2. БІНАРНІ ВІДНОШЕННЯ

2.1. Декартів добуток множин

Декартовим добутком множин A та B називається множина $A\times B$ усіх упорядкованих пар, перша координата (компонента) яких належить множині A, а друга — множині B. Тобто, $A\times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) | a\in A, b\in B\}$. При цьому *порядок множників є суттєвим*.

Приклад 2.1. Знайти $A\times B$, якщо $A=\{1,3,8\}$, $B=\{x,y\}$.

Розв'язання. $A\times B=\{(1,x),(1,y),(3,x),(3,y),(8,x),(8,y)\}$.

Поняття декартового добутку поширюється на довільну скінченну кількість множників:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) | a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n\}.$$

Елементи декартового добутку n множин називаються *кортежами* довжини n (впорядкованими n-ками).

Приклад 2.2. Знайти $B\times A\times B$, якщо $A=\{1,3,8\}$, $B=\{x,y\}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку $B\times A$.

$$B\times A=\{(x,1),(x,3),(x,8),(y,1),(y,3),(y,8)\}.$$

Тоді

$$B\times A\times B=\{(x,1,x),(x,1,y),(x,3,x),(x,3,y),(x,8,x),(x,8,y),$$
$$(y,1,x),(y,1,y),(y,3,x),(y,3,y),(y,8,x),(y,8,y)\}.$$

Властивості декартового добутку множин:

1) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$;
2) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;
3) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;
4) якщо $A\subseteq B$, то $A\times C\subseteq B\times C$;
5) якщо $A\neq B$, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$, то $A\times B\neq B\times A$;
6) якщо множини A та B — скінченні, то $|A\times B|=|A|\cdot|B|$ — *комбінаторне правило множення*.
7) якщо множини A та B — зліченні, то множина $A\times B$ також є зліченною.

2.2. Поняття відношення. Задання бінарних відношень

Бінарним відношенням, визначеним на множинах A та B, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Той факт, що елементи $a \in A$ та $b \in B$ перебувають у бінарному відношенні R позначається як $a R b$ або $(a,b) \in R$. Якщо відповідні елементи не перебувають у відношенні R, то це записується як $a \bar{R} b$ або $(a,b) \notin R$.

Множини A та B називаються *базисними множинами* бінарного відношення. Бінарне відношення називається *однорідним*, якщо його базисні множини співпадають.

Приклад 2.3. Розглянемо R — бінарне відношення подільності, визначене на множинах $A = \{3,5,6\}$ та $B = \{1,2,4\}$. Вважаємо, що

$x R y$ тоді і тільки тоді, коли x націло ділиться на y.

Тоді $R = \{(3,1),(5,1),(6,1),(6,2)\}$. Так як $A \neq B$, то відношення R — неоднорідне.

Приклад 2.4. Однорідне бінарне відношення R — "навчатися у одній групі", визначене на множині студентів УжНУ.

$x R y$ тоді і тільки тоді, коли студенти x та y — одногрупники.

n-арним *відношенням*, визначеним на множинах $A_1,\ldots,A_n$, називається довільна підмножина декартового добутку цих множин.

Якщо $n = 1$, то маємо *унарне* відношення, якщо $n = 2$ — бінарне відношення, якщо $n = 3$ — *тернарне* відношення.

Приклад 2.5. Підприємства, які займаються дизайном інтер'єру приміщень, використовують продукцію деяких кількох фірм. Для аналізу необхідно скласти "відношення" реальних комбінацій трьох параметрів: назви фірми, місця її знаходження (місто), виду продукції, що пропонується.

Нехай відомо, що АП "Orion" (Одеса) продає меблі, ТОВ "День" (Харків) продає світильники, ПП "Sit" (Одеса) торгує меблями та світильниками, ТОВ "House" (Харків) продає світильники та матеріали.

В цьому відношенні беруть участь три множини:

Фірми = {АП "Orion", ТОВ "День", ПП "Sit", ТОВ "House"}.
Міста = {Одеса, Харків}.
Продукція = {меблі, світильники, матеріали}.

Це тернарне відношення можна формально зобразити списком елементів:

{(АП "Orion", Одеса, меблі), (ТОВ "День", Харків, світильники),
(ПП "Sit", Одеса, меблі), (ПП "Sit", Одеса, світильники),
(ТОВ "House" Харків, світильники), (ТОВ "House", Харків, матеріали)}.

Оскільки n-арні відношення є множинами, то для їх задання можна використовувати ті самі способи, що і для множин. Крім того, якщо бінарні відношення задані на скінченних множинах, то їх можна задавати за допомогою *матриць відношень* та *графів* (діаграм) відношень.

При матричному способі задання відношення елементам множини A ставляться у відповідність рядки матриці $M(R)$, елементам множини B — стовпці. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні R, то на перетині відповідного їм рядка та стовпця матриці записується одиниця, інакше — нуль.

При графічному способі задання відношень елементам множин A та B ставляться у відповідність точки на площині. Якщо пара (a,b) перебуває у відношенні, то точка, яка відповідає елементу a, з'єднується направленим відрізком із точкою, яка відповідає елементу b.

Приклад 2.6. Відношення $R=\{(a,1),(a,2),(b,4),(d,1),(f,4)\}$ визначене на множинах $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ та $B=\{1,2,3,4\}$. Задати його за допомогою матриці та діаграми.

Розв'язання. Матриця відношення R має вигляд

$$M(R)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф відношення наведено на рис. 2.1.

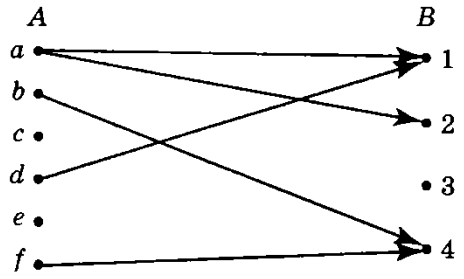


Рис. 2.1. Граф відношення R

Множини $\mathrm{pr}_1 R=\{x \mid (x,y)\in R\}$ та $\mathrm{pr}_2 R=\{y \mid (x,y)\in R\}$ відповідно називаються *першою* та *другою проекціями* відношення R.

Для відношення R із попереднього прикладу $\mathrm{pr}_1 R = \{a, b, d, f\}$, $\mathrm{pr}_2 R = \{1, 2, 4\}$.

Множина $R[C] = \{y \mid (c, y) \in R,\ c \in C\}$ називається *перерізом* бінарного відношення R за підмножиною C першої базисної множини A.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[\{a, d\}] = \{1, 2\}$.

Переріз $R[\{a\}]$ називається *перерізом бінарного відношення за елементом a.* Для одноелементних перерізів використовують позначення $R[a]$.

Для відношення R із попереднього прикладу $R[b] = \{4\}$, $R[c] = \varnothing$.

Множина усіх одноелементних перерізів бінарного відношення R, визначеного на множинах A та B, називається *фактор-множиною* множини B за відношенням R і позначається B / R. Тобто, $B / R = \{R[x] \mid x \in A\}$.

Наприклад, для відношення R із діаграмою, наведеною на рис. 7,

$$R[a] = \{1, 2\},\ R[b] = R[f] = \{4\},\ R[c] = R[e] = \varnothing,\ R[d] = \{1\}.$$

Тому $B / R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}, \varnothing\}$.

У випадку однорідних бінарних відношень на діаграмі відношення зображується лише одна множина точок.

