^{(n)},$$
$$S_{jk}^{(n)} = \begin{vmatrix} S_{jk}^{(n-1)} & 0 \\ 0 & S_{jk}^{(n-1)} \end{vmatrix}, S_{0(2n)}^{(n)} = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} 0 & \Sigma_0 \\ -\Sigma_0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (3.16)$$
$$S_{k(2n)}^{(n)} = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} \Sigma_k & 0 \\ 0 & -\Sigma_k \end{vmatrix} = -S_{(2n)k}^{(n)};$$
$$S_{jk}^{(n-1)} \equiv \frac{1}{4}\left[\Sigma_j, \Sigma_k\right]; \; j,k = \overline{1,(2n-1)}$$

Далі, за допомогою унітарного перетворення $\gamma_{\tilde{\mu}} \to U\gamma_{\tilde{\mu}}U^+$, де

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \Sigma_0 & -\Sigma_0 \\ \Sigma_0 & \Sigma_0 \end{vmatrix}, \; U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \Sigma_0 & \Sigma_0 \\ -\Sigma_0 & \Sigma_0 \end{vmatrix}, \qquad (3.17)$$

матриці {(3.10),(3.11)}=(3.15) переводяться у зображення типу Майорана:

$$\gamma_0^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_0 \\ \Sigma_0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_k^{(n)} = \begin{vmatrix} 0 & \Sigma_k \\ -\Sigma_k & 0 \end{vmatrix}, \quad \gamma_{2n}^{(n)} = i\begin{vmatrix} -\Sigma_0 & 0 \\ 0 & \Sigma_0 \end{vmatrix} \qquad (3.18)$$

Отже, рівняння

$$\left(i\gamma_\mu^{(n)}\partial^\mu - m\right)\psi(x) = 0, \; x \in R^{2n}, \quad \mu = \overline{0,(2n-1)}; \; \psi = \left(\psi^A\right); \; A = \overline{1,2n} \qquad (3.19)$$

є рівнянням Дірака у просторі Мінковського R^{2n} (з довільно фіксованим $n = 1,2,\ldots$) з матрицями $\gamma_\mu^{(n)}$ (3.10) мінімальної розмірності $r = 2^n$, воно локально $P(1,2n-1)$-інваріантне, а саме, інваріантне відносно зображення групи $P(1,2n-1)$, породжуваного генераторами

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \; j_{\mu\nu} = m_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}^{(n)}, \; \mu,\nu = \overline{0,(2n-1)}, \qquad (3.20)$$

а рівняння

$$\left(i\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)}\partial^{\tilde{\mu}} - \chi\right)\Psi(\tilde{x}) = 0, \; \tilde{x} \in R^{2n+1}, \quad \mu = \overline{0,2n}, \; \Psi = \left(\Psi^A\right) \qquad (3.21)$$

є рівнянням Дірака у просторі Мінковського R^{2n+1} з матрицями $\gamma_{\tilde{\mu}}^{(n)}$ (3.10), (3.11) теж мінімальної розмірності $r = 2^n$, воно інваріантне відносно зображення групи $P(1,2n)$, породжуваного генераторами

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\tilde{\mu}}}; \quad j_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \tilde{x}_{\tilde{\mu}}\partial_{\tilde{\nu}} - \tilde{x}_{\tilde{\nu}}\partial_{\tilde{\mu}} + S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}, \quad \mu,\nu = \overline{0,2n}; \qquad (3.22)$$

у формулах (3.20) та (3.22) матриці $S_{\mu\nu}^{(n)} \in \{S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}$ та $S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}$ визначені у (.3.13).

Незвідні рівняння Дірака (3.19) та (3.21) у просторах R^{2n} та R^{2n+1} (тобто рівняння Дірака з незвідними $2^n \times 2^n$-матрицями), інваріантні відносно локальних $P(1,2n)$- і, відповідно, $P(1,2n+1)$-зображень (які задаються спіновими матрицями $S_{\mu\nu}^{(n)}$ та $S_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}^{(n)}$ із (3.16), відповідно), є найпростіші серед рівнянь типу Баба у цих просторах. На закінчення сформулюємо і доведемо теорему, яка є узагальненням твердження, наведеного у розділі 2.