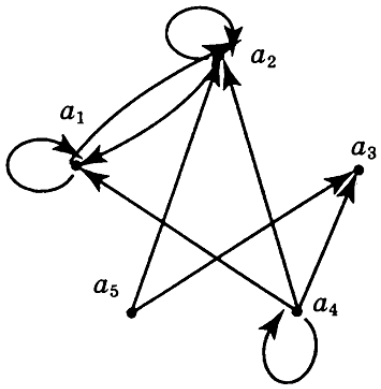


Рис. 2.2. Приклад діаграми однорідного відношення

Діаграмі, зображеній на рис. 2.2, відповідає однорідне бінарне відношення

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_4, a_1), (a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_4), (a_5, a_2), (a_5, a_3)\},$$

визначене на множині $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$.

2.3. Операції над бінарними відношеннями

Над відношеннями можна виконувати усі теоретико-множинні операції. Крім того, над відношеннями визначені операції знаходження оберненого відношення та композиції відношень.

Бінарне відношення $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$, визначене на множинах *B* та *A*, називається *оберненим* до відношення $R\subseteq A\times B$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 7,

$R^{-1}=\{(1,a),(2,a),(4,b),(1,d),(4,f)\}$, а для бінарного відношення "<", визначеного на довільній числовій множині, оберненим буде відношення ">".

Бінарне відношення

$$S\circ R=\{(x,z)|\text{ існує таке } y\in B, \text{що}(x,y)\in R,(y,z)\in S\}\subseteq A\times C$$

називається *добутком* (композицією) відношень $R\subseteq A\times B$ та $S\subseteq B\times C$.

Приклад 2.7. Знайти добуток бінарних відношень *R* та *S*, діаграми яких зображені на рис. 2.3.

Розв'язок. $S\circ R=\{(a,x),(a,y),(d,x)\}$.

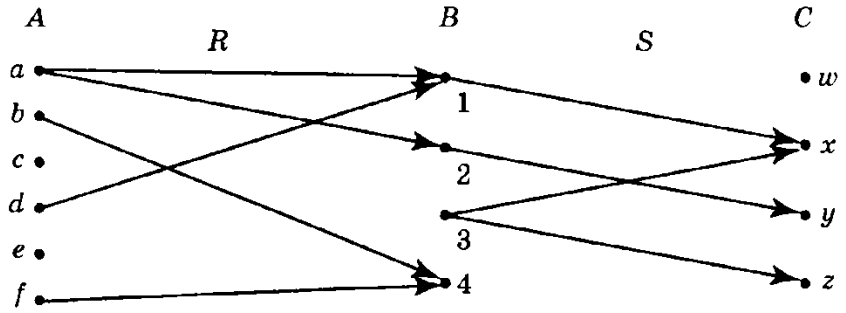


Рис. 2.3. Діаграми відношень *R* та *S*

Приклад 2.8. Нехай $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $B=\{23,24,25,26,27\}$, $C=\{a,b,c,d,e,f\}$, бінарне відношення *R* визначене на множинах *A* та *B* наступним чином: xRy тоді і тільки тоді, коли *y* націло ділиться на *x*, *S* — бінарне відношення між елементами множин *B* та *C*: $S=\{(23,f),(24,b),(25,d),(26,d),(27,a),(27,e)\}$. Знайти проекції відношення $T=S\circ R$ та вказати $T^{-1}[\{a,c,d,f\}]$.

Розв'язок. Задамо бінарне відношення *R* переліком елементів, які перебувають у цьому відношенні:

$$R=\{(2,24),(2,26),(3,24),(3,27),(4,24),(5,25),(6,24),(8,24),(9,27)\}$$

.

Тоді з використанням рис. 2.3 отримаємо

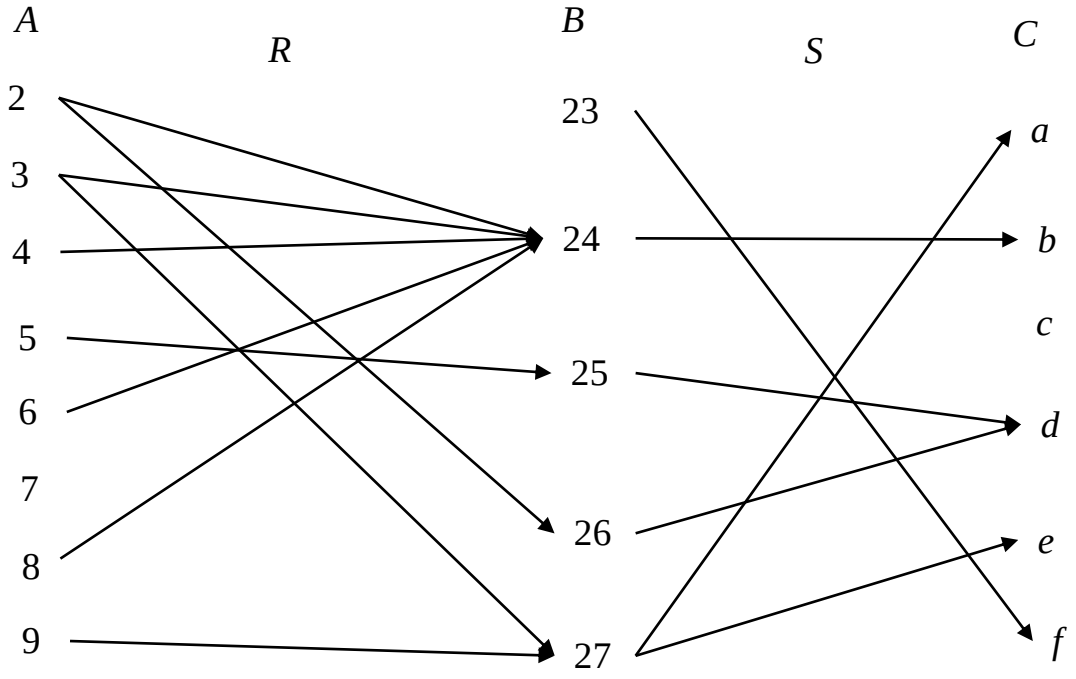


Рис. 2.4. Діаграма відношень *R* та *S*.

$$T=\{(2,b),(2,d),(3,a),(3,b),(3,e),(4,b),(5,d),(6,b),(8,b),(9,a),(9,e)\}.$$

Тому

$$\mathrm{pr}_1 T=\{2,3,4,5,6,8,9\},\ \mathrm{pr}_2 T=\{a,b,d,e\}.$$

Вкажемо перелік елементів відношення T^{-1}:

$$T^{-1}=\{(b,2),(d,2),(a,3),(b,3),(e,3),(b,4),(d,5),(b,6),(b,8),(a,9),(e,9)\}.$$

Тоді $T^{-1}\left[\{a,c,d,f\}\right]=\{2,3,5,9\}$.

2.4. Властивості однорідних бінарних відношень

Надалі будемо розглядати лише *однорідні бінарні відношення*.

Бінарне відношення $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$ називається *відношенням ідентичності* на множині *A* (відношенням *тотожності*, *діагоналлю* множини *A*).

Бінарне відношення *R* називається *рефлексивним* на множині *A*, якщо для кожного $x\in A$ має місце xRx, тобто кожний елемент множини *A* перебуває у відношенні *R* сам із собою.

Наприклад, відношення "=", "≤" рефлексивні на множині дійсних чисел, оскільки для всіх $a\in\mathbb{R}$ $a=a,\ a\le a$, відношення "$\|$" (паралельність прямих) є рефлексивним на множині усіх прямих площини, а відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" не є рефлексивними на тих самих множинах.

Бінарне відношення є рефлексивним, якщо на його діаграмі кожна вершина з’єднана "петлею" із самою собою.

Наприклад, рефлексивним є відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.5.

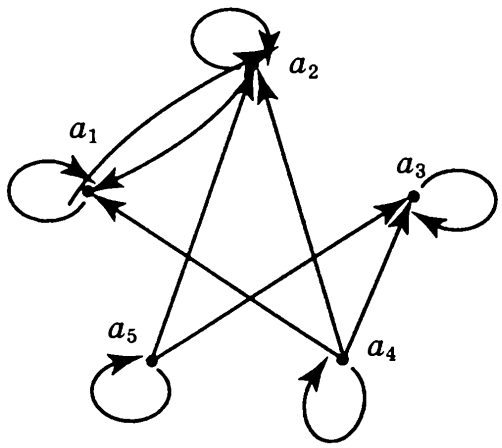


Рис. 2.5. Рефлексивне бінарне відношення

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.2 не є рефлексивним, оскільки при вершинах a_3 та a_5 відсутні петлі.

Критерієм (необхідною і достатньою умовою) рефлексивності є умова $I_A \subseteq R$.

Бінарне відношення *R* називається *іррефлексивним (антирефлексивним)* на множині *A*, якщо для жодного $x \in A$ не має місце $x R x$.

Наприклад, відношення "$\neq$", "<" та "$\perp$" — іррефлексивні.

Критерієм іррефлексивності є умова $I_A \cap R = \varnothing$.

Бінарне відношення *R* називається *симетричним* на множині *A*, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x R y$ випливає, що $y R x$.

Наприклад, відношення рівності та подібності на множині трикутників площини, відношення "навчатися у одній групі" — симетричні.

Відношення "$\leq$" не є симетричним, оскільки якщо $a \leq b$ і $a \neq b$, то нерівність $b \leq a$ не виконується.

Бінарне відношення, діаграма якого наведена на рис. 2.6, є симетричним.

Критерієм симетричності є виконання рівності $R^{-1} = R$.

Бінарне відношення *R* називається *асиметричним* на множині *A*, якщо для довільних (необов'язково різних) $x, y \in A$ з того, що xRy випливає, що не виконується yRx $\left(x R y \Rightarrow y \bar{R} x\right)$.

Приклад асиметричного відношення — відношення ">" на множині дійсних чисел.

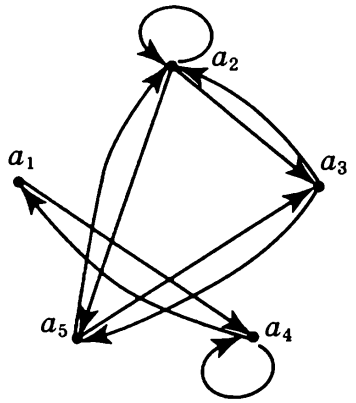


Рис. 2.6. Приклад діаграми симетричного бінарного відношення

Умова $R \cap R^{-1} = \varnothing$ може використовуватися у якості *критерію асиметричності*.

Бінарне відношення R називається *антисиметричним* на множині A, якщо для довільних $x, y \in A$ з того, що $x \neq y$ та xRy випливає, що не виконується yRx (з xRy та yRx випливає, що $x = y$).

Кожне асиметричне бінарне відношення є антисиметричним, але не навпаки. Наприклад, відношення "$\geq$" є антисиметричним, але воно не є асиметричним (умова асиметричності порушується для пар однакових елементів).

Умова $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ може використовуватися у якості *критерію антисиметричності*.

Бінарне відношення R називається *транзитивним* на множині A, якщо для довільних $x, y, z \in A$ з того, що xRy та yRz випливає, що xRz.

Умова $R^2 \subseteq R$ може використовуватися у якості *критерію транзитивності*.

Приклад 2.9. Відношення "$=$","$>$","$<$","$\geq$","$\leq$" є транзитивними, а відношення "$\perp$" не є транзитивним.

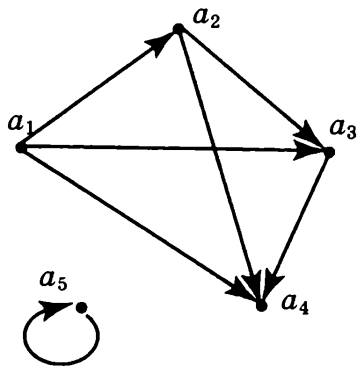


Рис. 2.7. Приклад діаграми транзитивного відношення

Бінарне відношення R називається *лінійним* на множині A, якщо для довільних відмінних один від одного $a \in A, b \in A$ виконується хоча б одна з умов aRb або bRa.

Наприклад, відношення "$\leq$" є лінійним, а відношення "$\subseteq$" — ні, оскільки $\{1,2\} \not\subseteq \{3\}$, $\{3\} \not\subseteq \{1,2\}$.

Замиканням бінарного відношення R за властивістю P називається таке мінімальне за числом елементів бінарне відношення $[R]_P$, яке містить у собі відношення R і задовольняє властивість P.

Наприклад, якщо R — однорідне відношення на множині A, то

- його рефлексивне замикання $[R]_{\text{ref}}$ може бути знайдене за формулою $[R]_{\text{ref}} = R \cup I_A$,
- його симетричне замикання $[R]_{\text{sym}}$ — за формулою $[R]_{\text{sym}} = R \cup R^{-1}$,
- його транзитивне замикання $[R]_{\text{trans}}$ — за формулою $[R]_{\text{trans}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

Приклад 2.10. Встановити властивості однорідного бінарного відношення $R = \{(x,y) \mid |x-y| \leq 1\}$, заданого на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Розв'язок. Оскільки $|x-x| = 0 < 1$, то кожне дійсне число перебуває у відношенні R само із собою. Тому відношення R є рефлексивним, а отже не є ірреф-лексивним.

Оскільки $|x-y| = |y-x|$, то з того, що $|x-y| \leq 1$ випливає, що $|y-x| \leq 1$. Отже, відношення R є симетричним, а отже не є ні асиметричним, ні антисиметричним (відповідні властивості не виконуються, наприклад, для пари $(1,0)$).

Оскільки $(0,1) \in R$ та $(1,2) \in R$, але $(0,2) \notin R$, то відношення R не є транзитивним.

Оскільки $(0,2) \notin R, (2,0) \notin R$, то відношення не є лінійним.

Приклад 2.11. Задати за допомогою матриці яке-небудь мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке не є ірефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R \cap R^2$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням $S = R \cup R^2$.

Розв'язок. Оскільки бінарне відношення R має бути несиметричним, то повинна існувати пара елементів множини A, яка задовольняє умови $(x,y)\in R$ та $(y,x)\notin R$. Оскільки відношення має бути нетранзитивним, то має існувати дві пари елементів $(x,y)\in R$ та $(y,z)\in R$, такі, що $(x,z)\notin R$. Цим умовам задовольняє, наприклад, відношення $R'=\{(a,b),(b,c)\}$. Але відношення R' є ірреф-лексивним. Тому потрібно додати до відношення R' ще одну впорядковану пару, яка складається з однакових елементів. Нехай це буде пара (a,a). Отримуємо $R=\{(a,a),(a,b),(b,c)\}$. Діаграма відношення R наведена на рис. 2.8.