<u>**Теорема 2**</u>. Лише при $m = 0$ $P(1,2n-1)$-інваріантне рівняння Дірака (3.19)

розщіплюється лінійним перетворенням на два незалежні рівняння, тоді як $P(1,2n)$ -інваріантне рівняння Дірака (3.21) не розщіплюється на незалежні рівняння ні при якому значення параметру χ.

Доведення. Використовуючи блочний вигляд (3.15) матриць $\gamma_\mu^{(n)}$ і записуючи стовпчики ψ та Ψ через стовпчики ψ_1, ψ_2 та Ψ_1, Ψ_2 половинних розмірів, запишемо рівняння (3.19) та (3.21) у блочній формі (або через системи двох рівнянь):

$$Д\psi \equiv \begin{bmatrix} p_0 - m & -\vec{\Sigma}\vec{p} \\ \vec{\Sigma}\vec{p} & -p_0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (p_0 - m)\psi_1 - \vec{\Sigma}\vec{p}\,\psi_2 = 0, \\ (p_0 + m)\psi_2 - \vec{\Sigma}\vec{p}\,\psi_1 = 0; \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\tilde{Д}\Psi \equiv \begin{bmatrix} p_0 - \chi & -\vec{\Sigma}\vec{p} - ip_{2n} \\ \vec{\Sigma}\vec{p} - ip_{2n} & -p_0 - \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (p_0 - \chi)\Psi_1 - \left(\vec{\Sigma}\vec{p} + ip_{2n}\right)\Psi_2 = 0 \\ (p_0 + \chi)\Psi_2 - \left(\vec{\Sigma}\vec{p} - ip_{2n}\right)\Psi_1 = 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

де $\vec{\Sigma}\vec{p} \equiv \Sigma_k p_k$, $p_{\tilde{\mu}} = i\partial_{\tilde{\mu}}$, $k = \overline{1,(2n-1)}$, $\tilde{\mu} = \overline{0,2n}$. Вводячи нові стовпчики за формулами

$$\varphi_\mp \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 \mp \psi_2), \quad \Phi_\mp \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1 \mp \Psi_2),$$

одержуємо системи, еквівалентні системам (3.23) та (3.24):

$$\left(p_0 \pm \vec{\Sigma}\vec{p}\right)\varphi_\mp(x) - m\varphi_\pm(x) = 0, \; x \in R^{2n}, \quad (3.25)$$

$$\left(p_0 \pm \vec{\Sigma}\vec{p}\right)\Phi_\mp(\tilde{x}) - \left(\chi \pm ip_{2n}\right)\Phi_\pm(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in R^{2n+1}. \quad (3.26)$$

Звідси твердження теореми стає очевидним QED.

Із (3.25) при $m = 0$ одержується рівняння Вейля у просторах R^{2n}:

$$\left(i\lambda\partial_0 - \vec{\Sigma}\vec{p}\right)\varphi_\lambda(x) = 0; x \in R^{2n} \quad (n = 2,3,\ldots; \lambda = \mp 1), \quad (3.27)$$

де $\varphi_\lambda(x)$ - стовпчик з числом компонент, рівним 2^{n-1}. Ці рівняння інваріантні відносно зображення групи $P(1,2n-1)$, генератори якого мають вигляд

$$p_\mu = i\partial_\mu, \; j_{\mu\nu}^{(\lambda)} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}^{(\lambda)}; \quad \mu,\nu = \overline{0,(2n-1)}, \quad (3.28)$$

де

$$S_{\mu\nu}^{(\lambda)} = -S_{\nu\mu}^{(\lambda)}; \; S_{kl}^{(\lambda)} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{klm}\Sigma_m,$$

$$S_{0k}^{(\lambda)} = \frac{i}{2}\lambda\Sigma_k, \; k,l,m = \overline{1,(2n-1)}. \quad (3.29)$$

Вказана інваріантність є наслідком комутаційних співвідношень

$$\left[i\lambda\partial_0 - \vec{\Sigma}\vec{p}, p_\mu\right] = \left[i\lambda\partial_0 - \vec{\Sigma}\vec{p}, j_{kl}^{(\lambda)}\right] = 0,$$

$$\left[j_{0l}, i\lambda\partial_0 - \vec{\Sigma}\vec{p}\right] = \lambda\Sigma_l\left(i\lambda\partial_0 - \vec{\Sigma}\vec{p}\right), \quad (3.30)$$

які у свою чергу випливають з означень (3.14) та комутаційних співввідношень для матриць $\gamma_\mu^{(n-1)}$.