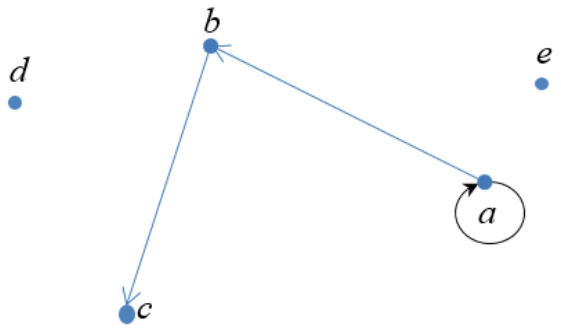


Рис. 2.8. Діаграма відношення R

Відношення R є шуканим і має наступну матрицю:

$$M(R)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Легко переконатися, що $R^2=\{(a,a),(a,b)(a,c)\}$. Тому $R\cap R^2=\{(a,a),(a,b)\}$. З останньої рівності випливає, що $\mathrm{pr}_1(R\cap R^2)=\{a\}$, $\mathrm{pr}_2(R\cap R^2)=\{a,b\}$.

$S=R\cup R^2=\{(a,a),(a,b),(b,c),(a,c)\}$.

Отже, $S[a]=\{a,b,c\}$, $S[b]=\{c\}$, $S[c]=S[d]=S[e]=\varnothing$.

Тому $A/S=\{\{a,b,c\},\{c\},\varnothing\}$.

Приклад 2.12. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(2,1),(3,1),(2,2),(4,6)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, побудувати його симетричне та транзитивне замикання S. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,2,5\}]$.

Розв'язок. Із симетричності та транзитивності випливає, що якщо хоча-би один елемент множини A перебуває у відношенні R з яким-небудь елементом, то він повинен перебувати у відношенні S з самим собою (наприклад, з того, що $(3,1)\in R$ та симетричності S випливає, що $(1,3)\in S$. Тоді з транзитивності S отримуємо, що $(1,1)\in S$ та $(3,3)\in S$). Тому пари $(1,1),(3,3),(4,4)$, $(6,6)$ обов'язково потрібно включити у відношення S. Також із симетричності та транзитивності випливає, що пари $(1,2),(1,3)$, $(2,3)$ та обернені до них також мають входити до складу S. Отже остаточно маємо
$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,6),(6,4),$ $(6,6)\}$. Легко переконатися, що S — симетричне та $S^2=S$. Отже, відношення S — транзитивне. Тоді

$$M(S)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix},$$

та $S\left[\{1,2,5\}\right]=\{1,2,3\}$.

2.5. Відношення еквівалентності

Однорідне бінарне відношення E називається відношенням *еквівалентності* на множині A, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Якщо E — відношення еквівалентності, $a\in A, b\in A$ і aEb, то елементи a та b називаються *еквівалентними*.

Прикладами відношень еквівалентності є відношення рівності чисел, відношення паралельності прямих, відношення "народитися у один день", тощо.

Класом еквівалентності за відношенням еквівалентності E для елемента $a\in A$ називається множина усіх елементів множини A, які еквівалентні елементу a. Клас еквівалентності, який відповідає елементу a, співпадає із перерізом $E[a]$.

Теорема 2.1. Два класи еквівалентності множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються.

Доведення. Нехай $a,b\in A$ Припустимо, що $E[a]\cap E[b]\neq\varnothing$. Покажемо, що тоді $E[a]=E[b]$.

Доведемо спочатку, що $E[a] \subseteq E[b]$. Нехай x — довільний елемент множини $E[a]$. Тоді $(a,x) \in E$. Нехай $c \in E[a] \cap E[b]$. Тоді $(a,c) \in E$ та $(b,c) \in E$. З симетричності відношення E випливає, що $(c,a) \in E$. Тоді із того, що $(b,c) \in E$, $(c,a) \in E$ та транзитивності відношення E отримуємо, що $(b,a) \in E$ та $(b,x) \in E$. Тому $x \in E[b]$. Отже, $E[a] \subseteq E[b]$.

Обернене включення доводиться аналогічно. Отже, якщо два класи еквівалентності мають спільні елементи, то вони співпадають. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ — деяка система підмножин множини A, де I — множина індексів.

Система $\mathcal{C}$ називається *покриттям множини A*, якщо для довільного $a \in A$ знайдеться такий індекс $i \in I$, що $a \in C_i$, тобто $A \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i$.

Система $\mathcal{C}$ називається *розбиттям множини A*, якщо вона є покриттям множини A і крім того множини C_i та C_j не перетинаються для довільних відмінних між собою $i \in I$, $j \in I$, тобто $C_i \cap C_j = \varnothing$ у випадку $i \neq j$.

Приклад 2.13. Нехай $A = \{1,2,3,4,5\}$. Тоді

1) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{1,2,5\},\{3,5\}\}$ не є покриттям множини A, оскільки елемент 4 не належить жодній множині, які входять до $\mathcal{C}$.

2) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{1,2,5\},\{4,5\}\}$ є покриттям множини A, але не є її розбиттям оскільки $\{1,3\} \cap \{1,2,5\} \neq \varnothing$.

3) система $\mathcal{C} = \{\{1,3\},\{2,5\},\{4\}\}$ є розбиттям множини A.

Теорема 2.2. Якщо E — відношення еквівалентності на множині A, то множина класів еквівалентності за цим відношенням є розбиттям множини A. І навпаки, для довільного розбиття $\mathcal{C}$ множини A можна вказати відношення еквівалентності, множина класів еквівалентності якого співпадає з $\mathcal{C}$.

Наслідок. Якщо однорідне бінарне відношення E є рефлексивним на множині A і одноелементні перерізи множини A за відношенням E або співпадають, або не перетинаються, то E — відношення еквівалентності.

На рис. 2.9 наведена діаграма відношення еквівалентності

$$E = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c),(d,d)\},$$

визначеного на множині $A = \{a,b,c,d\}$.

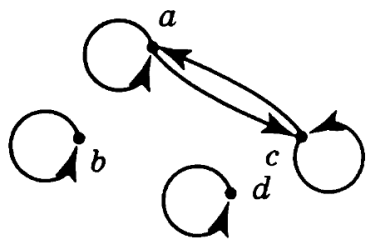


Рис. 2.9. Діаграма відношення еквівалентності

З діаграми добре видно, що класами еквівалентності є множини $\{a,c\},\{b\}$ та $\{d\}$, які породжують розбиття множини A.

Приклад 2.14. Визначити, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності, та вказати для них класи еквівалентності:

а) перпендикулярність площин у просторі;

б) відношення "бути однакового зросту" на множині людей;

в) відношення R: "знаходитися один від одного на відстані не більшій за 100" на площині;

г) відношення "бути родичем" на множині людей (вважаємо, що людина є родичем сама собі, а дві людини є родичами, якщо одна з них є нащадком іншої, або вони мають спільного предка).

Розв’язок.

а) Відношення перпендикулярності площин не є відношенням еквівалентності, оскільки воно не є рефлексивним.

б) Відношення "бути однакового зросту" на множині людей є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність, очевидно, справджується, оскільки відношення рівності чисел є рефлексивним. Симетричність також виконується по тій самій причині. Для перевірки транзитивності досить пересвідчитися у транзитивності відношення рівності чисел.

Якщо вважати, що зріст вимірюється у сантиметрах, то класом еквівалентності, який відповідає числу k, є множина усіх людей, зріст яких рівний k см.

в) Відношення R не є відношенням еквівалентності, оскільки не виконується умова транзитивності. Для того, щоб пересвідчитися у цьому досить розглянути вершини рівнобедреного трикутника з бічною стороною 100 та основою 150 (див. рис. 2.10).

Відстані від кінців основи до вершини задовольняють умову, а довжина основи — не задовольняє. Тобто, $(A,B)\in R, (B,C)\in R$, але $(A,C)\notin R$.

г) Відношення не є відношенням еквівалентності.

Рефлексивність та симетричність випливають із означення. Покажемо, що транзитивність не виконуються. Нехай різні особи А та В є родичами і нехай В та С також є родичами, причому А предок В по батьківській лінії, а С — предок В по материнській лінії. Тоді жоден із А та С не є родичем іншого. Отже, транзитивність не виконується.

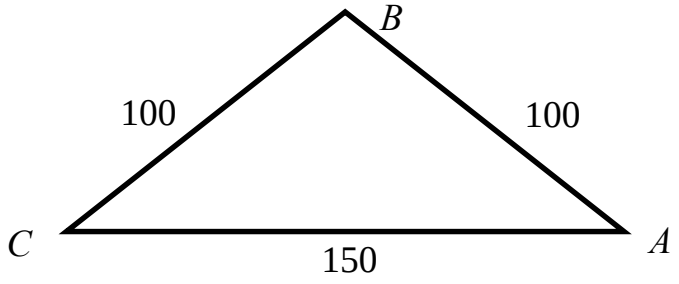


Рис. 2.10. Рівнобедрений трикутник

Приклад 2.15. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(u,x),(u,u),(y,z),(w,w),(y,y),(z,y),(z,z),(z,w),$ $(y,w),(x,u),(w,y),(w,z),(x,x),(v,v),(t,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то вказати фактор-множину *A*/*R*.

Розв'язок.

Перший спосіб. Оскільки $I_A \subseteq R$, то відношення *R* є рефлексивним.

Для перевірки симетричності знайдемо обернене відношення:
$R^{-1}=\{(x,u),(u,u),(z,y),(w,w),(y,y),(y,z),(z,z),(w,z),(w,y),(u,x),(y,w),(z,w),$ $(x,x),(v,v),(t,t)\}$. Легко переконатися, що $R^{-1}=R$, а отже, відношення *R* є симетричним.

Для перевірки транзитивності знайдемо другу степінь відношення *R*:
$R^2=\{(x,x),(x,u),(y,y),(y,z),(y,w),(z,y),(z,z),(z,w),(t,t),(u,x),(u,u),(v,v),$ $(w,y),(w,z),(w,w)\}$. Легко перевірити, що $R^2=R$. Тому відношення *R* є транзитивним. Отже, відношення *R* є відношенням еквівалентності.

Другий спосіб. Скористаємося наслідком до теореми 2.2. Для цього потрібно спочатку знайти одноелементні перерізи множини *A* за відношенням відношення *R*.
$R[x]=\{x,u\}$, $R[y]=\{y,z,w\}$, $R[z]=\{y,z,w\}$, $R[t]=\{t\}$, $R[u]=\{x,u\}$, $R[v]=\{v\}$, $R[w]=\{y,z,w\}$.

Оскільки, для довільного $a \in A$ виконується умова $a \in R[a]$, то R — рефлексивне. Оскільки усі перерізи або співпадають, або не перетинаються, то відношення R є відношенням еквівалентності.

Тоді $A/R = \{\{x,u\},\{y,z,w\},\{t\},\{v\}\}$ — фактор-множина множини A за відношенням R.

2.6. Відношення порядку

Бінарне відношення R називається *відношенням порядку (порядком) на множині A*, якщо воно є антисиметричним та транзитивним. Пара (A,R) називається *впорядкованою множиною*.

Якщо a та b — елементи впорядкованої множини (A,R) і виконується умова aRb, то кажуть, що елемент a *передує* елементу b.

Якщо порядок є рефлексивним, то він називається *частковим (нестрогим) порядком*. Прикладом є відношення "$\leq$" на множині дійсних чисел.

Іррефлексивний порядок називається *строгим порядком*. Прикладом є відношення "$\subset$" (відношення строгого включення множин).

Відношення R є строгим порядком тоді і тільки тоді, коли воно є одночасно асиметричним і транзитивним.

Якщо R — відношення строгого порядку на множині A, то відношення $R' = R \cup I_A$ називається відношенням часткового порядку, відповідним відношенню R.

Наприклад, відношення "$\leq$" є відношенням часткового порядку, яке відповідає відношенню строгого порядку "$<$".

Відношення порядку, яке є лінійним, називається відношенням *лінійного* порядку. Прикладом строгого лінійного порядку є відношення "$>$" на числовій множині.

Нехай a та b — різні елементи впорядкованої множини (A,R). Елемент a називається *безпосереднім попередником* елемента b, якщо елемент a передує елементу b і не існує жодного елемента c такого, що a передує c і c передує b.

Аналогічно дається означення *безпосереднього наступника*.

Приклад 2.16. Розглянемо відношення включення, визначене на множині підмножин множини $\{1,2,3,4\}$. Тоді множини $\{1\}$ та $\{2\}$ є безпосередніми попередниками множини $\{1,2\}$, а множина $\{3\}$ не є безпосереднім попередником множини $\{1,2,3\}$, оскільки $\{3\} \subseteq \{1,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.

Приклад 2.17. Елемент 1 є безпосереднім наступником елемента 0 множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, впорядкованої відношенням “$\leq$”. Якщо розглядати це саме відношення на множині $\mathbb{Q}$, то у елемента 0 немає безпосереднього наступника, оскільки для довільного додатного $a \in \mathbb{Q}$ виконується умова $0 < a/2 < a$.

Відношення часткового порядку на скінченній множині зручно задавати за допомогою *діаграм Хассе*. При цьому кожний елемент з’єднується відрізками з усіма його "безпосередніми попередниками" і розташовується на діаграмі вище за них.

На рис. 2.11 зображено діаграму Хассе для відношення подільності:

$x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли число x є дільником числа y,

визначеного на множині $\{2,4,5,10,12,20,25\}$.

Елемент a називається *мінімальним елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо йому не передує жодний інший елемент множини (A,R).

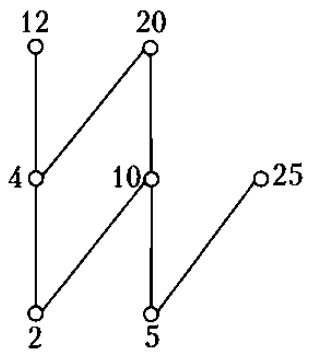


Рис. 2.11. Діаграма Хассе для відношення подільності на множині {2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}

Аналогічно дається означення *максимального елемента* впорядкованої множини.

Для відношення подільності із діаграмою на рис. 2.11 елементи 2 та 5 є мінімальними, а елементи 12, 20 та 25 — максимальними.

Елемент a називається *найменшим елементом* впорядкованої множини (A,R), якщо для довільного іншого елемента $b \in A$ $(a,b) \in R$. Тобто, найменший елемент впорядкованої множини передує усім іншим елементам.

Аналогічно дається означення *найбільшого елемента* впорядкованої множини.

Найбільший, найменший, максимальні та мінімальні елементи називають *екстремальними елементами* впорядкованої множини.

Для часткового впорядкованої множини, діаграма якої наведена на рис. 2.12, елемент G буде найбільшим, а найменшого елемента взагалі не існує (елементи

A, *C* та *E* — мінімальні, але не найменші, оскільки жодний із них не передує двом іншим).