1. Фон Нейман Й. Математические основы квантовой механики. М., Наука, 1964, 367с.
2. Günther U., Zhuk A. Gravitational excitons from extra-dimensions. Phys. Rev. V. **D.56**, 1997, p.6391-6402.
3. Günther U., Zhuk A. Stable compactification with Casimir-like potential. Gravitation and Cosmology. V.**4**, 1998 p.1-16.
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983, 280с.
5. Bhabha H.J. Relativistic wave equations for the elementary particles. Rev. Mod. Phys., **17**, 2/3, 200 (1945).
6. Фущич В.И., Никитин А.Т. Симметрия уравнений квантовой механики. М., Наука. Гл.ред.физ-мат.лит., 1990, 400.
7. Фущич В.И., Кривский И.Ю. О волновых уравнениях в 5-пространстве Минков-

ского. Препринт ИТФ АН УССР, ИТФ-68-72, Киев, 1968, 38с.
8. Fushchich V.I., Krivsky I.Yu. On a possible approach to the variable mass problem. Nucl. Phys. B., V.7, № 2, 1968, p.79-82.
9. Fushchich V.I., Krivsky I.Yu. On representations of the inhomogenous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkovsky space. Nucl. Phys. B., V.**14**, № 2, 1969, p.321-330.
10. Krivsky I.Yu., Simulik V.M. Unitary connection in Maxwell - Dirac isomorphism and the Clifford algebra. Adv. Appl. Cliff. Algebras, V.**6**, №2, 1996, p.249-259.
11. Krivsky I.Yu., Simulik V.M. On the longitudinal electromagnetic waves. Наук. вісник Ужг. унів. Серія-фізика, Вип. 2, 1998, с.121-125.
12. Кривский І.Ю., Симулик В.М. Рівняння Максвела зі струмами градієнтного типу та їх зв'язок з рівнянням Дірака. УФЖ, т.**44**, №5, 1999, с.661-665.
13. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. Fermionic symetries of the Maxwell equations with gradient-like sources. Proceedings of the International conference "Symmetry in the nonlinear mathematical physics", Kiev, 7-13 July, p. 475-482.
14. Simulik V.M., Krivsky I.Yu. An electrodynamical version of the model of electron. Proceedings of the International conference "The Centenary of electron", Uzhgorod, 18-20 August, 1997, p. 134-139.
15. Симулик В.М. Спектр водню в класичній електродинаміці. УФЖ, т. **42**, №4, 1997, с. 406–407.
16. Симулик В.М. Решения уравнений Максвелла, описывающие спектр водорода. УМЖ, т.**49**, №7, с. 958–969.
17. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М., Наука, 1969, 424с.

ON THE BHABHA, DIRAC AND WEYL TYPE EQUATIONS IN SPACES OF ARBITRARY DIMENSIONS

I.Yu. Krivsky

Institute of Electron Physics, National Academy of Sciences of Ukraine
21 Universitetska str., 88000 Uzhgorod, Ukraine
E-mail: iep@iep.uzhgorod.ua

The generalisation of the Bhabha type equations –the first-order linear equations for fields as local covariants of the Poincare' group P with an arbitrary Lorentz spin $S_{\mu\nu}$ is adduced. The generalization is related to the cases of Minkowski spaces R^{1+N} with arbitrary N. An effective method is presented for an explicit realization of irreducible $2^n \times 2^n$ matrices γ_μ throuch which the $P(1,N)$-invariant Dirac type equations on Minkowski spaces R^{2n} and R^{2n+1} and Weyl type equations on the space R^{2n} with an arbitrary $n = 1,2,\ldots$ are written down.