Теорема 2.3. Якщо впорядкована множина містить найбільший (найменший) елемент, то він є єдиним її максимальним (мінімальним) елементом.

Теорема 2.4. Кожна непорожня скінченна впорядкована множина містить хоча би один мінімальний та хоча би один максимальний елементи.

Теорема 2.5. Якщо у скінченній впорядкованій множині є єдиний максимальний (мінімальний) елемент, то він є її найбільшим (найменшим) елементом.

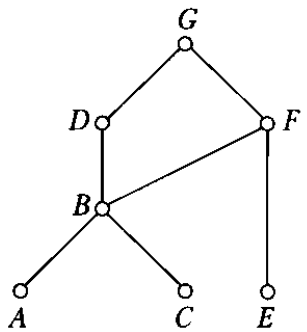


Рис. 2.12. Діаграма Хассе для відношення часткового порядку

Елемент *a* впорядкованої множини (A,R) називається *нижньою гранню множини* $M \subseteq A$, якщо для усіх елементів $b \in M$ виконується умова $a\,R\,b$.

Аналогічно дається означення верхньої грані.

Найбільша нижня грань множини (якщо вона існує) називається *точною нижньою гранню* множини M і позначається $\inf M$.

Точна верхня грань (найменша верхня грань) множини *M* позначається $\sup M$.

Наприклад, для відношення, діаграма якого наведена на рис. 18, $\sup\{D,E\} = G$, $\inf\{D,F\} = B$, а $\inf\{B,E\}$ не існує.

Частково впорядкована множина (A,R) називається *ґраткою*, якщо для довільних $a \in A,\ b \in A$ існують $\inf\{a,b\}$ та $\sup\{a,b\}$.

Наприклад, множина усіх підмножин деякої універсальної множини разом із заданим на ній відношенням включення множин є ґраткою. Для довільних двох множин *A* та *B* $\inf\{A,B\} = A \cap B,\ \sup\{A,B\} = A \cup B$.

Приклад 2.18. Перевірити, чи є бінарне відношення

$$R = \{(b,d),(a,e),(a,b),(a,d),\ (c,d),(b,e),(a,c)\} \cup I_A$$

відношенням часткового порядку на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе впорядкованої множини (A,R), відшукати її екстремальні елементи та перевірити, чи є впорядкована множина (A,R) ґраткою. Знайти $\inf\{b,c\}$ та $\sup\{b,c\}$.

Розв'язок. Відношення R є рефлексивним. Перевіримо, чи є воно антисиметричним. Знайдемо обернене до нього відношення:

$$R^{-1}=\{(d,b),(e,a),(b,a),(d,a),(d,c),(e,b),(c,a)\}\cup I_A.$$

Тоді $R^{-1}\cap R=I_A$, а, отже, відношення R є антисиметричним. Перевіримо транзитивність.

$$R^2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,d),(d,d),(e,e)\}=R.$$

Тому відношення R є транзитивним.

Отже, відношення R є відношенням часткового порядку.

Діаграма Хассе впорядкованої множини (A,R) наведена рис. 2.13.

З діаграми Хассе видно, що елемент a є найменшим елементом впорядкованої множини (A,R), а, отже, єдиним мінімальним елементом.

Елементи e та d — максимальні елементи впорядкованої множини (A,R), а найбільший елемент не існує.

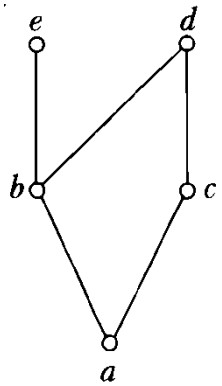


Рис. 2.13. Діаграма Хассе

Оскільки $\sup\{e,d\}$ не існує, то впорядкована множина (A,R) не є ґраткою.

Нарешті, з діаграми Хассе видно, що $\inf\{b,c\}=a$, $\sup\{b,c\}=d$.

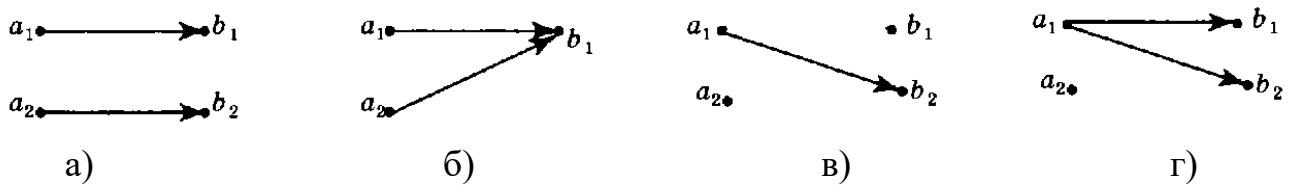
2.7. Функціональні відношення

2.7.1. Основні означення

Бінарне відношення *f*, визначене на множинах *A* та *B*, називається *функціональним*, якщо для довільного $x \in A$ існує не більше ніж один $y \in B$, такий що $(x, y) \in f$.

З означення функціонального відношення випливає, що для довільного $x \in A$ $|f[x]| \le 1$. Якщо базисні множини функціонального відношення скінченні, то кожний рядок матриці $M(f)$ містить не більше однієї одиниці та з кожної вершини на діаграмі відношення виходить не більше однієї дуги.

Приклад 2.19. Відношення, діаграми яких зображені на рис. 2.14 а)-в), — функціональні, а відношення з діаграмою на рис. 2.14 г) — не є функціональним.



а) б) в) г)

Рис. 2.14. Приклади функціональних та нефункціональних відношень

Функціональне відношення *f*, визначене на множинах *A* та *B*, називається *функцією* (відображенням) із *A* у *B* і позначається у вигляді

$$f : A \to B \quad \text{або} \quad A \xrightarrow{f} B.$$

Якщо $f : A \to B$, то той факт, що $(x, y) \in f$ записують у вигляді $y = f(x)$.

Нехай f — функціональне відношення на множинах *A* та *B*. Тоді множина $\mathrm{Dom}\, f \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_1 f$ називається *областю визначення* відношення f (часто також використовується позначення D_f), а множина $\mathrm{Im}\, f \overset{\text{def}}{=} \mathrm{pr}_2 f$ — областю значень відношення *f* (також позначається як E_f).

Так, наприклад, для функції з рис. 2.14 б) $\mathrm{Dom}\, f = \{a_1, a_2\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{b_1\}$, а для функції рис. 2.14 в) $\mathrm{Dom}\, f = \{a_1\}$, $\mathrm{Im}\, f = \{b_2\}$.

Теорема 2.6. *Нехай* $f : A \to B$, $g : B \to C$. *Тоді* $g \circ f$ *— функція із A у C, причому* $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.7.2. Види функцій

Функція $f : A \to B$ називається *цілком визначеною* (тотальною), якщо $\mathrm{Dom}\, f = A$. У протилежному випадку функція називається *частковою*.

Функція $f : A \to B$ називається *сюр'єктивною*, якщо $\mathrm{Im}\, f = B$.

Приклад діаграми часткового сюр'єктивного відображення між елементами множин $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ та $B = \{y_1, y_2\}$ наведено на рис. 2.15.

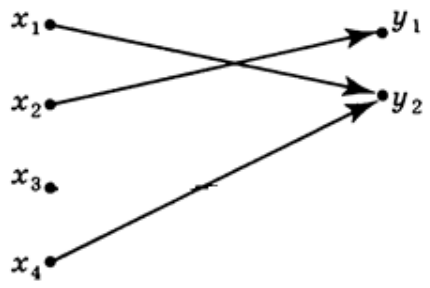


Рис. 2.15. Приклад сюр'єктивного відображення

На діаграмі сюр'єктивної функції у кожну вершину, яка відповідає елементам множини *B*, заходить принаймні одна дуга.

Функція $f : A \to B$ називається *ін'єктивною*, якщо з того що $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. На діаграмі, яка відповідає ін'єктивній функції, у кожну вершину входить не більше однієї дуги (див. рис. 2.16).

Функція називається *бієктивною (взаємно однозначною або бієкцією)*, якщо вона є сюр'єктивною та ін'єктивною одночасно. Приклад бієктивного відображення наведено на рис. 2.17.

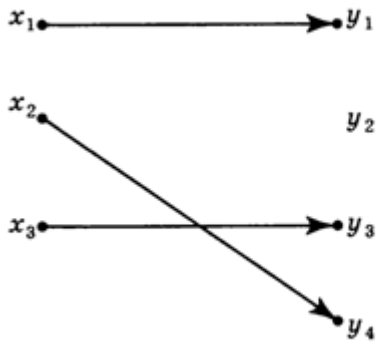


Рис. 2.16. Приклад ін'єктивної функції

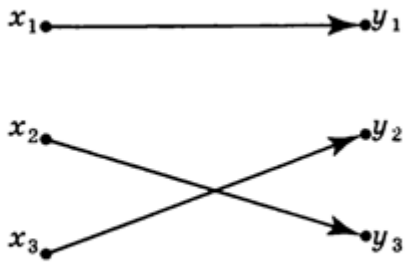


Рис. 2.17. Приклад бієктивної функції

Теорема 2.7. *Функція* $f: A \to B$ *є бієкцією тоді і тільки тоді, коли відношення* f^{-1} *є цілком визначеною функцією. Якщо f — бієкція, то* f^{-1} *— також бієкція, причому для довільних* $x \in A,\ y \in B$

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x,\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y.$$

Приклад 2.20. Перевірити властивості та вказати обернені функції до функції $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за умови, що

а) $f(x) = 3x + 6$;

б) $f(x) = x^2 - 4$.

в) $f(x) = x^3 - 1$.

2.8. Задачі до другого розділу

Операції над відношеннями

1. Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 5, 7, 8\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$, $R = \{(k,1), (n,2), (n,1), (l,5), (l,8), (m,2), (m,8), (k,7)\}$, $S = \{(2,b), (7,c), (8,b), (5,e)\}$, $T = S \circ R$. Задати відношення T за допомогою матриці та графу і знайти $\left(A \setminus T^{-1}\left[\{c,e\}\right]\right) \times$ $\times \left(C \setminus \mathrm{pr}_2 T\right)$.
2. Нехай $A = \{k, l, m, n\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{x, y, z, t, u, v\}$,

$$M(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ S = \{(1,u), (2,x), (2,z), (2,t), (4,x), (4,v)\},\ T = S \circ R.$$

   Задати відношення T за допомогою графу і знайти $\left(C \setminus T\left[\{l,n\}\right]\right) \times \left(A \setminus \mathrm{pr}_2 T^{-1}\right)$.
3. Нехай R — бінарне відношення "<", визначене на множині $\mathbb{N}$. Знайти R^m, де $m \in \mathbb{N}$.
4. Нехай R — бінарне відношення подільності на множині $\mathbb{Z}$. Знайти R^m, де $m \in \mathbb{N}$.
5. Навести приклад непорожнього бінарного відношення, квадрат якого — порожня множина.
6. Навести приклад бінарного відношення R, такого що $R^2 \neq \varnothing$, $R^2 \cap R = \varnothing$.

Властивості бінарних відношень

1. Встановити властивості наступного однорідного бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid |x - y| \le 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$.

2. Встановити властивості наступного однорідного бінарного відношення $R=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1\}$, заданого на множині $\mathbb{R}$.
3. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке є антирефлексивним, не є симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2\setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.
4. Задати за допомогою матриці та графу мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення R на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, яке є рефлексивним, симетричним та не є транзитивним. Знайти першу та другу проекції відношення $R^2\setminus R$ та вказати фактор-множину множини A за відношенням R.
5. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(1,2),(1,3),(2,5)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5\}$, побудувати його замикання, яке є симетричним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю замикання та знайти $S[\{1,4\}]$.
6. Для однорідного відношення $R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,b)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати його замикання, яке є рефлексивним та транзитивним одночасно. Вказати матрицю відношення S^{-1} та знайти $S[\{b,d,f\}]$.
7. Побудувати рефлексивне, антисиметричне та транзитивне замикання S однорідного бінарного відношення $R=\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, визначеного на множині $\{a,b,c,d\}$.

Відношення еквівалентності

1. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$:
   а) $\{\{1,2,4,8\},\{5\},\{3,7\}\}$;
   б) $\{\{1,2,6\},\{4,5\},\{2,3,7\},\{4,8\}\}$;
   в) $\{\{1,2,6\},\{4,7\},\{3,5,8\}\}$.
2. Які із наступних систем множин є покриттями або розбиттями множини $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$:
   а) $\{\{b,e,g\},\{a,d\},\{b,c,h\}\}$;
   б) $\{\{d,e\},\{b,c,g\},\{d,h\},\{a,b,f\}\}$;
   в) $\{\{c,e,h\},\{a,b,f\},\{d,g\}\}$.

3. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 1 в).
4. Задати за допомогою а) матриці; б) діаграми відношення еквівалентності, фактор-множина якого наведена у прикладі 2 в).
5. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
   а) паралельність площин у просторі;
   б) відношення знайомства на множині людей;
   в) відношення "одногрупник";
   г) відношення рівнопотужності.
6. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями еквівалентності та вказати для них класи еквівалентності:
   а) перпендикулярність прямих на площині;
   б) відношення "мати однаковий вік" на множині людей;
   в) відношення "знаходитися у одній чверті" на множині точок координатної площини;
   г) відношення "бути родичем" на множині людей.
7. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{x,y,z,t,u,v,w\}$ бінарне відношення $R=\{(t,v),(w,x),(w,z),(u,y),(x,z),(w,w),(x,x),(z,x),(v,v),(z,z),(z,w),(x,w),(y,u),(y,y),(u,u),(t,t),(v,t)\}$ відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину *A*/*R*.
8. Перевірити, чи є визначене на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ бінарне відношення
$$R=\{(b,f),(a,g),(b,b),(f,c),(d,d),(b,c),(g,a),(c,c),(g,g),(c,f),(f,f),(c,b),(e,e),(a,a),(f,b)\}$$
відношенням еквівалентності. Якщо так, то знайти фактор-множину *A*/*R*.
9. Вказати визначене на множині $[0,1]$ бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 5 класів еквівалентності.
10. Вказати визначене на множині $\mathbb{Z}$ бінарне відношення еквівалентності, яке має рівно 13 класів еквівалентності.
11. Для бінарного відношення $R=\{(1,2),(3,2),(2,4),(2,7),(4,9),(10,5),(3,3)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,\ldots,10\}$, вказати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке є відношенням еквівалентності на множині *A* і задовольняє умову $R\subseteq S$.
12. Для бінарного відношення $R=\{(b,a),(c,b),(f,b),(b,g),(d,k),(h,f),(i,j)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,\ldots,k\}$, вказати мінімальне за кількістю

елементів бінарне відношення S, яке є відношенням еквівалентності на множині A і задовольняє умову $R \subseteq S$.

Відношення порядку

1. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
   а) відношення знайомства на множині людей;
   б) відношення "бути старшим";
   в) відношення "бути сином";
   г) відношення "бути предком".
2. Вказати, які з наступних бінарних відношень є відношеннями порядку, часткового, строгого та лінійного порядку:
   а) відношення "бути нащадком";
   б) відношення "бути молодшим";
   в) відношення "знаходитися на більшій відстані від початку координат" на множині точок площини;
   г) відношення "бути родичем" на множині людей.
3. Задати переліком елементів бінарне відношення строгого порядку R, якому відповідає впорядкована множина, діаграма Хассе якої наведена на рис. 2.18. Знайти екстремальні елементи впорядкованої множини. Вказати усі верхні грані множини $\{A,C,E\}$ Знайти $\sup\{C,E\}$ та $\inf\{D,E\}$. Чи буде впорядкована множина ґраткою?

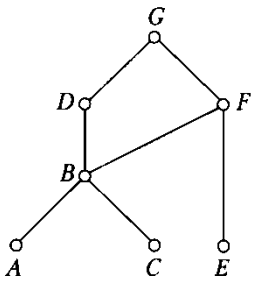


Рис. 2.18

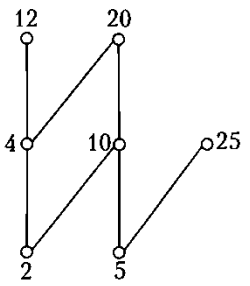


Рис. 2.19

4. Вказати бінарне відношення часткового порядку R на множині, діаграма Хассе якого наведена на рис. 2.19. Вказати екстремальні елементи відповідної впорядкованої множини. Знайти $\sup\{10,12\}$ та $\inf\{10,12\}$.
5. На рис 2.20 наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

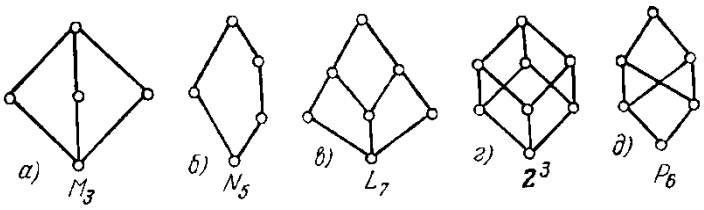


Рис. 2.20.

6. На рис 2.21. наведені діаграми Хассе частково впорядкованих множин. Які з цих множин є ґратками.

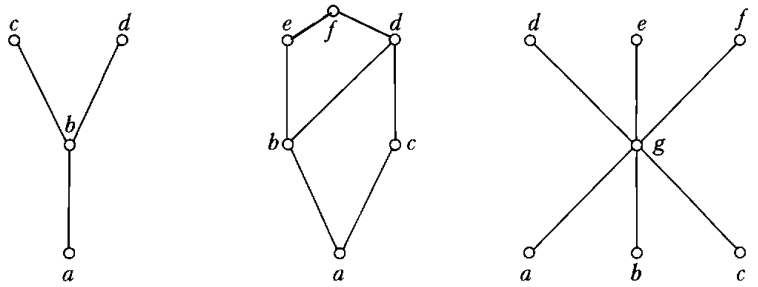


Рис. 2.21

7. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A=\{1,2,3,4\}$, яке було би відношенням:

   а) нестрогого порядку;

   б) строгого порядку;

   в) лінійного порядку.

   Вказати екстремальні елементи множини *A* за побудованим відношенням.

8. Побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення на множині $A=\{a,b,c,d,e\}$, яке було би відношенням:

   а) нестрогого порядку;

   б) строгого порядку;

   в) лінійного порядку.

   Вказати екстремальні елементи множини *A* за побудованим відношенням.

9. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(c,a),(b,d),(d,c),(f,c)\}$, визначеного на множині $A=\{a,b,c,d,e,f\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке б містило у собі відношення *R* і було відношенням:

   а) часткового порядку;

   б) строгого порядку;

   в) лінійного порядку.

Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A,S).

10. Для однорідного бінарного відношення $R=\{(7,4),(2,3),(4,1),(5,4),(3,4)\}$, визначеного на множині $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, побудувати мінімальне за кількістю елементів бінарне відношення *S*, яке б містило у собі відношення *R* і було відношенням:
а) часткового порядку;
б) строгого порядку;
в) лінійного порядку.
Вказати екстремальні елементи впорядкованої множини (A,S).

11. Перевірити, чи є бінарне відношення $R=I_A\cup\{(2,1),(4,1),(1,3),(5,1),(4,3)\}\cup$ $\cup\{(2,3),(5,3),(5,4)\}$ відношенням часткового порядку на множині $A=\{1,2,3,4,5\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе множини (A,R) та вказати її екстремальні елементи.

12. Перевірити, чи є бінарне відношення *R* з матрицею

$$M(R)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

відношенням строгого порядку на множині $A=\{x,y,z,u,v\}$. Якщо так, то зобразити діаграму Хассе відношення *R* та вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням нестрогого порядку, яке відповідає відношенню *R*.

13. Перевірити, чи є відношення $S=R\circ(R\cup I_A)$ відношенням строгого порядку на множині $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, якщо

$$R=\{(b,g),(a,e),(c,g),(b,c),(a,b),(c,e),(d,f)\}.$$

Якщо так, то
а) зобразити діаграму Хассе відношення *S*;
б) вказати екстремальні елементи множини *A* за відношенням *S*;
в) знайти $\inf\{b,g,e\}$ та $\sup\{a,b,h\}$.

Функціональні відношення

1. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:

а) $R_1 = \{(x, y) \mid xy = 2\}$;

б) $R_2 = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$;

в) $R_3 = \{(x, y) \mid 2x > y\}$;

г) $R_4 = \{(x, y) \mid x = \sqrt{y-1}\}$;

д) $R_5 = \{(x, y) \mid y = \operatorname{tg} x\}$.

2. Які з наведених нижче однорідних відношень є функціональними на множині дійсних чисел? Для функціональних відношень вкажіть область визначення, область значень та їх вигляд:

а) $R_1 = \{(x, y) \mid y = 2^x\}$;

б) $R_2 = \{(x, y) \mid y \geq -1, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 1\}$;

в) $R_3 = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$;

г) $R_4 = \{(x, y) \mid x^2 = |y|\}$;

д) $R_5 = \{(x, y) \mid x = \sin y\}$.

3. За бінарним відношенням $R = \{(2,b),(5,d),(4,b)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним.

4. За бінарним відношенням $R = \{(1,b),(3,d),(4,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d,e\}$ побудувати таке мінімальне за кількістю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $R \subseteq f$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним.

5. За бінарним відношенням

$$R = \{(2,b),(5,d),(4,b),(1,a),(2,c),(5,a)\} \subset \{1,2,3,4,5\} \times \{a,b,c,d\}$$

побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $f \subseteq R$ і є:

а) ін’єктивним;

б) сюр’єктивним;

в) бієктивним.

6. За відношенням $R=\{(b,2),(d,5),(a,4),(e,3),(c,4),(d,3),(a,1)\}\subset\{a,b,c,d,e\}\times$ $\times\{1,2,3,4,5\}$ побудувати таке максимальне за к-тю елементів функціональне відношення f, яке задовольняє умову $f\subseteq R$ і є:
   а) ін’єктивним;
   б) сюр’єктивним;
   в) бієктивним.